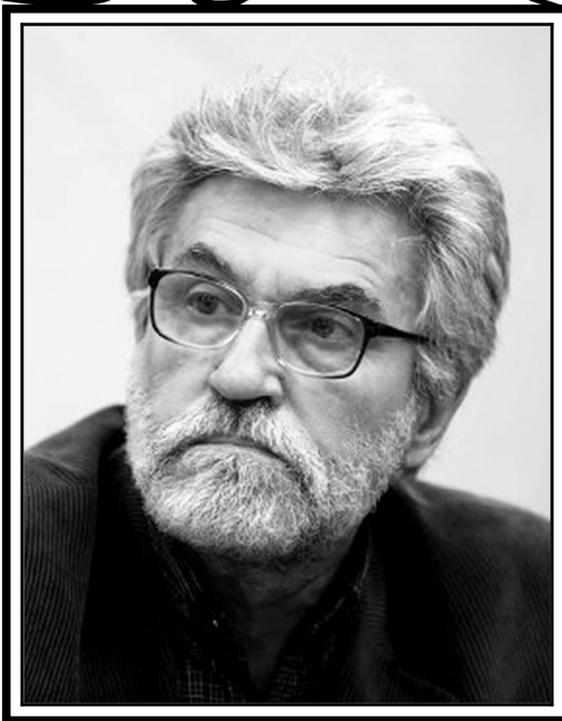


Трикладная Деловая Динамика



6
2025

Игорь Иванович Мохов
(20.07.1950 – 24.06.2025)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

М. В. Сысоева, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

С. Боккалетти, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

А. М. Быков, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Н. С. Гинзбург, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

О. И. Канаков, д.ф.-м.н., ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

С. А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

А. В. Красков, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Ж. ван Луйтелаар, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

А. Люттйоханн, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

И. И. Мохов, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

А. Б. Нейман, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

В. И. Некоркин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

А. Н. Писарчик, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

В. В. Тучин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

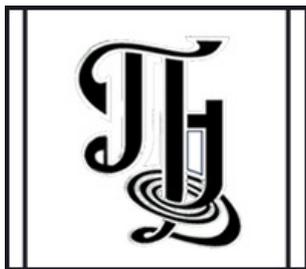
Е. Я. Фрисман, чл.-корр. РАН, д.б.н., профессор, ИКАРП ДВО РАН (Биробиджан, Россия)

В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А. (Саратов, Россия)

В. А. Черепенин, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Журнал «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-77991 от 20 марта 2020 года

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписной индекс издания 73498. Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Свободная цена

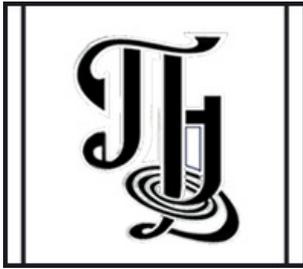
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией Д. А. Лачинова
Редакторы: А. Р. Нигметулина, А. В. Князева
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (927) 625-9020,
e-mail: andjournal@sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 10.11.2025
Вышел в свет 28.11.2025
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 19,07 (20,5)
Тираж 100 экз. Заказ № 129-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The journal “Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics” is registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Registration ПИ No ФС77-77991 of 20 March 2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

The journal subscription index is 73498. A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru). Free price

The journal is Open Access

Head of Editorial office D. A. Lachinova
Editors: A. R. Nigmatulina, A. V. Knyazeva
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (927) 625-9020,
e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 10.11.2025. Published 28.11.2025
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 19,07 (20,5)
Edition of 100 copies. Order No. 129-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

СО Д Е Р Ж А Н И Е

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС. КВАНТОВЫЙ ХАОС	
<i>Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В.</i> О взаимодействии системы с многочастотными колебаниями с хаотическим генератором	785
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Мирсаидов М. М., Ишматов А. Н., Юлдошев Б. Ш., Салимов Ш. М., Хазраткулов И. О.</i> Нелинейные колебания высотного сооружения с динамическим гасителем колебаний	804
<i>Гинзбург Н. С., Заславский В. Ю., Зотова И. В., Ростунцова А. А., Рыскин Н. М., Сергеев А. С., Юровский Л. А.</i> Модуляционная неустойчивость и формирование солитонов при взаимодействии электромагнитной волны с потоком невозбужденных неизохронных электронов-осцилляторов	823
МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ	
<i>Нгуен Б. Х., Цибулин В. Г.</i> Пространственно-временные сценарии мультистабильности для системы трех конкурирующих видов.....	843
НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ	
<i>Титов В. Н., Фунтов А. А.</i> О планарных моделях резистивного усилителя (теория и моделирование).....	860
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА	
<i>Долинина А. Ю., Сулейманова Е. М., Корнилов М. В., Сысоева М. В., Сысоев И. В.</i> Нелинейные свойства тета-ритма головного мозга.....	873
<i>Семенова Н. И.</i> Влияние внутреннего шума на точность работы свёрточной нейронной сети	898
<i>Ежов Д. М., Курбако А. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.</i> Модифицированный осциллятор ФитцХью–Нагумо со спайковой активностью, зависящей от длительности внешнего импульсного воздействия.....	917
НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ	
<i>Землянухин А. И., Артамонов Н. А., Бочкарев А. В., Безлюдный В. И.</i> Обращение степенных рядов и точные решения уравнений нелинейной математической физики	929

C O N T E N T S

**BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.
QUANTUM CHAOS**

Kuznetsov A. P., Turukina L. V. On the interaction of a system with multifrequency oscillations with a chaotic generator 785

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Mirsaidov M. M., Ishmatov A. N., Yuldoshev B. Sh., Salimov Sh. M., Khazratkulov I. O. Nonlinear vibrations of a high-rise structure with a dynamic vibration damper 804

Ginzburg N. S., Zaslavsky V. Yu., Zotova I. V., Rostuntsova A. A., Ryskin N. M., Sergeev A. S., Yurovskiy L. A. Modulation instability and soliton formation under interaction of an electromagnetic wave with a beam of unexcited non-isochronous electron-oscillators 823

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

Nguyen B. H., Tsybulin V. G. Spatiotemporal multistability scenarios for system of three competing species 843

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

Titov V. N., Funtov A. A. On planar models of resistive wall amplifier (theory and simulations) 860

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

Dolinina A. Yu., Suleymanova E. M., Kornilov M. V., Sysoeva M. V., Sysoev I. V. Nonlinear properties of the brain theta rhythm 873

Semenova N. I. The impact of internal noise on the performance of convolutional neural network 898

Ezhov D. M., Kurbako A. V., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Modified FitzHugh–Nagumo oscillator with spiking activity dependent on the duration of external impulse action 917

NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

Zemlyanukhin A. I., Artamonov N. A., Bochkarev A. V., Bezlyudnyi V. I. Power series reversion and exact solutions of nonlinear mathematical physics equations 929



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003172
EDN: SUWUZF

О взаимодействии системы с многочастотными колебаниями с хаотическим генератором

А. П. Кузнецов¹, Л. В. Тюрюкина^{1,2}✉

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: kuzalex@yandex.ru, ✉turukinalv@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.01.2025, принята к публикации 2.04.2025,
опубликована онлайн 22.04.2025, опубликована 28.11.2025

Аннотация. Цель. Изучение влияния динамики хаотической системы на систему с многочастотной квазипериодичностью и сценарием Ландау–Хопфа. В качестве объекта исследования выбраны хаотическая система Кислова–Дмитриева и ансамбль расстроенных по частоте осцилляторов ван дер Поля с неидентичными параметрами возбуждения. Методы. Анализ проводился с помощью графиков показателей Ляпунова и использованием критерия идентификации на их основе типов квазипериодических бифуркаций. Результаты. Представлены сценарии изменения типов режимов при уменьшении величины связи подсистем. Они могут иметь определенные особенности. Так, переход от трехчастотного к четырехчастотному режиму происходит не через квазипериодическую бифуркацию Хопфа, а через окно хаоса, характеризующегося тремя или четырьмя нулевыми показателями Ляпунова. Внутри этого хаотического окна возможна своеобразная бифуркация, отвечающая увеличению числа нулевых показателей Ляпунова по типу седло-узловой бифуркации Хопфа. При вариации параметра связи осцилляторов ван дер Поля наблюдается хаос с разным числом нулевых показателей. В этом случае каскад точек, отвечающих поэтапному увеличению числа нулевых показателей в хаосе, происходит по другому сценарию. Он в определенной мере аналогичен квазипериодической бифуркации Хопфа. При увеличении управляющего параметра системы Кислова–Дмитриева в объединенной системе возможно появление гиперхаоса с тремя нулевыми показателями Ляпунова. Также возможен инвертированный порядок изменения режимов — трехчастотный режим через хаотическое окно превращается в четырехчастотный. Заключение. Полученные результаты обогащают представления о высокоразмерном хаосе с несколькими нулевыми показателями Ляпунова и его трансформациях при изменении параметра.

Ключевые слова: хаос, гиперхаос, квазипериодичность, показатели Ляпунова, бифуркации.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (FFWZ-2025-0016), Россия.

Для цитирования: Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В. О взаимодействии системы с многочастотными колебаниями с хаотическим генератором // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 6. С. 785–803. DOI: 10.18500/0869-6632-003172. EDN: SUWUZF

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

On the interaction of a system with multifrequency oscillations with a chaotic generator

A. P. Kuznetsov¹, L. V. Turukina^{1,2}✉

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russia

²Saratov State University, Russia

E-mail: kuzalexp@yandex.ru, ✉turukinalv@yandex.ru

Received 17.01.2025, accepted 2.04.2025, available online 22.04.2025,

published 28.11.2025

Abstract. The *purpose* of the work is to study the influence of the dynamics of a chaotic system on a system with multifrequency quasi-periodicity and the Landau–Hopf scenario. The Kislov–Dmitriev chaotic system and an ensemble of van der Pol oscillators with non-identical excitation parameters are chosen as the object of study. *Methods.* The analysis was carried out using graphs of Lyapunov exponents and the criterion for identifying types of quasiperiodic bifurcations based on them. *Results.* Scenarios of the changing of the regime’s types are presented as the coupling parameter between the subsystems decreased. They may have certain features. Thus, the transition from a three-frequency to a four-frequency regime occurs not through a quasiperiodic Hopf bifurcation, but through a chaos window. The latter is characterized by three or four zero Lyapunov exponents. Inside this chaotic window, a peculiar bifurcation is possible. It is corresponding to an increase in the number of zero Lyapunov exponents according to the type of a saddle-node Hopf bifurcation. Chaos with a different number of zero exponents is observed as the coupling parameter of van der Pol oscillators varied. In this case, a cascade of points corresponding to a step-by-step increase in the number of zero exponents occurs according to a different scenario. It is to a certain extent similar to a quasiperiodic Hopf bifurcation. When the control parameter of the Kislov–Dmitriev system increases, hyperchaos with three zero Lyapunov exponents may appear in the combined system. An inverted order of changing modes is also possible. In this case, for example, a three-frequency regime turns into a four-frequency regime through a chaotic window. *Conclusion.* The obtained results expand conception about high-dimensional chaos with several zero Lyapunov exponents and its transformations with parameter changes.

Keywords: chaos, hyperchaos, quasi-periodicity, Lyapunov exponents, bifurcations.

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state assignment of the V. A. Kotelnikov IRE RAS (FFWZ-2025-0016), Russia.

For citation: Kuznetsov AP, Turukina LV. On the interaction of a system with multifrequency oscillations with a chaotic generator. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(6):785–803. DOI: 10.18500/0869-6632-003172

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследование связанных осцилляторов является одной из важных задач нелинейной теории колебаний в целом и ее приложений, например, в радиофизике и электронике [1–4]. Развитие компьютерной техники и теории динамических систем и ее приложений в отношении многомерных систем [5–10] делает актуальной задачу о колебаниях не только в классическом случае двух подсистем, но и в большем их числе [11–14]. Отдельные подсистемы при этом могут демонстрировать какой-либо из основных типов колебаний. Это могут быть автономные периодические, квазипериодические или хаотические режимы. Малоисследованным является вопрос о взаимодействии подсистем с разными типами колебаний. В этом плане мы обратим внимание на случай, когда в первой подсистеме возможны многочастотные квазипериодические колебания, а во второй — хаос.

Здесь можно отметить, что соотношение квазипериодической и хаотической динамики привлекает внимание, начиная с известных работ Ландау и Хопфа [15, 16]. В получившем их имя сценарии происходит поэтапное усложнение колебаний за счет добавления в спектр новых частотных компонент в результате каскада квазипериодических бифуркаций Хопфа.

Несмотря на критику Рюэля и Такенса [17], сообщения о возможности устойчивых много-частотных колебаний (которым в фазовом пространстве отвечают инвариантные торы высокой размерности) периодически появляются в литературе [18–28]. То же самое относится в определенной мере и к сценарию Ландау–Хопфа [29–37]. В связи с этим возникает вопрос о взаимодействии систем с инвариантными торами и хаосом. В [38, 39] был рассмотрен простейший вариант подобной ситуации. Был изучен способный демонстрировать автономную двухчастотную квазипериодическую динамику генератор, связанный с хаотической системой Ресслера. В [40] в рамках аналогичной постановки задачи в качестве первой подсистемы был использован ансамбль из пяти осцилляторов ван дер Поля [34]. Эта система способна демонстрировать квазипериодические колебания с разным числом несоизмеримых частот. При уменьшении связи осцилляторов для нее наблюдается каскад бифуркаций, соответствующих нескольким шагам сценария Ландау–Хопфа. Здесь мы обсудим случай связи подсистемы [34] с хаотической системой Кислова–Дмитриева. Последняя может выступать в качестве одной из базовых хаотических систем [41–44]. Мы будем преследовать двоякую цель. Во-первых, выяснить, в какой мере универсальны результаты [40]. Во-вторых, продемонстрировать новые по отношению к [40] моменты, которые связаны, в частности, с возможной модификацией аттрактора в хаотической подсистеме при увеличении параметра нелинейности. Отметим также, что сформулированная задача оказывается связанной с проблемой хаоса с дополнительными нулевыми показателями Ляпунова, см. соответствующие ссылки далее в разделе 4.

1. Квазипериодическая подсистема

Выбранная нами квазипериодическая подсистема [34] представляет собой ансамбль пяти глобально связанных осцилляторов ван дер Поля:

$$\ddot{x}_n - (\lambda_n - x_n^2)\dot{x}_n + \left(1 + \frac{n-1}{4}\Delta\right)x_n + \frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^5(x_n - x_i) = 0. \quad (1)$$

Здесь λ_n — параметр возбуждения n -го осциллятора, n меняется от 1 до 5, Δ определяет частотную расстройку осцилляторов, причем частота первого принята за единицу, μ — параметр диссипативной связи.

Эта система имеет следующие особенности, обеспечивающие возможность нескольких шагов сценария Ландау–Хопфа. Осцилляторы не идентичны по параметрам возбуждения λ_n , что обеспечивает поэтапный вывод за порог возбуждения соответствующих мод при уменьшении величины связи (аналог числа Рейнольдса). Все осцилляторы за счет фактора Δ расстроены по собственной частоте, причем расстройку выберем большой, что исключает эффекты синхронизации. Ансамбль организован по принципу сети, где каждый связан с каждым. В этом случае параметр возбуждения каждого отдельного осциллятора λ_n управляет соответствующей квазипериодической бифуркацией всего ансамбля.

Здесь и далее вслед за [34, 40] положим параметры возбуждения $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, $\lambda_3 = 0.3$, $\lambda_4 = 0.4$, $\lambda_5 = 0.5$. В этом случае за счет неидентичности по параметрам λ_n пятый осциллятор характеризуется наибольшим, а первый — наименьшим значением параметра возбуждения. Величину частотной расстройки положим $\Delta = 3$. Тогда при уменьшении μ при $\mu \approx \lambda_n$ последовательно наблюдаются бифуркация Андронова–Хопфа рождения предельного цикла из состояния равновесия, бифуркация Неймарка–Сакера NS рождения двухчастотного тора и далее три квазипериодические бифуркации $QH_{1,2,3}$ мягкого возникновения трех-, четырех- и пятичастотного торов.

2. Хаотическая подсистема

В качестве хаотической подсистемы используем систему Кислова–Дмитриева [41–44]. Физически она представляет собой генератор в виде замкнутой в кольцо цепочки из нелинейного усилителя, RLC -фильтра и инерционного элемента. Такая система описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{1}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x &= z, \\ T\dot{z} + z &= Mx \exp(-x^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Удобство системы (2) для дальнейшего исследования состоит в том, что первое уравнение представляет собой традиционный осциллятор относительно переменной x , возбуждаемый переменной z . В этом контексте Q — параметр затухания (добротность), а ω_0 — собственная частота этого осциллятора. Также в (2) M — это основной параметр нелинейности, отвечающий за возникновение хаоса.

Отметим, что в уравнениях (2) собственная частота ω_0 может быть исключена перенормировкой параметров $Q \rightarrow Q/\omega_0$, $T \rightarrow T/\omega_0$, $M \rightarrow M\omega_0^2$ и переменных $t \rightarrow t/\omega_0$, $z \rightarrow z\omega_0^2$. Тогда система (2) приводится к каноническому виду [43] с $\omega_0 = 1$. Однако поскольку в квазипериодической подсистеме (1) частота первого осциллятора ван де Поля принята за единицу, то мы будем использовать уравнения в форме (2), чтобы обеспечить частотную расстройку всех осцилляторов. Далее положим $\omega_0 = 0.5$, так что эта частота не совпадает ни с одной из собственных частот осцилляторов ван дер Поля (1).

Выбор основного управляющего параметра также требует пояснений. На рис. 1 показаны графики показателей Ляпунова Λ_i индивидуальной системы (2) в зависимости от величины для $T = 10$ и $Q = 20$.

Можно видеть, что в системе происходит каскад бифуркаций удвоения периодических режимов PD , признаком которых является обращение в ноль второго показателя Λ_2 в точках бифуркаций. В результате возникает хаотический аттрактор по сценарию Фейгенбаума [43],

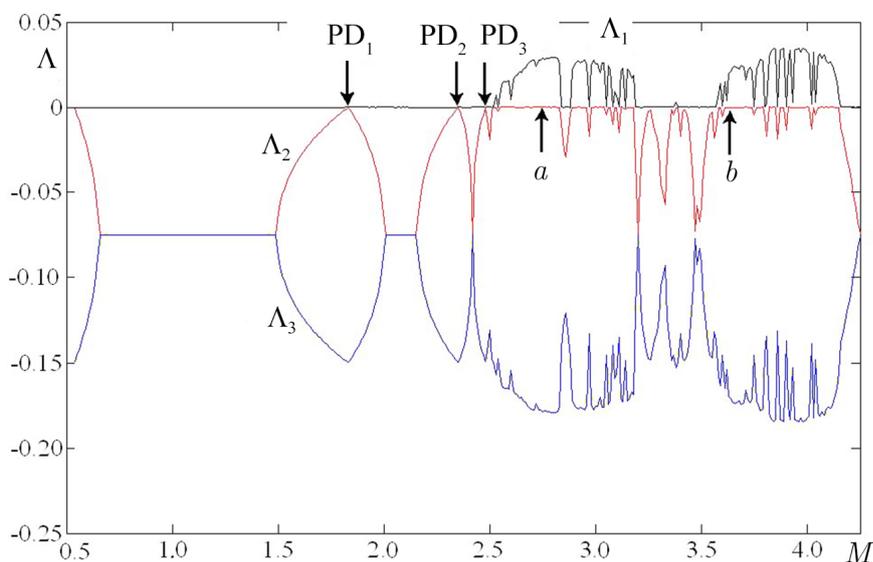


Рис. 1. Графики показателей Ляпунова системы Кислова–Дмитриева (2) в зависимости от параметра M для $T = 10$, $Q = 20$ и $\omega_0 = 0.5$. Стрелочками с буквами (a) и (b) обозначены точки, соответствующие рис. 2 (цвет онлайн)

Fig. 1. Graphs of the Lyapunov exponents of the Kislov–Dmitriev system (2) on the parameter M . $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$. The arrows with the letters (a) and (b) indicate the points corresponding to Fig. 2 (color online)

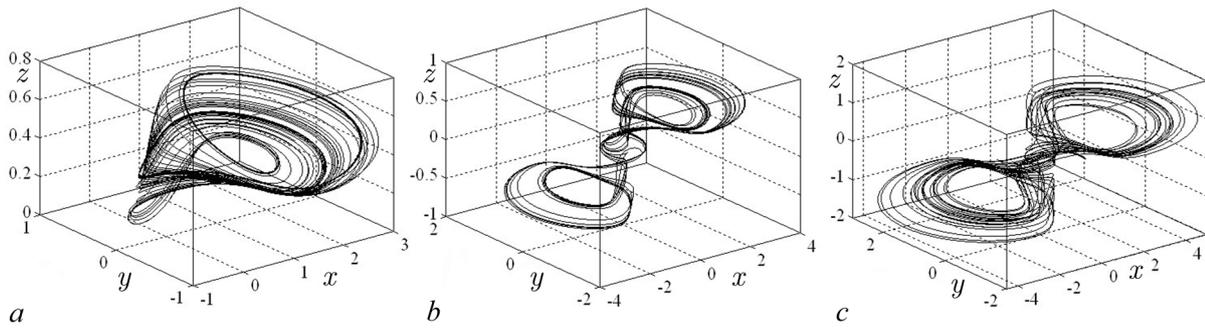


Рис. 2. Фазовые портреты хаотического аттрактора системы Кислова–Дмитриева (2) для $M = 2.75$ (a), $M = 3.65$ (b) и $M = 8.2$ (c); $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$

Fig. 2. Phase portraits of the chaotic attractor of the Kislov–Dmitriev system (2) for $M = 2.75$ (a), $M = 3.65$ (b) and $M = 8.2$ (c); $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$

фазовый портрет которого показан на рис. 2, a. Для удобства восприятия соответствующее значение параметра отмечено стрелочкой на рис. 1. Далее наблюдается широкое окно периодических режимов, а затем — снова хаос. Соответствующий аттрактор показан на рис. 2, b. Можно видеть, что его устройство отличается от рис. 2, a, хотя старшие показатели Ляпунова в обоих случаях близки (соответственно, $\Lambda_1 = 0.02842$ и $\Lambda_1 = 0.02354$). Мы далее будем использовать оба варианта, первый — для того чтобы рассмотреть случай, отвечающий сценарию Фейгенбаума, а второй — чтобы изучить влияние изменения конфигурации аттрактора.

Мы также рассмотрим случай, когда параметр $M = 8.2$. Аттрактор в этом случае показан на рис. 2, c и отчасти визуально близок к случаю рис. 2, b. Однако ему отвечает заметно большая величина старшего показателя Ляпунова — $\Lambda_1 = 0.06225$. Как мы увидим, это приводит к новым особенностям динамики.

3. Связанные системы

Организуем теперь связь ансамбля осцилляторов ван дер Поля (1) с хаотической системой Кислова–Дмитриева (2). Для удобства уравнения для каждого осциллятора запишем в явном виде:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 - (\lambda_1 - x_1^2)x_1 + x_1 + \frac{\mu}{4}(4\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) &= 0, \\
 \ddot{x}_2 - (\lambda_2 - x_2^2)x_2 + \left(1 + \frac{\Delta}{4}\right)x_2 + \frac{\mu}{4}(4\dot{x}_2 - \dot{x}_1 - \dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) &= 0, \\
 \ddot{x}_3 - (\lambda_3 - x_3^2)x_3 + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)x_3 + \frac{\mu}{4}(4\dot{x}_3 - \dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) &= 0, \\
 \ddot{x}_4 - (\lambda_4 - x_4^2)x_4 + \left(1 + \frac{3\Delta}{4}\right)x_4 + \frac{\mu}{4}(4\dot{x}_4 - \dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{x}_3 - \dot{x}_5) &= 0, \\
 \ddot{x}_5 - (\lambda_5 - x_5^2)x_5 + (1 + \Delta)x_5 + \frac{\mu}{4}(4\dot{x}_5 - \dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{x}_3 - \dot{x}_4) + k(\dot{x}_5 - \dot{x}) &= 0, \\
 \ddot{x} + \frac{1}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x + k(\dot{x} - \dot{x}_5) &= z, \\
 T\dot{z} + z &= Mx \exp(-x^2).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь для определённости связь осуществляется через пятый осциллятор ван дер Поля и управляется параметром k . Как мы отмечали, первое уравнение системы Кислова–Дмитриева имеет форму

осциллятора относительно переменной x . Связь в (3) устроена с учетом этой аналогии через член $\pm k(x_5 - \dot{x})$. Добавка через скорости изменения переменных, как в случае простейших осцилляторов, обеспечивает необходимый для нас диссипативный характер связи и возможность сопоставления с результатами [40]. Отметим, что такая связь системы Кислова–Дмитриева с единичным осциллятором ван дер Поля использовалась в [45], что привело к некоторым интересным особенностям динамики. Мы не будем здесь касаться схемотехнической реализации системы (3), ее вполне можно рассматривать как самостоятельную динамическую систему высокой размерности.

4. Трансформации аттракторов с дополнительными нулевыми показателями Ляпунова и бифуркации инвариантных торов

Рассмотрим систему (3). Выберем сначала значения параметров $\mu = 0.25$ и $\Delta = 3$, что в соответствии с [34] отвечает трехчастотному режиму в квазипериодической подсистеме. На рис. 3 показаны графики зависимости восьми показателей Ляпунова¹ объединенной системы (3) от параметра связи k . С их помощью можно идентифицировать тип наблюдаемого режима в соответствии с Таблицей. В Таблице указано семь показателей Ляпунова, остальные всегда отрицательные.

В правой части рис. 3 можно видеть трехчастотный режим $3T$ (3-тор) с $\Lambda_{1,2,3} = 0$. Таким образом, взаимодействие хаотической и квазипериодических подсистем привело к подавлению хаоса. При этом число несоизмеримых частот отвечает режиму колебаний в квазипериодической подсистеме.

При уменьшении связи наблюдается переход к четырехчастотному режиму $4T$. Таким образом, размерность квазипериодического режима увеличивается на единицу, причем дополнительную частоту привносит хаотическая подсистема. Такой же эффект характерен и для случая хаотической подсистемы в виде системы Ресслера [40]. Однако для нее этот переход происходит

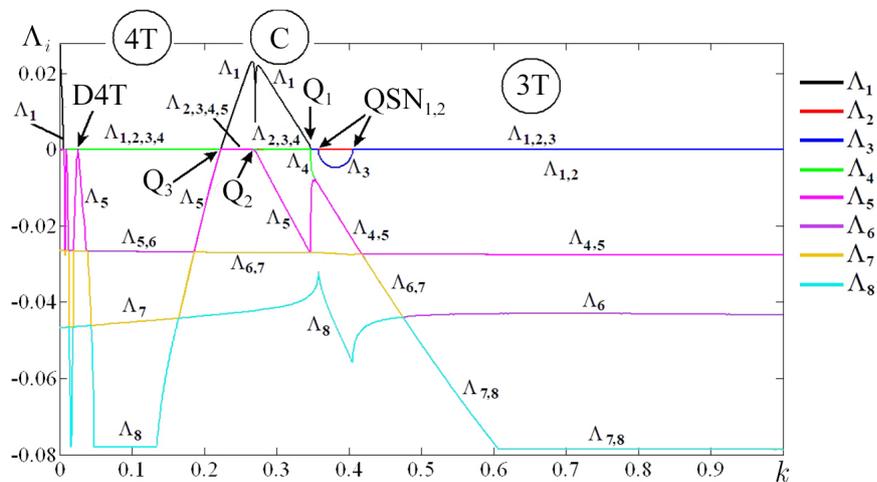


Рис. 3. Зависимость восьми показателей Ляпунова системы (3) от параметра связи k ; $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. Параметры системы Кислова–Дмитриева $M = 2.75$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Graphs of the eight Lyapunov exponents of the model (3) on the coupling parameter k ; $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. Parameters of the Kislov–Dmitriev model are $M = 2.75$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$ (color online)

¹Для вычисления показателей Ляпунова был использован стандартный метод Рунге–Кутты 4-го порядка для численного решения дифференциальных уравнений, а также метод ортогонализации Грама–Шмидта. Шаг интегрирования в численных расчетах выбирался равным 0.01; начальные условия для всех динамических переменных равны 0.1; время переходного процесса составляло порядка 10^4 единиц нормированного времени; время вычисления самих показателей порядка 10^5 единиц нормированного времени, что позволяет вычислять показатели Ляпунова с точностью до $\pm 10^{-5}$.

Таблица. Типы колебательных режимов и спектр показателей Ляпунова
Table. Types of regimes and the spectrum of Lyapunov exponents

Обозначение	Тип режима	Спектр старших показателей Ляпунова
P	периодический (предельный цикл)	$\Lambda_1 = 0, \Lambda_{2,3,4,5,6,7} < 0$
2T	двухчастотный квазипериодический (двумерный тор)	$\Lambda_{1,2} = 0, \Lambda_{3,4,5,6,7} < 0$
3T	трехчастотный квазипериодический (трехмерный тор)	$\Lambda_{1,2,3} = 0, \Lambda_{4,5,6,7} < 0$
4T	четырёхчастотный квазипериодический (четырёхмерный тор)	$\Lambda_{1,2,3,4} = 0, \Lambda_{5,6,7} < 0$
5T	пятичастотный квазипериодический (пятимерный тор)	$\Lambda_{1,2,3,4,5} = 0, \Lambda_{6,7} < 0$
6T	шестичастотный квазипериодический (шестимерный тор)	$\Lambda_{1,2,3,4,5,6} = 0, \Lambda_7 < 0$
C	хаос	$\Lambda_1 > 0, \Lambda_{2,3,4,5,6,7} \leq 0$
H	гиперхаос	$\Lambda_{1,2} > 0, \Lambda_{3,4,5,6,7} \leq 0$

исключительно через одну классическую квазипериодическую бифуркацию Хопфа. В рассматриваемом случае сценарий более сложный. При уменьшении связи мы сначала попадаем в резонансное окно двухчастотного режима с $\Lambda_{1,2} = 0$. Оно с обеих сторон ограничено линиями седло-узловых бифуркаций двухчастотных торов $QSN_{1,2}$. Тип бифуркации определяем по поведению показателей Ляпунова в соответствии с критерием [46]. Резонансному окну и бифуркациям данного типа отвечает характерный «провал» третьего показателя Λ_3 в отрицательную область.

После выхода из этого окна слева от него в узкой области параметра снова наблюдается трехчастотный тор с $\Lambda_{1,2,3} = 0$ при условии $\Lambda_4 < 0$. Однако практически сразу возникает хаос C . В соответствующей точке Q_1 показатель Λ_4 обращается в ноль, а показатель Λ_1 становится положительным. В результате возникает хаос, но с особенностью — наличием не одного, а трех нулевых показателей Ляпунова $\Lambda_{2,3,4} = 0$.

Уменьшим параметр связи k . При приближении к точке Q_2 показатель Λ_5 возрастает. Непосредственно в этой точке он обращается в ноль и далее остается нулевым, так что теперь $\Lambda_{2,3,4,5} = 0$. Таким образом, происходит своеобразная бифуркация хаотического аттрактора, состоящая в увеличении числа нулевых показателей от трех до четырех.

Наконец, в точке Q_3 хаос снова исчезает, и одновременно показатель Λ_5 снова уходит в отрицательную область. В результате рождается четырехчастотный тор с $\Lambda_{1,2,3,4} = 0$. Таким образом, благодаря нетривиальной бифуркации Q_2 справа от хаотического окна наблюдается трехчастотный тор, а слева — четырехчастотный.

При дальнейшем уменьшении связи происходят бифуркации удвоения четырехчастотного тора $D4T$. Одна из них хорошо просматривается на рис. 3. И далее при очень малой связи опять рождается хаос. В этом поведение аналогично случаю [40].

Как мы отметили, в дополнение к одному «обязательному» в системах с непрерывным временем нулевому показателю $\Lambda_2 = 0$ добавляется еще два или даже три. Представление о хаотическом аттракторе с дополнительным нулевым показателем Ляпунова было представлено в [47–49], где он был назван квазипериодическим аттрактором Эно (quasi-periodic Hénon-like attractor). К настоящему времени найдены примеры для климатической модели Лоренц-84 с периодическим (сезонным) воздействием [47, 48], модельного отображения [49], дискретной версии системы Лоренц-84 [50], связанных радиофизических генераторов [51], системы фазовых осцилляторов с бигармонической связью [52]. Совсем недавно найден также пример гиперхаоса (то есть режима с двумя положительными показателями) с дополнительным нулевым показателем [53]. В указанной работе была рассмотрена система из трех взаимодействующих

инкапсулированных газовых пузырьков в жидкости. Обсуждаются механизмы возникновения хаоса и гиперхаоса с дополнительным нулевым показателем Ляпунова. Актуальные примеры и их обсуждение для отображений можно найти также в [54, 55]. Эти результаты относятся к случаю одного дополнительного нулевого показателя. Случай двух и более дополнительных нулевых показателей также недавно был представлен в [38–40]. Таким образом, пополнение «коллекции» систем с подобной динамикой является интересным и сигнализирует о типичности данного феномена. Отметим также, что тематика, связанная с удвоениями торов, продолжает оставаться актуальной, например, [56, 57].

Проиллюстрируем теперь картину режимов в зависимости от «внутреннего» параметра связи квазипериодической подсистемы μ для двух значений k , рис. 4. В случае малого $k = 0.0025$ на рис. 4, *a* при большой связи μ наблюдается классический хаос, когда $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 = 0$, а остальные показатели отрицательные. В точке L_1 происходит смена типа хаотического режима — теперь возникает дополнительный нулевой показатель Ляпунова, так что $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_{2,3} = 0$, а остальные показатели отрицательные. Далее в точках L_2, L_3, L_4 и L_5 последовательно возникает

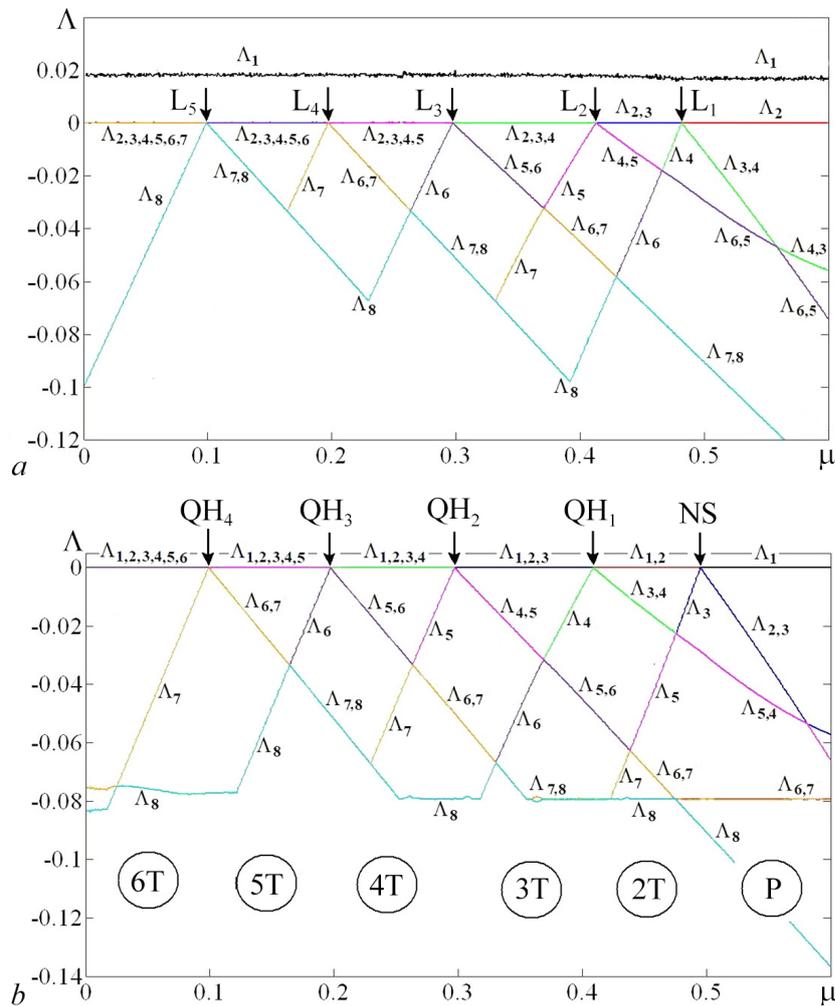


Рис. 4. Зависимость восьми показателей Ляпунова системы (3) от параметра связи генераторов ван дер Поля μ для $k=0.0025$ (a), $k=0.016$ (b). Параметры системы Кислова–Дмитриева $M=2.75$, $T=10$, $Q=20$, $\omega_0=0.5$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Graphs of the eight Lyapunov exponents of the model (3) on the van der Pol oscillator's coupling parameter μ for $k = 0.0025$ (a), $k = 0.016$ (b). Parameters of the Kislov–Dmitriev model are $M = 2.75$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$ (color online)

хаос с двумя, тремя, четырьмя и пятью дополнительными нулевыми показателями Ляпунова. Это некоторые характерные новые точки, мы обозначили их L — от Lyapunov exponents.

Отметим, что при приближении к точкам данного типа отрицательные показатели попарно совпадают. Так, при приближении справа к L_1 показатели $\Lambda_3 = \Lambda_4$, при приближении к L_2 — $\Lambda_4 = \Lambda_5$ и т. д. В этом поведение похоже на случай квазипериодической бифуркации Хопфа [46].

Таким образом, мы отмечаем два типа точек, отвечающих за увеличение числа нулевых показателей Ляпунова в хаосе. В первом случае поведение показателей происходит по типу седло-узловых бифуркаций торов (рис. 3, точка Q_2). Во втором — по типу квазипериодических бифуркаций Хопфа (рис. 4, a , точки L_n).

Увеличим теперь параметр связи k квазипериодической и хаотической подсистем до значения $k = 0.016$ (рис. 4, b). В этом случае хаос оказывается подавленным за счет диссипативного характера связи. В правой части рисунка теперь наблюдается бифуркация Неймарка–Сакера NS рождения двухчастотного тора с $\Lambda_{1,2} = 0$ из предельного цикла P , для которого $\Lambda_1 = 0$. Порог этой бифуркации близок к значению $\mu \approx \lambda_5 = 0.5$, что соответствует параметру возбуждения осциллятора с наибольшим значением λ_n . При этом для остальных осцилляторов $\mu > \lambda_{4,3,2,1}$ и их колебания подавлены.

С уменьшением μ происходит последовательный каскад квазипериодических бифуркаций Хопфа $QH_{1,2,3,4}$ мягкого рождения 3-тора, 4-тора, 5-тора и 6-тора. Критерием такого типа бифуркаций является равенство соответствующих пар отрицательных показателей (отмечены на рисунке) до ее порога [46]. Данную картину можно ассоциировать с несколькими шагами сценария Ландау–Хопфа. Отсюда можно сделать вывод, что сценарий Ландау–Хопфа, наблюдавшийся в ансамбле осцилляторов ван дер Поля, устойчив и не разрушается при взаимодействии с хаосом, если такая связь сравнительно велика. Более того, добавляется еще одна бифуркация Хопфа рождения устойчивого 6-тора. В этом состоит существенное отличие от сценария Рюэля–Такенса [17].

Отметим, что результаты рис. 4 оказываются аналогичными случаю, когда хаотической подсистемой является система Ресслера [40]. Таким образом, продемонстрирована их определенная универсальность. В то же время на рис. 3 наблюдаются новые моменты. Далее будут продемонстрированы и другие новые особенности, связанные с возможным изменением конфигурации хаотического аттрактора для системы Кислова–Дмитриева.

5. Случай модифицированного хаотического аттрактора

Проиллюстрируем теперь режимы, которые наблюдаются при увеличении основного управляющего параметра M хаотической подсистемы. Как мы отмечали, случай $M = 3.65$ отвечает изменению конфигурации аттрактора, рис. 2, b . На рис. 5 для этого случая показаны графики восьми показателей Ляпунова объединенной системы (3) в зависимости от связи подсистем k в разных диапазонах ее изменения. Параметры квазипериодической подсистемы выбраны аналогичными рис. 3, так что в автономном режиме в этой подсистеме наблюдается трехчастотный режим.

В области малой связи на рис. 5, a наряду с хаосом возможен также новый тип режима — гиперхаос с двумя положительными показателями $\Lambda_{1,2} > 0$. На рисунке хорошо видно, что в окрестности точки $k = 0.012$ гиперхаотический режим имеет три нулевых показателя $\Lambda_{3,4,5} = 0$. Это гиперхаос с двумя дополнительными нулевыми показателями. Таким образом, мы расширяем начатую в [53] классификацию гиперхаоса с дополнительными показателями Ляпунова.

На рис. 5, b доминирует четырехчастотный режим $4T$ с $\Lambda_{1,2,3,4} = 0$. В центре рисунка, внутри этой области, однако, наблюдается окно хаоса с $\Lambda_1 > 0$. Этот хаос характеризуется четырьмя нулевыми показателями $\Lambda_{2,3,4,5} = 0$. Соответственно, на границах данного хаотического окна пятый показатель Λ_5 обращается в ноль. Таким образом, граничные точки этой области аналогичны точкам типа Q_3 , описанным на рис. 3.

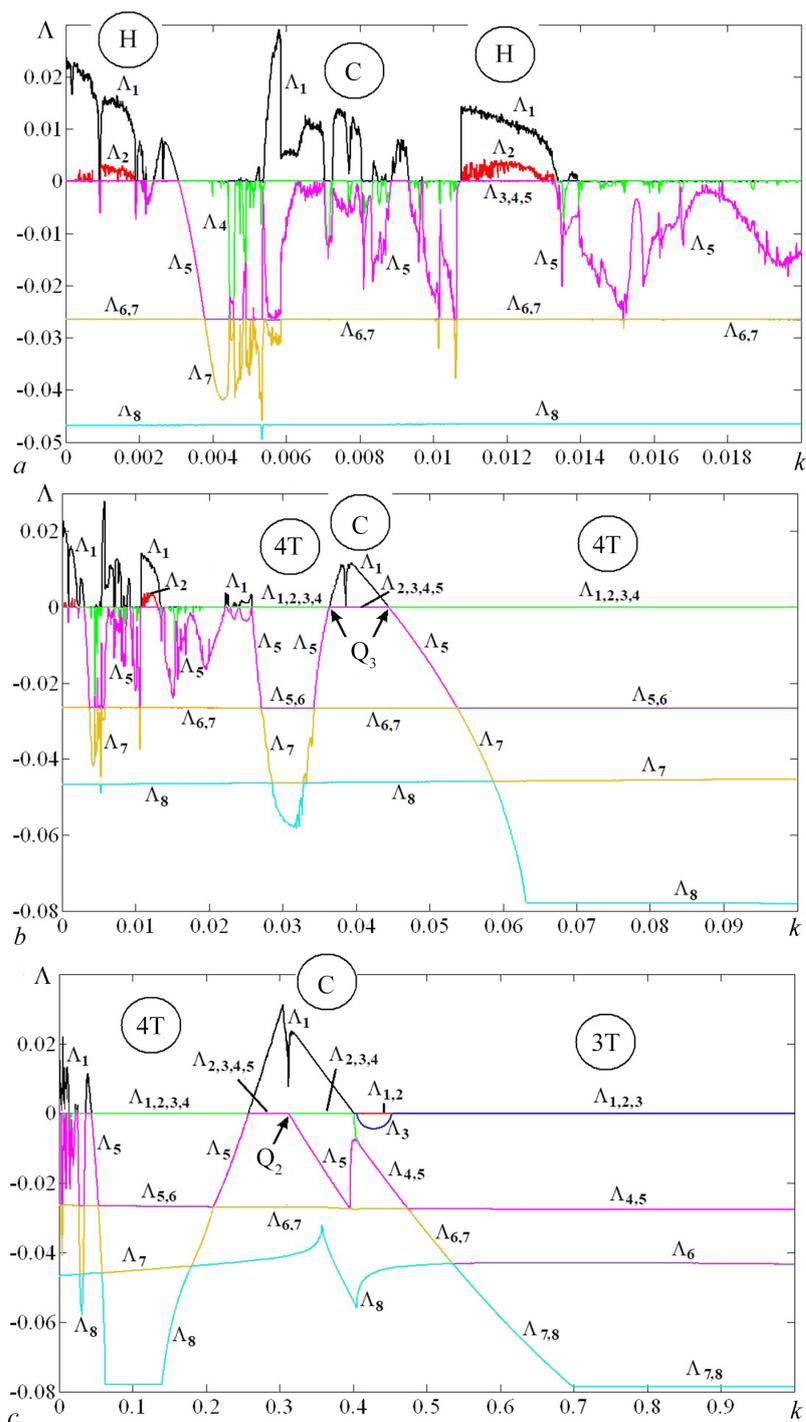


Рис. 5. Зависимость восьми показателей Ляпунова системы (3) от параметра связи k для разных диапазонов его изменения; $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. Параметры системы Кислова–Дмитриева $M = 3.65$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Graphs of the eight Lyapunov exponents of the model (3) on the coupling parameter k for different ranges of its change; $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. Parameters of the Kislov–Dmitriev model are $M = 3.65$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$ (color online)

В области большой связи на рис. 5, с наблюдается переход от четырехчастотного $4T$ к трехчастотному $3T$ режиму. Этот переход также происходит через окно хаотического режима C . Внутри этого окна слева располагается режим с четырьмя нулевыми показателями $\Lambda_{2,3,4,5} = 0$,

а справа — с тремя такими показателями $\Lambda_{2,3,4} = 0$. Хорошо видна точка перехода между этими режимами. Она аналогична описанной при обсуждении рис. 3 точке Q_2 .

Подводя итоги обсуждения рис. 3, 4 и 5, отмечаем, что выбор другой хаотической подсистемы по отношению к случаю системы Ресслера [40] привел как к наличию универсальных закономерностей, так и к существенным особенностям. Последнее особенно относится к случаю изменения конфигурации хаотического аттрактора. Поэтому представляется, что отмеченная для рис. 4 универсальность имеет место, когда реализуется аттрактор фейгенбаумовского типа.

6. Случай хаоса с большим значением старшего показателя Ляпунова

Рассмотрим теперь случай $M = 8.2$, который, как мы отмечали в разделе 2, соответствует заметно большему значению отвечающего за хаос показателю Ляпунова во второй подсистеме. Аналогичные рис. 5, *b* (средний диапазон изменения параметра связи k) графики восьми показателей Ляпунова показаны на рис. 6, *a*. Можно видеть существенные изменения картины.

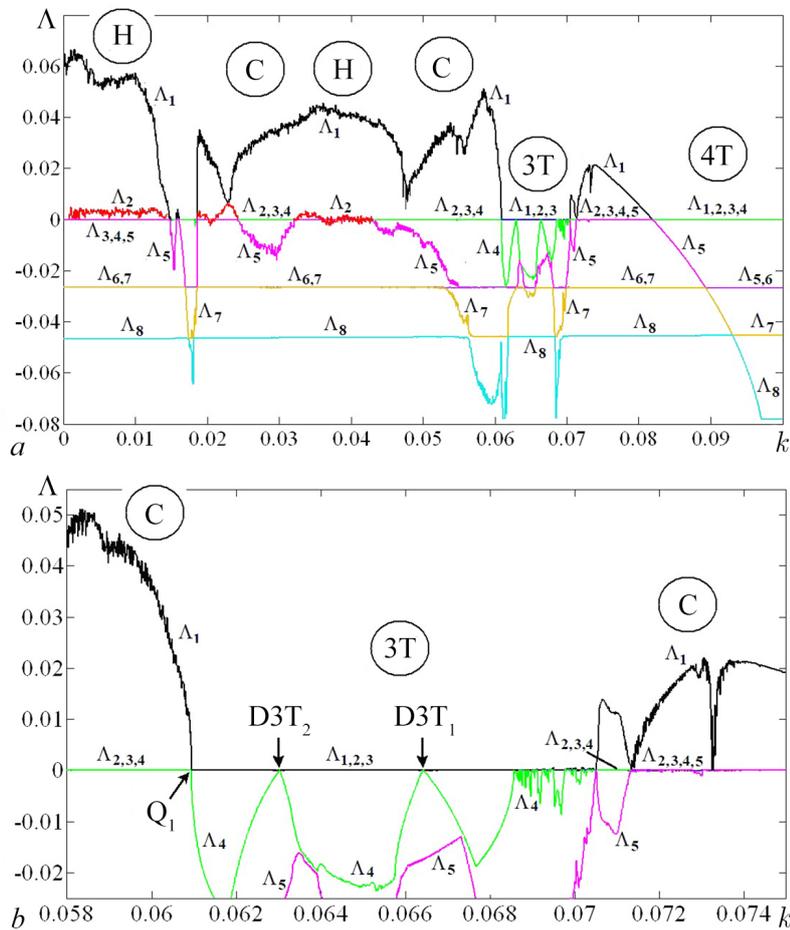


Рис. 6. Зависимость восьми показателей Ляпунова системы (3) от параметра связи k ; $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. Общий вид (*a*) и область квазипериодического окна (*b*). Параметры системы Кислова–Дмитриева $M = 8.2$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Graphs of the eight Lyapunov exponents of the model (3) on the coupling parameter k ; $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. General view (*a*) and region of the quasi-periodic window (*b*). Parameters of the Kislov–Dmitriev generator are $M = 8.2$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$ (color online)

При малой связи в левой части рис. 6, *a* доминирует гиперхаос H с $\Lambda_{1,2} > 0$ и $\Lambda_{3,4,5} = 0$. Теперь области гиперхаоса H заметно шире по величине связи, чем на рис. 5, *b*.

Далее с ростом k наблюдается хаос C с тремя нулевыми показателями $\Lambda_{2,3,4} = 0$. Внутри него также возможны области слабого гиперхаоса H . Отметим, что хаотическая и гиперхаотическая области теперь наблюдаются в заметно большем диапазоне значений параметра связи. При этом значительно больше и величина старшего показателя Λ_1 . (Сравните диапазоны по вертикальной оси на рис. 5, *b* и рис. 6, *a*.)

При еще большей связи k хаос оказывается подавленным, и наблюдаются трехчастотные $3T$ и четырехчастотные $4T$ режимы. Отметим интересную особенность. В данном случае рождение 3-тора происходит при уменьшении, а не увеличении связи, как ранее. Это выглядит отчасти парадоксальным, поскольку представляется, что диссипативная связь должна подавлять колебания.

На рисунке области $3T$ и $4T$ разделены областью хаоса C с четырьмя нулевыми показателями $\Lambda_{2,3,4,5} = 0$. При этом внутри нее никаких дополнительных бифуркаций не происходит.

Увеличенный фрагмент графиков в области существования трехчастотного тора $3T$ показан на рис. 6, *b*. Он имеет вид квазипериодического окна в хаосе. При выходе через левую границу этого окна происходят последовательные бифуркации удвоения трехчастотного тора $D3T_1$ и $D3T_2$ с последующим переходом к хаосу с тремя нулевыми показателями $\Lambda_{2,3,4} = 0$. При переходе через правую границу окна наблюдаются многочисленные осцилляции четвертого показателя Λ_4 в окрестности граничной точки. Поэтому детали перехода к хаосу в этом случае трудно описать, отметим лишь наличие узких окон резонансных четырехчастотных торов. При дальнейшем увеличении связи подсистем k хаос с тремя нулевыми показателями $\Lambda_{2,3,4} = 0$ превращается в хаос с четырьмя такими показателями $\Lambda_{2,3,4,5} = 0$. Поведение показателей происходит по типу седло-узловой бифуркации, аналогично описанной выше точке Q_2 . Особенность только состоит в том, что старший показатель Λ_1 имеет в точке перехода «провал», опускаясь до нулевого значения.

Заключение

Рассмотрено взаимодействие квазипериодической подсистемы из пяти неидентичных осцилляторов ван дер Поля, связанной диссипативным образом с хаотической системой Кислова–Дмитриева. Анализ проведен с точки зрения возможности реализации и бифуркаций инвариантных торов разной размерности, а также возможностей трансформации хаоса с дополнительными нулевыми показателями Ляпунова.

В случае трехчастотной динамики в квазипериодической подсистеме в объединенной системе при уменьшении величины связи наблюдается достаточно сложный сценарий перехода от трех- к четырехчастотной динамике. Сначала наблюдается окно двухчастотного резонансного режима, ограниченное линиями седло-узловых бифуркаций торов. Затем трехчастотный режим сначала восстанавливается, но затем переходит к хаосу с тремя нулевыми показателями Ляпунова. Внутри этой хаотической области происходит своеобразная бифуркация, отвечающая увеличению на единицу числа нулевых показателей Ляпунова. При этом поведение показателей отчасти аналогично седло-узловой бифуркации торов. Затем снова происходит выход из хаотического окна, но уже в четырехчастотную область. Далее сценарий достаточно универсальный — переход к хаосу через удвоения тора.

При вариации параметра связи осцилляторов ван дер Поля происходит каскад трансформаций аттрактора, отвечающих поэтапному увеличению числа нулевых Ляпуновских показателей в хаотическом режиме. При приближении к точкам данного типа отрицательные показатели попарно совпадают, что характерно также для квазипериодических бифуркаций Хопфа. Данная картина является универсальной по отношению к случаю хаотической системы Ресслера.

Показана устойчивость сценария Ландау–Хопфа по отношению к взаимодействию с хаотической подсистемой в некотором диапазоне связи подсистем. Возможно даже увеличение размерности наблюдаемого многочастотного режима и дополнительная бифуркация Хопфа по отношению к квазипериодической подсистеме.

При увеличении параметра нелинейности в системе Кислова–Дмитриева и соответствующего изменения конфигурации хаотического аттрактора в объединенной системе возможно появление гиперхаоса с тремя нулевыми показателями Ляпунова.

При еще большем значении этого параметра гиперхаос и хаос с дополнительными нулевыми показателями доминируют в широком диапазоне величины связи. При уменьшении связи наблюдается также инвертированный порядок эволюции торов — трехчастотный превращается в четырехчастотный. Описано также устройство квазипериодического трехчастотного окна в хаосе.

Отметим, что возможность новых разновидностей хаоса и гиперхаоса может представлять интерес с точки зрения возможных приложений, например, в задачах коммуникации.

Список литературы

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 360 с.
3. *Balanov A. G., Janson N. B., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V.* Synchronization: From Simple to Complex. Berlin: Springer, 2009. 425 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
4. *Кузнецов А. П., Емельянова Ю. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В.* Синхронизация в задачах. Саратов: Наука, 2010. 256 с.
5. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. Cham: Springer, 2023. 703 p. DOI: 10.1007/978-3-031-22007-4.
6. *Kuznetsov Yu. A., Meijer H. G. E.* Numerical Bifurcation Analysis of Maps: From Theory to Software. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. 420 p. DOI: 10.1017/9781108585804.
7. *Chen X., Qian S., Yu F., Zhang Z., Shen H., Huang Y., Cai S., Deng Z., Li Y., Du S.* Pseudorandom number generator based on three kinds of four-wing memristive hyperchaotic system and its application in image encryption // *Complexity*. 2020. Vol. 2020, no. 7. P. 8274685. DOI: 10.1155/2020/8274685.
8. *Přibylková L., Ševčík J., Eclerová V., Klimeš P., Brázdil M., Meijer H. G.* Weak coupling of neurons enables very high-frequency and ultra-fast oscillations through the interplay of synchronized phase shifts // *Netw. Neurosci.* 2024. Vol. 8, no. 1. P. 293–318. DOI: 10.1162/netn_a_00351.
9. *Bucolo M., Buscarino A., Fortuna L., Gagliano S.* Multidimensional discrete chaotic maps // *Front. Phys.* 2022. Vol. 10. P. 862376. DOI: 10.3389/fphy.2022.862376.
10. *Kopp M.* New 7D and memristor-based 8D chaotic systems: Computer modeling and circuit implementation // *Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering*. 2024. Vol. 16, no. 1. P. 13–23. DOI: 10.54554/jtec.2024.16.01.003.
11. *Курбако А. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Адаптивное управление несинхронными колебаниями в сети идентичных электронных нейроподобных генераторов // *Письма в ЖТФ*. 2022. Т. 48, № 19. С. 43–46. DOI: 10.21883/PJTF.2022.19.53596.19328.
12. *Корнеев И. А., Слепнев А. В., Семенов В. В., Вадивасова Т. Е.* Волновые процессы в кольце мемристивно связанных автогенераторов // *Известия вузов. ПНД*. 2020. Т. 28, № 3. С. 324–340. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-324-340.
13. *Singhal B., Kiss I. Z., Li J. S.* Optimal phase-selective entrainment of heterogeneous oscillator ensembles // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2023. Vol. 22, no. 3. P. 2180–2205. DOI: 10.1137/22M1521201.

14. *Mircheski P., Zhu J., Nakao H.* Phase-amplitude reduction and optimal phase locking of collectively oscillating networks // *Chaos*. 2023. Vol. 33, no. 10. P. 103111. DOI: 10.1063/5.0161119.
15. *Ландау Л. Д.* К проблеме турбулентности // *ДАН СССР*. 1944. Т. 44, № 8. С. 339–342.
16. *Hopf E.* A mathematical example displaying features of turbulence // *Comm. Pure Appl. Math.* 1948. Vol. 1. P. 303–322.
17. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // *Commun. Math. Phys.* 1971. Vol. 20. P. 167–192. DOI: 10.1007/BF01646553.
18. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73, no. 5. P. 056202. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202.
19. *Anishchenko V. S., Nikolaev S. M.* Transition to chaos from quasiperiodic motions on a four-dimensional torus perturbed by external noise // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2008. Vol. 18, no. 9. P. 2733–2741. DOI: 10.1142/S0218127408021956.
20. *Анищенко В. С., Николаев С. М.* Устойчивость, синхронизация и разрушение квазипериодических колебаний // *Нелинейная динамика*. 2006. Т. 2, № 3. С. 267–278. DOI: 10.20537/nd0603001.
21. *Emelianova Y. P., Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Physica D*. 2013. Vol. 244, no. 1. P. 36–49. DOI: 10.1016/j.physd.2012.10.012.
22. *Stankevich N. V., Kuznetsov A. P., Seleznev E. P.* Chaos and hyperchaos arising from the destruction of multifrequency tori // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021. Vol. 147. P. 110998. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110998.
23. *Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Sedova Y. V.* Dynamics of three and four non-identical Josephson junctions // *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 7, no. 1. P. 105–110. DOI: 10.5890/JAND.2018.03.009.
24. *Кузнецов А. П., Седова Ю. В., Станкевич Н. В.* Различные режимы трех связанных генераторов, способных демонстрировать квазипериодические колебания // *Письма в ЖТФ*. 2022. Т. 48, № 24. С. 19–22. DOI: 10.21883/PJTF.2022.24.54018.19296.
25. *Hidaka S., Inaba N., Sekikawa M., Endo T.* Bifurcation analysis of four-frequency quasi-periodic oscillations in a three-coupled delayed logistic map // *Phys. Lett. A*. 2015. Vol. 379, no. 7. P. 664–668. DOI: 10.1016/j.physleta.2014.12.022.
26. *Hidaka S., Inaba N., Kamiyama K., Sekikawa M., Endo T.* Bifurcation structure of an invariant three-torus and its computational sensitivity generated in a three-coupled delayed logistic map // *IEICE Nonlin. Th. Appl.* 2015. Vol. 6, no. 3. P. 433–442. DOI: 10.1587/nolta.6.433.
27. *Kuznetsov A. P., Sedova Y. V., Stankevich N. V.* Discrete Rössler oscillators: Maps and their ensembles // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2023. Vol. 33, no. 15. P. 2330037. DOI: 10.1142/S0218127423300379.
28. *Borkowski L., Stefanski A.* Stability of the 3-torus solution in a ring of coupled Duffing oscillators // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2020. Vol. 229, no. 12. P. 2249–2259. DOI: 10.1140/epjst/e2020-900276-4.
29. *Evstigneev N. M.* Laminar-turbulent bifurcation scenario in 3D Rayleigh-Benard convection problem // *Open Journal of Fluid Dynamics*. 2016. Vol. 6, no. 4. P. 496–539. DOI: 10.4236/ojfd.2016.64035.
30. *Nosov V. V., Grigoriev V. M., Kovadlo P. G., Lukin V. P., Nosov E. V., Torgaev A. V.* Astroclimate of specialized stations of the Large solar vacuum telescope: Part II // In: *Proceedings Fourteenth International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics/Atmospheric Physics*. SPIE, 2008. Vol. 6936. P. 181–192. DOI: 10.1117/12.783159.
31. *Herrero R., Farjas J., Pi F., Orriols G.* Nonlinear complexification of periodic orbits in the generalized Landau scenario // *Chaos*. 2022. Vol. 32, no. 2. P. 023116. DOI: 10.1063/5.0069878.
32. *Krysko A. V., Awrejcewicz J., Papkova I. V., Krysko V. A.* Routes to chaos in continuous mechanical

- systems: Part 2. Modelling transitions from regular to chaotic dynamics // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2012. Vol. 45, no. 6. P. 709–720. DOI: 10.1016/j.chaos.2012.02.001.
33. *Awrejcewicz J., Krysko V. A.* Scenarios of Transition from Harmonic to Chaotic Motion // In: *Chaos in Structural Mechanics*. Berlin: Springer, 2008. P. 225–233. DOI: 10.1007/978-3-540-77676-5_10.
 34. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Turukina L. V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // *Phys. Lett. A*. 2013. Vol. 377, no. 45–48. P. 3291–3295. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013.
 35. *Kulikov A. N.* Landau-Hopf scenario of passage to turbulence in some problems of elastic stability theory // *Diff. Equat.* 2012. Vol. 48. P. 1258–1271. DOI: 10.1134/S0012266112090066.
 36. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* A possibility of realizing the Landau–Hopf scenario in the problem of tube oscillations under the action of a fluid flow // *Theor. Math. Phys.* 2020. Vol. 203, no. 1. P. 501–511. DOI: 10.1134/S0040577920040066.
 37. *Kulikov A. N.* Bifurcations of invariant tori in second-order quasilinear evolution equations in Hilbert spaces and scenarios of transition to turbulence // *J. Math. Sci.* 2022. Vol. 262, no. 6. P. 809–816. DOI: 10.1007/s10958-022-05859-z.
 38. *Kuznetsov A. P., Sedova Y. V., Stankevich N. V.* Coupled systems with quasi-periodic and chaotic dynamics // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023. Vol. 169. P. 113278. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113278.
 39. *Кузнецов А. П., Седова Ю. В.* Динамика связанных квазипериодического генератора и системы Ресслера // *Письма в ЖТФ*. 2023. Т. 49, № 2. С. 17–20. DOI: 10.21883/PJTF.2023.02.54280.19289.
 40. *Kuznetsov A. P., Turukina L. V.* About the chaos influence on a system with multi-frequency quasi-periodicity and the Landau–Hopf scenario // *Physica D*. 2024. Vol. 470B. P. 134425. DOI: 10.1016/j.physd.2024.134425.
 41. *Дмитриев А. С., Кислов В. Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 277 с.
 42. *Дмитриев А. С.* Сорок лет модели кольцевого генератора Дмитриева–Кислова // *Известия вузов. ПНД*, 2024. Т. 32, № 4. С. 423–427. DOI: 10.18500/0869-6632-003119.
 43. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 295 с.
 44. *Дмитриев А., Ефремова Е., Максимов Н., Панас А.* Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012. 424 с.
 45. *Емельянова Ю. П., Кузнецов А. П.* Синхронизация связанных автогенераторов Ван-дер-Поля и Кислова–Дмитриева // *ЖТФ*. 2011. Т. 81, № 4. С. 7–14.
 46. *Vitolo R., Broer H., Simó C.* Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regul. Chaot. Dyn.* 2011. Vol. 16. P. 154–184. DOI: 10.1134/S1560354711010060.
 47. *Broer H., Vitolo R., Simó C.* Quasi-periodic Hénon-like attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // In: *EQUADIFF 2003*. 22–26 July 2003, Hasselt, Belgium. 2005. P. 601–607. DOI: 10.1142/9789812702067_0100.
 48. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // *Nonlinearity*. 2002. Vol. 15, no. 4. P. 1205–1267. DOI: 10.1088/0951-7715/15/4/312.
 49. *Broer H. W., Simó C., Vitolo R.* Chaos and quasi-periodicity in diffeomorphisms of the solid torus // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*. 2010. Vol. 14, no. 3. P. 871–905. DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.871.
 50. *Попова Е. С., Станкевич Н. В., Кузнецов А. П.* Каскад бифуркаций удвоения инвариантной кривой и квазипериодический аттрактор Эно в дискретной модели Лоренца-84 // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*. 2020. Т. 20, № 3. С. 222–232. DOI: 10.18500/1817-3020-2020-20-3-222-232.

51. *Stankevich N. V., Shchegoleva N. A., Sataev I. R., Kuznetsov A. P.* Three-dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators // *J. Comput. Nonlinear Dynam.* 2020. Vol. 15, no. 11. P. 111001. DOI: 10.1115/1.4048025.
52. *Grines E. A., Kazakov A., Sataev I. R.* On the origin of chaotic attractors with two zero Lyapunov exponents in a system of five biharmonically coupled phase oscillators // *Chaos.* 2022. Vol. 32, no. 9. P. 093105. DOI: 10.1063/5.0098163.
53. *Garashchuk I., Kazakov A., Sinelshchikov D.* Scenarios for the appearance of strange attractors in a model of three interacting microbubble contrast agents // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2024. Vol. 182. P. 114785. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114785.
54. *Karatetskaia E., Shykhmamedov A., Kazakov A.* Shilnikov attractors in three-dimensional orientation-reversing maps // *Chaos.* 2021. Vol. 31, no. 1. P. 011102. DOI: 10.1063/5.0036405.
55. *Shykhmamedov A., Karatetskaia E., Kazakov A., Stankevich N.* Scenarios for the creation of hyperchaotic attractors in 3D maps // *Nonlinearity.* 2023. Vol. 36, no. 7. P. 3501–3541. DOI: 10.1088/1361-6544/acd044.
56. *Muni S. S.* Ergodic and resonant torus doubling bifurcation in a three-dimensional quadratic map // *Nonlinear Dyn.* 2024. Vol. 112, no. 6. P. 4651–4661. DOI: 10.1007/s11071-024-09284-6.
57. *Muni S. S.* Persistence of resonant torus doubling bifurcation under polynomial perturbations // *Franklin Open.* 2025. Vol. 10. P. 100207. DOI: 10.1016/j.fraope.2024.100207.

References

1. *Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. *Landa PS.* Self-Oscillations in Systems with a Finite Number of Degrees of Freedom. M.: LIBROCOM; 2010. 360 p. (in Russian).
3. *Balanov AG, Janson NB, Postnov DE, Sosnovtseva OV.* Synchronization: From Simple to Complex. Berlin: Springer; 2009. 425 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
4. *Kuznetsov AP, Emelyanova YuP, Sataev IR, Turukina LV.* Synchronization in Tasks. Saratov: Nauka; 2010. 256 p. (in Russian).
5. *Kuznetsov YuA.* Elements of Applied Bifurcation Theory. Cham: Springer; 2023. 703 p. DOI: 10.1007/978-3-031-22007-4.
6. *Kuznetsov YuA, Meijer HGE.* Numerical Bifurcation Analysis of Maps: From Theory to Software. Cambridge: Cambridge University Press; 2019. 420 p. DOI: 10.1017/9781108585804.
7. *Chen X, Qian S, Yu F, Zhang Z, Shen H, Huang Y, Cai S, Deng Z, Li Y, Du S.* Pseudorandom number generator based on three kinds of four-wing memristive hyperchaotic system and its application in image encryption. *Complexity.* 2020;2020(7):8274685. DOI: 10.1155/2020/8274685.
8. *Příbylová L, Ševčík J, Eclerová V, Klimeš P, Brázdil M, Meijer HG.* Weak coupling of neurons enables very high-frequency and ultra-fast oscillations through the interplay of synchronized phase shifts. *Netw. Neurosci.* 2024;8(1):293–318. DOI: 10.1162/netn_a_00351.
9. *Bucolo M, Buscarino A, Fortuna L, Gagliano S.* Multidimensional discrete chaotic maps. *Front. Phys.* 2022;10:862376. DOI: 10.3389/fphy.2022.862376.
10. *Kopp M.* New 7D and memristor-based 8D chaotic systems: Computer modeling and circuit implementation. *Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering.* 2024;16(1): 13–23. DOI: 10.54554/jtec.2024.16.01.003.
11. *Kurbako AV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD.* Adaptive control of nonsynchronous oscillations in network of identical electronic neuron-like generators. *Tech. Phys. Lett.* 2022;48(10):38–41. DOI: 10.21883/TPL.2022.10.54796.19328.
12. *Korneev IA, Slepnev AV, Semenov VV, Vadivasova TE.* Wave processes in a ring of memristively

- coupled self-excited oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(3):324–340 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-324-340.
13. Singhal B, Kiss IZ, Li JS. Optimal phase-selective entrainment of heterogeneous oscillator ensembles. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2023;22(3):2180–2205. DOI: 10.1137/22M1521201.
 14. Mircheski P, Zhu J, Nakao H. Phase-amplitude reduction and optimal phase locking of collectively oscillating networks. *Chaos*. 2023;33(10):103111. DOI: 10.1063/5.0161119.
 15. Landau LD. On the problem of turbulence. *Dokl. Akad. Nauk USSR*. 1944;44(8):339–342 (in Russian).
 16. Hopf E. A mathematical example displaying features of turbulence. *Comm. Pure Appl. Math.* 1948;1:303–322.
 17. Ruelle D, Takens F. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.* 1971;20:167–192. DOI: 10.1007/BF01646553.
 18. Anishchenko V, Nikolaev S, Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions. *Phys. Rev. E*. 2006;73(5):056202. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202.
 19. Anishchenko VS, Nikolaev SM. Transition to chaos from quasiperiodic motions on a four-dimensional torus perturbed by external noise. *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2008;18(9):2733–2741. DOI: 10.1142/S0218127408021956.
 20. Anishchenko VS, Nikolaev SM. Stability, synchronization and destruction of quasiperiodic motions. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2006;2(3):267–278 (in Russian). DOI: 10.20537/nd0603001.
 21. Emelianova YP, Kuznetsov AP, Sataev IR, Turukina LV. Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators. *Physica D*. 2013;244(1):36–49. DOI: 10.1016/j.physd.2012.10.012.
 22. Stankevich NV, Kuznetsov AP, Seleznev EP. Chaos and hyperchaos arising from the destruction of multifrequency tori. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021;147:110998. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110998.
 23. Kuznetsov AP, Sataev IR, Sedova YV. Dynamics of three and four non-identical Josephson junctions. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;7(1):105–110. DOI: 10.5890/JAND.2018.03.009.
 24. Kuznetsov AP, Sedova YV, Stankevich NV. Different modes of three coupled generators capable of demonstrating quasiperiodic oscillations. *Tech. Phys. Lett.* 2022;48(12):56–59. DOI: 10.21883/TPL.2022.12.54949.19296.
 25. Hidaka S, Inaba N, Sekikawa M, Endo T. Bifurcation analysis of four-frequency quasi-periodic oscillations in a three-coupled delayed logistic map. *Phys. Lett. A*. 2015;379(7):664–668. DOI: 10.1016/j.physleta.2014.12.022.
 26. Hidaka S, Inaba N, Kamiyama K, Sekikawa M, Endo T. Bifurcation structure of an invariant three-torus and its computational sensitivity generated in a three-coupled delayed logistic map. *IEICE Nonlin. Th. Appl.* 2015;6(3):433–442. DOI: 10.1587/nolta.6.433.
 27. Kuznetsov AP, Sedova YV, Stankevich NV. Discrete Rössler oscillators: Maps and their ensembles. *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2023;33(15):2330037. DOI: 10.1142/S0218127423300379.
 28. Borkowski L, Stefanski A. Stability of the 3-torus solution in a ring of coupled Duffing oscillators. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2020;229(12):2249–2259. DOI: 10.1140/epjst/e2020-900276-4.
 29. Evstigneev NM. Laminar-turbulent bifurcation scenario in 3D Rayleigh-Benard convection problem. *Open Journal of Fluid Dynamics*. 2016;6(4):496–539. DOI: 10.4236/ojfd.2016.64035.
 30. Nosov VV, Grigoriev VM, Kovadlo PG, Lukin VP, Nosov EV, Torgaev AV. Astroclimate of specialized stations of the Large solar vacuum telescope: Part II. In: Fourteenth International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics/Atmospheric Physics. SPIE; 2008. P. 181-192. DOI: 10.1117/12.783159.

31. Herrero R, Farjas J, Pi F, Orriols G. Nonlinear complexification of periodic orbits in the generalized Landau scenario. *Chaos*. 2022;32(2):023116. DOI: 10.1063/5.0069878.
32. Krysko AV, Awrejcewicz J, Papkova IV, Krysko VA. Routes to chaos in continuous mechanical systems: Part 2. Modelling transitions from regular to chaotic dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2012;45(6):709–720. DOI: 10.1016/j.chaos.2012.02.001.
33. Awrejcewicz J, Krysko VA. Scenarios of Transition from Harmonic to Chaotic Motion. In: *Chaos in Structural Mechanics*. Berlin: Springer; 2008. P. 225–233. DOI: 10.1007/978-3-540-77676-5_10.
34. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Sataev IR, Turukina LV. About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators. *Phys. Lett. A*. 2013;377(45–48):3291–3295. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013.
35. Kulikov AN. Landau-Hopf scenario of passage to turbulence in some problems of elastic stability theory. *Diff. Equat.* 2012;48:1258–1271. DOI: 10.1134/S0012266112090066.
36. Kulikov AN, Kulikov DA. A possibility of realizing the Landau–Hopf scenario in the problem of tube oscillations under the action of a fluid flow. *Theor. Math. Phys.* 2020;203(1):501–511. DOI: 10.1134/S0040577920040066.
37. Kulikov AN. Bifurcations of invariant tori in second-order quasilinear evolution equations in Hilbert spaces and scenarios of transition to turbulence. *J. Math. Sci.* 2022;262(6):809–816. DOI: 10.1007/s10958-022-05859-z.
38. Kuznetsov AP, Sedova YV, Stankevich NV. Coupled systems with quasi-periodic and chaotic dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023;169:113278. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113278.
39. Kuznetsov AP, Sedova YV. Dynamics of coupled quasiperiodic generator and Rossler system. *Tech. Phys. Lett.* 2023;49(1):58–61. DOI: 10.21883/TPL.2023.01.55351.19289.
40. Kuznetsov AP, Turukina LV. About the chaos influence on a system with multi-frequency quasi-periodicity and the Landau-Hopf scenario. *Physica D*. 2024;470B:134425. DOI: 10.1016/j.physd.2024.134425.
41. Dmitriev AS, Kislov VYa. *Stochastic Oscillations in Radiophysics and Electronics*. M.: Nauka; 1989. 277 p. (in Russian).
42. Dmitriev AS. Forty years of the Dmitriev-Kislov ring oscillator model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(4):423–427 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-003119.
43. Kuznetsov SP. *Dynamic Chaos*. M.: Fizmatlit; 2001. 295 p. (in Russian).
44. Dmitriev A, Efremova E, Maksimov N, Panas A. *Chaos Generation*. M.: Tekhnosfera; 2012. 424 p. (in Russian).
45. Emelyanova YP, Kuznetsov AP. Synchronization of coupled van der pole and Kislov-Dmitriev self-oscillators. *Tech. Phys.* 2011;56(4):435–442. DOI: 10.1134/S106378421104013X.
46. Vitolo R, Broer H, Simó C. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems. *Regul. Chaot. Dyn.* 2011;16:154–184. DOI: 10.1134/S1560354711010060.
47. Broer H, Vitolo R, Simó C. Quasi-periodic Hénon-like attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing. In: *EQUADIFF 2003*. 22–26 July 2003, Hasselt, Belgium. 2005. P. 601–607. DOI: 10.1142/9789812702067_0100.
48. Broer H, Simó C, Vitolo R. Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing. *Nonlinearity*. 2002;15(4):1205–1267. DOI: 10.1088/0951-7715/15/4/312.
49. Broer HW, Simó C, Vitolo R. Chaos and quasi-periodicity in diffeomorphisms of the solid torus. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*. 2010;14(3):871–905. DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.871.
50. Popova ES, Stankevich NV, Kuznetsov AP. Cascade of invariant curve doubling bifurcations and quasi-periodic Hénon attractor in the discrete Lorenz-84 model. *Izvestiya of Saratov University. Physics*. 2020;20(3):222–232 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2020-20-3-222-232.
51. Stankevich NV, Shchegoleva NA, Sataev IR, Kuznetsov AP. Three-dimensional torus breakdown

- and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators. *J. Comput. Nonlinear Dynam.* 2020;15(11):111001. DOI: 10.1115/1.4048025.
52. Grines EA, Kazakov A, Sataev IR. On the origin of chaotic attractors with two zero Lyapunov exponents in a system of five biharmonically coupled phase oscillators. *Chaos.* 2022;32(9):093105. DOI: 10.1063/5.0098163.
 53. Garashchuk I, Kazakov A, Sinelshchikov D. Scenarios for the appearance of strange attractors in a model of three interacting microbubble contrast agents. *Chaos, Solitons & Fractals.* 2024;182:114785. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114785.
 54. Karatetskaia E, Shykhmamedov A, Kazakov A. Shilnikov attractors in three-dimensional orientation-reversing maps. *Chaos.* 2021;31(1):011102. DOI: 10.1063/5.0036405.
 55. Shykhmamedov A, Karatetskaia E, Kazakov A, Stankevich N. Scenarios for the creation of hyperchaotic attractors in 3D maps. *Nonlinearity.* 2023;36(7):3501–3541. DOI: 10.1088/1361-6544/acd044.
 56. Muni SS. Ergodic and resonant torus doubling bifurcation in a three-dimensional quadratic map. *Nonlinear Dyn.* 2024;112(6):4651–4661. DOI: 10.1007/s11071-024-09284-6.
 57. Muni SS. Persistence of resonant torus doubling bifurcation under polynomial perturbations. *Franklin Open.* 2025;10:100207. DOI: 10.1016/j.fraope.2024.100207.

Кузнецов Александр Петрович — родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук (1996), профессор (2002). В настоящее время ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Имеет более 150 научных статей в российских и международных журналах по указанным направлениям. Под его руководством защищено 8 кандидатских диссертаций. Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны» (сборник задач), «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Синхронизация в задачах», «Бифуркации отображений», «Как работают и думают физики», «Задачи физических олимпиад» и др.

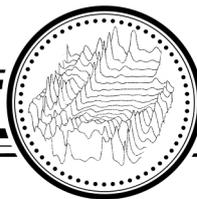


Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
 им. В. А. Котельникова РАН
 E-mail: kuzalexp@yandex.ru
 ORCID: 0000-0001-5528-1979
 AuthorID (eLibrary.Ru): 509

Тюрюкина Людмила Владимировна — родилась в Саратове (1977). Окончила с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского (2000). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2003), доцент по специальности «Радиофизика» (2009). В настоящее время работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН и на кафедре динамических систем Института физики СГУ на базе СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН в должности доцента. Научные интересы — динамический хаос, квазипериодические колебания, синхронизация. Имеет более 50 научных статей по указанным направлениям.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
 им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
 E-mail: turukinalv@yandex.ru
 ORCID: 0000-0002-4221-8900
 AuthorID (eLibrary.Ru): 39405



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003186
EDN: BLEOZB

Нелинейные колебания высотного сооружения с динамическим гасителем колебаний

М. М. Мирсаидов^{1,2}, А. Н. Ишматов¹, Б. Ш. Юлдошев¹,
Ш. М. Салимов³, И. О. Хазраткулов¹✉

¹Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров
ирригации и механизации сельского хозяйства», Узбекистан

²Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М. Т. Уразбаева
Академии наук Узбекистана, Узбекистан

³Ташкентский университет прикладных наук, Узбекистан
E-mail: mirsaidov1948@mail.ru, ribs@mail.ru, Baxtiyor_yuldashev68@mail.ru,
salimovshoolim@gmail.com, ✉islomjon.xazratqulov093@gmail.com

Поступила в редакцию 4.04.2025, принята к публикации 5.06.2025,
опубликована онлайн 9.07.2025, опубликована 28.11.2025

Аннотация. Цель. Исследование динамического поведения высотных сооружений с динамическим гасителем колебаний при различных кинематических воздействиях с учетом нелинейно-упругих, вязкоупругих, упругопластических свойств материала сооружения и вязкоупругих свойств гасителя колебаний. Динамические гасители колебаний позволяют использовать их как на стадии проектирования, разработки и создания конструкций, так и в случае выявления недостатков качества конструкций в процессе их эксплуатации, и настройка позволяет просто получить желаемый эффект уменьшения уровня колебаний. Методы. Предложена математическая модель, методика и алгоритм для оценки динамического поведения высотных сооружений с динамическим гасителем колебаний с учетом нелинейных свойств материала при реальном характере работы сооружения. Для учета внутренней диссипации в материале сооружения используется нелинейная наследственная модель вязкоупругости Больцмана–Вольтерры и упругопластические свойства на основе билинейной диаграммы, характеризуемая петлей гистерезиса, описывающей зависимость реакции сооружения от деформации, представленной в виде параллелограмма. Результаты. Исследованы вынужденные колебания высотных сооружений вблизи резонансного режима с учетом линейно-, нелинейно-упругих, вязкоупругих и упругопластических свойств материала сооружения с динамическим гасителем колебаний при различных кинематических воздействиях в основании. Достоверность методики проверялась тестовым примером с рассмотрением реакции упругопластической рамы как системы с одной степенью свободы при заданной нагрузке. Выявлен эффект гашения колебаний высотного сооружения при учете нелинейно-вязкоупругих и упругопластических свойств материала сооружения совместно с вязкоупругим динамическим гасителем колебаний. Заключение. Установлено влияние диссипативных свойств материала на колебания сооружения. Предложены рекомендации для оптимизации работы сооружения с учетом динамического гасителя колебаний. Выявлена эффективность гашения колебаний высотного сооружения при учете нелинейно-вязкоупругих и упругопластических свойств материала сооружения совместно с вязкоупругим динамическим гасителем колебаний.

Ключевые слова: высотное сооружение, кинематическое воздействие, нелинейно-упругие, вязкоупругие и упругопластические свойства материала, динамический гаситель колебаний, метод конечных элементов, резонансный режим.

Для цитирования: Мирсаидов М. М., Ишматов А. Н., Юлдошев Б. Ш., Салимов Ш. М., Хазраткулов И. О. Нелинейные колебания высотного сооружения с динамическим гасителем колебаний // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 6. С. 804–822. DOI: 10.18500/0869-6632-003186. EDN: BLEOZB

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003186

Nonlinear vibrations of a high-rise structure with a dynamic vibration damper

M. M. Mirsaidov^{1,2}, A. N. Ishmatov¹, B. Sh. Yuldoshev¹, Sh. M. Salimov³, I. O. Khazratkulov¹ ✉

¹The National Research University

«Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers», Uzbekistan

²Institute of Mechanics and Seismic stability of structures named after M. T. Urazbaev,
Uzbekistan Academy of Sciences, Uzbekistan

³University Tashkent for Applied Sciences, Uzbekistan

E-mail: mirsaidov1948@mail.ru, ribs@mail.ru, Baxtiyor_yuldashev68@mail.ru,
salimovshoolim@gmail.com, ✉islomjon.xazratkulov093@gmail.com

Received 4.04.2025, accepted 5.06.2025, available online 9.07.2025, published 28.11.2025

Abstract. *Objective.* To study the dynamic behavior of high-rise structures with dynamic oscillation dampers under various kinematic influences, taking into account the nonlinear elastic, viscoelastic, and elastoplastic properties of the structure's material and the viscoelastic properties of the oscillation damper. Dynamic oscillation dampers can be used both at the stage of design, development and construction of structures, as well as in cases where structural quality deficiencies are identified during operation. Their adjustment allows for a simple way to achieve the desired effect of reducing oscillation levels. *Methods.* A mathematical model, methodology, and algorithm are proposed for evaluating the dynamic behavior of high-rise structures equipped with a dynamic vibration absorber, taking into account the nonlinear properties of materials under actual operating conditions. To account for internal dissipation in the structure's material, a nonlinear hereditary Boltzmann–Volterra viscoelasticity model is employed, along with elastic-plastic properties based on a bilinear diagram. This model is characterized by a hysteresis loop, which describes the relationship between the structure's response and deformation, represented in the form of a parallelogram. *Results.* The forced vibrations of high-rise structures near the resonance mode were investigated taking into account the linear, nonlinear elastic, viscoelastic and elastic-plastic properties of the structure material with a dynamic vibration damper under various kinematic effects in the base. The reliability of the method was verified by a test example considering the reaction of an elastic-plastic frame as a system with one degree of freedom under a given load. The effect of vibration damping of a high-rise structure was revealed taking into account the nonlinear viscoelastic and elastic-plastic properties of the structure material together with a viscoelastic dynamic vibration damper. *Conclusion.* The influence of the material's dissipative properties on the structure's oscillations has been established. Recommendations for optimizing the structure's performance, taking into account the dynamic oscillation damper, have been proposed. The effectiveness of damping oscillations in a high-rise structure has been demonstrated, considering the nonlinear viscoelastic and elastoplastic properties of the structure's material in conjunction with a viscoelastic dynamic oscillation damper.

Keywords: height structure, kinematic impact, nonlinear elastic, viscoelastic and elastic-plastic properties of the material, dynamic oscillation damper, finite element method, resonance mode.

For citation: Mirsaidov MM, Ishmatov AN, Yuldoshev BSh, Salimov ShM, Khazratkulov IO. Nonlinear vibrations of a high-rise structure with a dynamic vibration damper. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6):804–822. DOI: 10.18500/0869-6632-003186

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Проблема уменьшения уровня колебаний конструкций возникает в различных областях техники, промышленного и гражданского строительства, тяжелого, транспортного, энергетического машиностроения и др. При этом в первую очередь требуется выполнение технологических требований, предъявляемых условиями эксплуатации, защиты конструкций и сооружений от вредного действия вибраций.

К настоящему времени известны различные методы и средства борьбы с недопустимыми колебаниями конструкций, в частности, изменение жесткости и инерционных параметров конструкции в целях отстройки от резонансов; повышение демпфирующих свойств путем использования материалов и конструкций с высокой поглощающей способностью, например, специальных покрытий; применение виброизоляции и разнообразных гасителей колебаний. Каждый из упомянутых способов имеет, естественно, свою рациональную область применения. Гасители в этом перечне занимают особое место благодаря тому, что их использование может быть предусмотрено не только на стадии проектирования и создания конструкций, но и в случае, когда неудовлетворительные динамические качества конструкции выявлены уже в процессе ее эксплуатации. Достоинством гасителей является также то, что при сравнительно малых затратах дополнительного материала они позволяют относительно просто получить желаемый эффект уменьшения уровня колебаний.

Динамическим гасителем колебаний (ДГК) называют устройство, в котором возникает сила инерции, уменьшающая уровень колебаний защищаемой конструкции. Чаще всего ДГК выполняется в виде дополнительной массы, присоединенной с помощью упругого и демпфирующего элементов к защищаемой конструкции. Масса гасителя представляет собой твердое тело, к которому могут присоединяться съемные грузы, упругую конструкцию и контейнер, заполненный отдельными грузами, сыпучими материалами, жидкостью. В качестве упругих элементов используются стальные пружины, резиновые элементы, упругие стержни или пластины. Для рассеяния энергии применяются материалы с повышенными диссипативными свойствами.

Основные направления исследований в области виброгашения связаны с оптимизацией параметров и оценкой эффективности ДГК в стационарных и переходных режимах при различных динамических воздействиях: исследование эффективности усложненных линейных и нелинейных ДГК; определение рациональной области применения ДГК для реальных конструкций, которые имеют достаточно простые и весьма сложные расчетные схемы; разработка эффективных методов расчета конструкций с присоединенными ДГК; методы оптимизации параметров ДГК; создание новых технологических решений ДГК, обладающих требуемыми динамическими качествами.

Целью данной работы является разработка методики и алгоритма решения задачи о вынужденных колебаниях высотных сооружений, обладающих неупругими свойствами материала с ДГК, исследование динамики конкретных сооружений с использованием ДГК и анализ полученных результатов с точки зрения обнаружения эффективных условий эксплуатации.

Проблеме расчета сооружений с ДГК на стационарные и нестационарные воздействия с учетом возникновения в конструкции различных видов деформаций посвящены многочисленные научные работы. Остановимся на тех из них, которые непосредственно представляют интерес при оценке эффективного гашения колебаний сооружения с помощью ДГК.

К таким научным работам относятся следующие.

- В работе [1] рассматривается новая конструкция системы гашения вибраций для снижения ветровых колебаний стальных дымовых труб и других тонких конструкций. Предлагается система демпфирования с использованием стандартных гидравлических демпферов, закрепленных между дымовой трубой и крышей здания электростанции, на которой она расположена. В качестве примера приводится стальная дымовая труба высотой 125 м и диаметром 4.6 м в г. Ганновере (Германия). С помощью анализа методом конечных элементов было проведено численное моделирование дымовой трубы с демпферами в виде балочных элементов и определены коэффициент демпфирования системы и амплитуды колебаний.

- В работе [2] приведен эффект интерференции между двумя высокими круглыми дымовыми трубами, расположенными на различных межосевых расстояниях и углах падения. Целью работы является количественная оценка усиления ветровой нагрузки и динамических реакций

конструкции, чтобы предоставить рекомендации по проектированию расстояния между дымовыми трубами и их ориентации. В исследовании смоделирована 200-метровая бетонная дымовая труба переменного сечения в масштабе 1:200, получены коэффициенты интерференции для поверхностного давления как отношение нагрузок между изолированным случаем и расположением со второй, соседней трубой.

- В работе [3] представлена численная схема объединения трех моделей для оценки эффективности настроенных жидкостных демпферов в снижении ветровых колебаний тонких конструкций. Основные преимущества численной схемы включают: прямое моделирование нелинейного взаимодействия жидкости и конструкции, эффективное виртуальное тестирование нескольких конфигураций жидкостных демпферов, применимость к различным конструкциям и ветровым явлениям.

- В работе [4] исследованы высокие железобетонные дымовые трубы, которые представляют собой тонкие конструкции, чувствительные к динамическим ветровым нагрузкам. Рассмотрены демпферы с настроенной массой, устанавливаемые в конструкциях для снижения нежелательных колебаний при динамических нагрузках. Произведен динамический анализ ветра двух дымовых труб высотой 200 и 220 м с помощью вычислительной гидродинамики в ANSYS. Исследование показало, что правильно спроектированные системы из нескольких демпферов с оптимальным соотношением масс могут эффективно снизить вызванные ветром вибрации высоких тонких дымовых труб более чем на 20%.

- В работе [5] приведена оценка стальных дымовых труб, уязвимых к вихревым колебаниям, и осуществление их контроля с помощью аэродинамических гасителей колебаний. Конструкция гасителя колебаний расположена в верхней части цилиндрической стальной дымовой трубы высотой 85 м. Исследование успешно продемонстрировало возможность определения ветровой нагрузки и количественной оценки эффективности борьбы с вихрями, что стало возможным благодаря испытаниям динамического гасителя дымовых труб в аэродинамической трубе.

- В работе [6] рассмотрена солнечная дымовая труба на основе инновационной концепции, направленной на получение возобновляемой энергии за счет использования солнечного излучения. Высотная железобетонная башня находится в центре большого солнечного коллектора. Солнечный свет нагревает воздух под коллектором, и в результате конвекции воздух поднимается вверх через башню. Поток воздуха приводит в движение ветряные турбины у основания башни, вырабатывая электроэнергию. Дана оценка коэффициента демпфирования башни и характеристика ожидаемых условий ветровой нагрузки, включая турбулентность и направленный сдвиг.

- В работе [7] исследуются промышленные дымовые трубы, подверженные колебаниям, вызываемым ветром, как в направлении линии, так и поперек ветра. Резонанс может возникать из-за колебаний скорости, взаимодействующих с динамическими свойствами дымовой трубы. Рассмотрены математические модели и подходы для количественной оценки этих ветровых эффектов. Анализ аэродинамических коэффициентов и предположений о соотношении балки и оболочки показывает влияние на профили ветровой нагрузки и распределение напряжений. Результаты указывают на необходимость более точного определения таких параметров, как демпфирование и предельные значения амплитуды при учете формы мод и масштабов турбулентности.

- В работе [8] анализируются ветровые колебания 75-метровой конструкции дымовой трубы на Мадагаскаре с помощью вязкоупругих демпферов. Моделирование конструкции дымовой трубы конечными элементами выполнено с элементами вязкоупругого демпфера. Динамический анализ показывает, что вязкоупругие демпферы эффективно снижают вызванные ветром динамические реакции дымовой трубы, особенно реакции смещения, которые снижаются более чем на 36% при оптимизированном их размещении.

- В работе [9] рассматривается использование виброгасителей для снижения колебаний, вызываемых ветром в дымовых трубах. Амплитуду резонансных колебаний можно ограничить

с помощью системы демпфера с настроенной массой, оптимальной массой, жесткостью и демпфированием. Дымовая труба моделируется как система с одной степенью свободы. Приведены примеры конкретных систем демпфирования, используемых на практике, таких как демпфер Третнера с масляным демпфером.

- В работе [10] исследуется динамическое поведение и анализ высоких железобетонных дымовых труб. Высотная дымовая труба высотой 275 м смоделирована в STADD Pro с использованием балочных и пластинчатых элементов. Анализ позволил определить собственные частоты и формы мод дымовой трубы. Первые две частоты составили 0.252 Гц и 1.055 Гц.

- В работе [11] рассматривается использование настроенных массовых демпферов для снижения сейсмической реакции железобетонной дымовой трубы высотой 265 м, подверженной импульсным подземным воздействиям, близким к разрушению. Импульсные движения грунта с импульсами скорости являются критическими для высоких тонких конструкций. Исследованы три схемы демпферов — одиночный, несколько демпферов с равной жесткостью и несколько демпферов с равными массами. Дымовая труба моделировалась как 30 балок Эйлера–Бернулли с единичными массами. Результаты показали, что, когда период импульса близок к периоду колебаний дымовой трубы, достигается снижение смещения на 10...35%.

- В работе [12] исследуются высотные железобетонные дымовые трубы, подверженные колебаниям, вызываемым ветром, которые приводят к повреждению конструкции. Демпферы с настроенной массой используются для контроля этих колебаний. Демпферы работают за счет дополнительной небольшой массы, прикрепленной к конструкции с помощью пружин и демпферов. Дымовая труба высотой 180 м с различным диаметром и толщиной анализируется на ветровые и сейсмические нагрузки. Динамический анализ показывает, что добавление демпфера снижает смещения на 23 % по сравнению с исходной конструкцией. Исследование показывает, что демпферы эффективно снижают вызванные ветром колебания в высотных дымовых трубах.

- В работе [13] рассмотрены стальные дымовые трубы как тонкие конструкции, подверженные колебаниям, вызванным ветром. Для подавления резонанса устанавливаются виброгасители. Демпферы, настроенные на собственную частоту дымовой трубы, состоят из небольшой добавочной массы на пружине и толкателе и ограничивают колебания. Исследованы ветровые колебания двух тонких труб высотой 60 м и 120 м. Регулировка массы демпфера сместила частоту в сторону от резонанса, а увеличение демпфирования снизило амплитуду.

- В работе [14] дан обзор высотных сооружений, подверженных явлению, известному как резонанс вихрей. Резонанс происходит, когда вихри, действующие на конструкцию по частоте, совпадают с одной из собственных частот конструкции, вызывая его колебания. Если не принять надлежащих мер, этот резонанс может привести к усталости и даже катастрофическому разрушению. Рассмотрены различные варианты смягчения указанных проблем. Указано, что методы динамического анализа и испытания в аэродинамической трубе, моделирование вычислительной гидродинамики и конечно-элементное моделирование позволяют понять влияние ветра и получить инструменты для оценки и устранения потенциальных резонансных условий.

- В работе [15] исследованы динамические характеристики и обновление модели кирпичного дымохода высотного сооружения с помощью вибрационных измерений. Были определены частоты первых форм, коэффициенты демпфирования и формы мод. Начальные частоты имели погрешность до 24% по сравнению с экспериментами, что указывает на чрезмерную жесткость аналитической модели. Динамическая идентификация и обновление моделей позволили количественно оценить модальные свойства дымовой трубы и выявить скрытые повреждения.

- В работе [16] исследовано использование динамических демпферов для снижения колебаний высотных зданий. Описывается применение вязкоупругих материалов для создания демпфирующих элементов, а также математические модели, используемые для их расчета.

Результаты моделирования показали, что применение динамических демпферов может значительно уменьшить амплитуду колебаний здания и повысить его устойчивость в условиях сильных внешних воздействий, таких как землетрясения.

- В работах [17–19] приведены исследования динамики различных осесимметричных конструкций с учетом нелинейных упругих и вязкоупругих свойств материалов сооружений. Определены собственные частоты, декременты колебаний, амплитудно-частотные характеристики рассмотренных сооружений при стационарных кинематических воздействиях и выявлены некоторые механические эффекты, возникающие при оценке динамики сооружений.

- В работе [20] рассматривается новый разработанный вертикальный стальной трубчатый демпфер, который обладает большой боковой жесткостью и отличной способностью рассеивать энергию при землетрясениях. Улучшенные эксплуатационные характеристики конструкции проверяются аналитически с помощью четырехэтажной стальной рамки моментов, оснащенной стальными трубчатыми демпферами. Демпферы размещаются между любыми двумя точками, где при действии землетрясения существует большое относительное движение. Нелинейный динамический анализ конструкции с использованием программного обеспечения PERFORM-3D показал значительную выгоду от оснащения конструкции стальными трубчатыми демпферами. Сооружения, правильно спроектированные с демпферами, требуют лишь минимального осмотра после землетрясения и ограниченного ущерба.

- В работе [21] предлагается модифицированная конструкция трубчатого демпфера, называемая X-образным трубчатым демпфером (ХПД). Демпфер изготавливается путем соединения двух противоположно расположенных половин трубы, образуя сердечник X-образной формы, который затем болтами крепится к соединительным пластинам. Циклические испытания были проведены на 5 болтовых ХПД и 2 сварных ХПД для изучения закономерностей развития прочности, гистеретических характеристик, способности рассеивать энергию и режимов отказа. Экспериментальные результаты показали, что болтовые ХПД могут обеспечивать хорошую пластичность и стабильные гистеретические отношения как при стандартном циклическом протоколе, так и при усталостном циклическом протоколе. Соединенные половинки труб могут успешно образовывать режимы упругого крепления и увеличивать индуцированную вторичную прочность при больших боковых перемещениях. Сварные ХПД обладали более слабой энергорассеивающей способностью из-за ранних отказов трещин, но они могут обеспечивать более высокую жесткость и упругую консистенцию.

- В работе [22] изучено новое пассивное энергодиссипативное устройство при землетрясениях, называемое двухтрубным демпфером (ДТД). Устройство состоит из двух труб, сваренных в выбранных местах и работающих на сдвиг. Неупругая циклическая деформация рассеивает энергию в основном за счет изгиба корпуса трубы. Однако при больших перемещениях в середине устройства образуется диагональ натяжения, которая дополнительно добавляет жесткость и прочность. Прочность, жесткость и диссипация энергии ДТД составляют более двух ранее изученных одиночных трубчатых демпферов. Циклические квазистатические испытания были проведены на четырех образцах ДТД. Хорошая пластичность, поглощение энергии и стабильные петли гистерезиса наблюдались у всех образцов. Разработана модель конечного элемента, учитывающая нелинейность, большую деформацию, контакт и повреждение материала, для проведения параметрических исследований на различных размерах труб. Зависимости, определяющие поведенческие характеристики ДТД, приведены для любого размера трубы.

- В работе [23] исследуются характеристики настроенного массового демпфера (НМД), установленного в трубе высотой 183 м, расположенной на краю другой трубы. Даны численные и экспериментальные результаты. Для симуляций действие ветра рассматривается путем решения

нескольких двумерных задач потока на выбранном количестве горизонтальных плоскостей в поперечном направлении к стекам. На таких плоскостях решаются уравнения Навье–Стокса для оценки действия жидкости в различных положениях дымоходов и применяются стандартные методы интерполяции в вертикальном направлении. Для рассмотрения движущейся области используется произвольный лагранж-эйлеровский подход, а для решения поля жидкости используется дробно-шаговая схема. Для структурного моделирования трубы соединяются с помощью трехмерных концевых элементов. Процедура временной интеграции, используемая для структурной динамики, основана на стандартном методе второго порядка Боссака. За каждый период времени решается задача о жидкости, проводится аэроупругий анализ и обновляется геометрия сетки жидкости каждой плоскости в соответствии с движениями конструкций.

- В работе [24] использовано параметрическое исследование для оценки значения вращательных составляющих движения Земли в сейсмическом проектировании. Первая часть работы посвящена выводу формулы, которая может быть использована для выражения важности вращательных компонентов по сравнению с классическим сейсмическим проектированием без их использования. Используется квазистатический анализ, предполагающий инерционные силы. Важную роль играет форма фундаментального режима колебаний. По причинам простоты используется известное выражение для оценки первого собственного режима как экспоненциальной функции с различными коэффициентами мощности, которые различаются для разных типов зданий. Возможность изменения параметров грунта впоследствии включается в формулу для оценки фундаментальной частоты высотных зданий. В следующей части выполнены общие сейсмические анализы сложных моделей МКЭ трехмерных зданий и труб. Результаты этих анализов затем сравниваются с результатами упрощенных расчетов. Далее обсуждается важность характеристик грунта для определения необходимости учета вращательных эффектов.

- В работе [25] исследуется влияние параметров управления реактивным гасителем колебаний на амплитуду сейсмических перемещений конструкции башенного типа. Анализируется чувствительность отклика нестационарно движущейся башни на ограничения по перемещению; на скорость выбрасываемой реактивной струи; на время разового реактивного воздействия. Приведен алгоритм определения оптимальных параметров управления реактивными воздействиями. Дана оценка эффективности использования реактивного гасителя колебаний.

- Работа [26] посвящена возможности экспериментальной оценки эффективности работы механического гасителя колебаний в процессе эксплуатации инженерного сооружения. Современные механические гасители колебаний, как правило, не позволяют оценить эффективность их работы в ходе эксплуатации. Существует риск недостаточной объективности технического заключения, выдаваемого изготовителем гасителя. На конкретном примере представлен общий обзор возможности оценки эффективности механического гасителя колебаний высотного сооружения в рамках независимой научно-технической экспертизы.

- В работе [27] рассмотрена проблема смещения направления обрушения, вызванного воздействием высотного железобетонного дымохода в процессе взрывного сноса, в сочетании с такими методами мониторинга, как наблюдение высокоскоростной фотосъемки, пьезоэлектрического керамического датчика и вибромонитора взрыва, на примере высотного дымохода высотой 180 м. Результаты показывают, что труба будет испытывать множественные эффекты потери веса и перевеса во время процесса оседания, вызывая волны сжимающего напряжения в трубе. При большом смещении оседания сломанный железобетон внизу может иметь значительный буферный эффект, а эффект перевеса постепенно ослабевает, пока оседание не прекратится. Форма волны точки мониторинга пьезоэлектрического керамического датчика разделена на три этапа, которые конкретно характеризуют процесс развития взрывной нагрузки и воздействия трубы. Колебания, индуцированные взрывом, в основном представляют собой высокочастотные колебания выше 50 Гц; колебания, индуцированные обрушением дымовых труб, в основном

представляют собой низкочастотные колебания ниже 10 Гц. В процессе взрывного разрушения и обрушения высотного железобетонного дымохода из-за удара оседания стенка опорной трубы подвергается неравномерной силе, что приводит к отклонению направления обрушения.

- В работе [28] исследованы эквивалентные статические ветровые нагрузки (ЭСВН), принимаемые во внимание при конструктивном проектировании для учета пиковых динамических ветровых эффектов. В практике ЭСВН предназначены для конструкций без управления. Для гибких конструкций с устройствами виброрегуляции требуется исследование ЭСВН. Инертные вибропоглотители (ИВП), благодаря своему легкому весу и высокой производительности, в последнее время привлекают большое внимание исследователей. В работе установлена общая аналитическая структура ЭСВН для конструкций с ИВП. Приведены аналитические оптимальные конструктивные формулы для ИВП с различными конфигурациями и местами установки. Оценка ЭСВН для высотного дымохода, управляемого ИВП, иллюстрирована, и результаты показали значительный эффект снижения ЭСВН ИВП, особенно для поперечного вихревого резонанса. Представленный подход может быть применен к более сложным конструкциям и устройствам управления вибрацией.

- В работе [29] дан анализ нелинейных колебаний сложной динамической системы, представляющей собой шарнир, стержень и шар, скрепленные единым образом. Получено дифференциальное уравнение движения маятника с учетом трения в шарнире и при учете сопротивления континуума. Решение задачи основано на законе сохранения энергии с учетом диссипации энергии как в шарнире, так и при движении скрепленных стержня и шара в вязкой среде. Аналитически показано, что на динамику рассматриваемой системы существенно влияют потери энергии в шарнире, приводящие к сильному уменьшению времени затухания при колебательном движении, которое носит нелинейный характер. Численное решение нелинейного уравнения указывает на сильно неоднородные осцилляции обобщенной координаты, в качестве которой был выбран угол отклонения маятника от вертикальной оси. В работе предложен метод вывода дифференциальных уравнений движения сложных динамических систем.

- В работе [30] рассматривается задача о снижении уровня вибраций на лапах электрических машин с помощью динамических гасителей колебаний. Для этого лапа электрических машин представляется в виде подамортизированного твердого тела с шестью степенями свободы, установленного на вязкоупругих опорах. Разработан алгоритм и комплекс программ для исследования динамических характеристик механических систем с конечным числом степеней свободы. Реальная электрическая машина заменена моделью твердого тела на амортизаторах, имеющего шесть степеней свободы. С помощью принципа Даламбера выведены уравнения малых колебаний твердого тела с гасителями. Получена упрощенная система уравнений, учитывающая только три степени свободы. Установлено, что оптимальная настройка гасителей находится в пределах частоты 50.6...50.7 Гц и двухмассовый гаситель на 10...15% эффективнее одномассового гасителя.

- В работе [31] предложен эффективный численный метод решения обратной нелинейной задачи о движении диска ротора компрессора в упорном подшипнике скольжения. Построена математическая модель гидродинамических и тепловых процессов в подшипнике при условии осевого движения диска ротора. В рамках модели сформулирована обратная нелинейная задача определения положения ротора при заданном изменении внешней нагрузки. Предложен итерационный метод решения, использующий решение прямой задачи. Проведены численные эксперименты, показавшие эффективность предложенных подходов. Построен комплекс программ, позволяющий рассчитывать нелинейную систему движения ротора при различных физических и геометрических параметрах.

Как показывает приведенный анализ опубликованных научных работ, каждая из этих работ имеет как свои преимущества, так и некоторые недостатки, несмотря на это, все они используются при решении конкретных практических задач.

Исходя из этого анализа, можно отметить, что разработка математических моделей, методов решения и исследование динамики высотного сооружения с использованием динамического гасителя колебаний на данный момент является весьма актуальной и современной проблемой, требующей своего решения.

1. Методика

1.1. Математическая модель. В данной работе рассматриваются вынужденные колебания системы «сооружение с ДГК». Сооружение рассматривается как консольная балка переменного сечения с переменным уклоном (рис. 1) образующих с установленными в нескольких точках гасителей. Материал сооружения рассматривается нелинейно-упругим, вязкоупругим и упруго-пластическим.

Упругопластические свойства материала описываются билинейной диаграммой, в которой петля гистерезиса, характеризующая зависимость реакции сооружения от деформации [32], представляется в виде параллелограмма (рис. 2).

Такая зависимость зачастую является билинейной и характеризуется тремя параметрами (см. рис. 2): F , $tg\theta_1$, $tg\theta_2$.

Когда материал сооружения и пружины ДГК предполагаются линейно-вязкоупругими, то их свойства описываются наследственной теорией Больцмана–Вольтерры [33], то есть

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_z &= E \left\{ \varepsilon_z - \int_0^t R_1(t - \tau) \varepsilon_z(\tau) d\tau \right\}, \\ \tilde{K}_{ki} &= K_{ki} \left[w(t) - \int_0^t R_2(t - \tau) W(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагая интегральные члены малыми [34], длительный модуль упругости материала и жесткость пружины приводятся к комплексным соотношениям вида

$$\begin{aligned} \tilde{E} &\approx E [1 - i\Gamma_1^s(p) - \Gamma_1^c(p)], \\ \tilde{K}_{ki} &\approx K_{ki} [1 - i\Gamma_2^s(p) - \Gamma_2^c(p)]. \end{aligned} \quad (2)$$

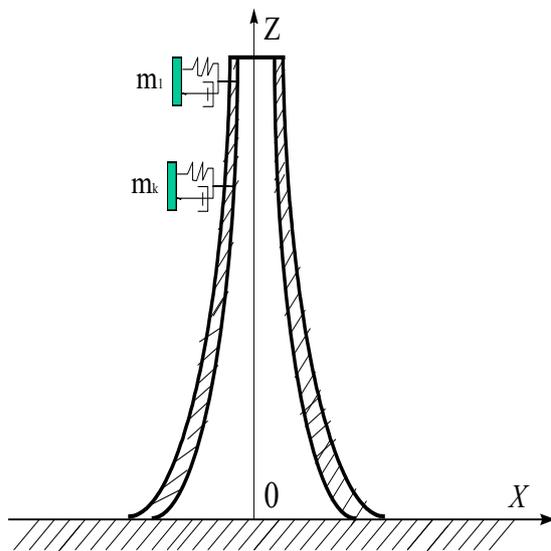


Рис. 1. Расчетная схема сооружения с ДГК
Fig. 1. Calculation scheme of a structure with DVD

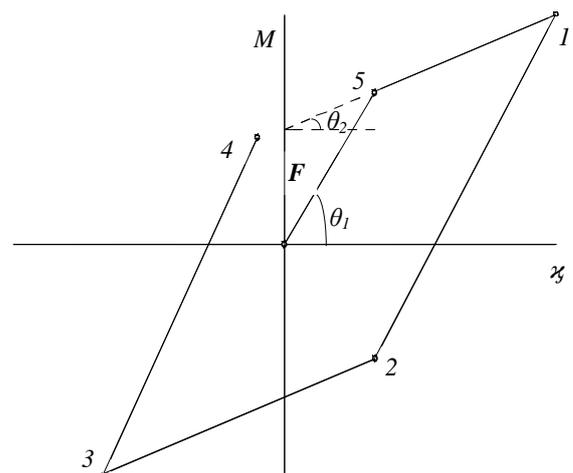


Рис. 2. Билинейная диаграмма деформирования
Fig. 2. Bi-linear deformation diagram

Здесь $\Gamma_1^c(p) = \int_0^\infty R_1(p) \cos p\tau d\tau$; $\Gamma_1^s(p) = \int_0^\infty R_1(p) \sin p\tau d\tau$; $\Gamma_2^c(p) = \int_0^\infty R_2(p) \cos p\tau d\tau$; $\Gamma_2^s(p) = \int_0^\infty R_2(p) \sin p\tau d\tau$ – косинус- и синус-образы Фурье ядра; E – мгновенный модуль упругости материала сооружения; K_{ij} – коэффициент мгновенной жесткости соответствующей пружины гасителя; p – частота внешнего воздействия; $(k, i = 1, 2, 3, \dots)$.

Требуется определить амплитуды колебаний в различных точках системы «сооружение с ДГК» при различных частотах внешнего воздействия и необходимо установить оптимальные параметры гасителя, при которых достигается наибольший эффект гашения амплитуды колебаний сооружения.

Для математической постановки данной задачи используется вариационное уравнение Лагранжа, основанное на принципе Даламбера [33], то есть

$$\int_0^l \tilde{M}_z \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) dz + \rho \int_0^l F(z) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dz + \sum_{k=1}^N m_k \ddot{w}_k \delta w_k + \sum_{k=1}^N \tilde{K}_{k1} w_k \delta w_k = 0, \quad (3)$$

кинематические условия

$$z = 0 : w = w_0(t); \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

и начальные условия

$$t = 0 : w(z, 0) = 0; \quad \frac{\partial w(z, 0)}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Здесь ρ – плотность материала сооружения; l – длина сооружения; $w(z, t)$ – прогиб сооружения; $\tilde{M}_z = \int_F x \tilde{\sigma}_z dF(z, t)$ – изгибающий момент; $\varepsilon_z = -z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ – деформация сооружений; $R_1(t)$, $R_2(t)$ – ядра релаксации; $F(z)$ – площадь поперечного сечения; m_k – присоединенные массы гасителя; N – количество присоединенных масс; \tilde{E} , \tilde{K}_{ki} – длительный модуль упругости и жесткость элементов гасителя.

При решении вариационной задачи (3)–(5) при различных кинематических воздействиях с учетом упругопластических, нелинейных вязкоупругих свойств материала сооружения и вязкоупругих параметров ДГК использован метод конечных элементов (МКЭ) [32]. В качестве конечных элементов выбран одномерный конечный элемент с 4-мя степенями свободы.

При учете упругопластического свойства материала предполагалось, что пластические шарниры образуются в концевых сечениях элементов, когда изгибающие моменты в этих сечениях достигают предела текучести. При перемене направления деформирования жесткость восстанавливалась до начального значения. Таким образом, для элемента принималась билинейная упругопластическая (см. рис. 2) зависимость «момент–кривизна». Матрица жесткости модели в целом составлялась для каждого интервала времени объединением жесткости элементов, причем для каждого элемента жесткость определялась билинейной зависимостью в соответствии с достигнутым деформированным состоянием.

1.2. Алгоритм упругопластического расчета. После использования процедуры МКЭ [32, 35] рассматриваемая вариационная задача (3)–(5) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$[M] \{\ddot{w}\} + [C] \{\dot{w}\} + \{R(w(t))\} = -[M] \{\ddot{w}_0\}, \quad (6)$$

где $[M]$, $[C]$ – матрицы массы и диссипативных сил сооружения; $\{R(w(t))\}$ – восстанавливающая сила, определяемая петлей гистерезиса, выбирается в зависимости от достигнутого на предыдущем этапе деформированного состояния.

Далее полученная система нелинейных неоднородных дифференциальных уравнений (6) решается методом Ньюмарка [32].

При решении системы уравнений (6) вектор $\{R(w(t))\}$ определяется на каждом участке петли по универсальной формуле

$$\{R\} = [K]\{w\} + \{P\} \quad (7)$$

с конкретными $[K]$ и $\{P\}$, соответствующими различным этапам колебательного процесса.

Коэффициент жесткости, соответствующий j -й узловой точке петли гистерезиса, и соответствующая i -ая компонента вектора $\{P\}$ сооружения на n -ом этапе колебательного процесса вычисляются по формулам

$$E_j(n) = 0.5 \{ [1 + (-1)^n] K_1 + [1 - (-1)^n] K_2 \},$$

$$P_j(n) = (K_1 - K_2) \left(\sum_{i=-1}^{n-1} (-1)^i w_j^i \right), \quad (8)$$

где n — номер линейного участка на петле гистерезиса. При этом начальный упругий участок соответствует значению $n = 0$.

Коэффициенты определяются следующим образом: $K_1 = tg\theta_1$; $K_2 = tg\theta_2$; w_j^i — значения w_j , соответствующие узловым точкам петли гистерезиса, при этом полагается, что $w_j^{-1} = 0$.

1.3. Тестовый пример. Достоверность методики проверялась на тестовом примере, приведенном в работе [32], где определялась реакция упругопластической рамы как системы с одной степенью свободы при заданной нагрузке.

Расчеты выполнены для системы массой $m = 0.1$, жесткостью в начальный момент $K_1 = 5$ и $K_2 = 0$ в пластической стадии. Коэффициент затухания принят равным $C = 0.2$. Шаг интегрирования $\Delta t = 0.1$ с. Нагрузка $P(t)$ задавалась таблично (Таблица).

Как видно из представленных результатов (Таблица), полученные перемещения близки к данным [32], что свидетельствует о достоверности разработанного алгоритма. Некоторое отличие в результатах последних пяти строк возникло в результате недостаточно малого шага интегрирования, что не позволило получить более точные значения для точек перехода на петле гистерезиса, которые формируют решение на последующих шагах интегрирования.

Таблица. Результаты расчетов и их сравнение с тестовыми данными

Table. Results of calculations and their comparison with test data

t, c	$P(t)$	перемещения w		скорость \dot{w}	
		приведены в [32]	получены авторами	приведены в [32]	получены авторами
0	0	0	0	0	0
0.1	5	0.070	0.0704	2.11	2.113
0.2	8	0.493	0.4935	6.35	6.355
0.3	7	1.256	1.2563	8.03	8.041
0.4	5	2.000	2.002	6.58	6.579
0.5	3	2.519	2.520	3.57	3.565
0.6	2	2.687	2.687	-0.28	-0.265
0.7	1	2.475	2.476	-3.83	-3.828
0.8	0	2.010	1.967	-5.21	-6.016
0.9	0	1.456	1.356	-5.00	-5.715
1.0	0	1.042	0.903	-3.00	-3.05
1.1	0	-	0.774	-	0.453
1.2	0	-	0.968	-	3.173

2. Результаты

С помощью вышеописанного алгоритма исследуются колебания высотного сооружения, оснащенного ДГК (рис. 1). В качестве примера расчета исследовалось динамическое поведение дымовой трубы Ново-Ангренской ТЭС (высота $H = 330$ м, диаметр в нижнем основании $D = 38$ м и на верхней отметке $D = 16.7$ м) при различных кинематических воздействиях и с различными законами деформирования материала.

В расчетах используется кинематическое воздействие в виде

$$z = 0 : w_0 = \cos pt. \quad (9)$$

При исследовании резонансного колебательного режима необходимо задание кинематического воздействия с частотой p , близкой к основной частоте ω колебаний системы. Здесь выбрано $p \approx \omega$, где ω — основная собственная частота колебаний системы, совпадающая с частотой воздействия p .

2.1. Колебания высотного сооружения с ДГК при учете вязкоупругих свойства материала и гасителя. В данном случае материал сооружения предполагается линейно-вязкоупругим. Для описания вязкоупругого свойства материала сооружения использовалось ядро А. Р. Ржаницына $R(t) = \lambda \exp(-\beta t)t^{(\alpha-1)}$, где $A = 0.0234$, $\alpha = 0.075$, $\beta = 0.00000014$, определенные из экспериментальных кривых ползучести железобетона [33].

При частоте воздействия, близкой к частоте собственных колебаний системы «сооружение с ДГК», вязкоупругие параметры пружины гасителя были приняты равными $\Gamma_2^{\tilde{n}} = 0.2$, $\Gamma_2^s = 0.02$.

При использовании (2) задача упрощается, и система дифференциальных уравнений (6) приводится к линейной системе дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами, которая далее решается методом Ньюмарка.

На рис. 3 приведены изменения горизонтальных перемещений w для точки сооружения ($z = 325$ м) (см. рис. 1) по времени с учетом вязкоупругих свойств материала и вязких свойств пружины гасителя при резонансном режиме колебаний — при воздействии в основании сооружения воздействия по закону (9).

На рис. 3 показаны полученные результаты без учета гасителя (сплошная линия) и с учетом вязкоупругого ДГК (линия со звездочкой).

Сопоставление этих результатов показывает, что ДГК, настроенный на основную частоту системы «сооружение с ДГК», практически полностью устраняет большие амплитуды колебаний в резонансном режиме. При этом гаситель колеблется с большой амплитудой, а сооружение совершает колебания с намного меньшей амплитудой по сравнению без гасителя.

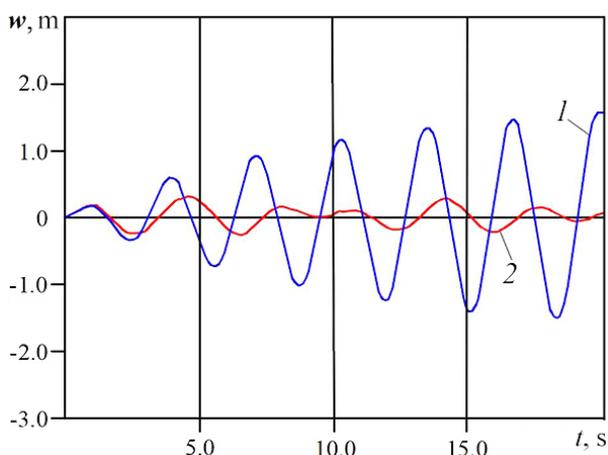


Рис. 3. Изменения горизонтальных перемещений w точки ($z = 325$ м) сооружения с учетом линейно-вязкоупругих свойств материала сооружения без гасителя (1) и с ДГК (2) при кинематическом воздействии (9)

Fig. 3. Changes in horizontal displacements w of a point ($z = 325$ m) on the structure, considering the linear viscoelastic properties of the structure's material, without a damper (1) and with a DVD (2) under kinematic excitation (9)

2.2. Колебания высотного сооружения с ДГК с учетом физически нелинейного деформирования материала сооружения. Рассматриваются колебания системы «сооружение с ДГК» (см. рис. 1) с учетом нелинейно-вязкоупругих свойств материала сооружения в резонансном режиме колебаний при действии в основании сооружения кинематического воздействия (9).

В данном случае материал сооружения рассматривается как упругий, так и нелинейно-вязкоупругий, а для описания связи между напряжением и деформацией используется кубическая нелинейность [33], то есть

$$\tilde{\sigma}_z = E \left\{ \left[\varepsilon_z(t) - \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon_z(\tau)d(\tau) \right] - \gamma \left[\varepsilon_z^3(t) - \int_0^t R_3(t-\tau)\varepsilon_z^3(\tau)d(\tau) \right] \right\}, \quad (10)$$

где E — мгновенный модуль упругости материала; R, R_3 — ядра релаксации; $\gamma = \text{const} > 0$ — коэффициент нелинейности.

В конкретных расчетах коэффициент нелинейности γ принят равным $\gamma = 120000$, что позволило описать экспериментальные кривые $\sigma = f(\varepsilon)$ с необходимой точностью при малых деформациях.

При этом частота воздействия p принята почти равной собственной частоте ω системы. Вязкоупругие параметры пружины гасителя приняты, как и для предыдущего случая.

Во всех рассмотренных примерах максимальная амплитуда воздействия принята одинаковой и равной единице.

На рис. 4 приведены полученные результаты для горизонтальных перемещений w для точки ($z = 325$ м) сооружения по времени для случаев: материал сооружения линейно-упругий без ДГК; материал сооружения нелинейно-вязкоупругий без ДГК; материал сооружения нелинейно-вязкоупругий с ДГК.

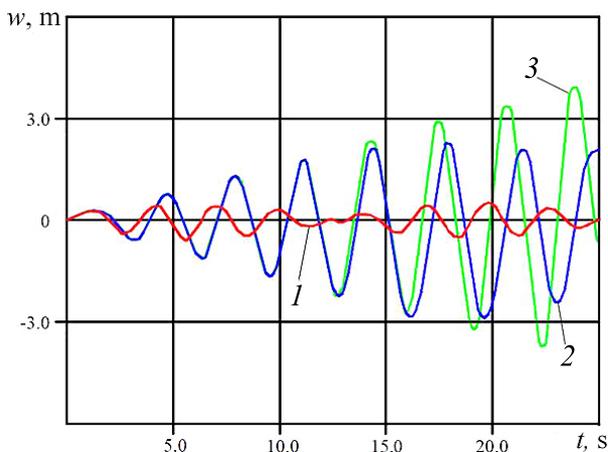


Рис. 4. Изменения горизонтальных перемещений w точки ($z = 325$ м) сооружения: материал сооружения нелинейно-упругий без учета ДГК (3); материал сооружения нелинейно-вязкоупругий без учета ДГК (2); материал сооружения нелинейно-вязкоупругий с учетом ДГК (1) при кинематическом воздействии (9)

Fig. 4. Changes in horizontal displacements w of a point ($z = 325$ m) of a structure: the structure material is nonlinearly elastic without taking into account the DVD (3); the structure material is nonlinearly viscoelastic without taking into account the DVD (2); the structure material is nonlinearly viscoelastic taking into account the DVD (1) under kinematic action (9)

На рис. 4 приведены полученные результаты для трех случаев: материал сооружения нелинейно-упругий (кривая 3) без учета ДГК; материал сооружения нелинейно-вязкоупругий (кривая 2) без учета ДГК; материал сооружения нелинейно-вязкоупругий и гаситель линейно-вязкоупругий (кривая 1). Как видно из полученных результатов (см. рис. 4), в процессе колебаний в начале процесса, когда перемещения еще малы, различие амплитуд для трех случаев практически отсутствует. С увеличением времени колебаний при учете нелинейно упругих свойств материала сооружения амплитуда колебаний (кривая 3) растет, происходит резонанс, как в упругом случае. Учет нелинейно-вязкоупругих свойств сооружения также не позволяет росту амплитуды колебаний (кривая 2) по времени. Установка гасителя и учет нелинейных вязкоупругих свойств сооружения эффективно снижает уровень колебаний сооружения (кривая 1). При этом учет вязкоупругих свойств незначительно уменьшает частотный спектр колебаний.

2.3. Колебания высотного сооружения с ДГК с учетом упругопластического деформирования материала сооружения. На рис. 5 показаны изменения амплитуды колебаний верхней точки ($z = 325$ м) сооружения (то есть горизонтальные перемещения — w) при низкочастотном воздействии вида

$$\ddot{w}_0 = \begin{cases} \sin(0.3pt), & 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{0.3p}, \\ 0, & t > \frac{2\pi}{0.3p} \end{cases} \quad (11)$$

с учетом упругопластических свойств материала сооружения без учета ДГК (кривая 1) и с учетом линейно-вязкоупругих свойств ДГК (кривая 2).

Анализ графиков (рис. 5) показывает, что учет упругопластических свойств материала сооружения и с ДГК (кривая 2) увеличивает период колебаний сооружения и приводит к снижению уровня колебаний высотного сооружения примерно почти в два раза.

Таким образом, полученные расчеты высотного сооружения с ДГК при различных динамических воздействиях и с учетом различных свойств материала сооружения и ДГК позволяют сделать выводы, касающиеся эффективности использования ДГК при эксплуатации высотных сооружений в различных динамических режимах.

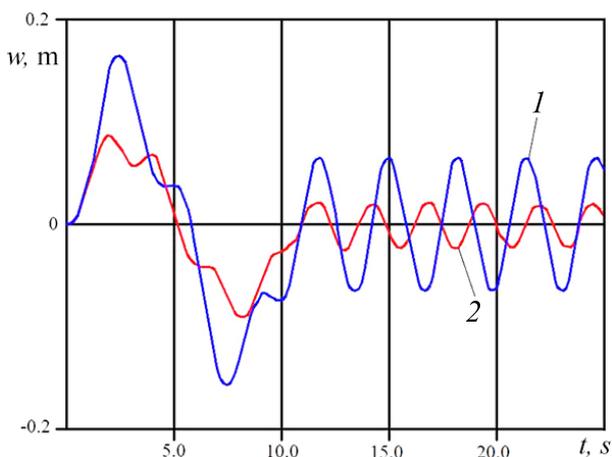


Рис. 5. Изменения горизонтальных перемещений верха точки ($z = 325$ м) сооружения с учетом упругопластических свойств материала сооружения: без ДГК (—) и с ДГК (— * — * —) при низкочастотном кинематическом воздействии (11)

Fig. 5. Changes in horizontal displacements of the top point ($z = 325$ m) of the structure taking into account the elastic-plastic properties of the structure material: without DVD (—) and with DVD (— * — * —) under low-frequency kinematic action (11)

Заключение

1. В работе приведен подробный обзор известных работ, связанных с исследованием динамического поведения ряда высотных сооружений с ДГК и без него.
2. Для оценки динамического поведения сооружения с использованием ДГК дана математическая модель, метод и алгоритм решения поставленных задач с учетом линейно- и нелинейно-упругих, вязкоупругих и упругопластических свойств материала сооружения с ДГК при действии различных кинематических воздействий.
3. Исследованы колебания высотных сооружений с учетом линейно-, нелинейно-упругих, вязкоупругих и упругопластических свойств материала сооружения с ДГК при различных кинематических воздействиях вблизи резонансного режима.
4. Выявлена эффективность гашения колебаний высотного сооружения при учете нелинейно-вязкоупругих и упругопластических свойств материала сооружения совместно с вязкоупругим ДГК.

Список литературы

1. Klein H. W., Kaldenbach W. A new vibration damping facility for steel chimneys // In: Proc. of the Conference on Mechanics in Design. Trent University of Nottingham, UK. 1998.
2. Sun Y., Li Zh., Sun X., Su N., Peng Sh. Interference effects between two tall chimneys on wind loads and dynamic responses // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2020. Vol. 206. P. 104227. DOI: 10.1016/j.jweia.2020.104227.

3. *Vilceanu V., Kavrakov I., Morgenthal G.* Coupled numerical simulation of liquid sloshing dampers and wind–structure simulation model // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2023. Vol. 240. P. 105505. DOI: 10.1016/j.jweia.2023.105505.
4. *Krishnan R., Deshmukh M. A., Sivakumar V. L., Joshi G., Geethakumari T., Prakash F.* Effective tuned mass damper system for RC tall chimney dynamic wind response control // *Materials Today: Proceedings*. 2023. DOI: 10.1016/j.matpr.2023.03.660.
5. *Flaga A., Klaput R., Flaga L., Krajewski P.* Wind tunnel model tests of wind action on the chimney with grid-type curtain structure // *Archives of Civil Engineering*. 2021. Vol. 67, no. 3. P. 177–196. DOI: 10.24425/ace.2021.138050.
6. *Rousseau J. P.* Dynamic Evaluation of the Solar Chimney. MScEng Thesis. Stellenbosch: University of Stellenbosch, 2005. 90 p.
7. *Niemann H.-J., Lupi F., Hoegger R.* Vibrations of chimneys under the action of the wind // In: *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EUROLYN 2014*. 30 June – 2 July 2014, Porto, Portugal. P. 1385–1391.
8. *Xu Zh.-D., Zhu J.-T., Wang D.-X.* Analysis and optimization of wind-induced vibration control for high-rise chimney structures // *International Journal of Acoustics and Vibration*. 2014. Vol. 19, no. 1. P. 42–51. DOI: 10.20855/ijav.2014.19.1336.
9. *Bajpai V. K., Garg T. K., Gupta M. K.* Vibration-dampers for smoke stacks // In: *International Conference on Applied and Theoretical Mechanics*. 14–16 December, 2007, Tenerife, Spain. WSEAS Press, 2007. P. 124–130.
10. *Babu B., Ravindraraaj B. J., Kumar R. R., Saranya R.* Dynamic behaviors of tall chimneys // *International Journal of Research in Engineering and Technology*. 2016. Vol. 5, no. 3. P. 287–294.
11. *Elias S., Rupakhety R., Olafsson S.* Tuned mass dampers for response reduction of a reinforced concrete chimney under near-fault pulse-like ground motions // *Front. Built Environ*. 2020. Vol. 6. P. 92. DOI: 10.3389/fbuil.2020.00092.
12. *Ingale S. D., Magdum M. M.* Vibration control of uniformly tapered chimney by using tuned mass damper // *International Journal of Engineering Science and Innovative Technology*. 2013. Vol. 2, no. 1 P. 148–163.
13. *Kuras P., Ortyl-L., Owerko T., Kocierz R., Kędzierski M., Podstolak P.* Analysis of effectiveness of steel chimneys vibration dampers using surveying methods // In: *Proceedings of the 16th International Multidisciplinary Scientific GeoConference (SGEM 2016)*. Book 2, Vol. 3. Albena, Bulgaria. 2016. P. 255–262.
14. *Karakozova A. I., Mondrus V. L.* Resonant vortex excitation of high-rise structures // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2023. Vol. 19, no. 2. P. 60–70. DOI: 10.22337/2587-9618-2023-19-2-60-70.
15. *Aoki T, Sabia D., Rivella D., Muto H.* Dynamic identification and model updating of the Howa brick chimney, Tokoname, Japan // *WIT Transactions on the Built Environment*. 2005. Vol. 83. P. 265–275. DOI: 10.2495/STR050261.
16. *Mirsaidov M., Abdikarimov R., Khudainazarov S., Sabirjanov T.* Damping of high-rise structure vibrations with viscoelastic dynamic dampers // *E3S Web Conf*. 2020. Vol. 224. P. 02020. DOI: 10.1051/e3sconf/202022402020.
17. *Mirsaidov M. M., Khudainazarov Sh. O.* Spatial natural vibrations of viscoelastic axisymmetric structures // *Magazine of Civil Engineering*. 2020. № 4(96). P. 118–128, DOI: 10.18720/M-CE.96.10.
18. *Мирсаидов М. М., Сафаров И. И., Теуаев М. Х., Элибоев Н. Р.* Свободные линейные колебания вязкоупругой сферической оболочки с наполнителем // *Известия вузов. ПНД*. 2025. Т. 33, № 4. С. 485–496. DOI: 10.18500/0869-6632-003162.
19. *Mirsaidov M. M., Nosirov A. A., Nasirov I. A.* Modeling of spatial natural oscillations of axisymmetric systems // *J. Phys.: Conf. Ser*. 2021. Vol. 1921. P. 012098. DOI: 10.1088/1742-6596/1921/1/012098.
20. *Utomo J., Moestopo M., Surahman A., Kusumastuti D.* Applications of vertical steel pipe dampers

- for seismic response reduction of steel moment frames // MATEC Web Conf. 2017. Vol. 138. P. 02002. DOI: 10.1051/mateconf/201713802002.
21. Guo W., Chen X., Yu Y., Bu D., Li S., Fang W., Wang X., Zeng Ch., Wang Y. Development and seismic performance of bolted steel dampers with X-shaped pipe halves // Eng. Struct. 2021. Vol. 239. P. 112327. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.112327.
 22. Maleki S., Mahjoubi S. Dual-pipe damper // J. Constr. Steel Res. 2013. Vol. 85. P. 81–91. DOI: 10.1016/J.JCSR.2013.03.004.
 23. Belver A. V., Magdaleno Á., Brownjohn J. M. W., Lorenzana A. Performance of a TMD to mitigate wind-induced interference effects between two industrial chimneys // Actuators. 2021. Vol. 10, no. 1. P. 12. DOI: 10.3390/act10010012.
 24. Sokol M., Ároch R., Lamperová K., Marton M., García-Sanz-Calcedo J. Parametric analysis of rotational effects in seismic design of tall structures // Appl. Sci. 2021. Vol. 11, no. 2. P. 597. DOI: 10.3390/app11020597.
 25. Шейн А. И., Зайцев М. Б. Гашение сейсмических колебаний сооружений башенного типа с помощью реактивного гасителя // Эксперт: теория и практика. 2023. Т. 4, № 23. P. 171–176. DOI: 10.51608/26867818.
 26. Патрикеев А. В. Оценка эффективности механического гасителя колебаний высотного сооружения в процессе эксплуатации // Международный научно-исследовательский журнал. 2020. № 9(99). С. 23–26. DOI: 10.23670/IRJ.2020.99.9.004.
 27. Huang X., Xie X., Sun J., Zhong D., Yao Y., Tu S. Monitoring and analysis of the collapse process in blasting demolition of tall reinforced concrete chimneys // Sensors. 2023. Vol. 23, no. 13. P. 6240. DOI: 10.3390/s23136240.
 28. Su N., Peng S., Chen Z., Hong N., Uematsu Y. Equivalent static wind load for structures with inerter-based vibration absorbers // Wind. 2022. Vol. 2, no. 4. P. 766–783. DOI: 10.3390/wind2040040.
 29. Гладков С. О., Богданова С. Б. К вопросу учета силы сопротивления в шарнирной точке крепления физического маятника и ее влияние на динамику движения // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 53–62. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-1-53-62.
 30. Сафаров И. И., Тешаев М. Х. Динамическое гашение колебаний твёрдого тела, установленного на вязкоупругих опорах // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 63–74. DOI: 10.18500/0869-6632-003021.
 31. Федотов П. Е., Соколов Н. В. Решение нелинейной задачи одностороннего динамически нагруженного упорного подшипника скольжения // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 180–196. DOI: 10.18500/0869-6632-003097.
 32. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
 33. Mirsaidov M. M., Sultanov T. Z. Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earthen structures // Soil Mech. Found. Eng. 2013. Vol. 49, no. 6. P. 250–256. DOI: 10.1007/s11204-013-9198-8.
 34. Филатов А. Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1974. 214 с.
 35. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и МКЭ. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.

References

1. Klein HW, Kaldenbach W. A new vibration damping facility for steel chimneys. In: Proc. of the Conference on Mechanics in Design. Trent University of Nottingham, UK. 1998.
2. Sun Y, Li Zh, Sun X, Su N, Peng Sh. Interference effects between two tall chimneys on wind loads and dynamic responses. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2020;206;104227. DOI: 10.1016/j.jweia.2020.104227.
3. Vilceanu V, Kavrakov I, Morgenthal G. Coupled numerical simulation of liquid sloshing dampers and wind–structure simulation model. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2023;240:105505. DOI: 10.1016/j.jweia.2023.105505.

4. Krishnan R, Deshmukh MA, Sivakumar VL, Joshi G, Geethakumari T, Prakash F. Effective tuned mass damper system for RC tall chimney dynamic wind response control. *Materials Today: Proceedings*. 2023. DOI: 10.1016/j.matpr.2023.03.660.
5. Flaga A, K-laput R, Flaga-L, Krajewski P. Wind tunnel model tests of wind action on the chimney with grid-type curtain structure. *Archives of Civil Engineering*. 2021;67(3):177–196. DOI: 10.24425/ace.2021.138050.
6. Rousseau JP. Dynamic Evaluation of the Solar Chimney. MScEng Thesis. Stellenbosch: University of Stellenbosch; 2005. 90 p.
7. Niemann H-J, Lupi F, Hoeffler R. Vibrations of chimneys under the action of the wind. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURO DYN 2014*. 30 June – 2 July 2014, Porto, Portugal. P. 1385–1391.
8. Xu Zh-D, Zhu J-T, Wang D-X. Analysis and optimization of wind-induced vibration control for high-rise chimney structures. *International Journal of Acoustics and Vibration*. 2014;19(1):42–51. DOI: 10.20855/ijav.2014.19.1336.
9. Bajpai VK, Garg TK, Gupta MK. Vibration-dampers for smoke stacks. In: *International Conference on Applied and Theoretical Mechanics*. 14–16 December, 2007, Tenerife, Spain. WSEAS Press; 2007. P. 124–130.
10. Babu B, Ravindraraj BJ, Kumar RR, Saranya R. Dynamic behaviors of tall chimneys. *International Journal of Research in Engineering and Technology*. 2016;5(3):287–294.
11. Elias S, Rupakhety R, Olafsson S. Tuned mass dampers for response reduction of a reinforced concrete chimney under near-fault pulse-like ground motions. *Front. Built Environ*. 2020;6:92. DOI: 10.3389/fbuil.2020.00092.
12. Ingale SD, Magdum MM. Vibration control of uniformly tapered chimney by using tuned mass damper. *International Journal of Engineering Science and Innovative Technology*. 2013;2(1):148–163.
13. Kuras P, Ortyl-L, Owerko T, Kocierz R, Kędzierski M, Podstolak P. Analysis of effectiveness of steel chimneys vibration dampers using surveying methods. In: *Proceedings of the 16th International Multidisciplinary Scientific GeoConference (SGEM 2016)*. Book 2, Vol. 3. Albena, Bulgaria. 2016. P. 255–262.
14. Karakozova AI, Mondrus VL. Resonant vortex excitation of high-rise structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2023;19(2):60–70. DOI: 10.22337/2587-9618-2023-19-2-60-70.
15. Aoki T, Sabia D, Rivella D, Muto H. Dynamic identification and model updating of the Howa brick chimney, Tokoname, Japan. *WIT Transactions on the Built Environment*. 2005;83:265–275. DOI: 10.2495/STR050261.
16. Mirsaidov M, Abdikarimov R, Khudainazarov S, Sabirjanov T. Damping of high-rise structure vibrations with viscoelastic dynamic dampers. *E3S Web Conf*. 2020;22:02020. DOI: 10.1051/e3sconf/202022402020.
17. Mirsaidov MM, Khudainazarov ShO. Spatial natural vibrations of viscoelastic axisymmetric structures. *Magazine of Civil Engineering*. 2020;4(96):118–128. DOI: 10.18720/MCE.96.10.
18. Mirsaidov MM, Safarov II, Teshaev MK, Eliboyev NR. Free linear vibrations of a viscoelastic spherical shell with filler. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):485–496. DOI: 10.18500/0869-6632-003162.
19. Mirsaidov MM, Nosirov AA, Nasirov IA. Modeling of spatial natural oscillations of axisymmetric systems. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;1921:012098. DOI: 10.1088/1742-6596/1921/1/012098.
20. Utomo J, Moestopo M, Surahman A, Kusumastuti D. Applications of vertical steel pipe dampers for seismic response reduction of steel moment frames. *MATEC Web Conf*. 2017;138:02002. DOI: 10.1051/matecconf/201713802002.
21. Guo W, Chen X, Yu Y, Bu D, Li S, Fang W, Wang X, Zeng Ch, Wang Y. Development and seismic

- performance of bolted steel dampers with X-shaped pipe halves. Eng. Struct. 2021;239:112327. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.112327.
22. Maleki S, Mahjoubi S. Dual-pipe damper. J. Constr. Steel Res. 2013;85:81–91. DOI: 10.1016/J.JCSR.2013.03.004.
 23. Belver AV, Magdaleno Á, Brownjohn JMW, Lorenzana A. Performance of a TMD to mitigate wind-induced interference effects between two industrial chimneys. Actuators. 2021;10(1):12. DOI: 10.3390/act10010012.
 24. Sokol M, Ároch R, Lamperová K, Marton M, García-Sanz-Calcedo J. Parametric analysis of rotational effects in seismic design of tall structures. Appl. Sci. 2021;11(2):597. DOI: 10.3390/app11020597.
 25. Shein AI, Zaitsev MB. Extinction of seismic oscillations of tower-type structures using a jet damper. Expert: Theory and Practice. 2023;4(23):171–176 (in Russian).
 26. Patrikeev AB. Evaluating performance of the mechanical dampener of a high-rise structure in use. International Research Journal. 2020;(9(99)):23–26 (in Russian). DOI: 10.23670/IRJ.2020.99.9.004.
 27. Huang X, Xie X, Sun J, Zhong D, Yao Y, Tu S. Monitoring and analysis of the collapse process in blasting demolition of tall reinforced concrete chimneys. Sensors. 2023;23(13):6240. DOI: 10.3390/s23136240.
 28. Su N, Peng S, Chen Z, Hong N, Uematsu Y. Equivalent static wind load for structures with inerter-based vibration absorbers. Wind. 2022;2(4):766–783. DOI: 10.3390/wind2040040.
 29. Gladkov SO, Bogdanova SB. On the question accounting of the resistance force at the hinge point of setting physical pendulum and its influence on the dynamics of movement. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2019;27(1):53–62. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-1-53-62.
 30. Safarov II, Teshaev MK. Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1):63–74. DOI: 10.18500/0869-6632-003021.
 31. Fedotov PE, Sokolov NV. Solving a nonlinear problem for a one-sided dynamically loaded sliding thrust bearing. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2):180–196. DOI: 10.18500/0869-6632-003097.
 32. Clough RW, Penzien J. Dynamics of Structures. N.Y.: McGraw-Hill; 1975. 634 p.
 33. Mirsaidov MM, Sultanov TZ. Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earthen structures. Soil Mech. Found. Eng. 2013;49(6):250–256. DOI: 10.1007/s11204-013-9198-8.
 34. Filatov AN. Asymptotic Methods in the Theory of Differential and Integral-Differential Equations. Tashkent: Fan; 1974. 214 p. (in Russian).
 35. Bathe KJ, Wilson EL. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Hoboken: Prentice-Hall; 1976. 528 p.

Мирсаидов Мирзиёд Мирсаидович — родился в Юкоричирчикском районе Ташкентской области Узбекской ССР (1948). Окончил Ташкентский политехнический институт по специальности «Инженер-механик» (1971) и Ташкентский государственный университет по специальности «Математик» (1986). Доктор технических наук (1987), профессор (1991), академик Академии наук Республики Узбекистан (2017). Заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства». Научный руководитель 30 кандидатских (PhD) и 6 докторских (DSc) диссертаций. Автор более 200 научных работ в отечественных и зарубежных научных журналах, более 250 — в сборниках материалов зарубежных и республиканских научных конференций, более 15 монографий, 9 учебников и 14 учебных пособий.



Узбекистан, Ташкент 100000, ул. Кари Ниязи, 39
 Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт
 инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»
 E-mail: mirsaidov1948@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-8907-7869
 AuthorID (eLibrary.Ru): 980333



Илматов Алишер Наркабилович — родился в 1962 году. Кандидат физико-математических наук, доцент. Доцент кафедры механики и компьютерного моделирования Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства». Автор более 60 научных работ, более 10 авторских свидетельств.

Узбекистан, Ташкент 100000, ул. Кари Ниязи, 39
Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»
E-mail: ribs@mail.ru
ScopusID: 7801321486



Юлдошев Бахтиёр Шодмонович — родился в 1968 году. Кандидат физико-математических наук, доцент. Доцент кафедры механики и компьютерное моделирование Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства». Автор более 50 научных работ и более 10 авторских свидетельств.

Узбекистан, Ташкент 100000, ул. Кари Ниязи, 39
Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»
E-mail: Baxtiyor_yuldashev68@mail.ru
ORCID: 0000-0002-9006-5662
ScopusID: 57202157721



Салимов Шоолим Музаффорович — родился в 1990 году. Заведующий кафедрой математики Ташкентского университета прикладных наук. Автор более 10 научных работ.

Узбекистан, 100149 Ташкент, ул. Гавхар, 1
Ташкентский университет прикладных наук
E-mail: salimovshoolim@gmail.com
ORCID: 0000-0003-0750-8619
ScopusID: 57219129262



Хазраткулов Исломжон Обид угли — родился в 1993 году. Докторант кафедры механики и компьютерного моделирования Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства». Автор более 20 научных работ.

Узбекистан, Ташкент 100000, ул. Кари Ниязи, 39
Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»
E-mail: islomjon.xazratqulov093@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6380-6528
ScopusID: 57214069488



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003187
EDN: CDEQIR

Модуляционная неустойчивость и формирование солитонов при взаимодействии электромагнитной волны с потоком невозбужденных неизохронных электронов-осцилляторов

Н. С. Гинзбург¹, В. Ю. Заславский¹, И. В. Зотова¹, А. А. Ростунцова^{1,2,3}✉,
Н. М. Рыскин^{2,3}, А. С. Сергеев¹, Л. А. Юровский¹

¹ФИЦ Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

³Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ginzburg@ipfran.ru, zas-vladislav@ipfran.ru, zotova@appl.sci-nnov.ru,
✉rostuncova@mail.ru, ryskinm@info.sgu.ru, sergeev@ipfran.ru, leo@ipfran.ru

Поступила в редакцию 14.05.2025, принята к публикации 10.06.2025,

опубликована онлайн 9.07.2025, опубликована 28.11.2025

Аннотация. В работе развивается теория модуляционной неустойчивости (МН) при взаимодействии электромагнитной волны со встречным потоком невозбужденных электронов-осцилляторов в условиях циклотронного резонанса. Цель настоящего исследования состоит в установлении картины возможных режимов распространения волны в такой системе. Методы. Теоретический анализ проводится на основе нелинейного уравнения Шрёдингера, которое позволяет установить условия возникновения МН и получить простое аналитическое выражение для границы перехода МН от абсолютной к конвективной на плоскости параметров частота – амплитуда волны. Теоретические выводы о возможных режимах распространения волны верифицируются прямым 3D-моделированием электронно-волнового взаимодействия методом частиц в ячейке (particle-in-cell, PIC). Результаты. Показано, что выше границы полосы циклотронного поглощения имеют место нестационарные режимы автомодуляции, связанные с развитием МН абсолютного характера, которые могут приводить к формированию последовательностей солитоноподобных импульсов. При повышении частоты входного сигнала автомодуляция сменяется стационарным одночастотным прохождением сигнала, что обусловлено сменой характера МН с абсолютного на конвективный. Результаты прямого 3D PIC-моделирования согласуются с выводами, полученными на основе анализа системы усредненных уравнений. При увеличении частоты входного сигнала наблюдается одна и та же последовательность переходов между различными динамическими режимами. Заключение. Проведённое 3D PIC-моделирование позволило исследовать ситуацию, близкую к условиям возможного эксперимента. Продемонстрирована возможность преобразования сигнала с частотой 241.3 ГГц в последовательность наносекундных импульсов, которая близка к периодической. Такой эффект представляет интерес для генерации частотных гребёнок в микроволновом диапазоне.

Ключевые слова: модуляционная неустойчивость, самоиндуцированная прозрачность, микроволновые солитоны, циклотронный резонанс.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-12-00291.

Для цитирования: Гинзбург Н. С., Заславский В. Ю., Зотова И. В., Ростунцова А. А., Рыскин Н. М., Сергеев А. С., Юровский Л. А. Модуляционная неустойчивость и формирование солитонов при взаимодействии электромагнитной волны с потоком невозбужденных неизохронных электронов-осцилляторов // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 6. С. 823–842. DOI: 10.18500/0869-6632-003187. EDN: CDEQIR

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003187

Modulation instability and soliton formation under interaction of an electromagnetic wave with a beam of unexcited non-isochronous electron-oscillators

N. S. Ginzburg¹, V. Yu. Zaslavsky¹, I. V. Zotova¹, A. A. Rostuntsova^{1,2,3}✉,
N. M. Ryskin^{2,3}, A. S. Sergeev¹, L. A. Yurovskiy¹

¹FRC A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

³Saratov State University, Russia

E-mail: ginzburg@ipfran.ru, zas-vladislav@ipfran.ru, zotova@appl.sci-nnov.ru,

✉rostuncova@mail.ru, ryskinm@info.sgu.ru, sergeev@ipfran.ru, leo@ipfran.ru

Received 14.05.2025, accepted 10.06.2025, available online 9.07.2025, published 28.11.2025

Abstract. This paper develops the theory of modulation instability (MI) in the interaction of an electromagnetic wave with a counterpropagating beam of unexcited electron-oscillators under the cyclotron resonance conditions. The *purpose* of this study is to establish the pattern of possible wave propagation regimes in such a system. *Methods.* The theoretical analysis is based on the nonlinear Schrödinger equation, which enables to determine the conditions for occurrence of MI and obtain a simple analytical expression for the boundary between the absolute and convective MI on the wave frequency – wave amplitude parameter plane. The theoretical conclusions about possible regimes of wave propagation are verified by direct 3D particle-in-cell (PIC) simulation of the electron-wave interaction. The obtained *results* show that above the boundary of cyclotron absorption band non-stationary self-modulation regimes occur. These regimes are caused by absolute MI and can lead to the formation of soliton-like pulse trains. As the frequency of the input signal increases, self-modulation is replaced by a stationary single-frequency regime of wave propagation. This transition is due to the change of MI character from absolute to convective. The results of 3D PIC simulation are consistent with the theoretical analysis of the averaged equations, and the same sequence of transitions between different dynamic regimes occurs as the input frequency increases. *Conclusion.* 3D PIC simulation provided an opportunity to study a model that approximates the conditions of a potential experiment. The possibility of converting the 241.3-GHz signal into a close-to-periodic train of nanosecond pulses was demonstrated. Such an effect is useful for the generation of microwave frequency combs.

Keywords: modulation instability, self-induced transparency, microwave solitons, cyclotron resonance.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation under Grant No. 23-12-00291.

For citation: Ginzburg NS, Zaslavsky VYu, Zotova IV, Rostuntsova AA, Ryskin NM, Sergeev AS, Yurovskiy LA. Modulation instability and soliton formation under interaction of an electromagnetic wave with a beam of unexcited non-isochronous electron-oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(6):823–842. DOI: 10.18500/0869-6632-003187

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В нелинейной физике весьма плодотворным оказывается подход, опирающийся на аналогии между явлениями, которые наблюдаются в системах разной физической природы. В частности, хорошо известно, что многие эффекты в системах типа «электронный поток – электромагнитное поле» имеют аналоги в нелинейной оптике [1, 2]. Одним из подобных эффектов является самоиндуцированная прозрачность (СИП), которая возникает при распространении в двухуровневой

*Гинзбург Н. С., Заславский В. Ю., Зотова И. В., Ростунцова А. А.,
Рыскин Н. М., Сергеев А. С., Юровский Л. А.
Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 6*

пассивной (неинвертированной) среде короткого светового импульса с длительностью гораздо меньшей, чем времена релаксации [3]. В условиях резонанса, когда частота волны близка к частоте перехода, невозбужденные частицы, поглощая энергию поля, переходят на возбужденный уровень и ослабляют передний фронт импульса. В таких условиях задний фронт импульса распространяется в уже возбужденной среде, вызывая обратные переходы частиц, сопровождающиеся усилением соответствующих участков профиля импульса. В результате импульс приобретает равновесную солитоноподобную форму и распространяется с постоянной скоростью как стационарная уединенная волна [4]. Более того, импульс с достаточно большой энергией может распадаться на несколько СИП-солитонов.

Как было показано в [5–8], в классической СВЧ-электронике явление, аналогичное СИП, имеет место при резонансном взаимодействии электромагнитной волны (ЭМВ) с потоком невозбужденных циклотронных электронов-осцилляторов. В потоке электронов, движущемся в продольном магнитном поле, поперечное движение электронов представляет собой вращение с циклотронной частотой ω_H . Такой поток электронов можно трактовать как совокупность циклотронных осцилляторов, которые неизохронны в силу релятивистской зависимости циклотронной частоты от энергии [9]. Если поток изначально прямолинейный, то есть вращательная скорость отсутствует, то такая среда является невозбужденной.

Важно отметить, что в вакуумной СВЧ-электронике, в отличие от квантовой оптики, релаксационные процессы, такие как столкновения электронов между собой или с ионным фоном, как правило, несущественны. Таким образом, возникают новые режимы, которые невозможно наблюдать в лазерных системах. В частности, результаты численного моделирования показывают, что при встречном распространении электронов и волны непрерывный сигнал постоянной амплитуды может преобразоваться в близкую к периодической последовательность микроволновых солитонов [6–8]. Данный эффект представляет очевидный интерес с точки зрения периодической генерации коротких импульсов со спектром в виде частотной гребёнки, что актуально для ряда практических приложений, в частности, в спектроскопии [10, 11]. Также в [6–8] в численном моделировании была получена генерация и более сложных, хаотических последовательностей коротких импульсов.

В наших предыдущих исследованиях [12, 13] было показано, что генерация солитонов в данной системе связана с развитием модуляционной неустойчивости (МН), которая представляет собой неустойчивость монохроматической волны с несущей частотой ω относительно медленных модуляций на боковых частотах $\omega \pm \Omega$, $\Omega \ll \omega$. МН наблюдается в системах различной природы, включая оптические волокна, электромагнитные линии передачи, волны на поверхности воды, различные типы волн в плазме и др. [14–16]. Как показали результаты теоретического анализа и численного моделирования, ситуация существенным образом зависит от того, является МН абсолютной или конвективной [13]. При конвективной неустойчивости нарастающие модуляционные возмущения сносятся вдоль системы и покидают ее, в результате чего по окончании переходного процесса устанавливается режим стационарного одночастотного распространения сигнала. Однако, если неустойчивость абсолютная, эти возмущения заполняют все пространство взаимодействия, в результате чего входной сигнал трансформируется в последовательность бегущих солитонов [12, 13]. Отметим, что в квантовой оптике, в отличие от рассматриваемой ситуации, пронаблюдать МН непрерывного сигнала не удастся, поскольку релаксационные процессы неизбежно подавляют такую неустойчивость.

В данной статье излагается теория МН и формирования микроволновых СИП-солитонов в системе «встречная электромагнитная волна — поток невозмущенных неизохронных электронов-осцилляторов». При этом анализ, проводившийся ранее на основе усредненных уравнений [12, 13], дополняется прямым 3D-моделированием электронно-волнового взаимодействия методом частиц в ячейке (particle-in-cell, PIC) в программном пакете CST Studio Suite [17]. Это позволяет

не только верифицировать физическую картину, получаемую на основе упрощенного подхода, но и более детально исследовать ситуацию, близкую к условиям возможного эксперимента, включая определение основных количественных характеристик генерируемых последовательностей микроволновых солитонов.

1. Модель и основные уравнения

Исследуемая модель представлена на рис. 1. Трубоччатый пучок электронов, направляемый продольным магнитным полем B_0 , взаимодействует с обратной ЭМВ в цилиндрическом волноводе. Электроны инжектируются через левую границу системы (в точке $z = 0$) с постоянной продольной скоростью V_z и нулевой вращательной скоростью. Таким образом, электронный пучок изначально является прямолинейным. Непрерывный гармонический сигнал с постоянной амплитудой подаётся на правой границе системы ($z = l$).

Эффективное взаимодействие электронов и ЭМВ имеет место в условиях циклотронного резонанса, то есть при условии синхронизма волноводной TE_{mn} -моды и быстрой циклотронной волны в электронном пучке:

$$\omega_r \approx k_z V_z + \omega_H, \quad (1)$$

где $\omega_r = \omega_r(k_z)$ — частота волны, k_z — продольное волновое число (в случае, когда волна обратная, $k_z < 0$), $\omega_H = eB_0 / (m_e \gamma)$ — циклотронная частота, $\gamma = (1 - V_z^2/c^2)^{-1/2}$, e и m_e — заряд и масса покоя электрона соответственно.

Электронный поток, движущийся в однородном магнитном поле, можно трактовать как ансамбль осцилляторов, которые неизохронны в силу релятивистской зависимости циклотронной частоты от энергии $\omega_H = \omega_H(\gamma)$ [9]. Изначально прямолинейный пучок электронов может рассматриваться как пассивная среда из невозмущенных циклотронных осцилляторов. Когда ЭМВ распространяется навстречу такому электронному пучку в условиях резонанса (1), она начинает поглощаться, вызывая поперечные колебания электронов (см. рис. 1). С ростом вращательной

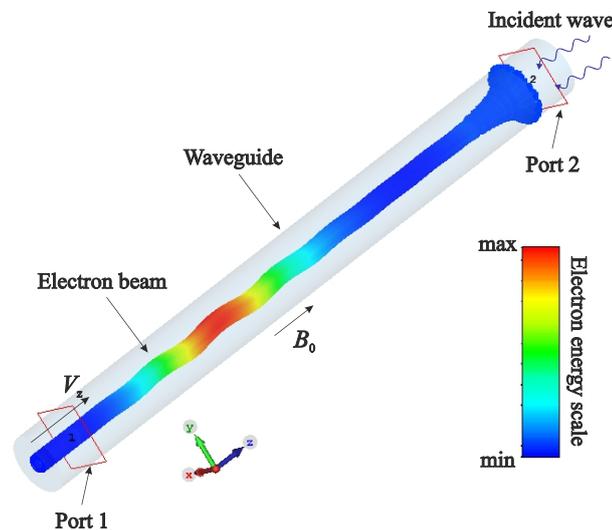


Рис. 1. Схема взаимодействия первоначально прямолинейного потока электронов со встречной ЭМВ в условиях циклотронного резонанса. Изображение траекторий электронов получено в 3D PIC-моделировании (подробнее см. раздел 4) (цвет онлайн)

Fig. 1. Schematic of the cyclotron resonance interaction of an initially rectilinear electron beam with a counterpropagating electromagnetic wave. The pattern of electron trajectories was obtained by 3D PIC simulation (see section 4 for detail) (color online)

энергии вследствие зависимости гирочастоты от энергии электронов условие (1) нарушается, и происходит насыщение циклотронного поглощения.

Если считать, что ЭМВ имеет вид квазигармонической волны с медленно меняющейся (по сравнению с $\exp(i\omega_r t - ik_z z)$) амплитудой $A(z, t)$, электронно-волновое взаимодействие в рассматриваемой модели можно описать системой усредненных уравнений, хорошо известной из литературы [5–7]:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} - \frac{\partial a}{\partial Z} = -p, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial Z} + i|p|^2 p = a, \quad (3)$$

где

$$a = \frac{\sqrt{1 + \beta_z/\beta_{ph}}}{2\sqrt{2}G^{3/4}\beta_z^{3/2}\gamma_0} \frac{eAJ_{m-1}(v_n r_b/r_0)}{m_e c \omega_r} \quad (4)$$

– нормированная комплексная амплитуда поля волны,

$$p = \frac{\sqrt{\mu} p_{\perp} \exp(-i\omega_r t + ik_z z)}{G^{1/4} m_e c \gamma_0 \beta_z} \quad (5)$$

– нормированный комплексный поперечный импульс электронов $p_{\perp} = p_x + ip_y$,

$$Z = \frac{\sqrt{G}\omega_r z}{c} \quad (6)$$

и

$$\tau = \sqrt{G}\omega_r (t - z/V_z) \frac{\beta_g \beta_z}{\beta_z + \beta_g} \quad (7)$$

– безразмерные независимые переменные. Отметим, что, вводя переменную τ в соответствии с (7), мы фактически переходим в систему отсчета, движущуюся со скоростью пучка.

В выражениях (4)–(7)

$$\mu = \frac{\beta_z(1 - \beta_{ph}^{-2})}{2(1 + \beta_z/\beta_{ph})} \quad (8)$$

– параметр неизохронности; $\beta_z = V_z/c$, $\beta_{ph} = V_{ph}/c$ и $\beta_g = V_g/c$ – невозмущенная продольная скорость электронов, фазовая и групповая скорости волны, нормированные на скорость света c , соответственно;

$$G = \frac{eI_b}{m_e c^3} \frac{2\mu(1 + \beta_z/\beta_{ph})^2}{\gamma_0 \beta_{ph}^{-1} \beta_z^3} \frac{J_{m-1}^2(v_n r_b/r_0)}{J_m^2(v_n)(v_n^2 - m^2)} \quad (9)$$

– параметр, характеризующий связь электронов с волноводной модой TE_{mn} ; $\gamma_0 = (1 - \beta_z^2)^{-1/2}$ – фактор Лоренца невозмущенных электронов; I_b – ток электронного пучка; $J_m(x)$ – функция Бесселя порядка m , v_n – n -й корень уравнения $dJ_m(x)/dx = 0$, r_b и r_0 – радиус инжекции пучка и радиус волновода соответственно.

Уравнение (2) описывает возбуждение волны электронным пучком, а уравнение (3) – это уравнение движения электронов, усредненное по периоду циклотронных осцилляций $T_H = 2\pi/\omega_H^0$, где $\omega_H^0 = eB_0/(m_e \gamma_0)$ – невозмущенная циклотронная частота. Подробный вывод основных уравнений представлен в работе [5].

Поскольку рассматривается изначально прямолинейный электронный пучок, то на входе в пространство взаимодействия у электронов отсутствует вращательная скорость, то есть

$$p(Z = 0) = 0. \quad (10)$$

Это позволяет описывать движение всех электронов с помощью одного уравнения (3). Как известно, уравнения резонансного циклотронного взаимодействия электронов с бегущей волной допускают интеграл движения

$$|p_{\perp}| |A| \sin\theta = \text{const}, \quad (11)$$

где $\theta = \omega_r t - k_z z + \vartheta + \alpha$, $\vartheta = \arg(p_{\perp})$ и $\alpha = \arg(A)$ (см., например, [18]). Из (10) следует, что $|p_{\perp}| |A| \sin\theta = 0$. В процессе взаимодействия электроны приобретают ненулевой поперечный импульс, поэтому для выполнения условия (11) необходимо, чтобы $\sin\theta = 0$ для всех электронов. Это означает, что поперечные импульсы всех электронов в процессе взаимодействия меняются одинаковым образом. Для сравнения: в мазерах на циклотронном резонансе (гиротрон, giro-ЛБВ и др.) волна взаимодействует с изначально вращающимися электронами, то есть $p_{\perp}(z = 0) = p_0 e^{i\vartheta_0}$, где фазы вращения $\vartheta_0 = \vartheta(z = 0)$ равномерно распределены от 0 до 2π . Таким образом, электроны с различными ϑ_0 движутся по-разному, и необходимо решать отдельные уравнения движения (3) для каждого электрона.

На правой границе системы, при $Z = L$, подается внешний непрерывный гармонический сигнал, то есть

$$a(Z = L) = a_0 \exp(i\delta\tau), \quad (12)$$

где a_0 — нормированная амплитуда сигнала, а

$$\delta = \frac{1 + \beta_z/\beta_{ph} - \omega_H^0/\omega_r}{\beta_z \sqrt{G}} \quad (13)$$

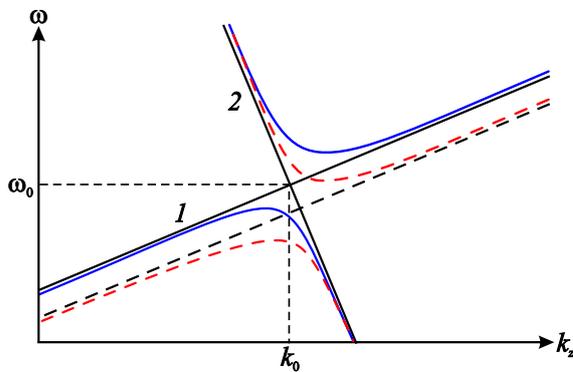


Рис. 2. Качественный вид дисперсионной диаграммы. Асимптоты — дисперсионная характеристика быстрой циклотронной волны $\omega = \omega_H + k_z V_z$ (прямая 1) и аппроксимация дисперсионной характеристики волноводной моды $\omega = \omega_0 - (k + k_0)V_g$ (прямая 2). Пунктирные кривые иллюстрируют смещение дисперсионной характеристики вниз по частоте при увеличении амплитуды волны (цвет онлайн)

Fig. 2. Qualitative picture of the dispersion diagram. Asymptotes are the dispersion characteristic of the fast cyclotron wave $\omega = \omega_H + k_z V_z$ (line 1) and the approximation of the dispersion characteristic of the waveguide mode $\omega = \omega_0 - (k + k_0)V_g$ (line 2). Dashed lines illustrate the shift of the dispersion characteristic down in frequency with increasing the wave amplitude (color online)

— нормированная отстройка несущей частоты ω_r от резонансной частоты.

Анализ решений уравнений (2), (3) в виде монохроматических волн показывает, что существует полоса непропускания, связанная с полным циклотронным поглощением падающей волны [12, 13]. Полоса непропускания возникает вследствие взаимодействия волноводной моды с быстрой циклотронной волной в электронном пучке (см. условие циклотронного резонанса (1)), что качественно продемонстрировано на дисперсионной диаграмме, представленной на рис. 2. Ввиду зависимости циклотронной частоты от энергии электронов $\omega_H = \omega_H(\gamma)$ происходит насыщение циклотронного поглощения. Это эквивалентно тому, что границы полосы непропускания при увеличении амплитуды волны смещаются вниз по частоте. Если частота входного сигнала лежит в полосе непропускания, а входная мощность достаточно мала, падающая волна полностью поглощается. С увеличением мощности сигнала критическая частота уменьшается, и, когда

она сравнивается с частотой сигнала, становится возможным распространение волны без затухания. Однако, как было показано в [12, 13], при этом имеет место МН, то есть соответствующее монохроматическое решение неустойчиво. Развитие МН обычно приводит к образованию солитонов огибающей. Рассмотрим этот процесс подробнее.

2. Нелинейное уравнение Шрёдингера

Наиболее известным примером солитонов огибающей являются солитонные решения нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) [4, 15, 16]. НУШ является эталонным уравнением, описывающим распространение квазигармонической волны в кубично-нелинейной среде. С помощью НУШ можно приближенно описывать динамику рассматриваемой системы вблизи критических частот, где дисперсионная характеристика аппроксимируется параболой (см. рис. 2).

Получим НУШ для рассматриваемой модели, используя хорошо известный метод многих масштабов [4]. Будем искать решения уравнений (2), (3) в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^3 a_3 + \dots, \\ p &= \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

где ε — малый параметр. Коэффициенты разложения $a_j, p_j, j = 1, 2, \dots$, являются функциями переменных $Z_n = \varepsilon^n z$ и $T_n = \varepsilon^n t, n = 0, 1, 2, \dots$, соответствующих разным пространственным и временным масштабам.

После подстановки (14) в уравнения (2) и (3) выделим члены одинаковых порядков малости по ε . Члены порядка ε дают линейаризованную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial T_0} - \frac{\partial a_1}{\partial Z_0} &= -p_1, \\ \frac{\partial p_1}{\partial Z_0} &= a_1, \end{aligned} \quad (15)$$

которую можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \hat{L}a_1 &= 0, \\ p_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial Z_0} - \frac{\partial a_1}{\partial T_0}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь введен линейный оператор

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial Z_0} \left(\frac{\partial}{\partial Z_0} - \frac{\partial}{\partial T_0} \right) - 1. \quad (17)$$

Решение уравнений (16) следует выбирать в виде квазигармонических волн, амплитуда которых зависит от медленных переменных:

$$\begin{aligned} a_1 &= Ae^{i\theta} + \text{к.с.}, \\ p_1 &= -i(\omega + k)Ae^{i\theta} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $A = A(Z_1, Z_2, \dots, T_1, T_2, \dots)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда, к.с. — комплексно-сопряженное выражение, $\theta = \omega T_0 - k Z_0$ — фаза несущей волны, причем k и ω связаны линейным дисперсионным соотношением

$$(\omega + k)k = -1. \quad (19)$$

Напомним, что все переменные являются безразмерными и мы, введя переменную τ (7), фактически перешли в систему отсчета, движущуюся вместе с электронами.

Члены порядка ε^2 после ряда преобразований приводят к уравнениям

$$\hat{L}a_2 = -\frac{\partial p_1}{\partial Z_1} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial Z_0 \partial Z_1} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial Z_0 \partial T_1}, \quad (20)$$

$$p_2 = \frac{\partial a_1}{\partial Z_0} - \frac{\partial a_1}{\partial T_0} + \frac{\partial a_2}{\partial Z_0} - \frac{\partial a_2}{\partial T_0}. \quad (21)$$

Подставим выражения (18) в (20) и потребуем уничтожения секулярных членов, пропорциональных $\exp(i\theta)$, в правой части. Получим уравнение относительно переменной A :

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + v_g \frac{\partial A}{\partial Z_1} = 0, \quad (22)$$

где $v_g = -1 + 1/k^2$ — групповая скорость. При этом уравнение (20) примет вид $\hat{L}a_2 = 0$, что позволяет положить $a_2 = 0$. Также из уравнения (22) получим

$$p_2 = \left(\frac{\partial A}{\partial Z_1} - \frac{\partial A}{\partial T_1} \right) e^{i\theta}. \quad (23)$$

При аналогичном рассмотрении членов порядка ε^3 требование устранения секулярных членов приведет к нулю:

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial T_2} + v_g \frac{\partial A}{\partial Z_2} \right) = \frac{\chi}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial Z_1^2} + \beta |A|^2 A, \quad (24)$$

где $\chi = -2k^{-3}$ и $\beta = k^{-4}$ — линейные параметры дисперсии групповой скорости и нелинейности. В системе отсчета, движущейся с групповой скоростью v_g , (24) упрощается:

$$i \frac{\partial A}{\partial T_2} = \frac{\chi}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial Z_1^2} + \beta |A|^2 A. \quad (25)$$

Уравнение (25) имеет решение в виде волны с постоянной амплитудой и нелинейным сдвигом частоты:

$$A = A_0 \exp \left(-i\beta |A_0|^2 T_2 \right). \quad (26)$$

Как известно (см., например, [4, 15]), при выполнении условия

$$\chi\beta > 0 \quad (27)$$

решение (26) неустойчиво, то есть имеет место МН. Параметр нелинейности β , очевидно, всегда положителен. Это означает, что при увеличении амплитуды волны дисперсионная характеристика смещается в область более низких частот. Параметр дисперсии групповой скорости $\chi = \partial^2 \omega / \partial k^2$ положителен на верхней ветви дисперсионной характеристики и отрицателен на нижней (см. рис. 2). Таким образом, на верхней ветви имеет место МН, что согласуется с выводами, полученными в работах [12, 13] путем анализа нелинейного дисперсионного соотношения. В то же время нижняя ветвь соответствует устойчивому распространению волны.

Как уже отмечалось выше, принципиальную роль играет характер неустойчивости (абсолютная или конвективная). Для НУШ (24) анализ характера МН был выполнен в работах [19, 20], где был получен критерий абсолютной МН:

$$|A_0|^2 > \frac{v_g^2}{8\chi\beta}. \quad (28)$$

Подставляя сюда выражения для v_g , β и χ , получаем

$$|A_0|^2 > -\frac{k^7}{16}(-1 + k^{-2})^2. \quad (29)$$

В совокупности с дисперсионным соотношением (19) неравенство (29) параметрически определяет границу смены характера МН на плоскости параметров (ω, A_0) , показанную на рис. 3. В [13] аналогичная задача решалась на основе анализа асимптотической формы неустойчивых возмущений методом перевала. Такой подход является более строгим, однако положение точек перевала в комплексной плоскости приходится рассчитывать численно. В данном случае мы получаем простое аналитическое соотношение. Результаты, полученные с помощью этих подходов, достаточно близки друг к другу, а в области малых амплитуд практически совпадают.

Таким образом, на плоскости параметров (ω, A_0) имеем следующую картину (см. рис. 3). В области 1 имеет место циклотронное поглощение волны. Границы полосы непропускания построены в соответствии с формулами, полученными в [12]. Отметим, что верхняя граница полосы непропускания соответствует зависимости

$$|A_0|^2 = 2(2 - \omega), \quad (30)$$

что в точности совпадает с зависимостью амплитуды неподвижного солитона от частоты (подробнее см. раздел 3). В области 2 имеет место абсолютная МН, и сигнал разбивается на последовательность солитонов огибающей. Однако при увеличении частоты МН меняет характер с абсолютного на конвективный. В этом случае по окончании переходного процесса устанавливается стационарное одночастотное распространение сигнала (область 3).

3. Решения в виде солитонов

В работах [5–8] были найдены решения уравнений (2), (3) в виде солитонов для случая точного циклотронного резонанса, то есть при $\delta = 0$. Поскольку в дальнейшем мы будем исследовать динамические режимы, наблюдающиеся при изменении частоты входного сигнала, необходимо рассмотреть более общие решения с ненулевой отстройкой от частоты резонанса.

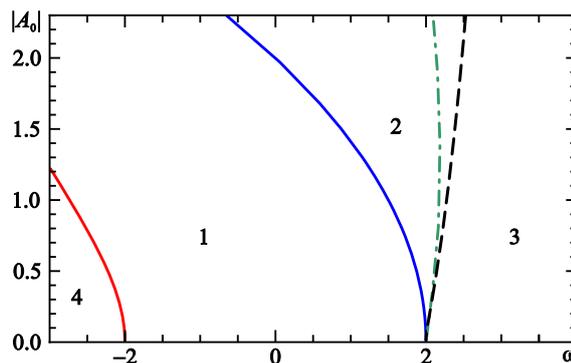


Рис. 3. Области различных режимов распространения волны на плоскости параметров частота–амплитуда волны: 1 – полоса непропускания, 2 – область абсолютной МН, 3 – область конвективной МН, 4 – область, где МН отсутствует. Штриховая линия – граница смены характера МН, построенная согласно критерию (29). Штрихпунктирная линия – граница смены характера МН, полученная на основе анализа асимптотической формы неустойчивых возмущений (цвет онлайн) [13]

Fig. 3. Domains of different regimes of the wave propagation on the frequency–amplitude parameter plane: 1 – non-transmission, 2 – absolute MI, 3 – convective MI, 4 – no MI. The dashed line is the boundary of changing character of MI according to the condition (29). The dashed dotted line represents the boundary obtained by the analysis of the asymptotic form of unstable perturbations [13] (color online)

Итак, будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} a(Z, \tau) &= a(\zeta)e^{i\delta\tau}, \\ p(Z, \tau) &= p(\zeta)e^{i\delta\tau}, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\zeta = Z - U\tau$, U — скорость распространения волны. Подстановка (31) в исходную систему дифференциальных уравнений в частных производных (2), (3) сводит её к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} s \frac{da}{d\zeta} - i\delta a &= p, \\ \frac{dp}{d\zeta} + i|p|^2 p &= a, \end{aligned} \quad (32)$$

где $s = \sqrt{U + 1}$. Уравнения (32) можно представить в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\zeta} &= i \frac{\partial H}{\partial a^*}, \\ \frac{dp}{d\zeta} &= -i \frac{\partial H}{\partial p^*}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$H = \delta_s |a|^2 + \frac{|p|^4}{2} + i(ap^* - a^*p) \quad (34)$$

— гамильтониан, $\delta_s = \delta/s$. Помимо гамильтониана, который всегда является интегралом движения, у системы (33) есть ещё один очевидный интеграл

$$s^2 |a|^2 - |p|^2 = \text{const}, \quad (35)$$

который отражает тот факт, что в системе происходит перекачка энергии между ЭМВ и поперечными колебаниями электронов.

Предположим, что $p(\zeta_0) = 0$ и $|a(\zeta_0)|^2 = I_0$ в некоторой точке пространства $\zeta = \zeta_0$. С учетом данного условия из (35) следует, что

$$|p|^2 = s^2(I - I_0). \quad (36)$$

Здесь $I = |a|^2$. Также в соответствии с граничным условием имеем $H = \delta_s I_0$. Тогда из (34) следует, что

$$\sin\psi = \frac{2\delta_s(I - I_0) + s^3(I - I_0)^2}{4\sqrt{I(I - I_0)}}, \quad (37)$$

где $\psi = \arg(a) - \arg(p)$. Учитывая соотношения (36) и (37), систему уравнений (32) можно свести к одному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{dI}{d\zeta} = \pm \frac{1}{2s} \sqrt{I - I_0} \sqrt{16I - (I - I_0)(2\delta_s + s^3(I - I_0))^2}. \quad (38)$$

Гинзбург Н. С., Заславский В. Ю., Зотова И. В., Ростунцова А. А.,
Рыскин Н. М., Сергеев А. С., Юровский Л. А.
Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 6

Решения уравнения (38) могут быть выражены через эллиптические функции Якоби (подробнее см. [12]). При $\delta > -2s$, полагая $I_0 \rightarrow 0$, можно получить решения в виде солитона [12]

$$I = \frac{8 - 2\delta_s^2}{s^3\delta_s + 2s^3\cosh\left[s^{-1}(\zeta - \zeta_{\max})\sqrt{4 - \delta_s^2}\right]}, \quad (39)$$

где ζ_{\max} обозначает положение максимума солитона. Отметим, что при $\delta = 0$ решения (39) совпадают с решениями, которые были получены в [5–8]. Примеры решений при различных значениях δ и s представлены на рис. 4.

Амплитуда солитона $I_{\max} = I(\zeta_{\max})$ равна

$$I_{\max} = (4 - 2\delta_s)/s^3. \quad (40)$$

Определим ширину солитона как $D = 2\zeta_{1/2}$, где при $\zeta = \zeta_{\max} \pm \zeta_{1/2}$ интенсивность составляет половину от максимального значения, то есть $I(\zeta_{\max} \pm \zeta_{1/2}) = I_{\max}/2 = (2 - \delta_s)/s^3$. Учитывая (39), можно получить, что

$$D = \frac{2s}{\sqrt{4 - \delta_s^2}} \operatorname{arccosh}\left(\frac{4 + \delta_s}{2}\right). \quad (41)$$

Решение (39) существует, когда параметр частотной расстройки удовлетворяет неравенству $-2s < \delta < 2s$. При $\delta \rightarrow 2s$ I_{\max} стремится к нулю, а характерная ширина солитона при этом стремится к бесконечности. При $\delta \rightarrow -2s$ I_{\max} достигает своего максимального значения $I_{\max} \rightarrow 8/s^3$, а ширина, соответственно, минимального, $D = s$.

Случай $s = 1$ соответствует неподвижному солитону. Решение в виде неподвижного солитона существует при $-2 < \delta < 2$, то есть когда частота входного сигнала лежит в линейной полосе непропускания (см. рис. 3). В соответствии с (40) амплитуда неподвижного солитона равна

$$I_{\max} = 2(2 - \delta). \quad (42)$$

Как было показано в разделе 2, это выражение определяет верхнюю границу полосы непропускания на плоскости параметров частота – амплитуда входного сигнала (см. (30)).

Также отметим, что решение в виде солитона (39) существует при условии $s > 0$, то есть при $U > -1$. Таким образом, солитоны могут двигаться как в положительном направлении

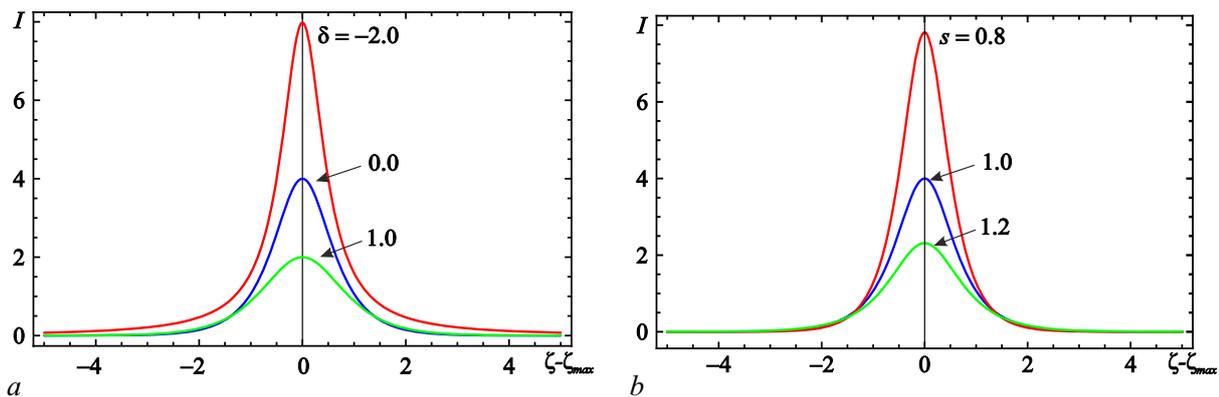


Рис. 4. Решения в виде солитона (39) при различных значениях параметра δ и $s = 1$ (a) и при различных значениях параметра s и $\delta = 0$ (b) (цвет онлайн)

Fig. 4. Bright solitons (39) at different values of δ and $s = 1$ (a) and at different values of s and $\delta = 0$ (b) (color online)

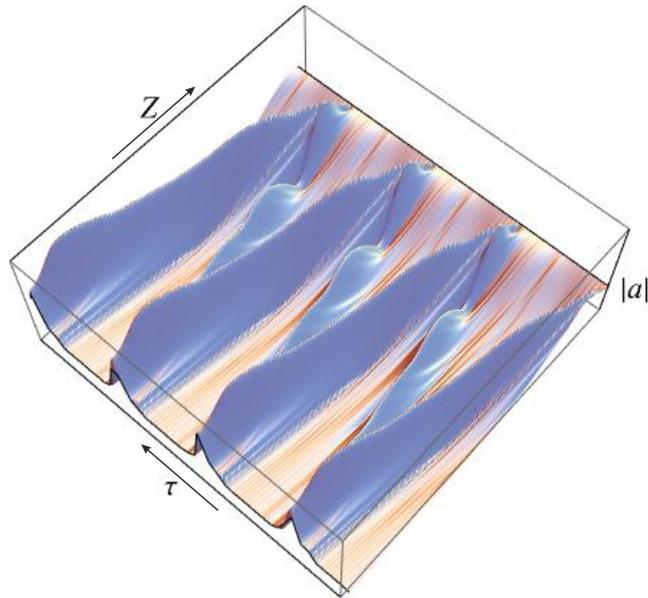


Рис. 5. Пример пространственно-временного распределения нормированной амплитуды поля в режиме генерации последовательности солитонов ($a_0 = 1$ и $\delta_0 = 1.48$), полученный в результате численного интегрирования усредненных уравнений (цвет онлайн)

Fig. 5. Example of the spatio-temporal pattern of the normalized field amplitude in the regime of soliton train generation ($a_0 = 1$ and $\delta_0 = 1.48$), calculated by numerical integration of the averaged equations (color online)

($U > 0$), так и в отрицательном ($-1 < U < 0$). Как следует из (40), при одной и той же несущей частоте δ солитоны, бегущие в обратном направлении, имеют более высокую интенсивность, чем солитоны, распространяющиеся вдоль электронного потока, см. рис. 4, b.

Условие $U > -1$ означает, что скорость солитона не должна (по абсолютной величине) превышать фазовую скорость линейных волн (подробнее см. [12, 13]). Действительно, хорошо известно [21], что скорость распространения солитона не может совпадать с фазовой скоростью $v_{ph}(\omega)$. Если же на какой-либо частоте $v_{ph}(\omega) = U$, то солитон неустойчив: он распадается, излучая волны на частоте ω , что можно интерпретировать как аналог черенковского излучения.

Как показывает численное моделирование [12, 13], когда частота входного сигнала достигает верхней границы полосы непропускания, в результате развития МН абсолютного характера непрерывный входной сигнал распадается на близкую к периодической последовательность бегущих солитонов. Пример такого процесса иллюстрирует рис. 5. Видно, что солитоны формируются вблизи правой границы системы и распространяются в обратном направлении, то есть навстречу электронам. Дойдя до левой границы системы, они частично отражаются и начинают движение в положительном направлении. Интенсивность солитонов, движущихся навстречу пучку, существенно больше, чем у отраженных, что согласуется с найденным аналитическим решением (39).

4. Трехмерное PIC-моделирование формирования микроволновых СИП-солитонов

Наиболее строгим подходом к исследованию электронно-волнового взаимодействия является прямое 3D-моделирование методом частиц в ячейке (“Particle in Cell”, PIC). В данном разделе представлены результаты 3D PIC-моделирования в программном пакете CST Studio Suite [17]. Данный программный пакет позволяет непосредственно численно интегрировать

Гинзбург Н. С., Заславский В. Ю., Зотова И. В., Ростуцкова А. А.,
Рыскин Н. М., Сергеев А. С., Юровский Л. А.
Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 6

уравнения Максвелла в совокупности с релятивистскими уравнениями движения частиц с учётом реальной геометрии пространства взаимодействия.

Схема системы, моделируемой с помощью CST Studio Suite, представлена на рис. 1. Непрерывный гармонический сигнал постоянной амплитуды подаётся с правого конца системы (порт 2). Вблизи правой границы пространства взаимодействия магнитное поле плавно спадает до нуля, и электроны осаждаются на внутренние стенки волновода, который выполняет роль коллектора. Выходной сигнал снимается на левой границе системы (порт 1). На рис. 1 показано изображение траекторий электронов в пространстве взаимодействия, полученное в 3D PIC-моделировании в некоторый фиксированный момент времени.

Моделирование проводилось для цилиндрического волновода с радиусом $r_0 = 0.4$ мм и длиной пространства взаимодействия $l = 26$ мм при продольном магнитном поле $B_0 = 8.9$ Тл. Вдоль системы распространяется прямолинейный пучок электронов с радиусом инжекции $r_b = 0.1$ мм, начальной энергией $E = 1.828$ кэВ и током $I_b = 0.1$ А. С коллекторного конца в систему подается сигнал постоянной мощности $P_0 = 140$ Вт с частотой, варьирующейся в диапазоне 240...242 ГГц.

Пучок электронов взаимодействует с циркулярно поляризованной TE_{11} -модой цилиндрического волновода. Циклотронная частота составляет $f_H = \omega_H/2\pi = 248.5$ ГГц, частота отсечки волноводной TE_{11} -моды $f_c = c/(3.41r_0) = 219.8$ ГГц. Продольная скорость электронов на входе в пространство взаимодействия равна $V_z = \sqrt{2E/m_e} = 2.5 \cdot 10^7$ м/с (Лоренц-фактор $\gamma = 1.0036$). На рис. 6 представлена дисперсионная характеристика TE_{11} -моды

$$f^2 = f_c^2 + \frac{ck_z^2}{2\pi} \quad (43)$$

и дисперсионная характеристика быстрой циклотронной волны

$$f = f_H + V_z \frac{k_z}{2\pi}. \quad (44)$$

Условие циклотронного резонанса соответствует пересечению линии пучка (44) и дисперсионной кривой (43). При выбранных параметрах резонансная частота составляет $f_0 = 240.3$ ГГц.

Для того чтобы задать циркулярную поляризацию падающей волны, в порте 2 возбуждались две ортогональных линейно-поляризованных TE_{11} -моды с одинаковыми амплитудами и разностью фаз 90° . Средняя мощность входного сигнала фиксировалась равной $P_0=140$ Вт. Современные суб-ТГц гиротроны способны обеспечить мощность такого порядка в непрерывном режиме [22].

В численных экспериментах увеличивалась частота входного сигнала f , начиная со значения f_0 , соответствующего точному циклотронному резонансу. Рис. 7 иллюстрирует характерные режимы колебаний при различных значениях f . На нем показаны зависимости выходного сигнала в порте 1 и отражённого сигнала в порте 2 от времени. Эти сигналы, так же как и входной сигнал, представляют собой сумму двух линейно-поляризованных TE_{11} -мод. Для определенности на рис. 7 представлены осциллограммы для компоненты электрического поля, линейно-поляризованной вдоль оси x .

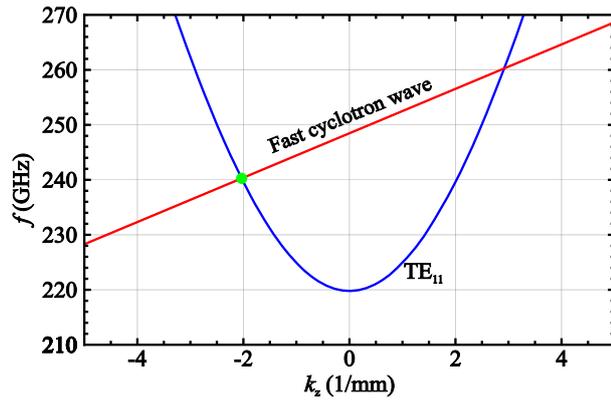


Рис. 6. Дисперсионная диаграмма быстрой циклотронной волны в электронном пучке и TE_{11} -моды волновода при параметрах, используемых при 3D PIC-моделировании. Точкой отмечено положение точного циклотронного резонанса (цвет онлайн)

Fig. 6. Dispersion diagram of the fast cyclotron wave of the electron beam and the TE_{11} waveguide mode at parameters used in 3D PIC simulations. Point of the exact cyclotron resonance is shown by circle (color online)

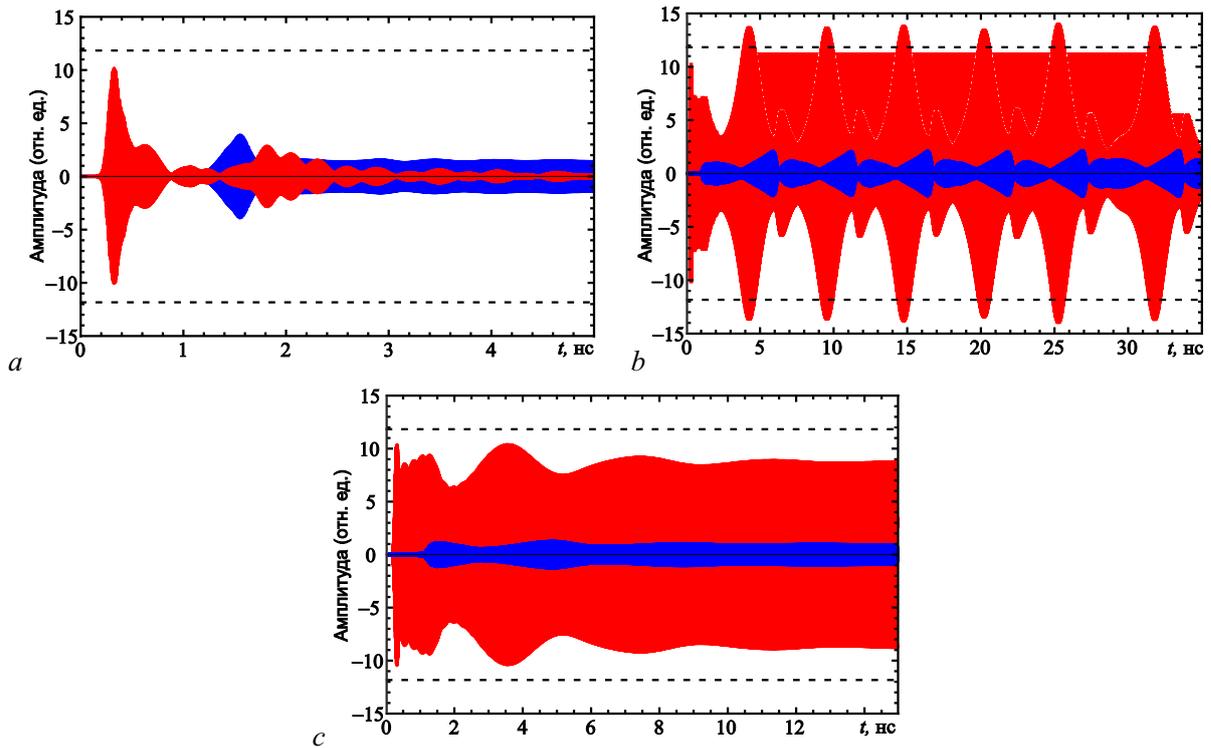


Рис. 7. Результаты 3D PIC-моделирования. Осциллограммы выходного сигнала в порте 1 (красные кривые) и отражённого сигнала в порте 2 (синие кривые) в различных режимах распространения волны: $a - f = 240.3$ ГГц (точный циклотронный резонанс), режим циклотронного поглощения; $b - f = 241.3$ ГГц, режим генерации последовательности импульсов (абсолютная МН), $c - f = 241.65$ ГГц, режим стационарного прохождения волны (конвективная МН). Горизонтальными пунктирными линиями показан уровень входного сигнала (цвет онлайн)

Fig. 7. Results of 3D PIC simulation. Waveforms of the output signal in port 1 (red curves) and the reflected signal in port 2 (blue curves) in different regimes of the wave propagation: $a - f = 240.3$ GHz (the exact cyclotron resonance), the regime of cyclotron absorption; $b - f = 241.3$ GHz, the regime of soliton train generation (absolute MI), $c - f = 241.65$ GHz, the regime of stationary signal transmission (convective MI). Horizontal dashed lines show the input signal level (color online)

При точном циклотронном резонансе, когда $f = f_0 = 240.3$ ГГц, наблюдается поглощение волны (см. рис. 7, *a*). При этом входной сигнал, проходя через систему, практически полностью затухает, и мощность выходного сигнала в порте 1 после переходного процесса стремится к нулю. С ростом частоты входного сигнала поглощение волны сменяется нестационарной автомодуляцией. Генерацию близкой к периодической последовательности импульсов демонстрирует рис. 7, *b*. В соответствии с теоретическим анализом этот режим распространения волны соответствует абсолютной МН. Длительность генерируемых импульсов составляет 3–4 нс. Отметим, что пиковая амплитуда импульсов превышает амплитуду входного сигнала (штриховые линии на рис. 7). Пиковая мощность выходного сигнала составляет около 200 Вт при входной мощности 140 Вт.

Наконец, при ещё более высоких частотах происходит переход от абсолютной МН к конвективной. На рис. 7, *c* видно, что после нескольких затухающих осцилляций устанавливается стационарное распространение волны. Установившееся значение выходной мощности составляет примерно 75% мощности входного сигнала, поскольку часть сигнала отражается (см. осциллограмму отраженного сигнала на рис. 7, *c*). Спектр выходного сигнала в установившемся режиме содержит только частоту входного сигнала (рис. 8, *a*).

В то же время при абсолютной неустойчивости, когда устанавливается режим автомодуляции, то есть режим многочастотных колебаний, спектр выходного сигнала обогащается новыми

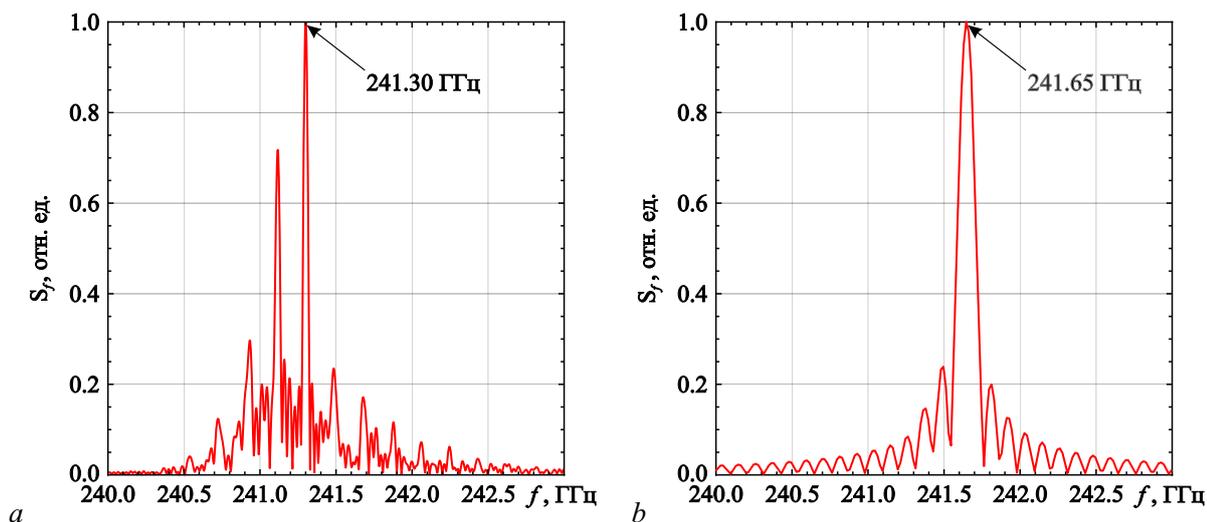


Рис. 8. Спектры выходного сигнала в порте 2: *a* — режим стационарного распространения волны ($f = 241.65$ ГГц), *b* — режим генерации последовательности солитонов ($f = 241.3$ ГГц)

Fig. 8. Spectra of the output signal in port 2: *a* — the regime of stationary transmission of the wave ($f = 241.65$ GHz), *b* — the regime of soliton train generation ($f = 241.3$ GHz)

независимыми спектральными компонентами, как показано на рис. 8, *b*. Частота модуляции, то есть расстояние между соседними пиками в спектре сигнала, составляет 0.19 ГГц, что примерно равно $1/T$, где $T \approx 5.25$ нс — период следования импульсов (см. осциллограмму выходного сигнала на рис. 7, *b*).

Заключение

В данной работе развивается теория МН при взаимодействии ЭМВ со встречным потоком невозбужденных электронов-осцилляторов в условиях циклотронного резонанса. Получено нелинейное уравнение Шрёдингера, описывающее динамику медленно меняющейся амплитуды волны, частота которой лежит в окрестности границы полосы непропускания. Анализ показывает, что в окрестности верхней границы имеет место МН, которая может приводить к образованию солитонов огибающей. Также по аналогии с результатами работ [19, 20] получено простое аналитическое выражение для границы перехода от абсолютной неустойчивости к конвективной. Исследование характера МН позволяет определить условия трансформации непрерывного сигнала постоянной амплитуды в последовательность СИП-солитонов.

Результаты прямого 3D PIC-моделирования электронно-волнового взаимодействия согласуются с выводами, полученными на основе анализа усредненной системы уравнений. В частности, при увеличении частоты входного сигнала наблюдается одна и та же последовательность переходов между различными динамическими режимами. Выше границы полосы непропускания имеют место нестационарные режимы автомодуляции, связанные с развитием МН абсолютного характера, которые могут приводить к формированию последовательностей солитоноподобных импульсов. При повышении частоты входного сигнала автомодуляция сменяется стационарным одночастотным прохождением сигнала, что обусловлено сменой характера МН с абсолютного на конвективный. 3D PIC-моделирование демонстрирует возможность преобразования гармонического сигнала в последовательность наносекундных импульсов, которая близка к периодической. Такой эффект представляет интерес для генерации частотных гребёнок в микроволновом диапазоне.

Список литературы

1. Гинзбург Н. С., Зотова И. В., Сергеев А. С., Кочаровская Е. Р., Яландин М. И., Шунайлов С. А., Шарыпов К. А., Рыскин Н. М. Эффекты усиления, компрессии и самоиндуцированной прозрачности при распространении ультракоротких электромагнитных импульсов вдоль квазистационарных электронных потоков // Изв. вузов. Радиофизика. 2011. Т. 54, № 8–9. С. 599–606.
2. Ginzburg N. S., Zotova I. V., Cross A. W., Phelps A. D. R., Yalandin M. I., Rostov V. V. Generation, amplification, and nonlinear self-compression of powerful superradiance pulses // IEEE Trans. Plasma Sci. 2013. Vol. 41, no. 4. P. 646–660. DOI: 10.1109/TPS.2013.2252369.
3. McCall S. L., Hahn E. L. Self-induced transparency by pulsed coherent light // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 18, no. 21. P. 908–911. DOI: 10.1103/PhysRevLett.18.908.
4. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: URSS, 2021. 312 с.
5. Гинзбург Н. С., Зотова И. В., Сергеев А. С. Самоиндуцированная прозрачность, компрессия и остановка электромагнитных импульсов при взаимодействии с пучками невозбужденных классических осцилляторов // ЖЭТФ. 2011. Т. 140, № 5(11). С. 890–899.
6. Зотова И. В., Гинзбург Н. С., Железнов И. В., Сергеев А. С. Модуляция интенсивного СВЧ излучения при резонансном взаимодействии со встречным потоком невозбужденных циклотронных осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40, № 12. С. 1–10.
7. Zotova I. V., Ginzburg N. S., Sergeev A. S., Kocharovskaya E. R., Zaslavsky V. Yu. Conversion of an electromagnetic wave into a periodic train of solitons under cyclotron resonance interaction with a backward beam of unexcited electron-oscillators // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 113, no. 14. P. 143901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.143901.
8. Гинзбург Н. С., Зотова И. В., Кочаровская Е. Р., Сергеев А. С., Железнов И. В., Заславский В. Ю. Солитоны самоиндуцированной прозрачности и диссипативные солитоны в системах микроволновой электроники // Изв. вузов. Радиофизика. 2020. Т. 63, № 9–10. С. 796–824.
9. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлматов В. К. Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9–10. С. 1414–1453.
10. Benirschke D. J., Han N., Burghoff D. Frequency comb ptychography // Nat. Commun. 2021. Vol. 12, no. 1. P. 4244. DOI: 10.1038/s41467-021-24471-4.
11. Hagmann M. J. Scanning frequency comb microscopy—A new method in scanning probe microscopy // AIP Advances. 2018. Vol. 8, no. 12. P. 125203. DOI: 10.1063/1.5047440.
12. Rostuntsova A. A., Ryskin N. M., Zotova I. V., Ginzburg N. S. Modulation instability of an electromagnetic wave interacting with a counterpropagating electron beam under condition of cyclotron resonance absorption // Phys. Rev. E. 2022. Vol. 106, no. 1. P. 014214. DOI: 10.1103/PhysRevE.106.014214.
13. Ростунцова А. А., Рыскин Н. М. Исследование характера модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным пучком электронов // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 597–609. DOI: 10.18500/0869-6632-003067.
14. Benjamin T. B. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems // Proc. R. Soc. Lond. A. 1967. Vol. 299, no. 1456. P. 59–76. DOI: 10.1098/rspa.1967.0123.
15. Островский Л. А., Потанов А. И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. 400 с.

Гинзбург Н. С., Заславский В. Ю., Зотова И. В., Ростунцова А. А.,
Рыскин Н. М., Сергеев А. С., Юровский Л. А.
Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 6

16. Zakharov V. E., Ostrovsky L. A. Modulation instability: The beginning // *Physica D*. 2009. Vol. 238, no. 5. P. 540–548. DOI: 10.1016/j.physd.2008.12.002.
17. *CST Studio Suite Electromagnetic Field Simulation Software*, Dassault Systèmes, Vélizy Villacoublay, France, 2020. [Electronic resource] // Available from: <https://www.3ds.com/products/simulia/cst-studio-suite>
18. Nusinovich G. S., Korol M., Jerby E. Theory of the anomalous Doppler cyclotron-resonance maser amplifier with tapered parameters // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 59, no. 2. P. 2311–2321. DOI: 10.1103/PhysRevE.59.2311.
19. Балякин А. А., Рыскин Н. М. Смена характера модуляционной неустойчивости вблизи критической частоты // *Письма в ЖТФ*. 2004. Т. 30, № 5. С. 6–13.
20. Balyakin A. A., Ryskin N. M. Modulation instability in a nonlinear dispersive medium near cut-off frequency // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2004. Vol. 7, no. 1. P. 34–42.
21. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Оптические солитоны и квазисолитоны // *ЖЭТФ*. 1998. Т. 113, № 5. С. 1892–1914.
22. Глявин М. Ю., Денисов Г. Г., Запезалов В. Е., Куфтин А. Н., Лучинин А. Г., Мануилов В. Н., Морозкин М. В., Седов А. С., Чирков А. В. Терагерцевые гиротроны: состояние и перспективы // *Радиотехника и электроника*. 2014. Т. 59, № 8. С. 745–751. DOI: 10.7868/S0033849414080075.

References

1. Ginzburg NS, Zotova IV, Sergeev AS, Kocharovskaya ER, Yalandin MI, Shunailov SA, Sharypov KA, Ryskin NM. The amplification, compression, and self-induced transparency effects for the ultrashort electromagnetic pulses propagating along quasi-stationary electron beams. *Radiophys. Quantum Electron*. 2012;54(8–9):532–547. DOI: 0033-8443/12/5408-0532.
2. Ginzburg NS, Zotova IV, Cross AW, Phelps ADR, Yalandin MI, Rostov VV. Generation, amplification, and nonlinear self-compression of powerful superradiance pulses. *IEEE Trans. Plasma Sci*. 2013;41(4):646–660. DOI: 10.1109/TPS.2013.2252369.
3. McCall SL, Hahn EL. Self-induced transparency by pulsed coherent light. *Phys. Rev. Lett*. 1967;18(21):908–911. DOI: 10.1103/PhysRevLett.18.908.
4. Ryskin NM, Trubetskov DI. *Nonlinear Waves*. M.: URSS; 2021. 312 p. (in Russian).
5. Ginzburg NS, Zotova IV, Sergeev AS. Self-induced transparency, compression, and stopping of electromagnetic pulses interacting with beams of unexcited classical oscillators. *J. Exp. Theor. Phys*. 2011;113(5):772–780. DOI: 10.1134/S1063776111140147.
6. Zotova IV, Ginzburg NS, Zheleznov IV, Sergeev AS. Modulation of high-intensity microwave radiation during its resonant interaction with counterflow of nonexcited cyclotron oscillators. *Tech. Phys. Lett*. 2014;40:495–498. DOI: 10.1134/S1063785014060285.
7. Zotova IV, Ginzburg NS, Sergeev AS, Kocharovskaya ER, Zaslavsky VYu. Conversion of an electromagnetic wave into a periodic train of solitons under cyclotron resonance interaction with a backward beam of unexcited electron-oscillators. *Phys. Rev. Lett*. 2014;113:143901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.143901.
8. Ginzburg NS, Zotova IV, Kocharovskaya ER, Sergeev AS, Zheleznov IV, Zaslavsky VYu. Self-induced transparency solitons and dissipative solitons in microwave electronic systems. *Radiophys. Quantum Electron*. 2021;63:716–741. DOI: 10.1007/s11141-021-10092-w.
9. Gaponov AV, Petelin MI, Yulpatov VK. The induced radiation of excited classical oscillators and its use in high-frequency electronics. *Radiophys. Quantum Electron*. 1967;10(9–10):1414–1453. DOI: 10.1007/BF01031607.
10. Benirschke DJ, Han N, Burghoff D. Frequency comb ptychography. *Nat. Commun*. 2021;12:4244. DOI: 10.1038/s41467-021-24471-4.

11. Haggmann MJ. Scanning frequency comb microscopy—A new method in scanning probe microscopy. *AIP Advances*. 2018;8(12):125203. DOI: 10.1063/1.5047440.
12. Rostuntsova AA, Ryskin NM, Zotova IV, Ginzburg NS. Modulation instability of an electromagnetic wave interacting with a counterpropagating electron beam under condition of cyclotron resonance absorption. *Phys. Rev. E*. 2022;106:014214. DOI: 10.1103/PhysRevE.106.014214.
13. Rostuntsova AA, Ryskin NM. Study of character of modulation instability in cyclotron resonance interaction of an electromagnetic wave with a counterpropagating rectilinear electron beam. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(5):597–609. DOI: 10.18500/0869-6632-003067.
14. Benjamin TB. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems. *Proc. Roy. Soc. A*. 1967;299:59–75. DOI: 10.1098/rspa.1967.0123.
15. Ostrovsky LA, Potapov AI. *Modulated Waves: Theory and Applications*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press; 1999. 369 p.
16. Zakharov VE, Ostrovsky LA. Modulation instability: The beginning. *Physica D*. 2009;238(5): 540–548. DOI: 10.1016/j.physd.2008.12.002.
17. CST Studio Suite Electromagnetic Field Simulation Software, Dassault Systèmes, Vélizy Villacoublay, France, 2020. [Electronic resource]. Available from: <https://www.3ds.com/products/simulia/cst-studio-suite>
18. Nusinovich GS, Korol M, Jerby E. Theory of the anomalous Doppler cyclotron-resonance maser amplifier with tapered parameters. *Phys. Rev. E*. 1999;59(2):2311–2321. DOI: 10.1103/PhysRevE.59.2311.
19. Balyakin AA, Ryskin NM. A change in the character of modulation instability in the vicinity of a critical frequency. *Tech. Phys. Lett.* 2004;30:175–177. DOI: 10.1134/1.1707158.
20. Balyakin AA, Ryskin NM. Modulation instability in a nonlinear dispersive medium near cut-off frequency. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2004;7(1):34–42.
21. Zakharov VE, Kuznetsov EA. Optical solitons and quasisolitons. *JETP*. 1998;86(5):1035–1046. DOI: 10.1134/1.558551.
22. Glyavin MYu, Denisov GG, Zapevalov VE, Kuftin AN, Luchinin AG, Manuilov VN, Morozkin MV, Sedov AS, Chirkov AV. Terahertz gyrotrons: state of the art and prospects. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2014;59(8):792–797. DOI: 10.1134/S1064226914080075.



Гинзбург Наум Самуилович — родился в Горьком (1952). Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (ГГУ, 1974). После окончания ГГУ работает в Институте прикладной физики РАН (ИПФ РАН). Член-корреспондент РАН (2019), доктор физико-математических наук (1993), профессор. В настоящее время — заведующий отделом высокочастотной релятивистской электроники ИПФ РАН, профессор Нижегородского государственного университета (ННГУ). Область научных интересов: лазеры на свободных электронах, мазеры на циклотронном резонансе, релятивистские генераторы поверхностной волны, многочастотные процессы в электронных СВЧ-приборах с распределенным взаимодействием, эффекты канализации и сверхизлучения, плазменные и пучковые неустойчивости. Лауреат премии им. Ленинского комсомола (1980), Государственной премии РФ (2003). Автор более 250 статей и обзоров по указанной проблематике.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
 ФИЦ Институт прикладной физики Российской академии наук
 E-mail: ginzburg@ipfran.ru
 ORCID: 0000-0001-7729-1035
 AuthorID (eLibrary.Ru): 18645

*Гинзбург Н. С., Заславский В. Ю., Зотова И. В., Ростунцова А. А.,
 Рыскин Н. М., Сергеев А. С., Юровский Л. А.*
 Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 6



Заславский Владислав Юрьевич — родился в Горьком (1981). Окончил радиофизический факультет ННГУ им. Н. И. Лобачевского (2004), получив степень магистра радиофизики, и аспирантуру ННГУ (2007). Кандидат физико-математических наук (2009). С 2002 года работает в ИПФ РАН, в настоящее время — старшим научным сотрудником отдела высокочастотной релятивистской электроники. Доцент радиофизического факультета ННГУ. Область научных интересов: теория релятивистских электронных СВЧ-приборов, моделирование динамики СВЧ-генераторов со сверхразмерными электродинамическими системами. Лауреат Медали РАН с премией для молодых ученых (2014). Автор более 100 статей в реферируемых научных журналах.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
ФИЦ Институт прикладной физики имени А. В. Гапонова-Грехова РАН
E-mail: zas-vladislav@ipfran.ru
ORCID: 0000-0003-2417-645X
AuthorID (eLibrary.Ru): 153834



Зотова Ирина Валерьевна — родилась в Горьком (1968). Окончила радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1990). После окончания ГГУ начала работать в Институте прикладной физики РАН. Доктор физико-математических наук (2014). В настоящее время — заведующая сектором теории и моделирования мощных СВЧ-приборов ИПФ РАН. Область научных интересов: эффекты сверхизлучения электронных пучков и разработка методов генерации ультракоротких электромагнитных импульсов на этой основе, лазеры на свободных электронах, гиротроны.

Россия, 603950 Н. Новгород, БОКС-120, Ульянова, 46
ФИЦ Институт прикладной физики имени А. В. Гапонова-Грехова РАН
E-mail: zotova@appl.sci-nnov.ru
ORCID: 0000-0003-0350-2615
AuthorID (eLibrary.Ru): 25827



Ростунцова Алёна Александровна — родилась в Саратове (1998). Окончила с отличием бакалавриат (2019) и магистратуру (2021) Института физики СГУ. Младший научный сотрудник лаборатории вакуумной микро- и нанoeлектроники Саратовского филиала ИРЭ РАН. Ассистент кафедры динамических систем на базе Саратовского филиала ИРЭ РАН Института физики СГУ. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, вакуумная СВЧ-электроника, генерация коротких микроволновых импульсов.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 603950 Н. Новгород, ул. Ульянова, 46
ФИЦ Институт прикладной физики имени А. В. Гапонова-Грехова РАН
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: rostuncova@mail.ru
ORCID: 0000-0002-6795-2108
AuthorID (eLibrary.Ru): 1055913



Рыскин Никита Михайлович — окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Доктор физико-математических наук (2005). Главный научный сотрудник, заведующий лабораторией Саратовского филиала ИРЭ РАН. Заведующий кафедрой динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ryskinm@info.sgu.ru
ORCID: 0000-0001-8501-6658
AuthorID (eLibrary.Ru): 29838



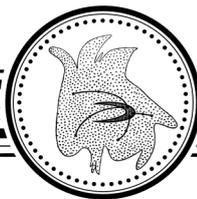
Сергеев Александр Сергеевич — родился в Горьком (1957). После окончания механико-математического факультета ГГУ им. Н. И. Лобачевского (1980) был распределен в ИПФ АН СССР. Кандидат физико-математических наук (1997). В настоящее время работает в ИПФ РАН в должности заведующего лабораторией. Область научных интересов: развитие методов моделирования мощных микроволновых генераторов, исследование одномодовых режимов и сложных динамических процессов в данных системах в условиях существенной сверхразмерности. Опубликовал более двухсот статей в ведущих отечественных и зарубежных журналах.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
ФИЦ Институт прикладной физики имени А. В. Гапонова-Грехова РАН
E-mail: sergeev@ipfran.ru
ORCID: 0000-0002-7709-9542
AuthorID (eLibrary.Ru): 25824



Юровский Лев Александрович — родился в Праге (Чешская Республика, 1995). Окончил факультет «Высшая школа общей и прикладной физики» Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2018). После окончания ННГУ начал работать в Институте прикладной физики РАН. Кандидат физико-математических наук (2022). В настоящее время — научный сотрудник сектора теории и моделирования мощных СВЧ-приборов ИПФ РАН.

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46
ФИЦ Институт прикладной физики имени А. В. Гапонова-Грехова РАН
E-mail: leo@ipfran.ru
ORCID: 0000-0002-9522-6242
AuthorID (eLibrary.Ru): 1103237



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003171
EDN: SPENBR

Пространственно-временные сценарии мультистабильности для системы трех конкурирующих видов

Б. Х. Нгуен✉, В. Г. Цибулин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: ✉kng@sfedu.ru, vgcibulin@sfedu.ru

Поступила в редакцию 24.03.2025, принята к публикации 11.04.2025,

опубликована онлайн 22.04.2025, опубликована 28.11.2025

Аннотация. Цель настоящей работы — определение условий, при которых возможна мультистабильность в системе трех конкурирующих видов, описываемой уравнениями реакции – диффузии – адвекции. **Методы.** С использованием теории косимметрии и концепции идеального свободного распределения устанавливаются соотношения на коэффициенты локального взаимодействия, диффузии и направленной миграции, при которых возможны непрерывные семейства решений. Компактная схема метода конечных разностей применяется для дискретизации задачи о распределении видов на одномерном пространственном ареале с условиями периодичности. **Результаты.** Найдены соотношения на параметры, при которых получаются пропорциональные ресурсу стационарные решения, отвечающие идеальному свободному распределению (ИСР). Изучены условия, при которых существуют двухпараметрические семейства стационарных распределений. Для параметров, отвечающих ИСР, в вычислительном эксперименте получено семейство периодических режимов. **Заключение.** Полученные результаты демонстрируют варианты мультистабильности видов на неоднородном по ресурсу ареале и далее послужат основой для анализа систем взаимодействующих популяций.

Ключевые слова: конкуренция, семейство стационарных распределений, предельный цикл, мультистабильность, идеальное свободное распределение, уравнения реакции – диффузии – адвекции.

Благодарности. Работа выполнена в Южном федеральном университете при поддержке РФФ, грант № 25-21-00419.

Для цитирования: Нгуен Б. Х., Цибулин В. Г. Пространственно-временные сценарии мультистабильности для системы трех конкурирующих видов // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 6. С. 843–859. DOI: 10.18500/0869-6632-003171. EDN: SPENBR

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Spatiotemporal multistability scenarios for system of three competing species

B. H. Nguyen[✉], V. G. Tsybulin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: ✉kng@sfedu.ru, vgcibulin@sfedu.ru

Received 24.03.2025, accepted 11.04.2025,

available online 22.04.2025, published 28.11.2025

Abstract. The aim of this work is to determine the conditions under which multistability is possible in system of three competing species described by reaction–diffusion–advection equations. *Methods.* Using the theory of cosymmetry and the concept of ideal free distribution, relations are established for the coefficients of local interaction, diffusion and directed migration, under which continuous families of solutions are possible. Compact scheme of the finite difference method is used to discretize the problem of species distribution on one-dimensional spatial area with periodicity conditions. *Results.* Conditions for parameters are found, under which stationary solutions proportional to the resource are obtained, corresponding to the ideal free distribution (IFD). The conditions under which two-parameter families of stationary distributions exist are studied. For parameters corresponding to IFD, family of periodic regimes is obtained in computational experiment. *Conclusion.* The obtained results demonstrate variants of multistability of species in resource-heterogeneous area and will further serve as a basis for the analysis of systems of interacting populations.

Keywords: competitions, family of stationary distributions, limit cycle, multistability, ideal free distribution (IFD), reaction–diffusion–advection equations.

Acknowledgements. The work was carried out at the Southern Federal University with the support of the Russian Science Foundation, grant No. 25-21-00419.

For citation: Nguyen BH, Tsybulin VG. Spatiotemporal multistability scenarios for system of three competing species. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(6):843–859. DOI: 10.18500/0869-6632-003171

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Для описания пространственно-временного взаимодействия конкурирующих видов используются уравнения реакции–диффузии–адвекции с переменными коэффициентами [1–3]. Одним из подходов к исследованию таких задач является анализ так называемых идеальных свободных распределений, см. [4–9]. Модель для двух видов, учитывающая пространственные эффекты случайного блуждания и направленной миграции по градиенту логарифма функции ресурса, рассмотрена в [7]. В [8] найдены условия на диффузионные и миграционные параметры, при которых реализуется идеальное свободное распределение (ИСР), пропорциональное количеству доступного ресурса. В [9] дано распространение концепции идеального свободного распределения на систему уравнений реакции–диффузии–адвекции, описывающую динамику хищника и жертвы в гетерогенной среде.

В нелинейных задачах часто наблюдается мультистабильность – сосуществование нескольких устойчивых решений нестационарной задачи [10, 11]. В зависимости от начальных данных реализуются те или иные аттракторы, и это могут быть стационарные и периодические решения, а также хаотическая динамика. Допускающие неединственность системы характеризуются нетривиальными бифуркационными сценариями, сложной структурой фазового пространства, в частности, могут возникать семейства решений со скрытыми параметрами [12–14]. Причинами возникновения семейства равновесий в динамических системах может быть группа симметрий или косимметрия [15, 16].

Для уравнения $\dot{Y} = F(Y)$ в гильбертовом пространстве H косимметрия [15] представляет собой нетривиальный оператор L , который ортогонален F в каждой точке фазового пространства. Если косимметрия L аннулируется только на нулевом равновесии $Y = 0$, то любое другое стационарное решение является некосимметричным и принадлежит семейству равновесий. В отличие от систем с симметрией, где решения из семейства имеют одинаковый спектр устойчивости, при косимметрии возможны решения с меняющимся вдоль семейства спектром. Для системы параболических уравнений с нелинейностью специального вида в [17] получено косимметричное семейство стационарных решений и проанализирован его распад.

В случае двух конкурирующих за единый ресурс популяций в [18] для условий Дирихле и Неймана были получены условия на параметры системы, при которых имеется косимметрия и однопараметрическое семейство стационарных решений. Некоторые результаты для многовидовых систем имеются в [13]. Для системы двух жертв и двух хищников мультикосимметрия и двухпараметрические семейства стационарных решений рассматривались в [19]. Вычисление самих семейств для однородного ареала дается аналитическими выражениями. В общем случае неоднородного ареала требуется применение численных методов для решения уравнений в частных производных.

1. Модель конкурирующих за неоднородный ресурс видов

В случае одномерного ареала математическая модель может быть записана в виде системы уравнений относительно плотностей $u_i(x, t)$, $x \in \Omega$, потоков q_i и локальных реакций f_i , $i = 1, \dots, m$ [13]. Далее рассматривается случай трех популяций $m = 3$:

$$\dot{u}_i = -q_i' + f_i, \quad f_i = r_i u_i g_i, \quad (1)$$

$$q_i = -k_i u_i' + u_i \varphi_i', \quad (2)$$

$$g_i = 1 - \frac{1}{p(x)} \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где штрихом обозначена производная по x , а точкой — дифференцирование по времени t . В функциях f_i , описывающих локальное взаимодействие, r_i есть параметр линейного роста, а коэффициенты α_{ij} характеризуют влияние вида j на рост вида i , причем $\alpha_{ii} = 1$. Функция $p(x) > 0$ описывает неравномерное распределение ресурса вдоль ареала. В выражении для потоков q_i первое слагаемое характеризует диффузию, а второе отвечает за направленную миграцию (таксис). Функция φ_i состоит из двух частей, которые определяют различные виды направленной миграции: таксис на ресурс $p(x)$ и реакция на неоднородное распределение видов:

$$\varphi_i = a_i \ln p + \sum_{j=1}^m b_{ij} \ln(p + u_j), \quad i = 1, \dots, m. \quad (4)$$

При определении потоков (1), (4) коэффициенты k_i , a_i , b_{ij} ($i, j = 1, \dots, m$) являются величинами, значения которых определяются из экспериментальных данных.

Случай $b_{ij} = 0$ соответствует часто используемому описанию таксиса на ресурс [13, 20]. В [8] также рассматривался случай таксиса на неоднородное распределение конкурирующих видов: $\varphi_i = a_i \ln p + b_{ij} \ln u_j$. Формула (4) позволяет моделировать одновременно таксис на ресурс с учетом неоднородного распределения всех видов.

Система (1)–(4) дополняется краевыми условиями при $x = 0$ и $x = a$, в качестве которых выбраны условия кольцевого ареала:

$$u_i(0, t) = u_i(a, t), \quad q_i(0, t) = q_i(a, t), \quad p(0) = p(a). \quad (5)$$

Начальные условия задаются для плотностей видов:

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x); \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Для одного ненулевого вида u_1 ($u_2 = u_3 = 0$) и $b_{ij} = 0$ система (1)–(4) сводится к одному уравнению:

$$\dot{u}_1 = [k_1 u_1' - u_1 a_1 (\ln p)']' + r_1 u_1 \left(1 - \frac{u_1}{p}\right).$$

В этом случае при $k_1 = a_1$ имеется стационарное решение $u_1(x) = p(x)$, которое в литературе называется идеальным свободным распределением (ИСП, ideal free distribution) [4]. Если $b_{11} \neq 0$, то условие сосуществования ИСП примет вид $k_1 = a_1 + b_{11}$.

2. Семейства стационарных решений для трех конкурирующих видов

Следуя методу, развитому в [18], найдем условия, при которых система, описывающая динамику трех конкурирующих видов ($m = 3$) на неоднородном ареале, обладает свойством косимметрии и возможны семейства стационарных решений.

Лемма 1. При нулевых потоках $q_i = 0$ и выполнении условий на параметры:

$$\alpha_{ij} = 1, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Косимметрией системы (1)–(6) является вектор

$$L_1 = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T, \quad (8)$$

где

$$\zeta_1 = (1 - \nu)r_2 u_2 + \nu r_3 u_3, \quad \zeta_2 = -(1 - \nu)r_1 u_1, \quad \zeta_3 = -\nu r_1 u_1. \quad (9)$$

При этом задача (1)–(6) имеет двухпараметрическое семейство стационарных решений:

$$u_1(x) = \theta_1 p(x), \quad u_2(x) = \theta_2 p(x), \quad u_3(x) = (1 - \theta_1 - \theta_2)p(x), \quad 0 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 1. \quad (10)$$

Доказательство. Доказательство косимметричности системы состоит в непосредственном умножении (8)–(9) на вектор правой части (1)–(6) и приведении подобных членов. Условия периодичности (5) и начальные условия (6) выполнены, так как $p(0) = p(a)$ и начальные функции $u_i^0(x)$ определены согласно (10). Подставляя (10) в (1), (3) и учитывая условия леммы, получаем автоматическое удовлетворение уравнений (1)–(4). \square

Таким образом, при нулевых потоках фактически получается система обыкновенных дифференциальных уравнений с континуальным параметром x . Для каждого x реализуется двухпараметрическое семейство равновесий. Этот случай соответствует мультикосимметрии [21], что обеспечивается введением скалярного параметра ν .

Для задачи с диффузией и таксисом имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Для системы (1)–(6) при выполнении условий (7) и

$$k_i = a_i + \sum_{j=1}^3 b_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (11)$$

косимметрией является вектор L_1 (8)–(9) и система (1)–(6) имеет семейство стационарных решений (10).

Доказательство. В случае ненулевых коэффициентов k_i , a_i , b_{ij} и $\alpha_{ij} = 1$ используем для анализа системы (1)–(6) теорию В. И. Юдовича [16] о разрушении косимметрии. Скалярное произведение косимметрии L_1 и вектора правой части системы $F = (-q'_1 + f_1, -q'_2 + f_2, -q'_3 + f_3)$ дает косимметрический дефект:

$$\mathcal{D} = \int_0^a (F, L_1) dx = J_1 + J_2, \quad J_1 = \int_0^a \sum_{i=1}^3 \zeta_i f_i dx, \quad J_2 = - \int_0^a \sum_{i=1}^3 \zeta_i q'_i dx.$$

Подставляя (9) в J_1 , перепишем интеграл J_1 следующим образом:

$$J_1 = \int_0^a [((1 - \nu)r_2 u_2 + \nu r_3 u_3)r_1 u_1 g_1 - (1 - \nu)r_1 u_1 r_2 u_2 g_2 - \nu r_1 u_1 r_3 u_3 g_3] dx.$$

Из (7) ($\alpha_{ij} = 1$) следуют равенства $g_1 = g_2 = g_3$, и получается $J_1 = 0$. После интегрирования по частям интеграл J_2 можно записать в виде суммы

$$J_2 = I_1 + I_2, \quad I_1 = - \sum_{i=1}^3 \zeta_i q_i \Big|_0^a, \quad I_2 = \int_0^a \sum_{i=1}^3 \zeta'_i q_i dx.$$

Слагаемое I_1 пропадает в силу условий периодичности (5). В результате для \mathcal{D} имеем

$$\mathcal{D} = \int_0^a \sum_{i=1}^3 \zeta'_i \left(-k_i u'_i + a_i u_i (\ln p)' + \sum_{j=1}^3 b_{ij} u_i (\ln(p + u_j))' \right) dx, \quad i = 1, 2, 3.$$

Подставляя в \mathcal{D} выражения для стационарных решений (10), находим селекционную функцию

$$\mathcal{S} = \int_0^a (p')^2 \sum_{i=1}^3 (-k_i + a_i + \sum_{j=1}^3 b_{ij}) \eta_i dx, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где

$$\eta_1 = [(1 - \nu)r_2 \theta_2 + \nu r_3 (1 - \theta_1 - \theta_2)] \theta_1, \quad (13)$$

$$\eta_2 = -(1 - \nu)r_1 \theta_1 \theta_2, \quad (14)$$

$$\eta_3 = -\nu r_1 \theta_1 (1 - \theta_1 - \theta_2). \quad (15)$$

Подынтегральное выражение (12) обращается в нуль при выполнении условий (11), то есть селекционная функция \mathcal{S} тождественно равна нулю независимо от θ_i . \square

Двухпараметрическое семейство стационарных решений (10) дает для каждого вида распределение, пропорциональное функции ресурса $p(x)$. Это соответствует определению идеального свободного распределения [8]. Имеет место следующая лемма.

Лемма 3. При выполнении условий на параметры (11) задача (1)–(6) имеет решение

$$u_i(x, t) = v_i(t)p(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad (16)$$

где $v_i(t)$ находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{v}_i = r_i v_i \left(1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} v_j \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Доказательство. Подставляя (16) в выражения для q_i (2) и φ_i (4), имеем

$$q_i = -k_i v_i p' + a_i v_i p \frac{p'}{p} + \sum_{j=1}^3 b_{ij} v_i p \frac{p' + v_i p'}{p + v_i p}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Учитывая, что $p(x) > 0$, $v(t) \geq 0$ и выполнено (11), получаем $q_i = 0$. Аналогично для f_i (1) и g_i (3) выводим

$$f_i = r_i v_i p \left(1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} v_j \right). \quad (19)$$

В результате подстановки $q_i = 0$, (19) в уравнения (1) и сокращения на ненулевую функцию ресурса $p(x)$ имеем (17). \square

Таким образом, нелинейная задача (1)–(6) допускает разделение переменных и существование семейств периодических по времени и пространственно-неоднородных решений, так как для системы (17) в [22–25] установлено формирование семейств предельных циклов при дополнительных условиях на параметры α_{ij} .

Для задачи (1)–(6) возможны также другие решения, условия для которых сформулированы в следующей лемме.

Лемма 4. Для системы (1)–(6) при выполнении условий (7) и

$$k_i r_j = k_j r_i, \quad a_i r_j = a_j r_i, \quad b_{ik} r_j = b_{jk} r_i, \quad i, j, k = 1, \dots, 3, \quad (20)$$

косимметрией является вектор

$$L_2 = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T, \quad (21)$$

где

$$\zeta_1 = (1 - \nu) e^{-\frac{\varphi_1}{k_1} r_2 u_2} + \nu e^{-\frac{\varphi_1}{k_1} r_3 u_3}, \quad \zeta_2 = -(1 - \nu) e^{-\frac{\varphi_2}{k_2} r_1 u_1}, \quad \zeta_3 = -\nu e^{-\frac{\varphi_3}{k_3} r_1 u_1}. \quad (22)$$

При этом (1)–(6) имеет двухпараметрическое семейство стационарных решений

$$u_1(x) = \theta_1 w(x), \quad u_2(x) = \theta_2 w(x), \quad u_3(x) = (1 - \theta_1 - \theta_2) w(x), \quad 0 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 1, \quad (23)$$

где $w(x)$ – решение краевой задачи:

$$0 = \left(k_1 w' - a_1 w (\ln p)' - \sum_{j=1}^3 b_{1j} w (\ln(p + \theta_j w))' \right)' + r_1 w \left(1 - \frac{w}{p} \right), \quad (24)$$

$$w(0) = w(a), \quad w'(0) = w'(a). \quad (25)$$

Доказательство. По определению косимметрии векторное поле L_2 должно быть ортогонально правой части системы (1)–(6) для любых функций $u_i(x, t)$, то есть

$$\int_0^a (F, L_2) dx = J_1 + J_2 = 0, \quad J_1 = \int_0^a \sum_{i=1}^3 \zeta_i f_i dx, \quad J_2 = - \int_0^a \sum_{i=1}^3 \zeta_i q_i' dx.$$

Подставляя (22) в J_1 , получаем

$$J_1 = \int_0^a \left[\left((1 - \nu) e^{-\frac{\varphi_1}{k_1} r_2 u_2} + \nu e^{-\frac{\varphi_1}{k_1} r_3 u_3} \right) f_1 - (1 - \nu) e^{-\frac{\varphi_2}{k_2} r_1 u_1} f_2 - \nu e^{-\frac{\varphi_3}{k_3} r_1 u_1} f_3 \right] dx.$$

Для функций f_i (1), (3) из условия равенства α_{ij} единице (20) имеем

$$u_2 r_2 f_1 = u_1 r_1 f_2, \quad u_3 r_3 f_1 = u_1 r_1 f_3. \quad (26)$$

Для функций таксиса φ_i (4) с использованием (20) получаем

$$\frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2} = \frac{\varphi_3}{k_3}, \quad (27)$$

$$r_1 \varphi_2 = r_2 \varphi_1, \quad r_1 \varphi_3 = r_3 \varphi_1. \quad (28)$$

Продифференцируем (28):

$$r_1 \varphi_2' = r_2 \varphi_1', \quad r_1 \varphi_3' = r_3 \varphi_1'. \quad (29)$$

С учетом (26), (27) получаем $J_1 = 0$. После интегрирования по частям и использования условий периодичности (5) интеграл J_2 можно записать в виде

$$J_2 = \int_0^a \sum_{i=1}^3 \zeta_i' q_i dx, \quad i = 1, 2, 3, \quad (30)$$

где

$$\zeta_1' q_1 = e^{-\frac{\varphi_1}{k_1}} \left[(1 - \nu) \left(r_2 u_2' - \frac{\varphi_1'}{k_1} r_2 u_2 \right) + \nu \left(r_3 u_3' - \frac{\varphi_1'}{k_1} r_3 u_3 \right) \right] (-k_1 u_1' + u_1 \varphi_1'),$$

$$\zeta_2' q_2 = e^{-\frac{\varphi_2}{k_2}} (1 - \nu) \left(\frac{\varphi_2'}{k_2} r_1 u_1 - r_1 u_1' \right) (-k_2 u_2' + u_2 \varphi_2'),$$

$$\zeta_3' q_3 = e^{-\frac{\varphi_3}{k_3}} \nu \left(\frac{\varphi_3'}{k_3} r_1 u_1 - r_1 u_1' \right) (-k_3 u_3' + u_3 \varphi_3').$$

Перепишем эти выражения, используя формулы (27), (29):

$$\zeta_1' q_1 = e^{-\frac{\varphi_1}{k_1}} \left[\frac{r_2}{k_1} (1 - \nu) (k_1 u_2' - \varphi_1' u_2) + \frac{r_3}{k_1} \nu (k_1 u_3' - \varphi_1' u_3) \right] (-k_1 u_1' + u_1 \varphi_1'),$$

$$\zeta_2' q_2 = e^{-\frac{\varphi_1}{k_1}} \frac{r_2}{k_1} (1 - \nu) (\varphi_1' u_1 - k_1 u_1') (-k_1 u_2' + u_2 \varphi_1'), \quad (31)$$

$$\zeta_3' q_3 = e^{-\frac{\varphi_1}{k_1}} \frac{r_3}{k_1} \nu (\varphi_1' u_1 - k_1 u_1') (-k_1 u_3' + u_3 \varphi_1').$$

Подставляя (31) в (30), получаем $J_2 = 0$.

Таким образом, векторное поле $L_2 = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, см. (21)–(22), ортогонально правой части системы (1)–(6) и является косимметрией при выполнении условий (7), (20). Отметим, что это справедливо для любых значений вещественного параметра ν , то есть имеет место мультикосимметрия. Действительно, для L_{20} и L_{21} , получаемых из (21)–(22) при $\nu = 0$ и $\nu = 1$,

скалярное произведение $(L_{20}, L_{21}) > 0$. Этой мультикосимметрии отвечает двухпараметрическое семейство стационарных решений задачи (1)–(6).

При условиях на параметры (7), (20) стационарное решение задачи (1)–(6) удовлетворяет уравнениям

$$0 = \left(k_i u_i' - a_i u_i (\ln p)' - \sum_{j=1}^3 b_{ij} u_i (\ln(p + u_j))' \right)' + r_i u_i \left(1 - \frac{u_1 + u_2 + u_3}{p} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (32)$$

После подстановки (23) в (32) для $i = 1$ получаем уравнение, совпадающее с (24), умноженным на θ_1 . Аналогично для $i = 2$ из (32) с учетом соотношений (20) получаем уравнение (24), умноженное на $\frac{\theta_2 r_1}{r_2}$, а для $i = 3$ — на $\frac{(1 - \theta_1 - \theta_2) r_1}{r_3}$. \square

3. Вычислительный эксперимент

Представим результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующих реализацию мультистабильности в виде семейств стационарных и периодических решений. Распределение ресурса задавалось в виде

$$p(x) = 1 + 0.25 \sin 2\pi x. \quad (33)$$

Вычисления конкретных решений проводились для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных в результате дискретизации на основе компактной разностной схемы [26, 27]. Для интегрирования по времени применялся метод Рунге–Кутты восьмого порядка. Использовалась равномерная пространственная сетка $x_r = rh$, $r = 1, \dots, n$, $h = a/n$, где n — число узлов, для неоднородного ресурса (33) достаточно было $n = 10$, что показали расчеты при $n = 20$.

В табл. 1 приведены значения коэффициентов диффузии, таксиса и роста, для которых методом установления были рассчитаны стационарные распределения из следующих начальных данных:

$$P_1 = \{u_i(x, 0) = 0.1i, \quad i = 1, 2, 3\}, \quad (34)$$

$$P_2 = \{u_i(x, 0) = 1.25 - p(x) + 0.1i, \quad i = 1, 2, 3\}. \quad (35)$$

Таблица 1. Главные значения спектра устойчивости стационарных решений; $\alpha_{ij} = 1$, $b_{ii} = 0$, $b_{23} = 0$, $b_{21} = 0$, $b_{32} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$

Table 1. Main values of the stability spectrum of stationary solutions; $\alpha_{ij} = 1$, $b_{ii} = 0$, $b_{23} = 0$, $b_{21} = 0$, $b_{32} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$

No	r_i	k_i	a_i	b_{12}, b_{13}, b_{31}	$u_i^0(x)$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
1	1	0.01 <i>i</i>	0.01 <i>i</i>	0, 0, 0	P_1	-9.3×10^{-9}	-1.0×10^{-8}	-0.454	-0.468
					P_2	-9.6×10^{-9}	-1.0×10^{-8}	-0.483	-0.498
2	1	0.01 <i>i</i>	0.01 <i>i</i>	0.01, -0.01, 0	P_1	-9.2×10^{-9}	-1.0×10^{-8}	-0.461	-0.475
					P_2	-9.6×10^{-8}	-1.0×10^{-8}	-0.496	-0.511
3	1	0.01 <i>i</i>	0.02	0, -0.01, 0.01	P_1	-9.2×10^{-8}	-1.0×10^{-8}	-0.464	-0.478
					P_2	-9.6×10^{-8}	-1.0×10^{-8}	-0.494	-0.509
4	<i>i</i>	0.02 <i>i</i>	0.01 <i>i</i>	0, 0, 0	P_1	-1.1×10^{-8}	-2.3×10^{-8}	-0.829	-0.854
					P_2	-1.2×10^{-8}	-2.4×10^{-8}	-0.890	-0.916

В табл. 1 представлены главные значения спектра устойчивости полученных решений, два значения порядка 10^{-8} соответствуют двукратному нулю. Это означает принадлежность данных распределений двухпараметрическим семействам стационарных решений, которые получаются при выполнении условий леммы 2 (случай ИСР, строки 1, 2, 3 табл. 1) и леммы 4 (случай косимметрии, строка 4 табл. 1). Отметим, что для случая ИСР коэффициенты k_i , a_i могут быть различными.

На рис. 1 представлены результаты расчетов для иллюстрации леммы 2 (строка 3 табл. 1). Достаточно быстро из различных начальных данных происходит установление к решениям, отвечающим ИСР. Финальные плотности видов получились разными (мультистабильность) и пропорциональными ресурсу $p(x)$, а вычисляемая сумма видов

$$S(x, t) = \sum_{i=1}^3 u_i(x, t) \quad (36)$$

уже при $t = 6$ с хорошей точностью равна $p(x)$, см. рис. 2.

Случаю строки 4 табл. 1 отвечают стационарные решения, получающиеся при выполнении условий леммы 4. На рис. 3 представлены финальные пространственные распределения u_i для

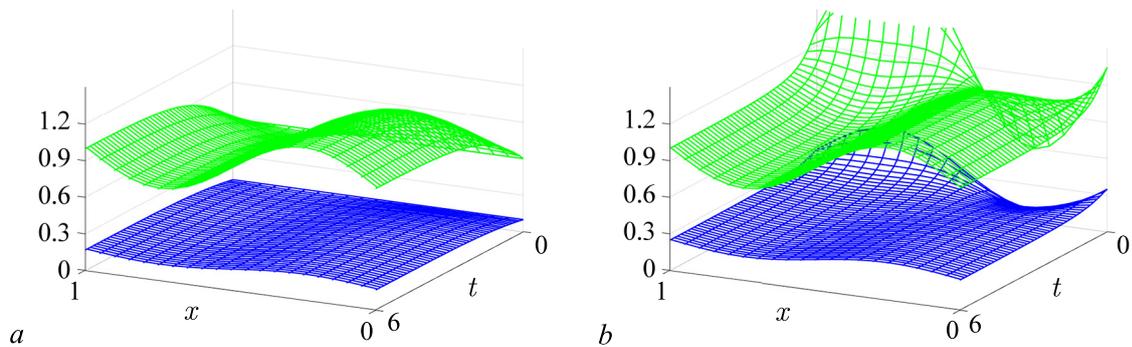


Рис. 1. Установление стационарных распределений из различных начальных условий: $a - P_1$ (34), $b - P_2$ (35); сумма видов $\sum_{i=1}^3 u_i(x, t)$ (зеленый), $u_1(x, t)$ (синий), параметры из табл. 1, строка 3 (цвет онлайн)

Fig. 1. Establishing stationary distributions from different initial conditions: $a - P_1$ (34), $b - P_2$ (35); sum of types $\sum_{i=1}^3 u_i(x, t)$ (green), $u_1(x, t)$ (blue), parameters from table 1, row 3 (color online)

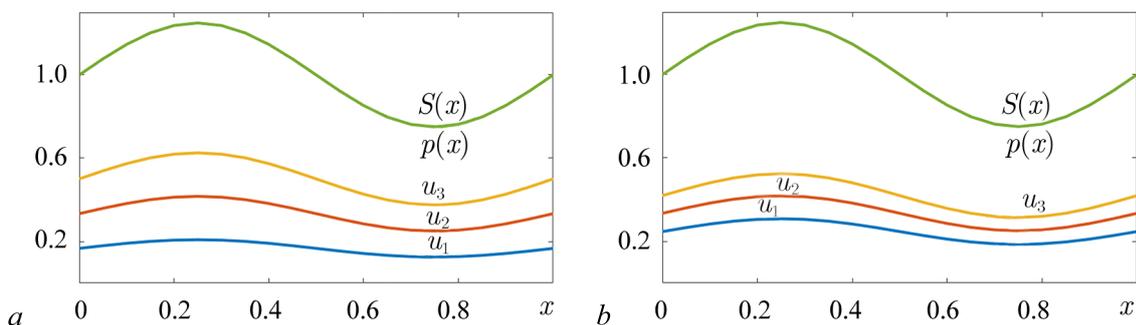


Рис. 2. Финальные пространственные распределения u_i при различных начальных распределениях P_1 (a), P_2 (b), функция ресурса $p(x)$, $S(x) = S(x, 6)$; параметры из табл. 1, строка 3 (цвет онлайн)

Fig. 2. Final spatial distributions of u_i for different initial distributions P_1 (a), P_2 (b), resource function $p(x)$, $S(x) = S(x, 6)$; parameters from table 1, row 3 (color online)

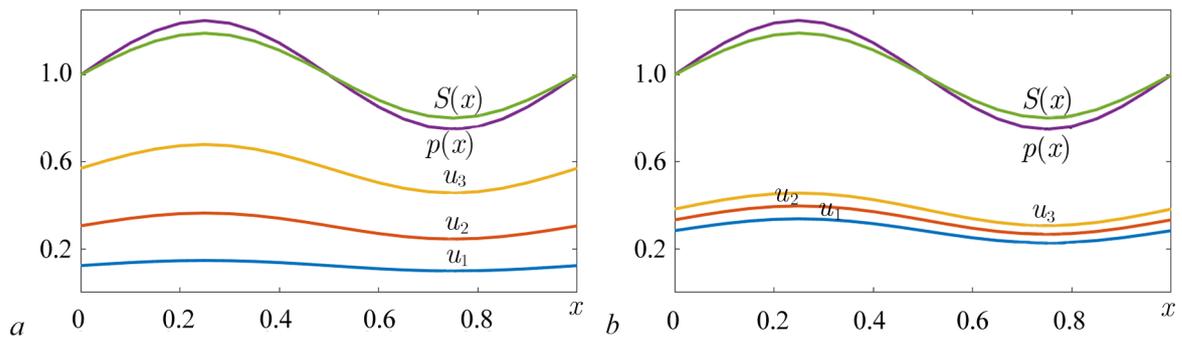


Рис. 3. Финальные пространственные распределения u_i при различных начальных распределениях P_1 (a), P_2 (b), функция ресурса $p(x)$, $S(x) = S(x, 6)$; параметры из табл. 1, строка 4 (цвет онлайн)

Fig. 3. Final spatial distributions of u_i for different initial distributions P_1 (a), P_2 (b), resource function $p(x)$, $S(x) = S(x, 6)$; parameters from table 1, row 4 (color online)

разных начальных условий (34), (35), а также функция ресурса $p(x)$ и сумма видов $S(x, 6)$. В этом случае ($k_i \neq a_i$, $b_{ij} = 0$) также имеется двухпараметрическое семейство стационарных распределений, но наблюдается дисбаланс: $S(x, 6) \neq p(x)$.

При нарушении условий косимметрии происходит разрушение семейства. Например, на рис. 4, 5 представлены результаты расчетов с параметрами роста $r_i = 1$, что значительно отличается от значений $r_i = i$, обеспечивающих косимметрию задачи и формирование семейства стационарных распределений, остальные коэффициенты соответствуют приведенным в табл. 1, строка 4. На рис. 4 даны графики зависимости от времени средних по ареалу плотностей видов:

$$U_i = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n u_{i,r}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (37)$$

В качестве начальных данных были выбраны два случая финальных распределений $u_i(x, 6)$, см. рис. 3. Видно, что в результате установления исчезают популяции u_2 , u_3 , а остается только

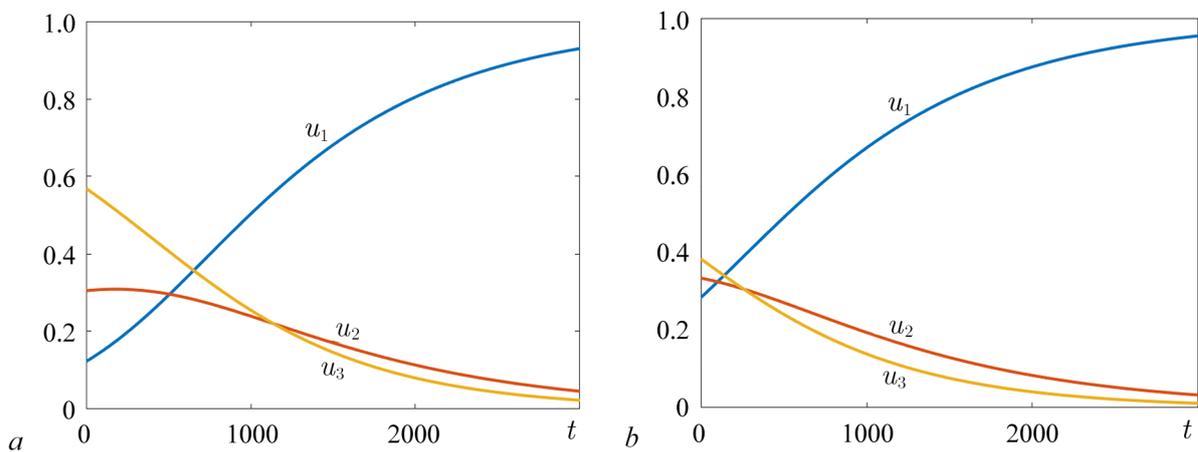


Рис. 4. Изменение во времени средних плотностей $U_i(t)$ при разрушении семейства стационарных распределений, начальные данные соответствуют финальным распределениям рис. 3; $\alpha_{ij} = 1$, $r_i = 1$, $k_i = 0.02i$, $a_i = 0.01i$, $b_{ij} = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Change in time of average densities $U_i(t)$ upon destruction of the family of stationary distributions, initial data correspond to final distributions Fig. 3; $\alpha_{ij} = 1$, $r_i = 1$, $k_i = 0.02i$, $a_i = 0.01i$, $b_{ij} = 0$ (color online)

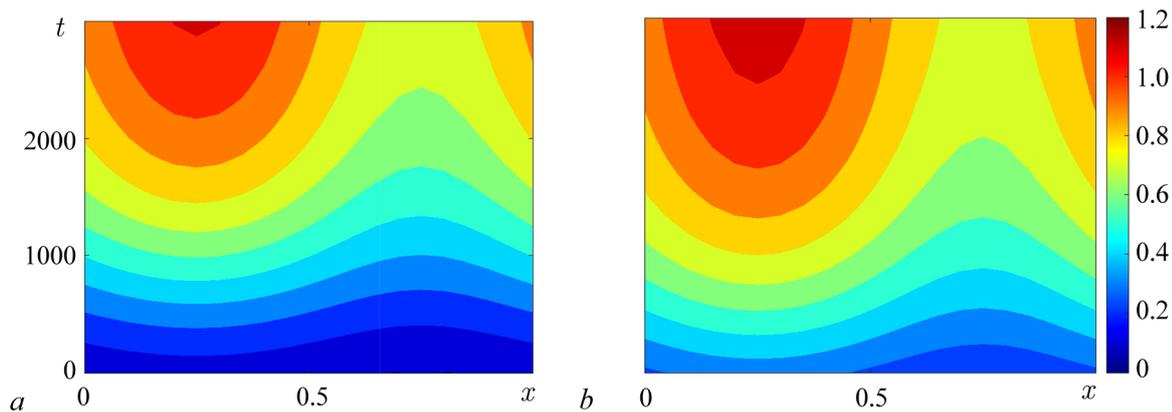


Рис. 5. Пространственно-временное распространение вида $u_1(x, t)$ при разрушении семейства стационарных распределений, начальные данные соответствуют финальным распределениям рис. 3; $\alpha_{ij} = 1$, $r_i = 1$, $k_i = 0.02i$, $a_i = 0.01i$, $b_{ij} = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Spatio-temporal propagation of the form $u_1(x, t)$ upon destruction of the family of stationary distributions, initial data correspond to final distributions Fig. 3; $\alpha_{ij} = 1$, $r_i = 1$, $k_i = 0.02i$, $a_i = 0.01i$, $b_{ij} = 0$ (color online)

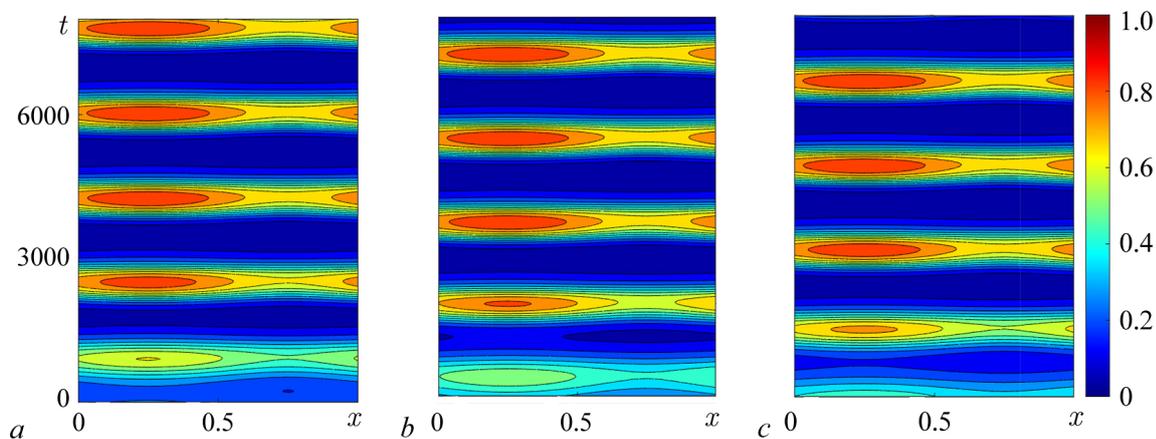


Рис. 6. Изменение во времени плотностей $u_1(x, t)$ (a), $u_2(x, t)$ (b), $u_3(x, t)$ (c); $\alpha_{ij} = 1$, $k_i = 0.01$, $a_i = 0.02$, $b_{12} = b_{23} = b_{31} = -0.03$, $b_{ii} = b_{13} = b_{21} = b_{32} = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Change in time of densities $u_1(x, t)$ (a), $u_2(x, t)$ (b), $u_3(x, t)$ (c); $\alpha_{ij} = 1$, $k_i = 0.01$, $a_i = 0.02$, $b_{12} = b_{23} = b_{31} = -0.03$, $b_{ii} = b_{13} = b_{21} = b_{32} = 0$ (color online)

вид u_1 . При этом процесс установления занимает большое время, что иллюстрирует рис. 5, где представлены картины пространственно-временного распространения вида u_1 .

При выполнении (7) и нарушении условий (11), (20) реализуются сценарии, не приводящие к формированию семейств решений. Например, при $\alpha_{ij} = 1$, $k_i = 0.01$, $a_i = 0.02$, $b_{12} = b_{23} = b_{31} = -0.03$ из начальных данных (35) получается режим колебаний с большим периодом, см. рис. 6.

Для однородного ареала семейства предельных циклов в системе конкурирующих трех видов были найдены в [22–25]. Ниже представлены результаты вычислительных экспериментов решения задачи (1)–(6) для неоднородного ресурса $p(x)$ (33). Семейство предельных циклов было получено при выполнении условий (11) для различных наборов коэффициентов локальной реакции α_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, см. табл. 2. Таким образом, и в случае пространственно-неоднородной задачи реализован сценарий формирования семейства периодических по времени режимов.

Таблица 2. Значения главных мультипликаторов и периода предельных циклов для системы (1)–(6) при различных параметрах $\alpha_{ij}, r_3; r_1 = r_2 = 1, k_i = 0.01i, a_i = 0.02, b_{13} = -0.01, b_{31} = 0.01, b_{31} = 0.01, b_{ii} = b_{12} = b_{21} = b_{23} = b_{32} = 0, i, j = 1, 2, 3$: начальное распределение P_1

Table 2. Values of the main multipliers and the period of limit cycles for the system (1)–(6) with different parameters $\alpha_{ij}, r_3; r_1 = r_2 = 1, k_i = 0.01i, a_i = 0.02, b_{13} = -0.01, b_{31} = 0.01, b_{31} = 0.01, b_{ii} = b_{12} = b_{21} = b_{23} = b_{32} = 0, i, j = 1, 2, 3$: initial distribution P_1

α_{12}	α_{23}	α_{31}	α_{13}	α_{21}	α_{32}	r_3	ρ_1, ρ_2	Период
			1.2	1.2	1.2	1	$1.0 \pm 0.0004i$	59.1
0.8	0.8	0.8	1.1	1.2	1.4	1	0.9998, 1.0002	59.8
			1.1	1.2	1.4	0.5	0.9993, 1.0007	76.7

При выполнении условий на коэффициенты диффузии и таксиса (лемма 2, случай ИСР) получается семейство бегущих волн, см. рис. 7. Расчеты проводились для начальных распределений:

$$P_1 = \{u_1(x, 0) = 0.25p(x), u_2(x, 0) = 0.25p(x), u_3(x, 0) = 0.7p(x)\}, \quad (38)$$

$$P_2 = \{u_1(x, 0) = 0.1p(x), u_2(x, 0) = 0.1p(x), u_3(x, 0) = p(x)\}. \quad (39)$$

Из табл. 2 видно, что для различных параметров получаются циклы с отличающимися периодами. Значения мультипликаторов ρ_1, ρ_2 почти равны единице. Это является численным подтверждением существования самого цикла и соседних циклов, то есть реализацией семейства периодических режимов. Остальные значения мультипликаторов по модулю меньше единицы, что означает устойчивость данного цикла. Отметим, что для различных начальных распределений достаточно быстро реализуются периодические режимы из семейства.

На рис. 7 представлены пространственно-временные распределения вида u_3 при начальных данных (38) и (39) для параметров, приведенных в табл. 2 (строка 2). Видно, что получились различные циклы, это отвечает мультистабильности решений.

При нарушении условий (11) семейство периодических решений разрушается. При этом наблюдается достаточно медленная динамика.

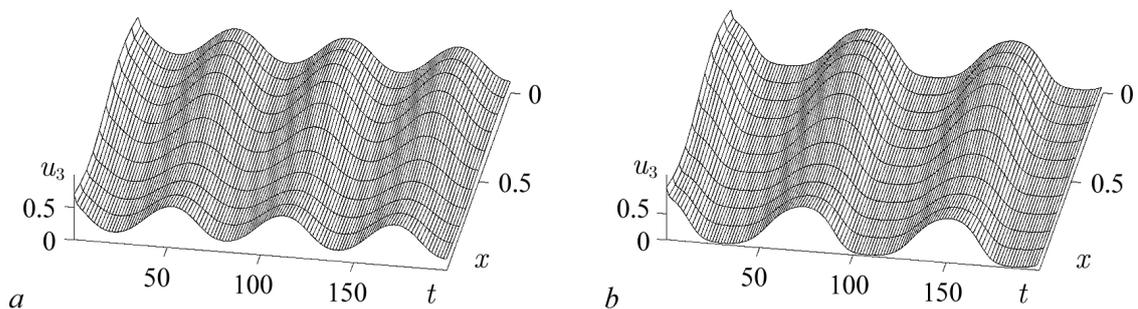


Рис. 7. Изменение по времени плотности u_3 при различных начальных распределениях: P_1 — слева, P_2 — справа; $r_1 = r_2 = 1, k_i = 0.01i, a_i = 0.02, b_{13} = -0.01, b_{31} = 0.01, b_{ii} = b_{12} = b_{21} = b_{23} = b_{32} = 0, \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = 0.8, \alpha_{13} = 1.1, \alpha_{21} = 1.2, \alpha_{32} = 1.4, r_3 = 0.5$ (строка 2 табл. 2)

Fig. 7. Change in density u_3 over time for different initial distributions: P_1 — on the left, P_2 — on the right; $r_1 = r_2 = 1, k_i = 0.01i, a_i = 0.02, b_{13} = -0.01, b_{31} = 0.01, b_{ii} = b_{12} = b_{21} = b_{23} = b_{32} = 0, \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = 0.8, \alpha_{13} = 1.1, \alpha_{21} = 1.2, \alpha_{32} = 1.4, r_3 = 0.5$ (line 2 table 2)

Заключение

В данной работе представлены результаты анализа мультистабильности для системы конкурирующих видов на неоднородном ареале. В случае однородного по ресурсу ареала при условиях периодичности или отсутствия потоков задача описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений [23–25]. В [21, 22] для однородной задачи получены косимметрии, реализующиеся при дополнительных условиях на параметры, найдены двух- и однопараметрические семейства равновесий (стационарных решений), а также однопараметрическое семейство циклов (периодических решений). Проведенный анализ задачи на неоднородном ареале показал, что семейства стационарных решений получаются при модифицированных условиях на параметры (добавляются коэффициенты диффузии и направленной миграции), а существование семейства периодических решений установлено при условиях идеального свободного распределения. В численном эксперименте подтверждено формирование семейств для различных значений параметров. Приведены примеры разрушения семейств решений при нарушении условий косимметрии и ИСР. Полученные в работе результаты могут быть использованы для анализа устойчивых стратегий в популяционных моделях хищников и жертв [28–33].

Список литературы

1. *Мюррей Дж.* Математическая биология. Т. 2. Пространственные модели и их приложения в биомедицине. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. 1104 с.
2. *Rubin A., Rznichenko G.* Mathematical Biophysics. New York: Springer, 2014. 273 p. DOI:10.1007/978-1-4614-8702-9.
3. *Malchow H., Petrovskii S. V., Venturino E.* Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation. New York: Chapman and Hall/CRC, 2008. 469 p.
4. *Cantrell R. S., Cosner C., Martínez S., Torres N.* On a competitive system with ideal free dispersal // Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 265, no. 8. P. 3464–3493. DOI: 10.1016/j.jde.2018.05.008.
5. *Фрисман Е. Я., Кулаков М. П., Ревуцкая О. Л., Жданова О. Л., Неверова Г. П.* Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11, № 1. С. 119–151. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
6. *Cantrell R. S., Cosner C., Lewis M. A., Lou Y.* Evolution of dispersal in spatial population models with multiple timescales // Journal of Mathematical Biology. 2020. Vol. 80. P. 3–37. DOI: 10.1007/s00285-018-1302-2.
7. *Avgar T., Betini G. S., Fryxell J. M.* Habitat selection patterns are density dependent under the ideal free distribution // Journal of Animal Ecology. 2020. Vol. 89, no. 12. P. 2777–2787. DOI: 10.1111/1365-2656.13352.
8. *Елифанов А. В., Цибулин В. Г.* Математическая модель идеального распределения родственных популяций на неоднородном ареале // Владикавказский математический журнал. 2023. Т. 25, № 2. С. 78–88. DOI: 10.46698/t4351-7190-0142-r.
9. *Tsybulin V., Zelenchuk P.* Predator–prey dynamics and ideal free distribution in a heterogeneous environment // Mathematics. 2024. Vol. 12, no. 2. P. 275. DOI: 10.3390/math12020275.
10. *Feudel U.* Complex dynamics in multistable systems // Int. J. Bifurc. Chaos. 2008. Vol. 18, no. 6. P. 1607–1626. DOI: 10.1142/S0218127408021233.
11. *Felk E. V., Kuznetsov A. P., Savin A. V.* Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2014. Vol. 410. P. 561–557. DOI: 10.1016/j.physa.2014.05.066.

12. *Pham V.T., Vaidyanathan S., Volos C., Kapitaniak T. (eds) Nonlinear Dynamical Systems with Self-Excited and Hidden Attractors.* Cham: Springer, 2018. 497 p. DOI: 10.1007/978-3-319-71243-7.
13. *Budyansky A.V., Frischmuth K., Tsybulin V.G. Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat // Discrete and Continuous Dynamical Systems – B.* 2019. Vol. 24, no. 2. P. 547–561. DOI: 10.3934/dcdsb.2018196.
14. *Govorukhin V.N., Yudovich V.I. Bifurcations and selection of equilibria in a simple cosymmetric model of filtrational convection // Chaos.* 1999. Vol. 9. P. 403–412. DOI: 10.1063/1.166417.
15. *Юдович В.И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки.* 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148.
16. *Юдович В.И. О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // Докл. РАН.* 2004. Т. 398, № 1. С. 57–61.
17. *Frischmuth K., Kovaleva E.S., Tsybulin V.G. Family of equilibria in a population kinetics model and its collapse // Nonlinear Analysis: Real World Applications.* 2011. Vol. 12, no. 1. P. 146–155. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2010.06.004.
18. *Frischmuth K., Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability // Applied Mathematics and Computation.* 2021. Vol. 410. P. 126456. DOI: 10.1016/j.amc.2021.126456.
19. *Ха Д.Т., Цибулин В.Г. Мультистабильность для математической модели динамики хищников и жертв на неоднородном ареале // Современная математика. Фундаментальные направления.* 2022. Т. 68, № 3. С. 509–521. DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-509-521.
20. *Cantrell R.S., Cosner C. Spatial Ecology Via Reaction–Diffusion Equations.* Chichester: Wiley, 2003. 428 p. DOI: 10.1002/0470871296.
21. *Нгуен Б.Х., Ха Д.Т., Цибулин В.Г. Мультистабильность для системы трех конкурирующих видов // Компьютерные исследования и моделирование.* 2022. Т. 14, № 6. С. 1325–1342. DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-6-1325-1342.
22. *Нгуен Б.Х., Цибулин В.Г. Математическая модель трех конкурирующих популяций и мультистабильность периодических режимов // Известия вузов. ПНД.* 2023. Т. 31, № 3. С. 316–333. DOI: 10.18500/0869-6632-003038.
23. *May R.M., Leonard W.J. Nonlinear aspects of competition between three species // SIAM Journal on Applied Mathematics.* 1975. Vol. 29, no. 2. P. 243–253. DOI: 10.1137/0129022.
24. *Chi C.-W., Wu L.-I., Hsu S.-B. On the asymmetric May–Leonard model of three competing species // SIAM Journal on Applied Mathematics.* 1998. Vol. 58, no. 1. P. 211–226. DOI: 10.1137/S0036139994272060.
25. *Hou Z., Baigent S. Heteroclinic limit cycles in competitive Kolmogorov systems // Discrete and Continuous Dynamical Systems.* 2013. Vol. 33, no. 9. P. 4071–4093. DOI: 10.3934/dcds.2013.33.4071.
26. *Нгуен Б.Х., Цибулин В.Г. Схема повышенного порядка точности для моделирования динамики хищника и жертвы на неоднородном ареале // Известия вузов. ПНД.* 2024. Т. 32, № 3. С. 294–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003105.
27. *Нгуен Б.Х., Ха Д.Т., Цибулин В.Г. Компактная схема для моделирования динамики конкурирующих популяций на неоднородном ареале // Вычислительные технологии.* 2024. Т. 29, № 5. С. 30–42. DOI: 10.25743/ICT.2024.29.5.004.
28. *Свирижев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ.* М.: Наука, 1978. 352 с.
29. *Tyutyunov Yu V., Titova L.I. From Lotka–Volterra to Arditi–Ginzburg: 90 years of evolving trophic functions // Biol. Bull. Rev.* 2020. Vol. 10. P. 167–185. DOI: 10.1134/S207908642003007X.

30. *Manna K., Volpert V., Banerjee M.* Pattern formation in a three-species cyclic competition model // *Bull. Math. Biol.* 2021. Vol. 83. P. 52. DOI: 10.1007/s11538-021-00886-4.
31. *Цибулин В. Г., Ха Т. Д., Зеленчук П. А.* Нелинейная динамика системы хищник-жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов // *Известия вузов. ПНД.* 2021. Т. 29, № 5. С. 751–764. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764.
32. *Ha T. D., Tsybulin V. G., Zelenchuk P. A.* How to model the local interaction in the predator-prey system at slow diffusion in a heterogeneous environment? // *Ecological Complexity.* 2022. Vol. 52. P. 101026. DOI: 10.1016/j.ecocom.2022.101026.
33. *Tyutyunov Yu. V., Govorukhin V. N., Tsybulin V. G.* Modeling study of factors determining efficacy of biological control of adventive weeds // *Mathematics.* 2024. Vol. 12, no. 1. P. 160. DOI: 10.3390/math12010160.

References

1. Murray JD. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications.* New York: Springer; 2003. 814 p. DOI: 10.1007/b98869.
2. Rubin A, Riznichenko G. *Mathematical Biophysics.* New York: Springer; 2014. 273 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-8702-9.
3. Malchow H, Petrovskii SV, Venturino E. *Spatio-temporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation.* New York: Chapman and Hall/CRC; 2008. 469 p.
4. Cantrell RS, Cosner C, Martínez S, Torres N. On a competitive system with ideal free dispersal. *Journal of Differential Equations.* 2018;265(8):3464–3493. DOI: 10.1016/j.jde.2018.05.008.
5. Frisman YY, Kulakov MP, Revutskaya OL, Zhdanova OL, Neverova GP. The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations. *Computer Research and Modeling.* 2019;11(1):119–151. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
6. Cantrell RS, Cosner C, Lewis MA, Lou Y. Evolution of dispersal in spatial population models with multiple timescales. *Journal of Mathematical Biology.* 2020;80:3–37. DOI: 10.1007/s00285-018-1302-2.
7. Avgar T, Betini GS, Fryxell JM. Habitat selection patterns are density dependent under the ideal free distribution. *Journal of Animal Ecology.* 2020;89(12):2777–2787. DOI: 10.1111/1365-2656.13352.
8. Epifanov AV, Tsybulin VG. Mathematical model of the ideal distribution of related species in a nonhomogeneous environment. *Vladikavkaz Math. J.* 2023;25(2):78–88 (in Russian). DOI: 10.46698/t4351-7190-0142-r.
9. Tsybulin V, Zelenchuk P. Predator–prey dynamics and ideal free distribution in a heterogeneous environment. *Mathematics.* 2024;12(2):275. DOI: 10.3390/math12020275.
10. Feudel U. Complex dynamics in multistable systems. *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2008;18(6):1607–1626. DOI: 10.1142/S0218127408021233.
11. Felk EV, Kuznetsov AP, Savin AV. Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 2014;410:561–557. DOI: 10.1016/j.physa.2014.05.066.
12. Pham VT, Vaidyanathan S, Volos C, Kapitaniak T, editors. *Nonlinear Dynamical Systems with Self-Excited and Hidden Attractors.* Cham: Springer; 2018. 497 p. DOI: 10.1007/978-3-319-71243-7.
13. Budyansky AV, Frischmuth K, Tsybulin VG. Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat. *Discrete and Continuous Dynamical Systems–B.* 2019;24(2):547–561. DOI: 10.3934/dcdsb.2018196.
14. Govorukhin VN, Yudovich VI. Bifurcations and selection of equilibria in a simple cosymmetric model of filtrational convection. *Chaos.* 1999;9:403–412. DOI: 10.1063/1.166417.

15. Yudovich VI. Cosymmetry, degeneracy of the solutions of operator equations and the onset of filtrational convection. *Math. Notes*. 1991;49(5):540–545. DOI: 10.1007/BF01142654.
16. Yudovich VI. Bifurcations under perturbations violating cosymmetry. *Doklady Physics*. 2004;49(9): 522–526. DOI: 10.1134/1.1810578.
17. Frischmuth K, Kovaleva ES, Tsybulin VG. Family of equilibria in a population kinetics model and its collapse. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2011;12(1):146–155. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2010.06.004.
18. Frischmuth K, Budyansky AV, Tsybulin VG. Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability. *Applied Mathematics and Computation*. 2021;410:126456. DOI: 10.1016/j.amc.2021.126456.
19. Ha TD, Tsybulin VG. Multistability for a mathematical model of the dynamics of predators and prey in a heterogeneous area. *J. Math. Sci.* 2024;282:417–428. DOI: 10.1007/s10958-024-07185-y.
20. Cantrell RS, Cosner C. *Spatial Ecology Via Reaction–Diffusion Equations*. Chichester: Wiley; 2003. 428 p. DOI: 10.1002/0470871296.
21. Nguyen BH, Ha TD, Tsybulin VG. Multistability for system of three competing species. *Computer Research and Modeling*. 2022;14(6):1325–1342 (in Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-6-1325-1342.
22. Nguyen BH, Tsybulin VG. Mathematical model of three competing populations and multistability of periodic regimes. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(3):316–333. DOI: 10.18500/0869-6632-003038.
23. May RM, Leonard WJ. Nonlinear aspects of competition between three species. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1975;29(2):243–253. DOI: 10.1137/0129022.
24. Chi C-W, Wu L-I, Hsu S-B. On the asymmetric May–Leonard model of three competing species. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1998;58(1):211–226. DOI: 10.1137/S0036139994272060.
25. Hou Z, Baigent S. Heteroclinic limit cycles in competitive Kolmogorov systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2013;33(9):4071–4093. DOI: 10.3934/dcds.2013.33.4071.
26. Nguyen BH, Tsybulin VG. High order accuracy scheme for modeling the dynamics of predator and prey in heterogeneous environment. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(3): 294–304. DOI: 10.18500/0869-6632003105.
27. Nguyen BH, Ha TD, Tsybulin VG. Compact scheme for modelling competing dynamics of populations on a heterogeneous environment. *Computational Technologies*. 2024;29(5):30–42 (in Russian). DOI: 10.25743/ICT.2024.29.5.004.
28. Svirezhev YuM, Logofet DO. *Resilience of Biological Communities*. M.: Nauka; 1978. 352 p. (in Russian).
29. Tyutyunov YuV, Titova LI. From Lotka–Volterra to Arditi–Ginzburg: 90 years of evolving trophic functions. *Biol. Bull. Rev.* 2020;10:167–185. DOI: 10.1134/S207908642003007X.
30. Manna K, Volpert V, Banerjee M. Pattern formation in a three-species cyclic competition model. *Bull. Math. Biol.* 2021;83:52. DOI: 10.1007/s11538-021-00886-4.
31. Tsybulin VG, Ha TD, Zelenchuk PA. Nonlinear dynamics of the predator–prey system in a heterogeneous habitat and scenarios of local interaction of species. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(5):751–764 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764.
32. Ha TD, Tsybulin VG, Zelenchuk PA. How to model the local interaction in the predator-prey system at slow diffusion in a heterogeneous environment? *Ecological Complexity*. 2022;52:101026. DOI: 10.1016/j.ecocom.2022.101026.
33. Tyutyunov YuV, Govorukhin VN, Tsybulin VG. Modeling study of factors determining efficacy of biological control of adventive weeds. *Mathematics*. 2024;12(1):160. DOI: 10.3390/math12010160.



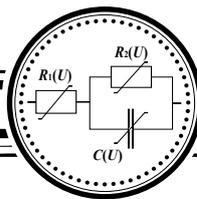
Нгуен Хоанг Бьу — родился в Куангнам, Вьетнам (1996). Окончил Санкт-Петербургский военно-морской институт (2021). Учится в аспирантуре Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ
E-mail: kng@sfnedu.ru
ORCID: 0009-0001-1644-5800



Цибулин Вячеслав Георгиевич — родился в Ростове-на-Дону (1956). Окончил механико-математический факультет Ростовского государственного университета (1978). Доктор физико-математических наук (2011). Заведующий кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета. Занимается вычислительной гидродинамикой, задачами конвекции, популяционной динамики и др. В соавторстве с В. Н. Говорухиным написал книги «Введение в Maple», «Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB и LaTeX».

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ
E-mail: vgcibulin@sfnedu.ru
ORCID: 0000-0003-4812-278X
AuthorID (eLibrary.Ru): 4304



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6)

Научная статья
УДК 621.385.6

DOI: 10.18500/0869-6632-003173
EDN: SZZNTG

О планарных моделях резистивного усилителя (теория и моделирование)

В. Н. Титов^{1,2}, А. А. Фунтов¹✉

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

E-mail: titovvn1974@gmail.com, ✉aafuntov@mail.ru

Поступила в редакцию 15.01.2025, принята к публикации 11.03.2025,

опубликована онлайн 22.04.2025, опубликована 28.11.2025

Аннотация. Цель настоящей работы — исследование планарного резистивного усилителя с метаматериалом и обоснование применимости его простых моделей для первичных оценок. **Методы.** Рассматриваются две двумерные модели. Первая модель — ленточный пучок, бесконечно широкий по одной из осей, в сильном продольном магнитном поле летит между слоями метаматериала, плоскость симметрии проходит по середине пучка, параллельно ему; над и под метаматериалом через вакуумный промежуток располагаются металлические пластины, которые являются границами электродинамической системы. Вторая — периодическая структура из тонких ленточных пучков, бесконечно широких по одной из осей, разделенных толстыми слоями метаматериала. В обоих случаях частотные свойства метаматериала учитываются по модели Друде. Выводятся дисперсионные уравнения для этих моделей. Показан предельный переход к одномерной линейной теории. Проводится анализ и сравнение результатов линейной теории и численного моделирования в CST Particle Studio для каждой модели. В численных экспериментах проводится модуляция пучка по плотности. В линейном режиме оценивается коэффициент усиления по отношению максимумов амплитуд Фурье-преобразования тока на коллекторе к току эмиссии. **Результаты и заключение.** Полученные теоретические результаты показывают чувствительность модели к геометрическим размерам и свойствам среды. Показано, что за счет использования метаматериала можно получить существенное увеличение переменного тока. Показано качественное соответствие результатов планарной линейной теории и численного эксперимента для обеих моделей. Сформулирована иерархия моделей.

Ключевые слова: резистивный усилитель, метаматериал, теория, численный эксперимент.

Для цитирования: Титов В. Н., Фунтов А. А. О планарных моделях резистивного усилителя (теория и моделирование) // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 6. С. 860–872. DOI: 10.18500/0869-6632-003173. EDN: SZZNTG

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

On planar models of resistive wall amplifier (theory and simulations)

V. N. Titov^{1,2}, A. A. Funtov¹✉

¹Saratov State University, Russia

²Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russia

E-mail: titovvn1974@gmail.com, ✉aafuntov@mail.ru

Received 15.01.2025, accepted 11.03.2025, available online 22.04.2025, published 28.11.2025

Abstract. The purpose of this paper is to investigate a metamaterial-based planar resistive wall amplifier and to demonstrate the applicability of simplified models for preliminary evaluations. *Methods.* Two two-dimensional models are considered. The first model constitutes of an infinitely wide sheet beam immersed in a strong longitudinal magnetic field propagating between two identical layers of metamaterial, with the symmetry plane placed along the beam center; the layers of metamaterial and an envelope of parallel metal plates are separated by vacuum gaps. The second model is a periodic structure of thin sheet beams immersed in a strong longitudinal magnetic field propagating through drift channels in an infinite slab of metamaterial. In both cases, the frequency properties of the metamaterial are accounted by the Drude model. The dispersion equations for these models are derived. The transition to one-dimensional linear theory is demonstrated and discussed. The results of linear theory and numerical simulations in CST Particle Studio for each model are compared and analyzed. In numerical simulation, the initial beam density modulation is utilized. In the linear regime, the gain is evaluated by the ratio of the maximum amplitudes of the Fourier transform of the collector current to the emission current. *Results and conclusion.* The obtained theoretical results show the sensitivity of the metamaterial-based planar resistive wall amplifier performance to geometrical dimensions and properties of the medium. It is shown that by using metamaterial it is possible to obtain a significant increase of the initial beam modulation. A qualitative correspondence between the results of planar linear theory and numerical simulation for both models is shown. The hierarchy of models is formulated.

Keywords: resistive wall amplifier, metamaterial, theory, simulations.

For citation: Titov VN, Funtov AA. On planar models of resistive wall amplifier (theory and simulations). *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(6):860–872. DOI: 10.18500/0869-6632-003173

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В предыдущей публикации одного из авторов в ПНД [1] рассматривалась модель гибрида ЛБВ – метаматериал – ЛБВ, где ЛБВ-секции служили также в качестве модулятора и съемника сигнала. В той работе исследовалась в основном одномерная модель пучка в каждой из секций, причем в секции с метаматериалом пучок хорошо перемешан со средой. Хотя эта модель пучка проста и удобна в теоретическом описании, её физическая реализация, которая представляется как множество узких пролетных каналов в среде, вероятно, не будет пригодна для практической реализации, особенно при продвижении в субмиллиметровый диапазон. Вследствие этого возникает вопрос о дальнейшем развитии теории и определении места развитой ранее теории.

Целью настоящей работы является демонстрация применимости сравнительно простых моделей резистивного усилителя к описанию взаимодействия пучка с метаматериалом.

1. Вывод дисперсионных уравнений

Выведем дисперсионное уравнение по методике, изложенной в работе [2]. Предположим, что ограниченный сильным продольным магнитным полем предварительно промодулированный¹

¹Аналогично статье [5] в настоящей работе ограничимся исследованием режимов конвективной неустойчивости при усилении ВЧ-модуляции пучка. Мы не рассматриваем вопросы распространения электромагнитных волн в замедляющих системах, так как величина эффективной проводимости при введении ее для ЗС существенно зависит от параметра рассинхронизма.

(например, по плотности) пучок толщиной $2b$ летит вдоль Oz посередине между двух проводящих поверхностей на расстоянии s от каждой (рис. 1, *a*). Тогда из волнового уравнения пучка, уравнения непрерывности и уравнения движения в случае слабого сигнала для ТМ-моды нетрудно получить для продольной компоненты напряженности электрического поля

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + T^2 E_z = 0, \quad (1)$$

где $T^2 = \psi^2 \left[\frac{\beta_p^2}{(\beta - \beta_e)^2} - 1 \right]$, $\psi^2 = \beta^2 - k_0^2$, $k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, c — скорость света в вакууме, ω — круговая рабочая частота, $\beta_e = \frac{\omega}{v_0}$, $\beta_p = \frac{\omega_p}{v_0}$, v_0 — средняя скорость пучка, ω_p — плазменная частота пучка.

Полагая пучок бесконечно широким вдоль Ox , очевидно, что в случае ТМ-моды из уравнения (1) легко получить

$$E_z = A \cos(Ty) e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad H_x = -A \frac{j\omega\epsilon_0}{\beta^2 - k_0^2} T \sin(Ty) e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (2)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость (ДП) вакуума.

Тангенциальные компоненты полей E_z и H_x должны быть непрерывны при переходе через границу раздела сред (в том числе и пучка), следовательно, проводимость

$$Y_b = -\frac{H_x}{E_z} \quad (3)$$

также должна быть непрерывна.

Проводимость пучка определяется из уравнений (2) и (3), в которых она приравнивается при $y = b$ к проводимости стенки Y_w , и дает дисперсионное уравнение для T . Так как в большинстве случаев поток не заполняет весь пролетный канал, то проводимость Y_b , наблюдаемая в пучке, равна проводимости стенки Y_w , преобразованной через пространство между стенкой и потоком, как в линии передачи в режиме отсечки. В простейшей планарной модели

$$Y_b = \frac{j\omega\epsilon_0 Y_w + \frac{j\omega\epsilon_0}{\psi} \operatorname{th} \psi s}{\psi \frac{j\omega\epsilon_0}{\psi} + Y_w \operatorname{th} \psi s}. \quad (4)$$

Таким образом, дисперсионное уравнение такой модели примет вид

$$Tb \operatorname{tg}(Tb) = \frac{(\psi b)^2 Y_b}{j\omega\epsilon_0 b}. \quad (5)$$

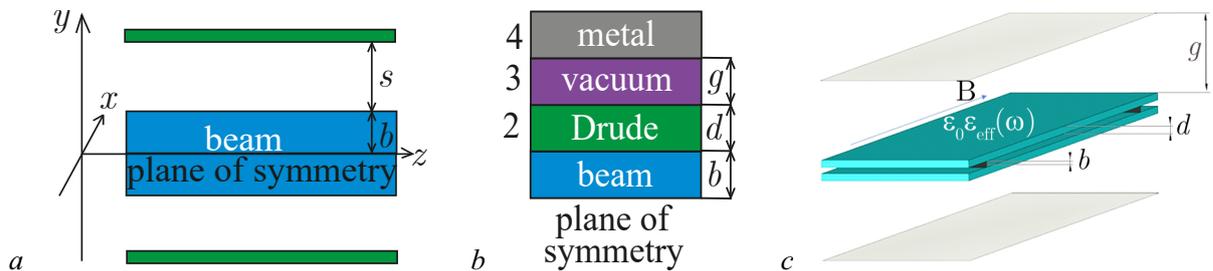


Рис. 1. Рассматриваемая модель: *a* — иллюстративная модель; *b* — первая теоретическая модель; *c* — рассматриваемая в численном моделировании трехмерная электродинамическая система, соответствующая теоретической

Fig. 1. The model considered: *a* — illustrative model; *b* — the first theoretical model; *c* — the three-dimensional electrodynamic system in the simulation, corresponding to the theoretical one

В случае наличия нескольких сред (см. рис. 1, b), также симметрично расположенных относительно пучка, используя уравнение (4) для сшивания проводимостей через промежуточную среду, получим

$$Y_b = Y_2 \frac{Y_a + Y_2 \operatorname{th} \tau d}{Y_2 + Y_a \operatorname{th} \tau d}, \quad (6)$$

где $Y_a = Y_3 \frac{Y_4 + Y_3 \operatorname{th} \varphi g}{Y_3 + Y_4 \operatorname{th} \varphi g}$, $Y_2 = \frac{\sigma_2 + j\omega \varepsilon_2}{\tau}$, $\tau = \sqrt{\beta^2 + j\omega \mu_2 (\sigma_2 + j\omega \varepsilon_2)}$, $Y_3 = \frac{\sigma_3 + j\omega \varepsilon_3}{\varphi}$, $Y_4 = \frac{\sigma_4 + j\omega \varepsilon_4}{\chi}$, $\varphi = \sqrt{\beta^2 + j\omega \mu_3 (\sigma_3 + j\omega \varepsilon_3)}$, $\chi = \sqrt{\beta^2 + j\omega \mu_4 (\sigma_4 + j\omega \varepsilon_4)}$.

Предполагая, что вторая среда с толщиной d обладает частотной зависимостью относительной ДП по модели Друде

$$\varepsilon_{\text{eff}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pM}^2}{\omega^2 + j\gamma\omega},$$

где γ – параметр затухания/потерь в среде², ω_{pM} – плазменная частота среды³; третья среда толщиной g – вакуумный зазор, а четвертая – идеальный металл, толщина которого не учитывается, тогда $\mu_2 = \mu_0$, $\sigma_2 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{eff}}(\omega)$, $\mu_3 = \mu_0$, $\sigma_3 = 0$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_0$, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Заметим, что используемый в настоящей работе подход справедлив в случае произвольной частотной зависимости ДП от частоты. Модель Друде была выбрана, потому что она сравнительно проста и используется в работах по исследуемой тематике (см., например, работу [3], в которой представлен метаматериал с ДП с частотной зависимостью по модели Друде – диоксид ванадия, который дает $\operatorname{Re} \text{ДП} < 0$ в ТГц-диапазоне частот). Также модель Друде входит в набор стандартных моделей, реализованных в CST Studio Suite разработчиками. Отметим также, что не каждый метаматериал может быть описан моделью Друде и существуют метаматериалы со сложной зависимостью ДП от частоты, не сводимой к модели Друде (см., например, работу [4]).

Для удобства вводя безразмерные величины $\Omega = \beta_e / \beta_p = \omega / \omega_p$, $\eta = v_0 / c$, $b' = \beta_p b$, $d' = \beta_p d$, $g' = \beta_p g$, $T' = \frac{T}{\beta_p}$, $\tau'(\omega) = \frac{\tau}{\beta_p} = \sqrt{\left(\frac{\beta}{\beta_p}\right)^2 - \Omega^2 \eta^2 \varepsilon_{\text{eff}}(\omega)}$ и предполагая, что β близка к β_e , подставляя уравнение (6) в (5), получим (опуская штрихи) дисперсионное уравнение

$$T \operatorname{tg}(Tb) = \Omega^2 \frac{\varepsilon_{\text{eff}}(\omega)}{\tau(\omega)} \frac{\operatorname{cth} \Omega g + \Omega \frac{\varepsilon_{\text{eff}}(\omega)}{\tau(\omega)} \operatorname{th} \tau(\omega) d}{\Omega \frac{\varepsilon_{\text{eff}}(\omega)}{\tau(\omega)} + \operatorname{cth} \Omega g \operatorname{th} \tau(\omega) d}, \quad (7)$$

которое решается относительно T , откуда несложно получить искомую постоянную распространения

$$\frac{\beta}{\beta_p} = \Omega \pm \left[1 + \frac{T^2}{\Omega^2} \right]^{-0.5} \quad (8)$$

или найти коэффициент усиления по формуле

$$G(z) \approx 8.69 \beta_p z \operatorname{Im} \left[1 + \frac{T^2}{\Omega^2} \right]^{-0.5} [dB].$$

²Заметим, что величина, характеризующая затухание в среде, вводится в модели Друде как частота столкновений, то есть имеет размерность «Гц».

³Напомним, что эти параметры определяются составом и способом изготовления среды и могут варьироваться в достаточно широком диапазоне.

Заметим, что если третья среда отсутствует ($g = 0$), а четвертая — магнитная стенка, что соответствует

$$Y_4 = 0 \Rightarrow Y_a|_{g=0} = 0 \Rightarrow Y_b = Y_2 \operatorname{th} \tau(\omega) d = \frac{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\text{eff}}(\omega)}{\tau(\omega)} \operatorname{th} \tau(\omega) d,$$

и дисперсионное уравнение (7) примет вид

$$T \operatorname{tg}(Tb) = \Omega^2 \frac{\varepsilon_{\text{eff}}(\omega)}{\tau(\omega)} \operatorname{th} \tau(\omega) d, \quad (9)$$

которое в случае $d \rightarrow \infty$ упростится до

$$T \operatorname{tg}(Tb) = \Omega^2 \frac{\varepsilon_{\text{eff}}(\omega)}{\tau(\omega)}. \quad (10)$$

В классической работе [5] была представлена одномерная модель резистивного усилителя, в которой пучок хорошо перемешан со средой. В качестве физической реализации такой модели предполагается среда со множеством узких пролетных каналов. В той же работе была также рассмотрена многослойная модель (которая является частным случаем модели с рис. 1, *b*), где пучок летит между изолированными слоями диэлектрика с постоянной относительной ДП ε_2 , причем толщина слоев мала по сравнению с длиной волны, то есть $s, g \ll \lambda$ и $d \ll g$.

Корни дисперсионного уравнения (которое выводится из уравнения (5) с учетом (6)) для такой модели имеют вид

$$\beta = \beta_e \pm \beta_p \left[1 + \frac{g\varepsilon_2}{s} \right]^{-1/2} \left[1 - j \frac{2\sigma d}{\omega\varepsilon_0(s + g\varepsilon_2)} \right]^{-1/2}. \quad (11)$$

Если рассматривать одномерную модель, в которой пучок хорошо перемешан со средой с $\varepsilon_{\text{eff}}(\omega)$, то для этого случая первое слагаемое в (1), очевидно, тождественный ноль. Следовательно, для выполнения равенства необходимо условие $T = 0$. Поскольку ψ показывает отличие постоянной распространения волны в пучке от постоянной распространения света в вакууме, дисперсионное уравнение получается из второго множителя T , то есть

$$\frac{\beta_p^2}{\varepsilon_{\text{eff}}(\omega) (\beta - \beta_e)^2} - 1 = 0,$$

из которого следует

$$\beta = \beta_e \pm \frac{\beta_p}{\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}(\omega)}}.$$

Если расписать $\varepsilon_{\text{eff}}(\omega)$ для среды с проводимостью σ и постоянной относительной ДП ε_2 , то получим

$$\beta = \beta_e \pm \frac{\beta_p}{\sqrt{\varepsilon_2}} \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_2} \right)^{-1/2}, \quad (12)$$

причем уравнение (11) формально можно получить из (12), заменив в последнем $\varepsilon_2 \rightarrow 1 + \frac{g\varepsilon_2}{s}$ и $\sigma \rightarrow \frac{2\sigma d}{s}$.

Заметим, что корни (11) и (12) по структуре также соответствуют корням (8), то есть отличие между корнями дисперсионных уравнений, соответствующим одномерной и планарной моделям, сводится к разным множителям при β_p , причем вид функций множителя от частоты входного сигнала качественно (во всяком случае в рассмотренном примере) не меняется, и, следовательно, качественные выводы обеих моделей будут одинаковы.

Авторы [5] сделали оценку наибольшего инкремента неустойчивости ($q = \text{Im} \frac{\beta}{\beta_p}$) на частоте 3 ГГц. Для очень тонкого изолированного листа $(g/s) \varepsilon_2 \ll 1$ $q_{\text{max}} = 0.351$ и для довольно толстого изолированного листа $(g/s) \varepsilon_2 = 1$ $q_{\text{max}} = 0.248$. Очевидно, что в таком случае характер частотной зависимости происходящих процессов не будет существенно изменяться с изменением толщины диэлектрического слоя.

Авторы [5] также отмечают, что многослойная модель применима даже в случаях, когда s и g не малы по сравнению с λ и число слоев является конечным, а не бесконечным.

Таким образом, вышеуказанные соображения и оценки позволяют при моделировании многослойной модели качественно сравнивать полученные результаты с одномерной моделью без существенного нарушения общности, хотя и усиление в многослойной модели меньше, чем в одномерной ($q_{\text{max}} \approx 0.354$) модели.

Заметим, что в этой теории предполагается, что бегущие волны вдоль пучка не распространяются, а с пучком взаимодействуют только поля, возбуждаемые в результате резистивной неустойчивости. То есть можно сказать, что возмущения в среде наблюдаются только из-за воздействия пучка.

Таким образом, дисперсионные уравнения (7)–(10), полученные в настоящей работе, являются расширением модели из статьи [2] на случай частотно-зависимой ДП. Заметим, что нечто подобное предпринималось в работе [6], в которой проводилось и моделирование, и аналитический расчет. Однако там исследовалась другая геометрия структуры (пучок, вакуумный зазор, среда Дрude, металл), причем среда Дрude обладала анизотропной дисперсией, то есть зависимостью Дрude обладала только вертикальная компонента ДП. В качестве модулирующего устройства использовался резонатор.

Следует также отметить работы [7] и [8], в которых рассматривается линейная и нелинейная квазиоптическая теория резистивной неустойчивости в планарной модели. В отличие от настоящей работы (ср. с симметричным рис. 1, а) вторая удаленная от пучка параллельная пластина не оказывает влияния на процесс взаимодействия, поскольку расположена достаточно далеко от пучка и первой пластины. Таким образом, описываемая система является сверхразмерным планарным волноводом.

Помимо отличий в геометрии, подчеркнем следующее. В работах [7] и [8] изначально предполагается, что относительные проницаемости импедансной пластины удовлетворяют условию $|\sqrt{\varepsilon\mu}| \gg 1$. Решение волнового уравнения ищется в виде электромагнитного поля, амплитуда которого спадает по поперечной к пучку оси при удалении от пучка и импедансной пластины, и в линейной теории выбирается решение с наименьшим положительным инкрементом.

2. Результаты линейной теории

Параметры среды выбраны того же порядка, как в работе [6]⁴. Для расчетов использовались следующие параметры: потенциал пучка 10 кВ, плазменная частота среды 4.19 ГГц, параметр затухания 4.5 ГГц, ширина вакуумного зазора (g) 40 мм, продольная (вдоль Oz) длина⁵ 390 мм, плотность тока 0.3 А/см².

Будем рассматривать корни трансцендентного уравнения (7), соответствующие наибольшему инкременту. Из рис. 2, а и б видно, что настройкой отношения величины пролетного канала и толщины среды можно добиться как узкополосной, так и широкополосной зависимости коэффициента усиления от частоты. Широкополосная зависимость коэффициента усиления соответствует

⁴Плазменная частота среды 2.05 ГГц, авторы настоящей работы предполагают значение частоты столкновений 1 ГГц как соответствующее конечным потерям.

⁵В численном моделировании — расстояние между катодом и коллектором.

наличию минимума и двух максимумов указанной функции при достаточно малых толщинах среды. Это происходит из-за поведения удельной комплексной проводимости Y_b на границе пучка: для приемлемых значений коэффициента усиления компоненты Y_b должны находиться в определенном интервале. В пределе большой толщины среды Y_b — монотонна от частоты, а коэффициент усиления сравнительно узкополосен по частоте. С утончением среды появляются максимумы на частотной зависимости компонент Y_b , которые ставятся всё отчетливее, а при малой толщине среды подобные значения Y_b достигаются при двух значениях частоты. Заметим, что без затухания в среде в окрестности минимума коэффициента усиления компоненты Y_b терпят разрыв, а когда пролетный канал узок по сравнению с толщиной среды, то частотная зависимость коэффициента усиления качественно начинает приближаться к таковой по одномерной теории (см. рис. 2, *c*).

Из рис. 2, *d* видно, что с увеличением плотности тока пучка коэффициент усиления резистивного усилителя растет.

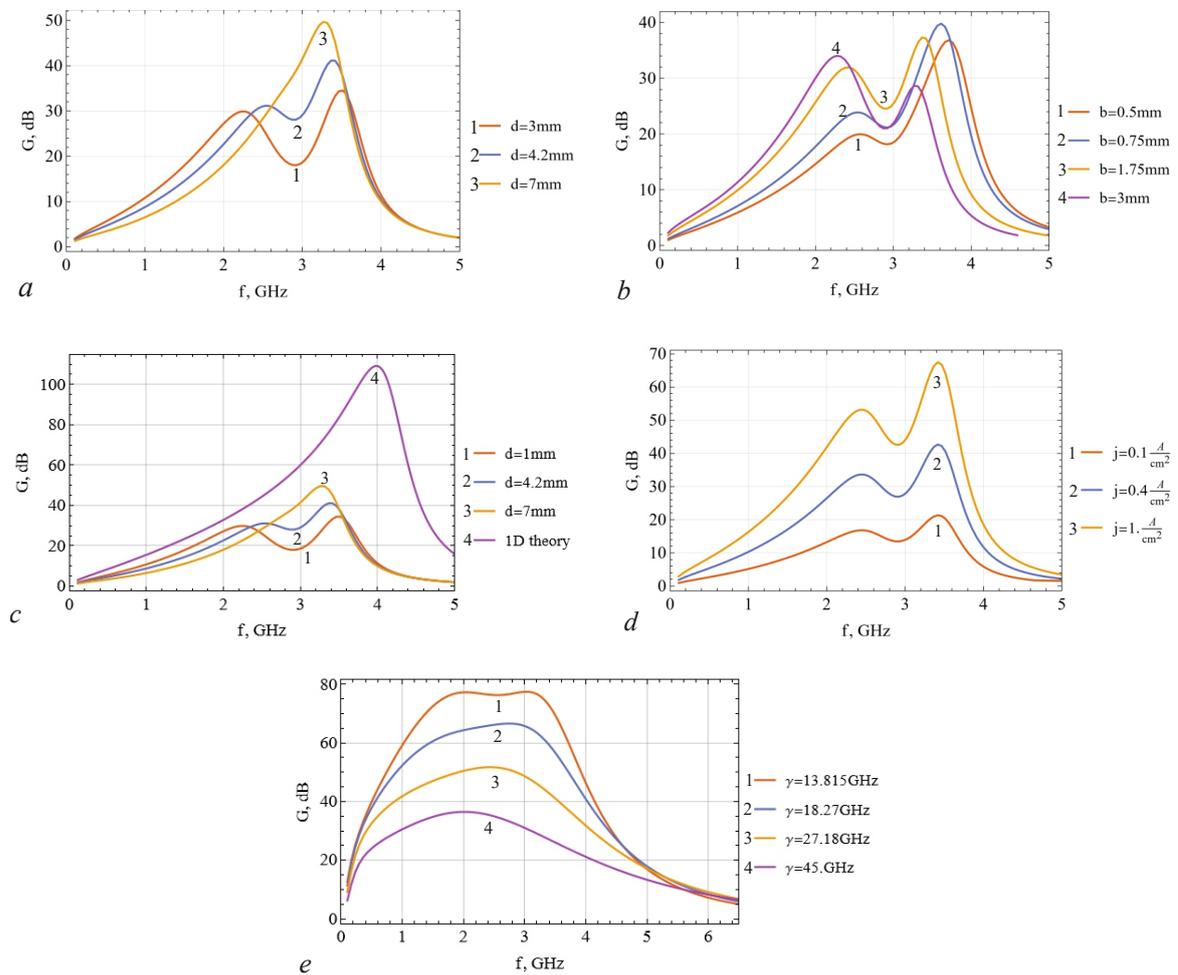


Рис. 2. Зависимости коэффициента усиления от рабочей частоты. *a*, *c* — при $b = 1.5$ мм, $j = 0.3$ А/см²; *b* — при $j = 0.3$ А/см², $d = 3.75$ мм; *d* — при $d = 3.75$ мм, $b = 1.5$ мм; *e* — при потенциале пучка 5 кВ, $j = 3$ А/см², $d = 1.875$ мм

Fig. 2. Dependences of the gain on the operating frequency. *a*, *c* — at $b = 1.5$ mm, $j = 0.3$ A/cm²; *b* — at $j = 0.3$ A/cm², $d = 3.75$ mm; *d* — at $d = 3.75$ mm, $b = 1.5$ mm; *e* — at beam potential 5 kV, $j = 3$ A/cm², $d = 1.875$ mm

Из рис. 2, *e* видно, что подбором параметров модели можно добиться слабого изменения коэффициента усиления почти на целой октаве. В данном случае это достигается не только подбором геометрических размеров, но и увеличением втрое параметра затухания в среде, что можно воспринимать как уменьшение добротности, что, в свою очередь, приходится компенсировать увеличением на порядок плотности тока пучка.

Заметим, что выбранные в настоящей работе параметры вполне согласуются с современными техническими возможностями. Например, в работе [9], в которой указывались параметры экспериментального планарного оротрона, работающего в импульсном режиме, потенциал пучка менялся от 0.5 до 4.5 кВ, а плотность тока 44.4 А/см^2 , а в работе [10], в которой указывались параметры экспериментальной планарной ЛОВ, работающей в режиме непрерывной генерации, потенциал пучка менялся от 0.5 до 5 кВ, а плотность тока от 4.57 до 57.1 А/см^2 . В частности, как показано в работах [9] и [10], что на практике достижимы значительно большие плотности тока, чем использованные на рис. 2, *e*, что с увеличением параметра потерь γ может позволить получить более широкую частотную полосу.

3. Численное моделирование

При указанных выше параметрах, а именно потенциале пучка 10 кВ, плазменной частоте среды 4.19 ГГц, параметре затухания 4.5 ГГц, ширине вакуумного зазора (g) 40 мм, полутолщине пролетного канала (b) 1.5 мм, толщине среды (d) 3.75 мм, продольной (вдоль Oz) длине 390 мм, плотности тока 0.3 А/см^2 , был проведен численный эксперимент. В соответствии с теоретической моделью для представления однородных по оси x полей в планарной структуре использовалась структура (см. рис. 3, *a*) конечной ширины по оси x с граничными условиями типа «магнитная стенка»⁶ (Ht). Изменение ширины модельной системы по оси x не влияет на исследуемые режимы. То есть структура на рис. 3, *a* эквивалентна моделям на рис. 1, *b* и *c*.

Самосогласованное численное моделирование проводилось в CST Particle Studio во временной области по методу FIT [11]. Для описания среды с частотной зависимостью ДП использовалась реализованная в пакете модель среды Друде (см. рис. 3, *b*).

Для упрощения модели и ускорения вычислений вместо устройства, обеспечивающего модуляцию пучка по скорости, проводилась модуляция пучка по плотности (см. рис. 3, *c* и *d*). Ток эмиссии состоял из двух компонент: постоянной и переменной, причем последняя была в виде последовательности гауссовых импульсов, параметры которых подобраны для аппроксимации гармонического сигнала (см. рис. 3, *c*). Переменный ток много меньше постоянного (модуль амплитуды переменного меньше постоянного тока в 10^3 раз).

На рис. 3, *e* представлена зависимость коэффициента усиления от частоты модуляции. Коэффициент усиления в численном эксперименте оценивался как $20 \lg \left| \frac{i_{\max \text{ of collector}}}{i_{\max \text{ of cathode}}} \right|$ в линейном режиме работы. Видно, что результаты теории и численного эксперимента качественно совпадают. Тем не менее заметно меньшее усиление, полученное при численном моделировании, можно объяснить дискретностью представления тока в пучке и особенностями реализации начальной модуляции пучка (модуляция по плотности, наличие «гармоник» основной частоты в усиливаемом сигнале).

Тем не менее была рассмотрена и другая модель (см. правую часть рис. 4, *a*). Эта модель эквивалентна наличию множества пролетных каналов в среде. Пучки (с такой же, как в предыдущей модели, геометрией) разделены слоями среды с дисперсией Друде толщиной 15 мм. В моделировании рассматривается период структуры, «вырезанный» посередине блоков среды. Вследствие периодичности системы и взаимной нейтрализации вихревых токов от соседних пучков

⁶Металл представлялся в виде идеального проводника (PEC).

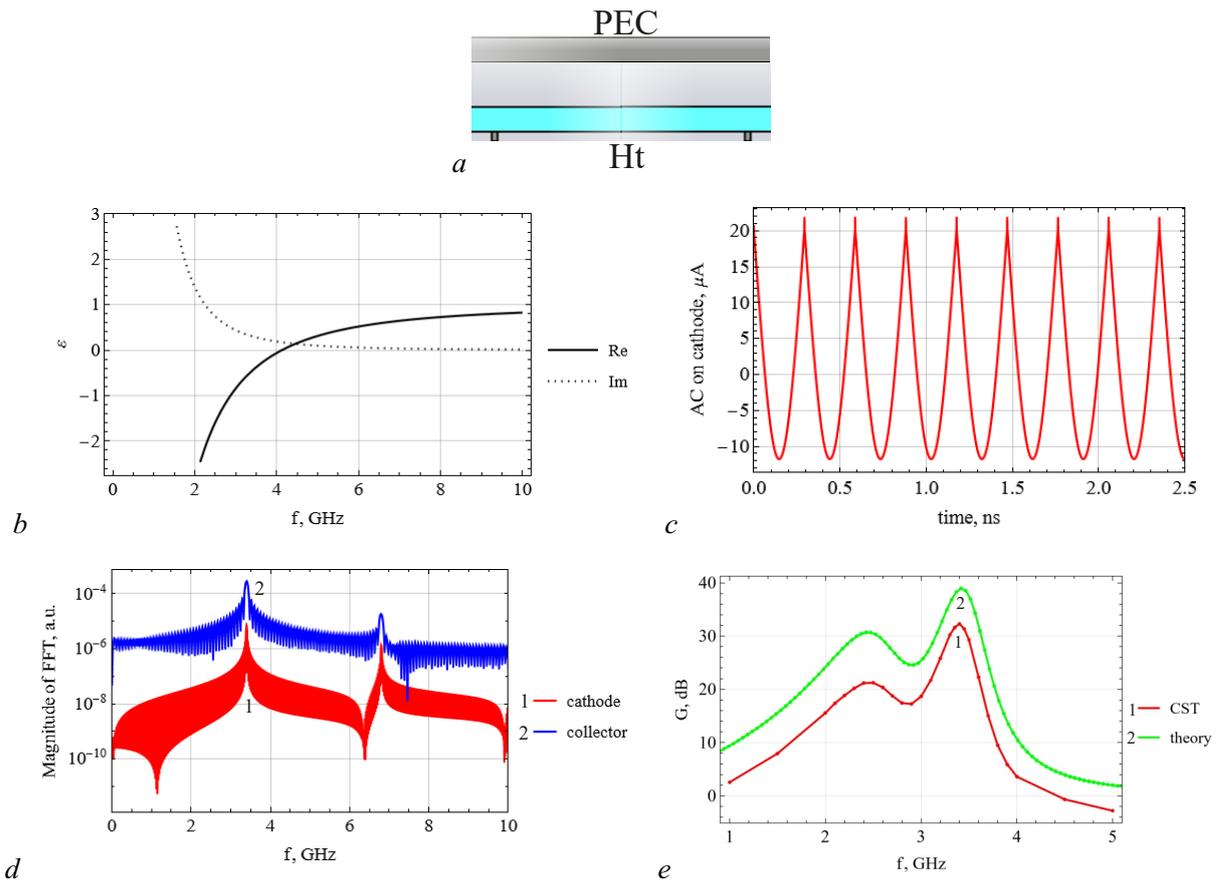


Рис. 3. *a* — Первая модельная система численного моделирования; *b* — зависимость компонент ДП от частоты; *c* — пример типичной временной реализации переменного тока эмиссии; *d* — типичные спектры (FFT) тока на катоде и коллекторе; *e* — зависимость коэффициента усиления от частоты модуляции по теории и численному эксперименту

Fig. 3. *a* — First model of simulation; *b* — frequency dependence of the permittivity components; *c* — example of a typical time realisation of the alternating emission current; *d* — typical FFT spectra of the current at the cathode and collector; *e* — dependence of the gain on the modulation frequency as given theory and numerical experiment

на вертикальных границах используются граничные условия — «магнитные стенки». Граничные условия по Ox такие же, как ранее.

На рис. 4, *b* представлена зависимость коэффициента усиления от частоты модуляции для этой модели. Как и ожидалось по результатам линейной теории, увеличение толщины среды привело к наличию только одного максимума, причем соответствие теории и численного эксперимента значительно улучшилось.

На рис. 4, *c–e* представлены распределения полей в линейном режиме. Заметим любопытную особенность в поведении компоненты E_y поперечного электрического поля (см. на рис. 4, *d*): она в среде почти в противофазе по отношению к ПЗ в пучке, что характерно для резистивной неустойчивости при активно-индуктивной проводимости среды [12].

Отметим, что в одномерной теории предполагаются однородные в поперечном сечении и строго продольные поля, в то время как в моделировании можно говорить о том, что они поверхностные и имеют ненулевые поперечные компоненты электрического поля. Тем не менее качественное описание особенностей поведения инкремента нарастания возмущений тока — плавный рост с увеличением частоты и достижение максимального значения до частоты, на которой $\text{Re} \varepsilon_{\text{eff}} = 0$ (см. рис. 2, *e* и рис. 3, *b*), а затем спад с ростом частоты — сохраняется как

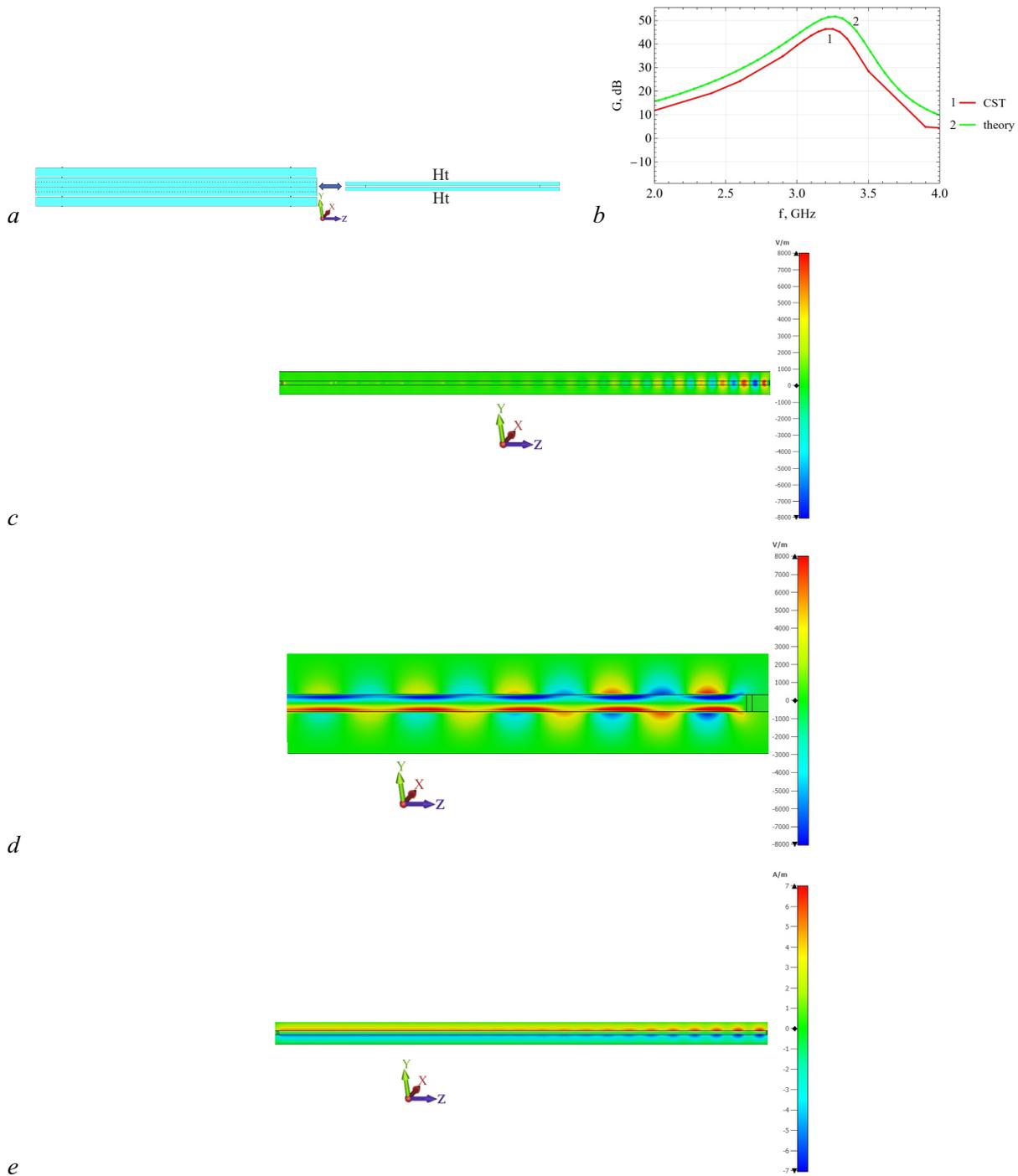


Рис. 4. *a* – Вторая модельная система численного моделирования; *b* – зависимость коэффициента усиления от частоты модуляции по теории и моделированию; *c* – распределение напряженности продольного электрического поля в фиксированный момент времени (12 нс); *d* – распределение напряженности поперечного электрического поля в фиксированный момент времени (12 нс) вблизи коллектора; *e* – распределение напряженности поперечного магнитного поля в фиксированный момент времени (12 нс) (цвет онлайн)

Fig. 4. *a* – Second model of simulation; *b* – dependence of gain on modulation frequency by theory and simulation; *c* – distribution of longitudinal electric field strength at a fixed time instant (12 ns); *d* – distribution of transverse electric field strength at a fixed time instant (12 ns) near the collector; *e* – distribution of transverse magnetic field strength at a fixed time instant (12 ns) (color online)

в одномерной теории, так и в планарной, причем результаты последней близки с результатами моделирования (см. рис. 3, *e* и рис. 4, *b*).

Таким образом, можно (опираясь также на [5]) сформулировать следующую иерархию моделей для резистивного усилителя. Одномерная модель позволяет оценить влияние параметров среды на группировку пучка и определить частотный диапазон усиливаемого сигнала. Планарная модель дополнительно позволяет сделать предварительный выбор геометрии (для заданного типа топологии), а также оценить влияние размеров элементов и их взаимного отношения. Численное моделирование позволяет раскрыть детали физики взаимодействия (пространственную картину распределения полей, группировки пучка).

Заключение

По результатам данной работы можно сделать следующие выводы.

1. В планарной модели резистивного усилителя можно получить увеличение переменного тока за счет использования метаматериала.
2. Развита приближенные методы оценки в планарной модели резистивного усилителя с метаматериалом.
3. Проведено сравнение теории с результатами моделирования.
4. Показано, что подбором параметров модельной системы, таких как свойства среды, топология и геометрические размеры системы, можно реализовать как режимы с большим усилением возмущений плотности тока в пучке, так и режимы достаточно широкополосного усиления.
5. Сформулирована иерархия моделей резистивного усилителя с метаматериалом.

Список литературы

1. Фунтов А. А. О теории гибрида ЛБВО и усилителя с комплексной диэлектрической проницаемостью // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 452–468. DOI: 10.18500/0869-6632-003050.
2. Birdsall C. K., Whinnery J. R. Waves in an electron stream with general admittance walls // J. Appl. Phys. 1953. Vol. 24, no. 3. P. 314–323. DOI: 10.1063/1.1721272.
3. Zhuo Sh., Liu Zh., Zhou F., Qin Y., Luo X., Ji C., Yang G., Yang G., Xie Y. THz broadband and dual-channel perfect absorbers based on patterned graphene and vanadium dioxide metamaterials // Opt. Express 2022. Vol. 30, no. 26. P. 47647–47658. DOI: 10.1364/OE.476858.
4. Guo Z., Li A., Sun Zh., Yan Zh., Liu H., Qian L. Negative permittivity behavior in microwave frequency from cellulose-derived carbon nanofibers // Adv. Compos. Hybrid Mater. 2022. Vol. 5. P. 50–57. DOI: 10.1007/s42114-021-00314-0.
5. Birdsall C. K., Brewer O. R., Haeff A. V. The resistive-wall amplifier // Proceedings of the IRE. 1953. Vol. 41, no. 7. P. 865–875. DOI: 10.1109/JRPROC.1953.274425.
6. Rowe T., Behdad N., Booske J. Metamaterial-enhanced resistive wall amplifier design using periodically spaced inductive meandered lines // IEEE Trans. Plasma Sci. 2016. Vol. 44, no. 10. P. 2476–2484. DOI: 10.1109/TPS.2016.2599144.
7. Гинзбург Н. С., Малкин А. М., Железнов И. В., Сергеев А. С., Кочаровская Е. Р. Усиление коротковолнового излучения на основе резистивной неустойчивости релятивистского электронного потока (квазиоптическая теория) // ЖТФ. 2017. Т. 87, № 8. С. 1230–1237. DOI: 10.21883/JTF.2017.08.44732.2111.
8. Malkin A. M., Zheleznov I. V., Sergeev A. S., Zaslavsky V. Yu., Makhalov P. B., Ginzburg N. S. Unified quasi-optical theory of short-wavelength radiation amplification by relativistic electron

beams moving near the impedance surfaces // *Phys. Plasmas*. 2020. Vol. 27, no. 11. P. 113106. DOI: 10.1063/5.0030914.

9. *Братман В. Л., Гинцбург В. А., Гришин Ю. А., Думеш Б. С., Русин Ф. С., Федотов А. Э.* Импульсные широкодиапазонные оротроны миллиметровых и субмиллиметровых волн // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2006. Т. 49, № 11. С. 958–963.
10. *Xi H., Wang J., He Zh., Zhu G., Wang Y., Wang H., Chen Z., Li R., Liu L.* Continuous-wave Y-band planar BWO with wide tunable bandwidth // *Sci. Rep.* 2018. Vol. 8. P. 348. DOI: 10.1038/s41598-017-18740-w.
11. *Marklein R.* The finite integration technique as a general tool to compute acoustic, electromagnetic, elastodynamic, and coupled wave fields // In: Stone W. R. (ed) *Review of Radio Science*. N.Y.: Wiley, 2002. P. 201–244.
12. *Касаткин Л. В.* Об усилении волн пространственного заряда при прохождении пучков электронов в средах с индуктивной проводимостью // *РЭ*. 1961. Т. 6, № 2. С. 267–274.

References

1. *Funtov AA.* About theory of hybride TWTO and an amplifire with a complex permittivity. *Izvestiya VUZ.Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(4):452–468. DOI: 10.18500/0869-6632-003050.
2. *Birdsall CK, Whinnery JR.* Waves in an electron stream with general admittance walls. *J. Appl. Phys.* 1953;24(3):314–323. DOI: 10.1063/1.1721272.
3. *Zhuo Sh, Liu Zh, Zhou F, Qin Y, Luo X, Ji C, Yang G, Yang G, Xie Y.* THz broadband and dual-channel perfect absorbers based on patterned graphene and vanadium dioxide metamaterials. *Opt. Express*. 2022;30(26):47647–47658. DOI: 10.1364/OE.476858.
4. *Guo Z, Li A, Sun Zh, Yan Zh, Liu H, Qian L.* Negative permittivity behavior in microwave frequency from cellulose-derived carbon nanofibers. *Adv. Compos. Hybrid Mater.* 2022;5:50–57. DOI: 10.1007/s42114-021-00314-0.
5. *Birdsall CK, Brewer OR, Haeff AV.* The resistive-wall amplifier. *Proceedings of the IRE*. 1953;41(7):865–875. DOI: 10.1109/JRPROC.1953.274425.
6. *Rowe T, Behdad N, Booske J.* Metamaterial-enhanced resistive wall amplifier design using periodically spaced inductive meandered lines. *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2016;44(10):2476–2484. DOI: 10.1109/TPS.2016.2599144.
7. *Ginzburg NS, Malkin AM, Zheleznov IV, Sergeev AS, Kocharovskaya ER.* Amplification of short-wave radiation based on the resistive instability of a relativistic electron beam (quasi-optical theory). *Tech. Phys.* 2017;62(8):1242–1249. DOI: 10.1134/S1063784217080114.
8. *Malkin AM, Zheleznov IV, Sergeev AS, Zaslavsky VYu, Makhalov PB, Ginzburg NS.* Unified quasi-optical theory of short-wavelength radiation amplification by relativistic electron beams moving near the impedance surfaces. *Phys. Plasmas*. 2020;27(11):113106. DOI: 10.1063/5.0030914.
9. *Bratman VL, Gintsburg VA, Fedotov AE, Grishin YuA, Dumesh BS, Rusin FS.* Pulsed wideband orotrons of millimeter and submillimeter waves. *Radiophys. Quantum Electron.* 2006;49(11):866–871. DOI: 10.1007/s11141-006-0121-2.
10. *Xi H, Wang J, He Zh, Zhu G, Wang Y, Wang H, Chen Z, Li R, Liu L.* Continuous-wave Y-band planar BWO with wide tunable bandwidth. *Sci. Rep.* 2018;8:348. DOI: 10.1038/s41598-017-18740-w.
11. *Marklein R.* The finite integration technique as a general tool to compute acoustic, electromagnetic, elastodynamic, and coupled wave fields. In: Stone WR, editor. *Review of Radio Science*. N.Y.: Wiley; 2002. P. 201–244.
12. *Kasatkin LV.* On amplification of space charge waves during the passage of electron beams in media with inductive conductivity. *Radio Engineering and Electronic Physics*. 1961;6(2):267–274 (in Russian).



Титов Владимир Николаевич — родился в поселке Степное Саратовской области (1974). Окончил с отличием физический факультет СГУ (1997). Кандидат физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2001). В 2002–2003 годах прошел стажировку в Сеульском национальном университете (Ю. Корея). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов включает численное моделирование нестационарных процессов в приборах СВЧ-электроники, исследование нелинейной динамики в распределенных системах различной природы.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: TitovVN@info.sgu.ru
ORCID: 0000-0001-6761-4267
AuthorID (eLibrary.Ru): 34833



Фунтов Александр Андреевич — родился в Балакове Саратовской области (1992). Окончил Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2014). В настоящее время — старший преподаватель кафедры электроники, колебаний и волн. Область научных интересов — вакуумная СВЧ-электроника.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: aafuntov@mail.ru
ORCID: 0000-0002-9121-1449
AuthorID (eLibrary.Ru): 920783



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003188
EDN: CNWBIT

Нелинейные свойства тета-ритма головного мозга

А. Ю. Долинина^{1,2}, Е. М. Сулейманова³, М. В. Корнилов^{1,2}, М. В. Сысоева¹✉, И. В. Сысоев^{1,2}

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

³Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, Москва, Россия

E-mail: dolinina13nastyia@yandex.ru, e.m.suleymanova@gmail.com,
kornilovmv@gmail.com, ✉bobrichek@mail.ru, ivssci@gmail.com

Поступила в редакцию 1.06.2025, принята к публикации 8.07.2025,
опубликована онлайн 9.07.2025, опубликована 28.11.2025

Аннотация. Цель настоящего исследования — выявить возможные нелинейные свойства сигналов локальных потенциалов мозга при тета-ритме. **Методы.** Нелинейность в сигнале проявляется в синхронном поведении основной частоты и её высших гармоник, для диагностики чего использовались скелетоны в разных частотных диапазонах, рассчитывался коэффициент фазовой синхронизации и проводился кросс-спектральный анализ. **Результаты.** По многочасовым записям у 14 животных были выделены основная частота и вторая гармоника в спектре во время тета-ритма. На основании построенных по этим записям скелетонов была диагностирована частотная синхронизация между основной частотой и второй гармоникой в отношении 2:1 на промежутках до 10 с в обоих симметричных отведениях. Также в ряде записей была диагностирована и фазовая синхронизация, но на более коротких промежутках — порядка 2–4 с. **Заключение.** Исследование доказало, что наблюдаемая при тета-ритме у здоровых лабораторных животных в спектре сигналов локальных потенциалов мозга компонента на частотах порядка удвоенной основной частоты ритма — действительно вторая гармоника основной частоты ритма. Таким образом, тета-ритм часто является существенно нелинейным сигналом.

Ключевые слова: частотно-временной анализ, скелетоны, частотная динамика, тета-ритм.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-12-00176, <https://rscf.ru/project/25-12-00176/>.

Для цитирования: Долинина А. Ю., Сулейманова Е. М., Корнилов М. В., Сысоева М. В., Сысоев И. В. Нелинейные свойства тета-ритма головного мозга // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 6. С. 873–897. DOI: 10.18500/0869-6632-003188. EDN: CNWBIT

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Nonlinear properties of the brain theta rhythm

A. Yu. Dolinina^{1,2}, E. M. Suleymanova³, M. V. Kornilov^{1,2}, M. V. Sysoeva¹✉, I. V. Sysoev^{1,2}

¹Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, Russia

²Saratov State University, Russia

³Institute of Higher Nervous Activity and Neurophysiology of RAS, Moscow, Russia

E-mail: dolinina13nastya@yandex.ru, e.m.suleymanova@gmail.com,

kornilovmv@gmail.com, ✉bobrichkek@mail.ru, ivssci@gmail.com

Received 1.06.2025, accepted 8.07.2025, available online 9.07.2025, published 28.11.2025

Abstract. The purpose of this study is to identify nonlinearity of local brain field potential signals during theta rhythm. **Methods.** The nonlinearity in the signal is manifested in the synchronous behavior of the fundamental frequency and its higher harmonics; to detect this, skeletons in different frequency ranges were used, the phase synchronization index was calculated and cross-spectral analysis was performed. **Results.** The fundamental frequency and the second harmonic in the spectrum during the theta rhythm were identified from multi-hour recordings in 14 animals. Based on the skeletons constructed from these recordings, frequency synchronization between the fundamental frequency and the second harmonic in the ratio of 2:1 was diagnosed at intervals of up to 10 s in both symmetrical channels. Phase synchronization was also diagnosed in a number of recordings, but at shorter intervals (about 2–4 s). **Conclusion.** The study proved that the spectral component observed at the theta-rhythm in healthy laboratory animals in the signals of local brain field potentials at the range containing twice fundamental frequency of the rhythm is indeed the second harmonic of the fundamental frequency. Thus, the theta rhythm is often a significantly nonlinear signal.

Keywords: time-frequency analysis, skeletons, frequency dynamics, theta rhythm.

Acknowledgements. This study was supported by Russian Science Foundation, grant No. 25-12-00176, <https://rscf.ru/en/project/25-12-00176/>.

For citation: Dolinina AYu, Suleymanova EM, Kornilov MV, Sysoeva MV, Sysoev IV. Nonlinear properties of the brain theta rhythm. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(6):873–897. DOI: 10.18500/0869-6632-003188

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Мозг представляет собой сложную многокомпонентную и многофазную среду, принципы функционирования которой до сих пор недостаточно изучены. Электроэнцефалографическая активность (ЭЭГ), записанная как с поверхности коры головного мозга, так и из других его областей (в такой ситуации говорят о сигналах локальных потенциалов мозга, или внутричерепных ЭЭГ), широко используется для изучения основных аспектов физиологии и фармакологии головного мозга, развития мозга, его старения. Поскольку многие эксперименты, в первую очередь инвазивные, на людях проводить невозможно, используются другие млекопитающие: крысы, мыши, морские свинки, кролики, кошки, собаки, обезьяны. Большой интерес представляют ритмы мозга — колебания, выделяемые из общей частотной электрической активности по некоторым характеристикам [1]. Для изучения ритмов мозга у млекопитающих данные электроэнцефалографии — основной источник.

Определить однозначную функцию для конкретного ритма ЭЭГ невозможно. Эти ритмы выполняют множество функций и действуют как общие операторы или коды, отражающие функциональное состояние мозга. Помимо частоты и локализации ритма в той или иной подсистеме мозга, существуют и другие важные аспекты. Среди таких аспектов: увеличение интенсивности ритма, его временное подавление, синхронизация фаз между ритмами, а также задержка и продолжительность ЭЭГ-ритма.

Комплексные интегрированные функции мозга достигаются за счёт синхронной активности различных ритмов. Нейронные сети, которые генерируют ритмы: дельта, тета, альфа, бета и гамма,

стимулируются сенсорными и когнитивными воздействиями. Эти воздействия одновременно могут запускать несколько ритмов, распространяющихся до различных структур мозга с разной интенсивностью, синхронностью, продолжительностью и временем задержки [2].

Электроэнцефалографические данные указывают на общие черты между разными видами млекопитающих с точки зрения развития и распространения ритмов мозга, в том числе между человеком и крысами. В частности, бдительное состояние ассоциируется с высокочастотной активностью в ЭЭГ, тогда как периоды быстрого сна и состояния сонливости сопровождаются наличием медленных волн. Аналогично, вызванные потенциалы демонстрируют схожесть у крыс и людей [3].

Так же, как и для человека, для крыс выделяют такие диапазоны ЭЭГ, как дельта-ритм (0.5...3.5 Гц, 100...300 мкВ), тета-ритм (3.5...8 Гц — у людей, 5...10 Гц — у грызунов, 20...100 мкВ), альфа-ритм (8...14 Гц, 20...80 мкВ), бета-ритм (14...30 Гц, 5...30 мкВ), гамма-ритм (30...170 Гц, <10 мкВ) [4, 5]. В данной работе нас интересовал только тета-ритм ЭЭГ как представитель одного из двух основных биологических состояний — бодрствования.

Тета-ритм. Основным источником тета-волн¹ (термин, принятый в нейрофизиологии) является гиппокамп, который регулируется медиальной перегородкой, при этом в процессе генерации ритма активно участвует холинергическая система [6]. В дополнение к гиппокампу в лобной срединной коре крыс обнаружено по меньшей мере два центра, генерирующих тета-ритм [7, 8]. Фронтальный тета-ритм средней линии наблюдается у здоровых взрослых испытуемых. Этот тета-ритм синхронизирован с реализацией действий в ответ на значимые события окружающей среды и ассоциируется с процессами, завязанными на память. Фазовая синхронизация тета-ритма между различными областями головного мозга играет ключевую роль в организации функций мозга во время бодрствования и фазы быстрого поверхностного сна (REM-сон) [9–11].

Тета-ритм в гиппокампе крыс является одним из самых тщательно исследованных ритмов головного мозга. Он наблюдается у животных во время исследовательского поведения, включающего разнообразные движения [12]. Исследования показывают, что тета-ритм гиппокампа у грызунов тесно связан с их поведенческими реакциями. Состояния бездействия и автоматизированные движения соответствуют непостоянной активности гиппокампа. В то же время мелкие движения, например, корректировка позы или отдельные движения головы или конечности, сопровождаются ритмичной тета-активностью с пониженной амплитудой и уменьшенной средней частотой [8, 11]. Экспериментальные данные показывают, что тета-ритм может играть основную роль в когнитивных процессах и в кортико-гиппокампальных взаимодействиях [13].

В литературе известны различия в амплитуде и частоте тета-колебаний между дорсальными и вентральными областями гиппокампа [14], из-за чего было предположено, что взаимодействия между нейронами и локальным полем могут отражать поведение животного в зависимости от продольного положения. При этом форма тета-колебаний меняется с увеличением скорости бега, переходя от синусоидальной к пилообразной [15, 16]. Более того, было отмечено, что с увеличением скорости передвижения животного возникают колебания с частотой около 16 Гц [16, 17]. Более подробно данная особенность была изучена в работе [18], где было статистически подтверждено наличие высших гармоник тета-ритма, нелинейность количественно определена с точки зрения фазовой связи между различными частотными диапазонами, а также показано, как меняется характер нелинейности тета-ритма в различных областях гиппокампа.

Возникновение колебаний в удвоенном диапазоне частот тета-ритма также упоминалось как результат поведения крыс-моделей во время свободного передвижения и сна [19–21]. При этом в понятие свободного движения входило умывание, вставание на задние лапы, обнюхивание,

¹С точки зрения теории колебаний и волн вопрос о том, насколько разумно тета-ритм представлять в качестве волны, либо следует всё же говорить о колебаниях в сложном ансамбле осцилляторов, остаётся не до конца ясным.

медленное передвижение, повороты головы, но отсутствовал бег. Таким образом, эксперименты свидетельствуют, что возникновение предполагаемой второй гармоники тета-ритма возможно не только при увеличении скорости передвижения животного, но и при других движениях. В настоящее время данный вопрос ещё полностью не прояснён и не исследован в подробностях, в том числе существует крайне мало прямых доказательств того, что наблюдаемая на частотах порядка 16 Гц при возникновении тета-ритма активность есть действительно вторая гармоника основной частоты, а не просто ещё одна независимая колебательная мода.

Основная цель данной работы — определить, является ли выявляемая на удвоенной частоте в гиппокампе при тета-ритме колебательная активность второй гармоникой основной частоты. То есть доказать или опровергнуть гипотезу, в соответствии с которой обе частотные компоненты сигнала: на частоте порядка 8 Гц, соответствующей тета-ритму, и на удвоенной частоте — суть продукт одного нелинейного генератора, а не результат сложения различных по природе колебаний, случайно кратных по частоте.

Для решения этой задачи в данной работе был использован частотно-временной анализ динамики экспериментальных сигналов локальных потенциалов, полученных из гиппокампа головного мозга крыс во время бодрствования — одного из двух основных биологических состояний. Колебания на основной и удвоенной частотах рассматриваются как два процесса, между которыми диагностировалась синхронизация: частотная и фазовая [22–24]. Статистически достоверное детектирование такой синхронизации на больших промежутках времени рассматривалось в качестве доказательства верности сформулированной гипотезы о нелинейной природе тета-ритма.

1. Материалы и методы

1.1. Животные и операция. В работе были использованы записи ЭЭГ, полученные от взрослых самцов беспородных крыс, полученных из питомника «Столбовая» (Московская область, Россия). Животных содержали в контролируемых условиях со свободным доступом к воде и лабораторному корму. Все эксперименты на животных проводились в соответствии с Директивой Совета Европейского Сообщества (86/609/ЕЭС) по проведению экспериментов на животных и были одобрены местным комитетом по биоэтике. Электроды для записи ЭЭГ были имплантированы за две недели до начала эксперимента. Для этого крыс вводили в наркоз и помещали в стереотаксическую рамку. Позолоченные винты, используемые в качестве эпидуральных электродов, устанавливали билатерально в симметричных точках над лобной корой головного мозга. Глубинные электроды из эмалированной нихромовой проволоки были имплантированы билатерально в симметричные точки гиппокампа. Позолоченный винт, имплантированный в кость над мозжечком, использовался в качестве заземляющего электрода. Все соединительные штифты были собраны в соединительную муфту.

1.2. Регистрация ЭЭГ. Записи были получены у свободно передвигающихся крыс, размещённых в индивидуальных плексигласовых коробках со свободным доступом к пище и воде. Для мониторинга активности у свободно двигающихся крыс использовали беспроводную систему записи ЭЭГ NeuroLogger (TSE Systems, Бад Хомбург, Германия). NeuroLogger прикрепляли к разъёму на голове крысы под кратковременным наркозом. Данные ЭЭГ, записанные системой NeuroLogger с частотой дискретизации 258 Гц, передавались на компьютер с помощью программы CommSW, поставлявшейся вместе с прибором. Данные записывались в формате Spike2. Необработанные данные анализировали в автономном режиме с помощью программы Spike5 (Cambridge Electronic Design, Кембридж, Великобритания). Локальные потенциалы от животных были получены с левого и правого полушарий, с лобной коры и гиппокампа — всего четыре сигнала.

1.3. Экспериментальные данные. Эксперимент проводился для исследования влияния агониста эндоканнабиноидных рецепторов WIN55,212 на эпилептический статус у крыс [25]. Для этого через 2 недели после проведения операции были записаны фоновые сигналы ЭЭГ. Именно фоновые записи будут использованы в данной работе. Из всех крыс, участвующих в эксперименте, были отобраны только 14 с хорошим уровнем сигнала во всех каналах и без присутствия критических артефактов, способных повлиять на будущие результаты вычислений. Каждая крыса регистрировалась в течение двух суток непрерывно. В данной работе рассматривались только два канала из гиппокампа — главного источника тета-ритма в головном мозге.

1.4. Спектральный анализ временных рядов. Первая часть работы состояла в том, что необходимо было выделить из общих двухсуточных записей каждого животного временные интервалы, на которых в сигналах гиппокампа была выражена тета-активность. Для разметки временного ряда ЭЭГ был использован один из самых простых и эффективных методов — спектральный анализ. Результат спектрального анализа можно выразить в виде спектрограммы, которая представляет собою зависимость спектральной плотности мощности от времени. Таким образом можно количественно оценить соотношение активности (ритмов) различных диапазонов частот. Для получения спектров частот сигнала использовался наиболее распространённый способ — оконное преобразование Фурье. По умолчанию использовалось окно Ханна, длина окна составила 1 секунду. Временное окно смещалось вдоль всего исследуемого сигнала с шагом по времени, равным шагу выборки $\Delta t = 1/258$ сек, и 99% перекрытием. Временные ряды локальных потенциалов мозга из обоих полушарий гиппокампа и их спектрограммы представлены на рис. 1.

Для анализа у каждой крысы анализировались только первые сутки регистрации. Такое ограничение связано с тем предположением, что в первые часы записи крысы проявляли большую активность: исследовали новое место проживания, что способствовало частому передвижению по клетке. Следовательно, именно в этом промежутке времени ожидалось увидеть большее

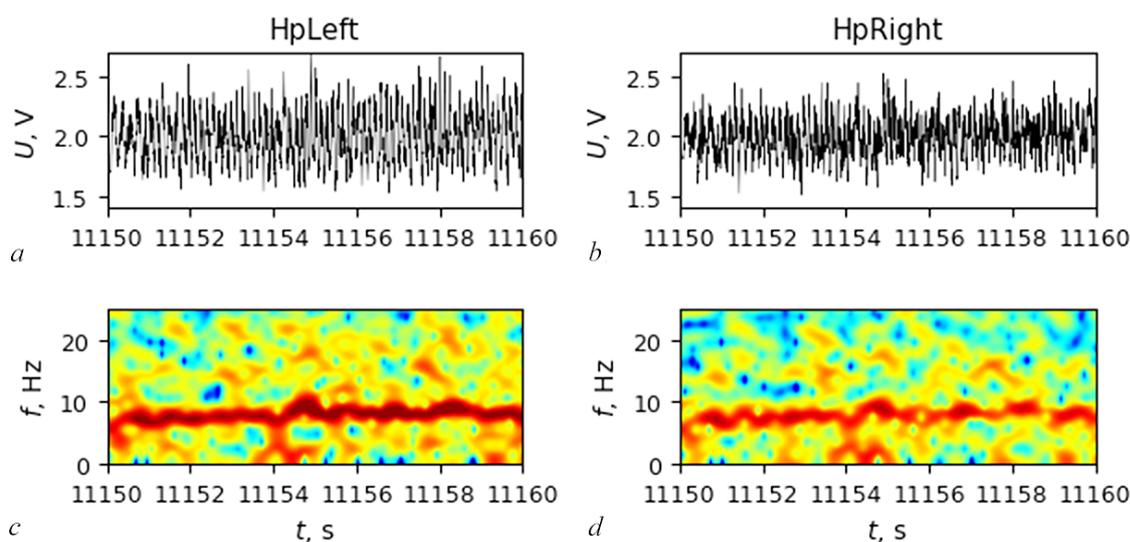


Рис. 1. Временные ряды (a, b) и спектрограммы (c, d) сигнала локальных потенциалов мозга (гиппокампа): слева (a, c) — из левого полушария, справа (b, d) — из правого. По горизонтальной оси указано время в секундах от начала разряда, по вертикальной для временных рядов (a, b) — напряжение в В (после аппаратного усилителя), для спектрограмм — частота в Гц. Мощность на спектрограммах обозначена цветом (цвет онлайн)

Fig. 1. Time series (a, b) and spectrograms (c, d) of signals of brain local field potentials from hippocampus: left (a, c) — from the left hemisphere, right (b, d) — from the right one. X-axis: time in seconds from the beginning of the discharge, Y-axis for the time series (a, b) — voltage (after amplifier), Y-axis for the spectrograms (c, d) — frequency in Hz. Spectral power is shown using color (color online)

количество интервалов, где бы мог проявляться тета-ритм. Под конец регистрации животные вели себя более пассивно и чаще спали. При этом анализировались не все 24 часа, а некоторые выбранные на основе анализа поведения отрезки времени, длительность которых могла составлять от 30 минут до 1 часа. В среднем для каждой крысы было проанализировано 5 таких отрезков.

Из данного набора для всех крыс было выделено различное количество интервалов, где проявлялась тета-активность. Разметка производилась исходя из особенностей структуры, формы сигнала и частотных свойств, присущих исследуемому состоянию. Длительность интервалов составила 10 секунд.

1.5. Построение и анализ скелетонов. Для выделения частоты, соответствующей максимуму в спектре в определённом диапазоне, на основании рассчитанных спектрограмм было проведено построение скелетонов — структур, представляющих собой зависимость основной частоты некоторого частотного диапазона от его продолжительности. Скелетоны позволяют охарактеризовать динамику изменения частоты исследуемого диапазона, а также визуально оценить частотную структуру в нём.

Полученные скелетоны имели большое число быстрых кратковременных переключений между частотами, обусловленных как внутренними процессами, так и артефактами измерения. Поэтому производилась фильтрация (сглаживание) скелетонов во временной области со временем отсечки 0.1 с (10 Гц). Для этого весь временной ряд скелетонов был разбит на последовательные пары значений (длительность, частота). Затем в таких парах частота приводилась к предшествующей, если длительность доминирования этой частоты оказывалась меньше 0.1 секунды. Переключения чаще 10 Гц при исследовании тета-ритма малоинформативны, поскольку основная частота ритма обычно составляет около 8 Гц, то есть на отрезке 0.1 с содержится менее 1 периода колебаний, и сама идея наличия тета-ритма на столь малом участке обесмысливается.

Для изучения частотной структуры тета-ритма были рассмотрены два неперекрывающихся частотных диапазона: 6...12 Гц (основной) и 12...24 Гц (удвоенный). В первый укладывается тета-диапазон частот, второй является удвоенным значением первого. Скелетоны были рассчитаны для этих двух частотных интервалов независимо для сигналов каждого из двух полушарий отдельно. Поскольку нас интересовала синхронизация между диапазонами в отношении 2:1 и для визуализации, построенные в основном и удвоенном диапазоне скелетоны совмещались, при этом значения частот, соответствующих второй гармонике, делились пополам (будем называть такие частоты «приведёнными») для соблюдения отношения 2:1. Данный алгоритм построения скелетонов уже реализовывался в работе [26] для анализа особенностей течения длительных приступов абсансной эпилепсии у крыс-моделей, а также для выявления перезапусков пиковых разрядов приступов.

В результате анализа во многих рассмотренных отрезках были найдены интервалы разной длительности, на которых частотно-временная динамика, в том числе эволюция основной частоты во времени, в удвоенном диапазоне повторяла динамику в основном с погрешностью не более 1 Гц. Такое расхождение соответствует разрешению по частоте Δf , которое равно $1/L_w$, где L_w — длина окна. То есть различие лежит на уровне погрешности метода, обусловленной конечностью частотного разрешения из-за ограничения длины окна.

Для численного исследования таких совпадений введём следующие обозначения. Обозначим через f_1 и f_2 основные частоты в основном и удвоенном диапазонах. Если неравенство

$$|2 \cdot f_1 - f_2| < \Delta f \quad (1)$$

выполняется на некотором временном интервале, тогда можно говорить о том, что f_2 является второй гармоникой f_1 , а не просто компонентой независимого происхождения, то есть диагностируется частотная синхронизация.

При таком анализе частым явлением становятся кратковременные скачки частоты в основном или удвоенном диапазоне, которые формально означают нарушение (или наоборот, появление) синхронизации, но фактически неотличимы от артефакта. Поэтому были наложены два дополнительных условия:

- 1) если на предыдущем временном интервале режим частотной синхронизации установился — выполняется соотношение (1), а на коротком участке длины менее периода тета-ритма (то есть менее 0.16 с) — нет, этот сбой синхронизации игнорируется;
- 2) если длительность участка синхронизации составляет менее секунды (6–8 периодов), такой участок не учитывается.

Данные условия базируются в том числе на физиологических основаниях генерации тета-колебаний. Тета-ритм возникает, когда крыса начинает двигаться, и прекращается с её остановкой. Это значит, что в бодрствующем состоянии длительность промежутков тета-активности определяется исключительно поведением животного и может достигать сотен секунд. Таким образом, для исследования было проще сконцентрироваться на колебаниях, длительность которых была бы значительной и визуально детектируемой, отбросив эпизодически возникающие краткосрочные совпадения (вполне вероятно, случайные) между частотами и краткосрочные нарушения длительной устойчивой тета-активности, обусловленные в том числе погрешностями методов сбора и анализа сигналов.

Аналогичные корректировки при построении и анализе скелетонов уже реализовывались и тестировались в работе [27], где исследовалась нелинейная природа сигналов абсансных приступов. В частности, с помощью данного метода было показано наличие частотной синхронизации [22–24, 28] между частотным диапазоном приступа абсансной эпилепсии и его второй гармоникой.

1.6. Анализ фазовой синхронизации. Спектральная плотность мощности, отображаемая на спектрограммах и используемая для построения скелетонов, не содержит информации о фазах. Между тем корреляция фаз гармоник является важным и ещё более надёжным, чем корреляция частот, признаком нелинейности процесса. В данном случае нас интересует не только изучение поведения фазы сигнала в двух исследуемых диапазонах, но и наличие или отсутствие фазовой синхронизации между указанными основным и удвоенным диапазонами частот в сигналах гиппокампа. Под фазовой синхронизацией понимается процесс подстройки фазы колебательных систем в некотором целочисленном соотношении в результате их взаимодействия или внешнего воздействия [29]. В нашем случае соблюдалось соотношение 2:1. В нормальном случае этот процесс есть результат взаимодействия двух или более генераторов, но в данном контексте диагностика фазовой синхронизации между компонентами одного и того же сигнала проводится с целью показать, что эти компоненты — суть гармоники и что они порождены одним и тем же генератором. То есть мы пользуемся методами, развитыми для диагностики синхронизации между взаимодействующими системами, но с целью исследования одного сигнала. Одна из основных проблем фазового анализа состоит в том, что ввести корректно фазу для всего сигнала — довольно трудная задача. Мы использовали распространённый подход, основанный на построении аналитического сигнала с помощью преобразования Гильберта отдельно в каждом частотном диапазоне. На тех промежутках, где спектрограммы и скелетоны выявляли наличие основной частоты в каждом из двух диапазонов, построенная таким образом фаза оказалась хорошо определена, и число проскоков фазы было невелико: менее 1 на 20 периодов.

1.6.1. Коэффициент фазовой синхронизации. Для исследования фазовых взаимодействий использовался коэффициент фазовой синхронизации, введённый в работе [30]:

$$K = \left| \left\langle e^{j(m_x\phi_x - m_y\phi_y)} \right\rangle \right|,$$

где K — значение коэффициента фазовой синхронизации; j — мнимая единица; угловые скобки означают процедуру усреднения; ϕ_x и ϕ_y — фазы сигналов, в данном случае полученных из аналитического сигнала в каждом из диапазонов, m_x и m_y — коэффициенты кратности, в нашем случае $m_x = 2$ и $m_y = 1$, поскольку исследовалась синхронизация 2:1. Коэффициент фазовой синхронизации представляет собою численный показатель, который позволяет количественно оценить синхронность фаз двух сигналов без возможности выявить причину такой синхронности. Значение коэффициента K изменяется от значения 0 (полная асинхронность) до значения 1 (полная синхронность). Подход стал классическим, его преимуществам по сравнению с другими методами посвящена работа [31].

В формуле (2) в идеальном случае подразумевается усреднение по всему аттрактору, то есть на бесконечном времени и с бесконечно малым шагом. На практике задача оценивания K решается по измеренным временным рядам $\{x_n\}_{n=1}^N$ и $\{y_n\}_{n=1}^N$, где $x_n = x(t_n)$ и $y_n = y(t_n)$, то есть по значениям величин x и y , измеренным в n -й момент времени, N — длина ряда. При этом, как правило, временной ряд эквидистантный (именно такие ряды выдаёт большинство современных измерительных приборов), то есть $t_n = n\Delta t$. В качестве оценки величины K обычно используется приближение, рассчитанное за время наблюдения:

$$\hat{K} = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N e^{j(\phi_x(t_n) - \phi_y(t_n))} \right|. \quad (2)$$

При большой длине ряда и эргодичности процессов можно ожидать, что оценка \hat{K} будет достаточно (например, на уровне относительных погрешностей измерения) близка к истинному значению величины K . В данной работе используются стационарные (насколько это вообще возможно в биологической системе), относительно длинные (от 60 периодов колебаний) временные ряды, переходные процессы не рассматриваются, что позволяет рассчитывать на достоверность полученных оценок.

Полученные результаты для некоторого количества тестовых интервалов показали, что значения K оказались крайне низкими. В большинстве интервалов значение K несущественно отличались от 0, что означало отсутствие какой-либо фазовой синхронизации, несмотря на то, что предполагаемая частотная синхронизация отчётливо себя проявляла. Это может быть связано с тем, что сигналы в двух диапазонах могут быть сначала синхронизированы с одним сдвигом по фазе, а затем происходит сбой/перестройка и синхронизация происходит уже с другим сдвигом. Поэтому было решено отказаться от расчёта K по всему выбранному интервалу разом, а считать в скользящем окне для каждого интервала. За длину окна выбрано значение 1 с. Временное окно смещалось вдоль всего интервала с шагом по времени 0.01 с. Значения окна и шага были подобраны эмпирически.

Рассчитанные таким образом значения коэффициентов были использованы не только для визуализации динамики данного показателя в течение некоторого времени, но и для численной оценки фазовой синхронизации. В каждом интервале проводилась проверка значений коэффициента K относительно некоторого порога, в нашем случае порог значения составил 0.5. Если коэффициент равен или превосходит указанный порог на некотором отрезке времени, тогда можно говорить о наличии фазовой синхронизации между указанными диапазонами. По аналогии с тем, как проводилось численное исследование скелетонов, учитывались только временные отрезки длительностью более 1 с.

1.6.2. Биспектральный анализ. Чтобы подтвердить и проверить результаты, полученные с помощью коэффициента фазовой синхронизации, было решено использовать второй метод. Для этого мы использовали биспектральный анализ. Биспектральный анализ — частный случай полиспектрального анализа и уже достаточно давно эффективно используется для идентификации

нелинейности, а также фазовых взаимосвязей между различными спектральными (частотными) компонентами анализируемого объекта [32]. Оценка биспектральной плотности основывается на использовании корреляционных функций третьего порядка (статистика третьего порядка).

Биспектр сигнала — двумерное преобразование Фурье тройной автокорреляционной функции. Его можно выразить в следующем виде (3):

$$B(f_a, f_b) = \langle X(f_a)X(f_b)X^*(f_a + f_b) \rangle, \quad (3)$$

где $X(f)$ — преобразование Фурье сигнала, а $X^*(f)$ — комплексное сопряженное к нему. То есть биспектр — это статистическое среднее тройного произведения преобразований Фурье на частотах f_a , f_b и комплексно сопряженного преобразования Фурье на частоте $f_a + f_b$ [32, 33].

Когда биспектр выводится из одного временного ряда, результат описывается как автобикогерентность. Биспектр статистически равен нулю, если коэффициенты Фурье взаимно независимы, то есть для линейной системы. Для нелинейных систем биспектр будет демонстрировать пики в триадах $(f_a, f_b, f_a + f_b)$, которые коррелированы по фазе. Функциональное значение бикогерентности заключается в том, что фазовый спектр при обычном преобразовании Фурье измеряет фазу частотных компонент относительно начала эпохи, тогда как бикогерентность измеряет корреляцию фаз между различными частотными компонентами.

Биспектр представляет собою диаграмму в плоскости частот f_a, f_b , где любой точке этой плоскости значение биспектра $B(f_a, f_b)$ представляет собой фазовую корреляцию между модами Фурье с частотами $f_a, f_b, f_a + f_b$. В силу свойства симметрии биспектра графики бикогерентности симметричны относительно линии $f_a = f_b$. Следовательно, знание биспектра в треугольной области $f > 0, f_a \geq f_b, f_a + f_b \leq \pi$, достаточно для полного описания биспектра. Биспектр реального процесса имеет 12 симметричных секторов треугольной формы, поэтому биспектральное преобразование производится только для одного сектора, после чего используется свойство симметрии [32].

Однако для количественной оценки степени фазовой связи при биспектральном анализе принято использовать расчет биспектральной когерентности (бикогерентности). Данная мера представляет собой нормализованный биспектр и может быть представлена в виде (4)

$$b^2(f_a, f_b) = \frac{|\langle X(f_a)X(f_b)X^*(f_a + f_b) \rangle|^2}{\langle |X(f_a)X(f_b)|^2 \rangle \langle |X^*(f_a + f_b)|^2 \rangle}. \quad (4)$$

В зависимости от уровня синхронности между исследуемыми частотами абсолютное значение бикогерентности варьируется в пределах от 0 до 1: если между частотами фазовая связь отсутствует, значение бикогерентности будет стремиться к 0, если фазы сигналов линейно связаны — стремиться к 1. Значения бикогерентности рассчитывались с использованием ранее рассчитанных биспектров для всех временных интервалов. В том случае, если значение бикогерентности между основной частотой тета-ритма и его удвоенным значением было выше или равнялось 0.5, то считалось, что в исследуемом временном интервале присутствует фазовая синхронизация. При этом для частот двойного диапазона учитывалась погрешность в 1 Гц, возникающая вследствие дискретности расчетов значений бикогерентности.

В настоящее время биспектральная плотность оценивается несколькими способами: с помощью прямого и косвенного метода. В косвенном методе главным пунктом является расчёт тройной автокорреляционной функции, к которой уже непосредственно применяется преобразование Фурье. В прямом методе расчёт оценок корреляционной функции третьего порядка исключается, и всё сводится к применению быстрых алгоритмов преобразования Фурье, за счёт чего достигается высокое быстродействие. Более подробно о данных методах можно узнать в [32, 34].

В данном исследовании использовался прямой метод расчёта биспектральной плотности. Значения биспектральной плотности были использованы для расчёта бикогерентности. Для оценки биспектров десятисекундные интервалы были разделены на сегменты с 50% перекрытием длиной, равной 1 секунде. Как и при построении спектрограмм, использовалось оконное преобразование Фурье. В качестве окна была выбрана функция Ханна, которая применялась к каждому сегменту. Все вычисления и построения, в том числе реализация функции расчёта биспектра и бикогерентности, были реализованы на языке Python с помощью стандартных модулей SciPy, NumPy, Matplotlib [35].

2. Результаты

2.1. Спектры сигналов. Для каждой крысы было выделено своё количество интервалов, содержащих ярко выраженную тета-активность, что является следствием индивидуальных особенностей отдельных животных и неизбежных отличий в процессе эксперимента: как при установке электродов, так и при съёме данных. Результаты разметки представлены в Таблице.

Таблица. Количество выделенных 10-секундных интервалов тета-ритма для каждой крысы и их длительность в секундах. № — номер крысы, M — количество 10-секундных интервалов

Table. The number of allocated 10-seconds intervals with theta-rhythm for each rat. No is the rat's number, MM is the number of 10-second intervals

№	2	7	8	9	13	15	17	18	25	101	102	108	110	111
M	205	155	107	174	136	104	29	103	111	107	149	219	185	399

Спектральный анализ помог не только выделить необходимые отрезки временного ряда, содержащего в себе тета-ритм, но и выявил некоторые особенности реализации ритма у рассмотренных животных. Первое, что было отмечено при анализе спектров и спектрограмм, — это наличие двух форм тета-ритма, отличных длительностью эпизодов и частотами. Первая форма характеризуется основной частотой 5...7 Гц, вторая — частотой 7...10 Гц. Причём в исследуемых временных интервалах наблюдался либо первый, либо второй вид ритма. Такое разграничение не впервые наблюдается в различных исследованиях тета-ритма. Некоторые учёные предполагают, что тета-ритм можно разделить на два отдельных ритма из-за их различий в нейромедиаторных механизмах и ассоциированных поведенческих проявлениях. Так, существуют свидетельства того, что тета-ритм у неподвижных животных и животных под уретановой анестезией подавляется атропином, а у животных в свободном исследовательском поведении — нет [36]. Атропинчувствительный тета-ритм, как правило, низкочастотный (4...9 Гц), а атропин-нечувствительный — более высокочастотный (7...12 Гц) [37]. В дальнейших исследованиях было выяснено, что из глубоких слоёв энторинальной коры в медиальную септальную область (МСО) приходит сигнал о скорости движения, что приводит к корреляции между частотой разрядов септальных нейронов и скоростью движения животного [38–40]. Эта информация может объяснять увеличение мощности и частоты тета-ритма в активном исследовательском поведении и, наоборот, снижение частоты тета-ритма в ситуации, когда животное находится в покое или под анестезией [41]. В то же время другие исследователи утверждают, что тета-ритм представляет собой единый процесс, который может быть инициирован разнообразными сигналами, поступающими в МСО [42]. Поддержку этой точке зрения также оказывает отсутствие значительных различий в процессах генерации тета-ритма в гиппокампе в разных ситуациях.

Опираясь на результаты, что были получены из экспериментальных сигналов, также можно сказать, что низкочастотный тета-ритм менее стабилен: участки ритма в среднем корочке и чаще прерываются другими видами колебаний в отличие от более высокочастотной версии тета-ритма со стабильно частотной структурой.

2.2. Вторая гармоника в спектре. Частотная синхронность. Вторая особенность тета-ритма, выявленная при анализе спектров экспериментальных сигналов, состояла в наличии частотной активности, схожей с тета-ритмом, в диапазоне частот, соответствующем удвоенному значению основного тета-диапазона. Данная особенность наблюдалась для сигналов из обоих полушарий, причём чаще такая динамика наблюдалась для относительно высокочастотного тета-ритма (7...10 Гц).

На рис. 2, 3 представлен 10-секундный временной ряд локальных потенциалов одной из исследуемых крыс из обоих полушарий гиппокампа (*a*), их спектрограмма (*b*), скелетоны из двух диапазонов частот (*c*) и график с моментами времени, когда разница приведённых частот двух гармоник была меньше или равна 1 Гц (фактически — промежуток времени, когда наблюдалась

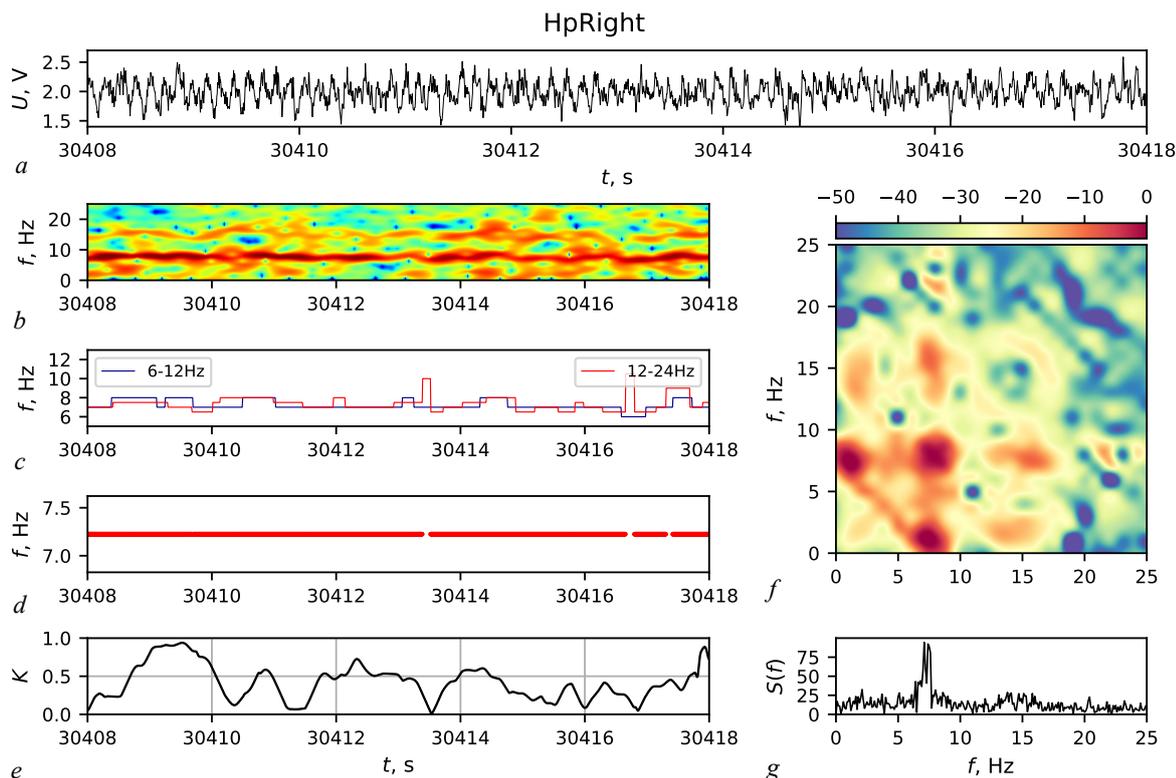


Рис. 2. Графики временного ряда спектра, скелетона, частотных совпадений, изменения коэффициента фазовой синхронизации и биспектра для одного 10-секундного интервала сигнала с правого полушария для одной из исследуемых крыс. Первый график сверху (*a*) — временной ряд локальных потенциалов, второй слева (*b*) — спектрограмма сигнала, третий (*c*) — его скелетоны в двух исследуемых диапазонах частот (частоты в диапазоне 12...24 Гц поделены пополам, как это было написано ранее, для упрощения отслеживания синхронизации 2:1), четвёртый (*d*) — результат диагностики частотной синхронизации, пятый (*e*) — изменения коэффициента фазовой синхронизации (K) в течение данного временного интервала, первый справа (*f*) — биспектр сигнала, второй справа (*g*) — спектр плотности мощности. На фрагменте (*d*) красными точками обозначены моменты времени, когда разница приведённых частот двух гармоник была меньше или равна 1 Гц, если такие участки были длиннее 1 с (цвет онлайн)

Fig. 2. Plots, showing time series, skeleton, frequency dynamics, phase synchronization index and bispectrum for one 10 s interval of local field potentials measured from the right hemisphere for one of considered animals. The upper subplot (*a*) corresponds to time series of local field potentials. The second subplot (upper, left, *b*) corresponds to spectrogram. The third subplot (center, left, *c*) corresponds to the skeletons constructed in two frequency ranges: 0...12 Hz and 12...24 Hz, with frequencies in doubled range being divided by two for simplicity of synchrony detection. The fourth subplot (*d*) indicates the results of frequency synchrony detection based on skeletons. The fifth subplot (*e*) indicates the results of phase synchrony detection using phase coherency index K . Subplots (*g*) and (*f*) are for individual spectrum and for the bispectrum respectively. The red dots in the subplot (*d*) indicate the moments when the difference between the frequencies of the two harmonics was less than or equal to 1 Hz, if such intervals were longer than 1 s (color online)

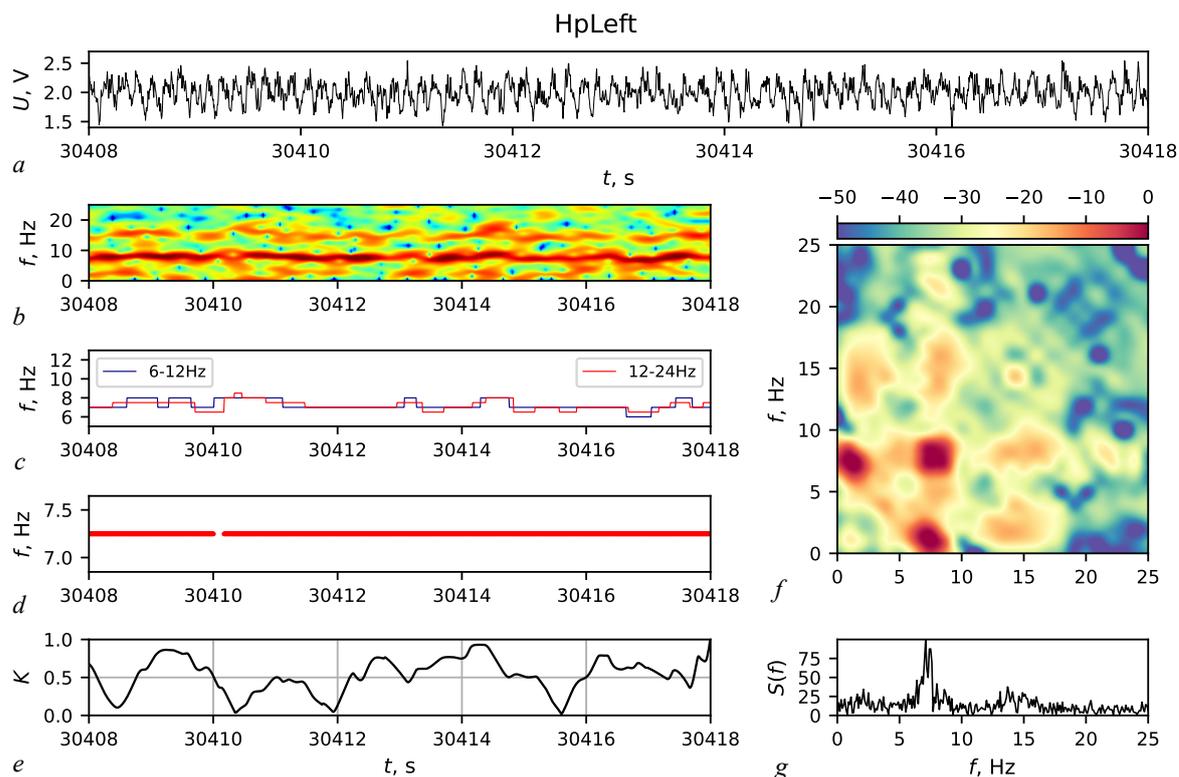


Рис. 3. Графики спектра, скелетона, частотных совпадений, изменения коэффициента фазовой синхронизации и биспектра для одного 10-секундного интервала сигнала с левого полушария для одной из исследуемых крыс. Первый график сверху (a) — временной ряд ЭЭГ, второй слева (b) — спектрограмма сигнала, третий (c) — его скелетоны в двух исследуемых диапазонах частот (частоты в диапазоне 12...24 Гц поделены пополам, как это было написано ранее, для упрощения отслеживания синхронизации 2:1), четвёртый (d) — результат диагностики частотной синхронизации, пятый (e) — изменения коэффициента фазовой синхронизации (K) в течение данного временного интервала, первый справа (f) — биспектр сигнала, второй справа (g) — спектр плотности мощности. На фрагменте (d) красными точками обозначены моменты времени, когда разница приведённых частот двух гармоник была меньше или равна 1 Гц, если такие участки были длиннее 1 с (цвет онлайн)

Fig. 3. Plots, showing time series, skeleton, frequency dynamics, phase synchrony index and bispectrum for one 10 s interval of local field potentials measured from the left hemisphere for one of considered animals. The upper subplot (a) corresponds to time series of local field potentials. The second subplot (upper, left, b) corresponds to spectrogram. The third subplot (center, left, c) corresponds to the skeletons constructed in two frequency ranges: 0...12 Hz and 12...24 Hz, with frequencies in doubled range being divided by two for simplicity of synchrony detection. The fourth subplot (d) indicates the results of frequency synchrony detection based on skeletons. The fifth subplot (e) indicates the results of phase synchrony detection using phase coherency index K . Subplots (g) and (f) are for individual spectrum and for the bispectrum respectively. The red dots in the subplot (d) indicate the moments when the difference between the frequencies of the two harmonics was less than or equal to 1 Hz, if such intervals were longer than 1 s (color online)

частотная синхронизация) — (d). Также приведены графики зависимости коэффициента фазовой синхронизации от времени (e), биспектры (f) и спектры плотности мощности (g).

На спектрограммах обоих каналов видно, что в течение всего временного отрезка на частоте примерно 15 Гц проявляются длительные высокоамплитудные колебания, причём частотная структура схожа со структурой тета-ритма, расположенного на частоте примерно 7...8 Гц. В какие-то моменты времени эти колебания выражены лучше, в другие — хуже. Графики скелетонов (см. рис. 2, c, 3, c) подтверждают это видимое наблюдение. Численное совпадение отражено в графиках 2, d, 3, d, где красными точками отмечены моменты времени, когда разница частот двух диапазонов не превышает 1 Гц. Сформировавшиеся из отдельных точек красные линии фактически подтверждают устойчивость и непрерывность синхронной активности в основном и удвоенном диапазонах. При этом графики для двух полушарий в представленном примере

имеют некоторые различия (как и во многих других случаях — в каждом случае свои): в левом полушарии синхронизация диагностируется с самого начала эпизода и почти до самого конца с единственным небольшим разрывом в начале, в правом разрывов больше и они все локализованы во второй половине эпизода. В обоих каналах синхронность между диапазонами восстанавливается к концу эпизода и, вероятно, длится ещё какое-то время после. В приведённом примере амплитуда колебаний в обоих каналах примерно одинакова, но в других рассмотренных записях она может отличаться. При этом канал, где длительность синхронной динамики оказалась больше, может иметь несколько меньшую абсолютную амплитуду ритма, что может быть вызвано как физиологическими причинами, так и являться артефактом измерений, например, быть следствием чуть разного положения электродов или образования дополнительного сопротивления на контакте в результате разрушения ткани, вызванного введением электродов.

Результаты диагностики частотной синхронизации для каждого из рассмотренных животных по всем исследованным интервалам приведены на рис. 4. На рис. 4, *a* представлена

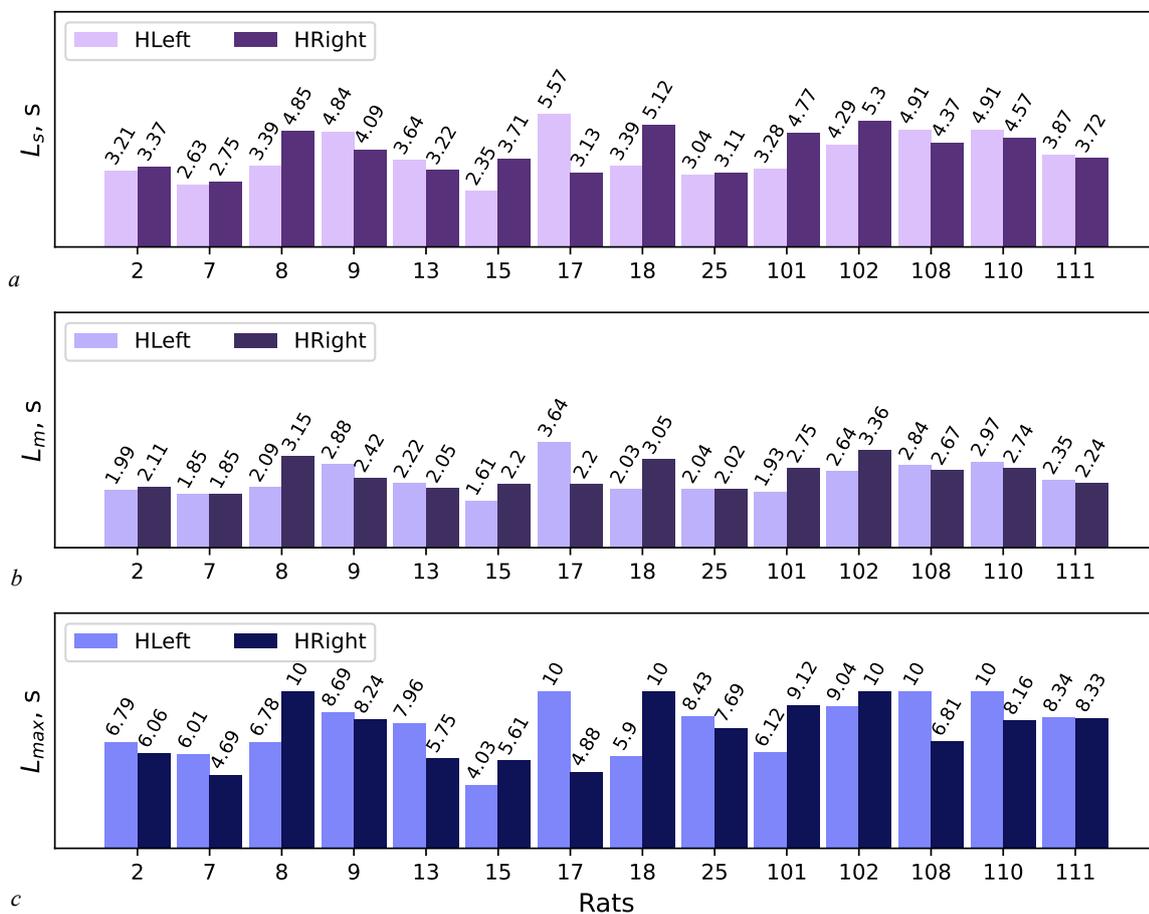


Рис. 4. Столбчатые диаграммы средней суммарной длительности L_s (a), средней максимальной длительности участка L_m (b) и максимальной по длительности участков L_{max} (c) синхронной активности в основном диапазоне тета-ритма и его удвоенном диапазоне (интервалов частотной синхронизации), полученных при анализе сигналов обоих полушарий для всех крыс. По горизонтальной оси — номера животных, по вертикальной оси — длительность синхронной активности в секундах (цвет онлайн)

Fig. 4. Bar plots of the mean summary duration L_s (a), the mean maximal duration of interval L_m (b), and maximal interval length L_{max} (c) of synchronous activity in the main and doubled frequency ranges obtained for both hemispheres of rats. X-axis indicates rat number, Y-axis indicates duration in seconds (color online)

усреднённая по всем 10-секундным интервалам для каждого животного отдельно суммарная длительность синхронного по частотам в основном и удвоенном диапазонах режима, рассчитанная по формуле (5)

$$L_s = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_n} l_{n,i}. \quad (5)$$

Здесь N_n — число отрезков, на которых была диагностирована синхронизация в рамках n -го 10-секундного интервала, $l_{n,i}$ — их длины, N — общее число интервалов для данного животного. Максимально возможное значение $L_s = 10$ с, поскольку рассматривались 10-секундные интервалы.

Из рисунка видно следующее: во-первых, у трёх животных вторая гармоника оказывается синхронизована с первой на более чем половине всего времени, на котором наблюдался устойчивый тета-ритм, по крайней мере, в одном полушарии. Минимум составляет 2.35 с для животного № 15. Во-вторых, у части животных первая и вторая гармоники синхронизованы в обоих отведениях примерно одно и то же время (животных №№ 2, 7, 25, 111), а у других — существенно разное (животные №№ 8, 15, 17, 101).

Общая длина синхронной активности, отражённая на рис. 4, а, может быть получена как сумма нескольких относительно коротких отрезков, поэтому интересно посмотреть, какова в среднем максимальная длина отдельного фрагмента, на котором синхронная активность была непрерывна. Средние максимальные значения длительности синхронной активности в основном и удвоенном диапазонах (см. рис. 4, б) получены усреднением максимальных по длине найденных интервалов в 10-секундном интервале по формуле (6).

$$L_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \max(s_n), \quad (6)$$

где $s = \{l_i\}_{i=1}^n$ — последовательность детектированных интервалов синхронной активности в одном 10-секундном отрезке, N — количество 10-секундных отрезков.

Из сопоставления рис. 4, а и рис. 4, б можно видеть, что они очень хорошо коррелируют друг с другом: в тех случаях, когда L_m больше, L_s также больше; для тех животных, для которых L_m примерно одинакова для обоих отведений, L_s также одинакова. Таким образом, можно заключить, что любая из этих двух средних величин достаточна для понимания степени синхронности колебаний в основном и удвоенном диапазонах, не важно, проводим ли мы усреднение только длин самых длинных сегментов синхронной активности или усредняем всю активность за заданный временной промежуток.

Кроме средних величин, полезно рассмотреть максимальные значения. Рис. 4, с показывает, что в 6 из 28 (если считать по числу отведений) рассмотренных случаев существуют 10-секундные промежутки тета-ритма целиком непрерывно синхронной активности в основном и двойном диапазонах, причём синхронность эта проявляется в левом и правом отведениях независимо: все 6 отмеченных случаев принадлежат 6 разным животным.

Наконец, следует исследовать вопрос о том, в каком проценте случаев (на каком числе исследованных промежутков) синхронная активность наблюдалась хотя бы раз. Число таких интервалов для каждого отведения отдельно в сравнении с общим числом исследованных интервалов приведено для каждого животного на рис. 5, а. Видно, что у всех животных синхронная активность наблюдалась в 3/4 случаев и чаще, за исключением крысы № 7, для которой синхронная активность наблюдалась в 2/3 случаев. Для многих животных синхронная активность наблюдалась почти на всех рассмотренных интервалах: на 29 из 29 (100%) для крысы № 17

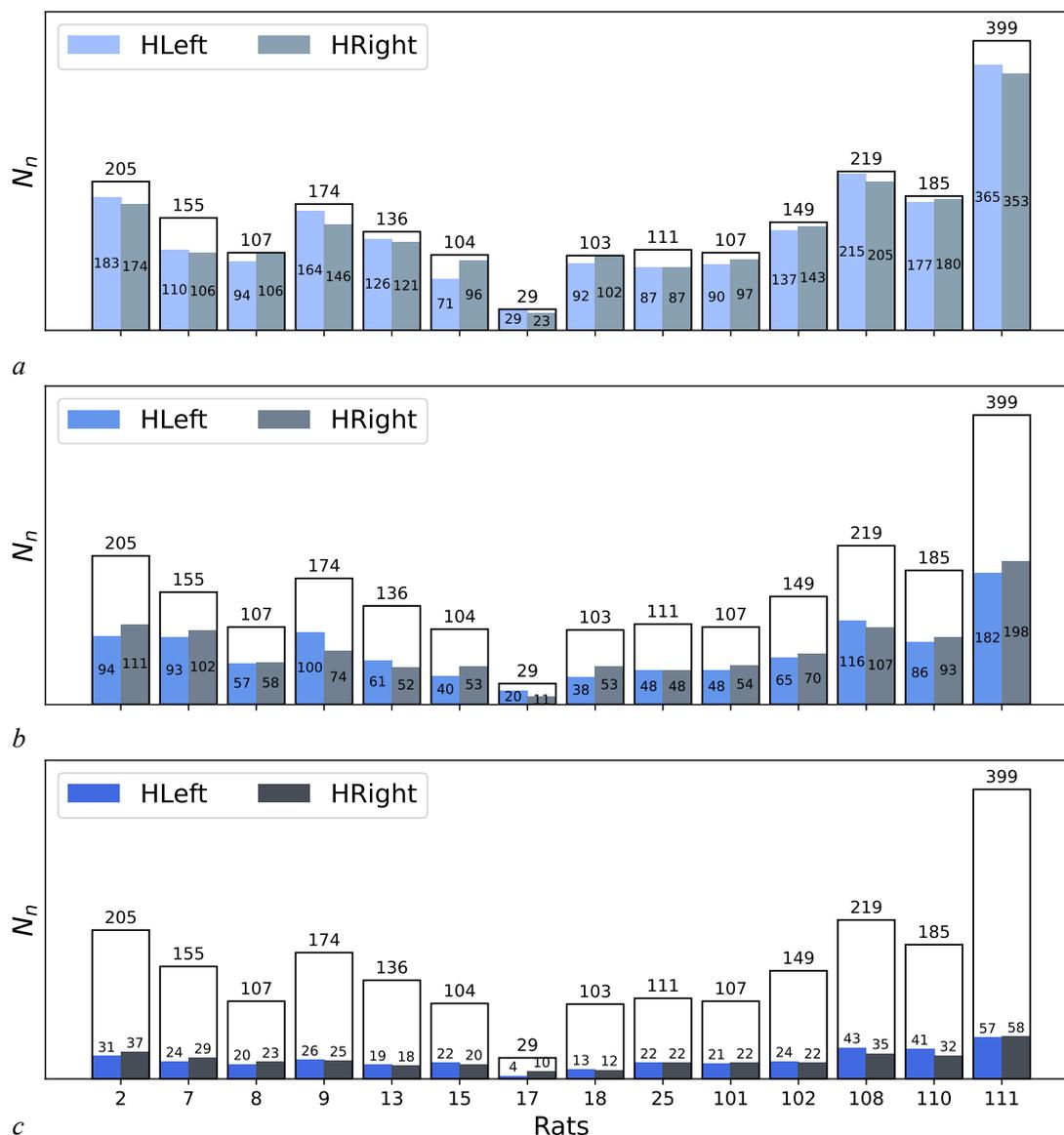


Рис. 5. Столбчатые диаграммы числа участков синхронизации 2:1 между основным тета-диапазоном и его удвоенным значением. Расчёты выполнены для обоих полушарий для всех крыс. Первый график (a) — количество 10-секундных интервалов, в которых была обнаружена частотная синхронизация с помощью метода расчета скелетонов, второй график (b) — количество 10-секундных интервалов, в которых была обнаружена фазовая синхронизация с помощью метода расчета коэффициента фазовой синхронизации, третий (c) — количество 10-секундных интервалов, в которых была обнаружена фазовая синхронизация с помощью расчёта значений бикогерентности. Результаты указаны для каждого полушария (цветные столбцы) относительно общего количества анализируемых интервалов (столбцы без цвета). По горизонтальной оси указана нумерация животных, по вертикальной оси — количество 10-секундных интервалов (цвет онлайн)

Fig. 5. Bar plots of number of synchronous intervals, for which the main frequency in the doubled range is synchronized to the fundamental frequency in the ratio 2:1. Calculations were performed for both hemispheres. Subplot (a) shows the number of 10 s intervals for which the frequency synchronization was detected using skeletons. Subplot (b) shows the number of 10 s intervals in which phase synchrony was detected at the level $K > 0.5$ using phase coherence index (2). Subplot (c) shows the number of 10 s intervals in which phase synchrony was detected using bicoherence (4). Results are given for each hemisphere (color columns) relative to the total number of analyzed intervals (uncolored columns). The animals are numbered on the X-axis, the number of 10-second intervals is on the Y-axis (color online)

в левом отведении, на 215 из 219 для крысы № 108 (98%) также в левом отведении, в 106 из 107 случаев для крысы № 8 в правом отведении и в 102 из 103 случаев у крысы № 18 также в правом отведении (в обоих случаях — более чем в 99% случаев). То есть наличие частотной синхронизации между компонентами в основном и удвоенном диапазонах — это норма для тета-ритма в выбранных физиологических условиях. Если полагать, что возникновению высших гармоник тета-ритма соответствуют некоторые определённые виды активного поведения во время бодрствования, то можно предположить, что как минимум половину времени от общей длительности всех интервалов животное находится не в состоянии пассивного бодрствования/перехода в REM-сон, а именно в состоянии активного бодрствования.

2.3. Анализ фазовых взаимосвязей с помощью коэффициента фазовой синхронизации.

Частотная синхронизация представляет собою самый слабый вариант синхронизации. Гораздо более уверенно можно говорить о синхронизации, если удастся обнаружить фазовую синхронизацию. Анализ на наличие фазовых связей с помощью расчёта коэффициента фазовой синхронизации дал следующие результаты. На рис. 2, *e*, 3, *e* показан пример одного из исследуемых интервалов из обоих полушарий с графиками динамики коэффициента фазовой синхронизации, рассчитанного в скользящем окне. На графиках зависимости коэффициента фазовой синхронизации от времени (см. рис. 2, *e*, 3, *e*) видно, что значение K между исследуемыми гармониками существенно меняет своё значение в течение всего исследуемого интервала. В сравнении с частотной структурой для тех моментов времени, где наблюдалась частотная синхронизация, фазовая синхронность оказывается очень нестабильна: как правило, значение K колеблется в интервале от 0.5 до 0.9, что, с одной стороны, показывает наличие некоторой фазовой синхронности, но, с другой стороны, эта синхронность менее выражена, чем частотная. Такое поведение фазы было характерно для большинства исследуемых интервалов. При этом для более низких значений частоты тета-ритма (от 5 до 7 Гц) характерны более низкие значения коэффициента фазовой синхронизации.

Метод расчёта коэффициента фазовой синхронизации со сдвигом в окне позволил совершить подсчёты средней суммарной длительности L_s , средних максимальных значений длительности L_m и абсолютных максимальных длительностей синхронной активности L_{\max} для всех крыс при заданном значении K , в нашем случае — для $K > 0.5$. Результаты представлены на рис. 6. Видно, что средние (рис. 6, *a*) и суммарные по исследуемому интервалу средние значения (рис. 6, *a*) мало отличаются, то есть на большинстве исследованных отрезков удалось выделить только 1 интервал, на котором наблюдалась синхронность фаз основного и удвоенного диапазонов в отношении 1:2. Длина такого отрезка в среднем очень стабильна и составляет порядка 3 с для всех крыс и отведений, что плохо коррелирует с результатами анализа частотной синхронности. В то же время, если рассмотреть максимальные длительности синхронных участков (см. рис. 6, *c*), то можно видеть, что для ряда животных, например, крысы № 8, имеется хорошее соответствие между результатами частотного и фазового анализа самых длинных синхронных промежутков, в том числе в том, что касается несимметричности по отведениям: в правом отведении сигнал в удвоенном диапазоне дольше синхронен с сигналом в основном.

Количества 10-секундных интервалов с детектированными временными отрезками, соответствующие коэффициенту фазовой синхронизации выше порога ($K > 0.5$), длительность которых превышала 1 с в сравнении с общим числом анализируемых интервалов, представлены на рис. 5, *b*. По итогам представленных результатов можно отметить, что общее количество таких 10-секундных интервалов как для левого, так и для правого полушария занимает от общего количества всех 10-секундных интервалов не менее трети — в среднем около 37%. Данный показатель вдвое ниже того, что было получено для частотной синхронизации по итогам анализа скелетонов, см. рис. 5, *a*, то есть фазовые соотношения существенно сложнее зафиксировать

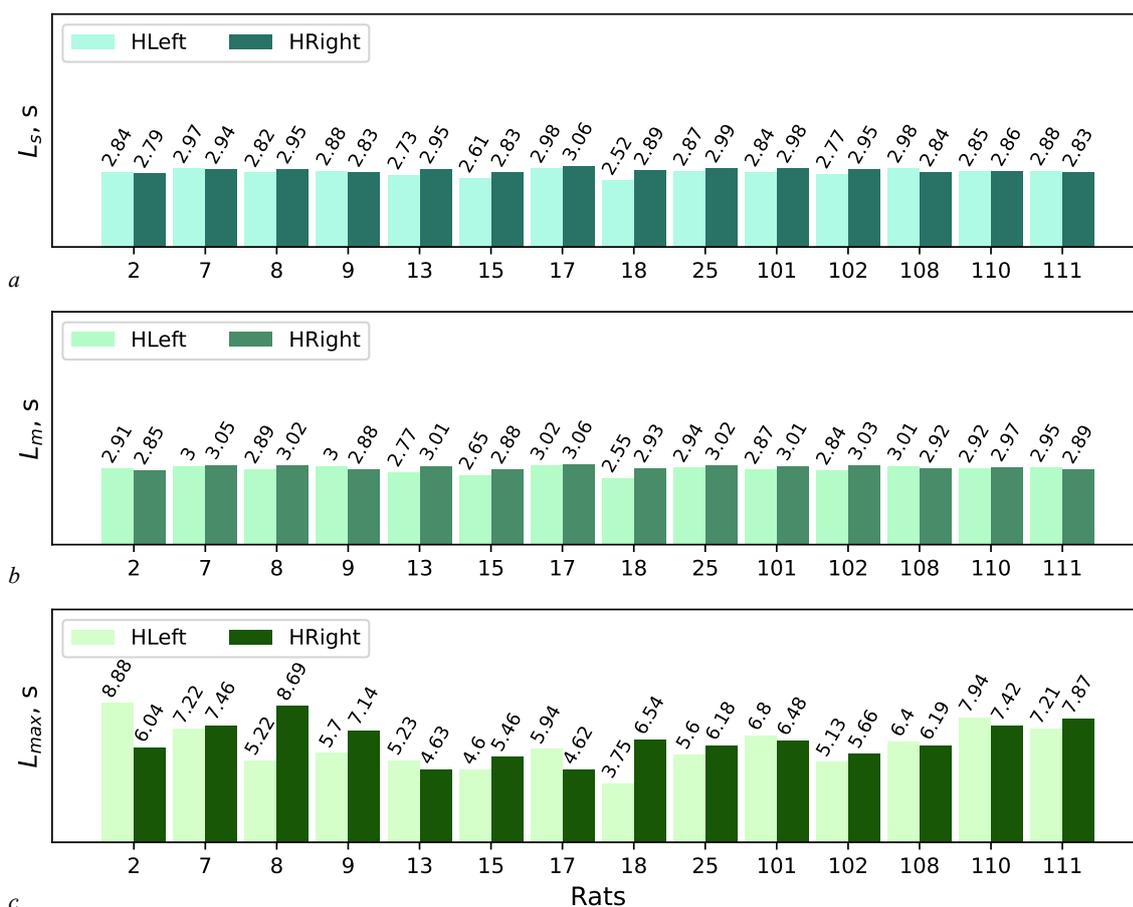


Рис. 6. Столбчатые диаграммы значений средней суммарной длительности (а), средних максимальных значений длительности (b) и максимальных по длительности участков (c), когда значение коэффициента фазовой синхронизации превышало 0.5. По горизонтальной оси указана нумерация животных, по вертикальной оси — длина совпадений в секундах (цвет онлайн)

Fig. 6. Bar plots of summary mean duration (a), mean maximal duration (b) and maximal duration (c) of time intervals at which the phase synchronization index was larger than threshold value $K > 0.5$. X-axis corresponds to rat number, Y-axis corresponds to interval length in seconds (color online)

по сигналам. Представленные результаты подсчетов могут быть связаны с тем фактом, что метод оказался достаточно чувствительным к некоторым внутренним свойствам сигнала, которые внесли соответствующее влияние на результаты расчётов.

2.4. Анализ фазовых взаимосвязей с помощью биспектрального анализа. Биспектры строились во всей плоскости без отсека симметричной части. Для упрощения визуального анализа при построении биспектры ограничивались интервалами частот от 0 до 30 Гц, в которые входят основной и удвоенный диапазон частот тета-ритма. Пример такого биспектра для одного из 10-секундного интервала показан на рис. 2, f и 3, f. При этом интенсивность приведена в логарифмическом масштабе.

Анализируя графики на рис. 2, f, 3, f, можно отметить, что в данном 10-секундном интервале за счёт высокого значения биспектральной мощности фиксируется высокочастотный тета-ритм, то есть имеется максимум на диагонали на значениях примерно 8...9 Гц (яркое красное пятно на главной оси). При этом имеются максимумы также на пересечении основной частоты тета-ритма

и удвоенной частоты (менее выраженные симметричные по отношению к диагонали жёлто-красноватые пятна), что свидетельствует о синхронности фаз в основном и удвоенном диапазонах. При этом у биспектра правого полушария максимумы более выражены, чем в левом.

Анализ полученных биспектров показал следующее. Связи на биспектре между частотами f и $2 \cdot f$ фиксировалась в тех случаях, когда в сигнале 10-секундного интервала отсутствовали артефакты, связанные с движением животного, тренд и сохранялась стабильность амплитуды и основной частоты тета-ритма. Более чёткие максимумы можно было наблюдать в тех случаях, где вторая гармоника на спектрограмме имела непрерывный характер и была более выражена относительно других случайных компонент сигнала, располагающихся в том же частотном диапазоне. Однозначно можно выделить тот факт, что в тех интервалах, где отсутствовала вторая гармоника и, соответственно, частотная связь, отсутствовала и фазовая связь на биспектре между основной частотой тета-ритма и её удвоенным значением.

Касательно тех интервалов, где вторая гармоника была зафиксирована во время частотно-временного анализа, биспектры показали более разнообразные результаты. Данные результаты можно разделить на две основные группы. К первой относятся биспектры, на которых можно зафиксировать фазовую связь в точке пересечения средней частоты основного тета-ритма и средней частоты второй гармоники. Одновременно для этих же 10-секундных отрезков фиксировалась и частотная связь. Также можно было выделить группу отрезков, в которых на биспектрах фазовая синхронность между компонентами сигнала из двух исследуемых диапазонов явно отсутствовала, при этом частотная синхронность была отчётливо видна.

Количества 10-секундных интервалов по каждому животному и по каждому отведению, на которых значение бикогерентности между исследуемыми частотами двух гармоник тета-ритма превышало или равнялось порогу, равному 0.5, в сравнении с общим количеством анализируемых интервалов, представлены на рис. 5, с. Полученные результаты, очевидно, сильно ниже результатов, полученных с помощью коэффициента фазовой синхронизации; в среднем — примерно втрое. В среднем для всех крыс в обоих полушариях таким методом было найдено около 15% интервалов от общего количества, где значение бикогерентности превышало порог, а следовательно, фазы на исследуемых частотах были синхронны.

Заключение

Нелинейность биологических сигналов, в том числе сигналов мозга, часто недооценивается. Так, при выявлении и разделении ритмов мозга [1] принято фильтровать сигналы в основном диапазоне, соответствующем принятому определению того или иного ритма. При этом, если рассматривать ритмы мозга не как просто сумму сигналов в некоторой частотной области, а именно как сигнал некоторого генератора с возможными помехами и искажениями, то очевидно, что альфа-ритм и удвоенный тета-ритм, например, невозможно разделить. Это значит, в свою очередь, что если таковой генератор порождает нелинейный сигнал, вторая гармоника тета-ритма будет давать пик в альфа-диапазоне, хотя никакой отдельной специфической активности, ответственной за ещё один ритм, нет.

Наличие второй гармоники тета-ритма было отмечено ещё в работах [16, 17], вывод делался на основании наличия пика на удвоенной частоте. Такой вывод не является надёжным, поскольку природа пика может быть иной, чем у основной гармоники, то есть это может быть просто независимая компонента, скажем, альфа-ритма, а совпадение частот — случайным. Чтобы проверить, действительно ли компонента на удвоенной частоте неотделима от основной гармоники, нужно диагностировать частотную и фазовую синхронность этих компонент в отношении 2:1. Для этого проще всего использовать известные подходы к диагностике частотной и фазовой синхрони-

зации, хотя именно о синхронизации как о процессе подстройки частот взаимодействующих колебательных частот тут нельзя говорить уверенно, поскольку сигнал может быть порождён (и, собственно, это мы пытаемся доказать) одной системой. В данной работе это проделано для 14 животных — беспородных крыс, у которых регистрировались сигналы из двух симметричных отведений. При этом удалось уверенно установить частотную синхронность в отношении 2:1 между сигналами в основном диапазоне, характерном для тета-ритма, и удвоенном диапазоне: частоты, выделенные из скелетонов, не только совпали с точностью метода, но и изменялись синхронно во времени. В то же время уверенно установить фазовую синхронность удалось только для некоторых животных, только в относительно небольшом числе случаев либо на относительно коротких промежутках.

Отсутствие фазовой синхронности между исследуемыми частотами в биспектре или невозможность её диагностировать там, где выявлена их частотная синхронизация, может быть объяснено следующими несколькими особенностями. Во-первых, животные обитали в ограниченных условиях для того, чтобы проявлять во время активного бодрствования быстрые передвижения в течение длительного времени. Чаще всего такие передвижения, если и проявлялись, то были кратковременными и комбинировались с другими различными движениями. В работе [18] был выявлен тот факт, что гармоники более высокого порядка возникают как функция скорости бега. Следовательно, для более явного проявления фазовой синхронности крыса должна как минимум передвигаться с некоторой скоростью. Эта особенность также может быть связана и с низким уровнем мощности связи основной и удвоенной гармоники в тех случаях, где она фиксировалась на биспектре. Во-вторых, в [18] было указано, что возникновение высших гармоник происходило в большей степени в дорсальной области гиппокампа и в меньшей степени — в промежуточной. В эксперименте, по результатам которого сделан наш анализ, глубинные электроды размещали в гиппокамп без привязки к конкретной области. Результаты гистологического исследования показали, что у различных животных положение этих электродов было несколько разным.

На основании проведённой работы можно утверждать, что обнаруженная ранее вторая гармоника тета-ритма действительно существует и распространена в экспериментальных сигналах обоих полушарий и действительно хорошо связана по частоте с основной гармоникой — их изменения, как правило, синхронизованы. В ряде случаев можно также установить фазовую синхронность между компонентами в основном и удвоенном диапазонах. Это означает, что использование чисто линейных подходов при исследовании и моделировании сигналов тета-ритма может привести к потере информации, содержащейся во второй гармонике, в том числе о связях, а разделение сигнала на диапазоны (ритмы) может привести к смещению сигналов, имеющих разное происхождение.

Список литературы

1. *Buzsáki G.* Rhythms of the Brain. Oxford: Oxford University Press, 2006. 464 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195301069.001.0001.
2. *Başar E., Başar-Eroglu C., Karakaş S., Schürmann M.* Gamma, alpha, delta, and theta oscillations govern cognitive processes // *Int. J. Psychophysiol.* 2001. Vol. 39, no. 2–3. P. 241–248. DOI: 10.1016/s0167-8760(00)00145-8.
3. *Waldhoer M., Bartlett S. E., Whistler J. L.* Opioid receptors // *Annu. Rev. Biochem.* 2004. Vol. 73. P. 953–990. DOI: 10.1146/annurev.biochem.73.011303.073940.
4. *Ноздрачев А. Д., Баранникова И. А., Батуев А. С., Кассиль В. Г., Константинов А. И., Лапчик В. П., Матюшкин Д. П., Пушкарев Ю. П.* Общий курс физиологии человека и животных. Книга первая. Физиология нервной, мышечной и сенсорной систем. М.: Высшая школа, 1991. 509 с.
5. *Léger D., Debellemaniere E., Rabat A., Bayon V., Benchenane K., Chennaoui M.* Slow-Wave

- Sleep: From the Cell to the Clinic // *Sleep Medicine Reviews*. 2018. Vol. 41. P. 113–132. DOI: 10.1016/j.smrv.2018.01.008.
6. *Виноградова О. С.* Гиппокамп и память. М.: Наука, 1975. 332 с.
 7. *Crouzier D., Baubichon D., Bourbon F., Testylier G.* Acetylcholine release, EEG spectral analysis, sleep staging and body temperature studies: a multiparametric approach on freely moving rats // *J. Neurosci. Methods*. 2006. Vol. 151, no. 2. P. 159–167. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2005.07.003.
 8. *Young C. K., McNaughton N.* Coupling of theta oscillations between anterior and posterior midline cortex and with the hippocampus in freely behaving rats // *Cerebral Cortex*. 2009. Vol. 19, no. 1. P. 24–40. DOI: 10.1093/cercor/bhn055.
 9. *Silva A. L., Fry W. H. D., Sweeney C., Trainor B. C.* Effects of photoperiod and experience on aggressive behavior in female California mice // *Behavioural Brain Research*. 2010. Vol. 208, no. 2. P. 528–534. DOI: 10.1016/j.bbr.2009.12.038.
 10. *Green J. D., Arduini A. A.* Hippocampal electrical activity in arousal // *Journal of Neurophysiology*. 1954. Vol. 17, no. 6. P. 533–557. DOI: 10.1152/jn.1954.17.6.533.
 11. *Vanderwolf C. H.* Hippocampal electrical activity and voluntary movement in the rat // *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.* 1969. Vol. 26, no. 4. P. 407–418. DOI: 10.1016/0013-4694(69)90092-3.
 12. *Buzsáki G.* Theta rhythm of navigation: link between path integration and landmark navigation, episodic and semantic memory // *Hippocampus*. 2005. Vol. 15, no. 7. P. 827–840. DOI: 10.1002/hipo.20113.
 13. *Nuñez A., Buño W.* The theta rhythm of the hippocampus: From neuronal and circuit mechanisms to behavior // *Front. Cell. Neurosci.* 2021. Vol. 15. P. 649262. DOI: 10.3389/fncel.2021.649262.
 14. *Maurer A. P., Vanrhoads S. R., Sutherland G. R., Lipa P., McNaughton B. L.* Self-motion and the origin of differential spatial scaling along the septo-temporal axis of the hippocampus // *Hippocampus*. 2005. Vol. 15, no. 7. P. 841–852. DOI: 10.1002/hipo.20114.
 15. *Buzsáki G., Leung L. W., Vanderwolf C. H.* Cellular bases of hippocampal EEG in the behaving rat // *Brain Res. Rev.* 1983. Vol. 6, no. 2. P. 139–171. DOI: 10.1016/0165-0173(83)90037-1.
 16. *Terrazas A., Krause M., Lipa P., Gothard K. M., Barnes C. A., McNaughton B. L.* Self-motion and the hippocampal spatial metric // *J. Neurosci.* 2005. Vol. 25, no. 35. P. 8085–8096. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0693-05.2005.
 17. *Czurkó A., Hirase H., Csicsvari J., Buzsáki G.* Sustained activation of hippocampal pyramidal cells by ‘space clamping’ in a running wheel // *Eur. J. Neurosci.* 2001. Vol. 11, no. 1. P. 344–352. DOI: 10.1046/j.1460-9568.1999.00446.x.
 18. *Sheremet A., Burke S. N., Maurer A. P.* Movement enhances the nonlinearity of hippocampal theta // *J. Neurosci.* 2016. Vol. 36, no. 15. P. 4218–4230. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.3564-15.2016.
 19. *Harper R. M.* Frequency changes in hippocampal electrical activity during movement and tonic immobility // *Physiol. Behav.* 1971. Vol. 7, no. 1. P. 55–58. DOI: 10.1016/0031-9384(71)90235-6.
 20. *Coenen A. M.* Frequency analysis of rat hippocampal electrical activity // *Physiol. Behav.* 1975. Vol. 14, no. 3. P. 391–394. DOI: 10.1016/0031-9384(75)90053-0.
 21. *Leung L. W., Lopes da Silva F. H., Wadman W. J.* Spectral characteristics of the hippocampal EEG in the freely moving rat // *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.* 1982. Vol. 54, no. 2. P. 203–219. DOI: 10.1016/0013-4694(82)90162-6.
 22. *Blekhman I. I., Fradkov A. L., Nijmeijer H., Pogromsky A. Yu.* On self-synchronization and controlled synchronization // *Systems and Control Letters*. 1997. Vol. 31, no. 5. P. 299–305. DOI: 10.1016/S0167-6911(97)00047-9.
 23. *Blekhman I. I.* Frequency synchronization and its possible role in microworld phenomena // *Autom. Remote Control*. 2020. Vol. 81. P. 1405–1412. DOI: 10.1134/S0005117920080044.
 24. *Tang D. Y., Dykstra R., Hamilton M. W., Heckenberg N. R.* Stages of chaotic synchronization // *Chaos*. 1998. Vol. 8, no. 3. P. 697–701. DOI: 10.1063/1.166352.

25. *Suleymanova E. M., Shangaraeva V. A., van Rijn C. M., Vinogradova L. V.* The cannabinoid receptor agonist WIN55.212 reduces consequences of status epilepticus in rats // *Neuroscience*. 2016. Vol. 334. P. 191–200. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2016.08.004.
26. *Dolinina A. Yu., van Rijn C. M., Sysoeva M. V., Sysoev I. V.* Detection of spike-wave discharge restarts in genetic rat model based on frequency dynamics // *Cybernetics and Physics*. 2022. Vol. 11, no. 3. P. 121–130. DOI: 10.35470/2226-4116-2022-11-3-121-130.
27. *Dolinina A. Yu., Sysoeva M. V., van Rijn C. M., Sysoev I. V.* Frequency synchronization reveals that spike-wave discharges in WAG/RIJ rats are significantly nonlinear phenomenon // *Journal of Biological Systems*. 2024. Vol. 32, no. 1. P. 239–250. DOI: 10.1142/S0218339024500098.
28. *Junge L., Parlitz U.* Phase synchronization of coupled Ginzburg–Landau equations // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 62, no. 1. P. 438–441. DOI: 10.1103/PhysRevE.62.438.
29. *Пиковский А. С., Роземблюм Н. Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 493 с.
30. *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elder C. E.* Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients // *Physica D*. 2000. Vol. 144, no. 3–4. P. 358–369. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00087-7.
31. *Mormann F., Andrzejak R. G., Kraskov A., Lehnertz K., Grassberger P.* Measuring synchronization in coupled model systems: A comparison of different approaches // *Physica D*. 2007. Vol. 225, no. 1. P. 29–42. DOI: 10.1016/J.PHYSD.2006.09.039.
32. *Nikias C. L., Raghuvier M. R.* Bispectrum estimation: A digital signal processing framework // *Proceedings of the IEEE*. 1987. Vol. 75, no. 7. P. 869–891. DOI: 10.1109/PROC.1987.13824.
33. *Sigl J. C., Chamoun N. G.* An introduction to bispectral analysis for the electroencephalogram // *J. Clin. Monitor. Comput.* 1994. Vol. 10. P. 392–404. DOI: 10.1007/BF01618421.
34. *Басараб М. А., Волосюк В. К., Горячкин О. В., Зеленский А. А., Кравченко В. Ф., Ксендзук А. В., Кутуза Б. Г., Лукин В. В., Троцкий А. В., Яковлев В. П.* Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях. Москва: ООО Издательская фирма «Физико-математическая литература», 2007. 544 с.
35. *Virtanen P., Gommers R., Oliphant T. E., Haberland M., Reddy T., Cournapeau D., Burovski E., Peterson P., Weckesser W., Bright J., van der Walt S. J., Brett M., Wilson J., Millman K. J., Mayorov N., Nelson A. R. J., Jones E., Kern R., Larson E., Carey C. J., Polat I., Feng Yu., Moore E. W., VanderPlas J., Laxalde D., Perktold J., Cimrman R., Henriksen I., Quintero E. A., Harris C. R., Archibald A. M., Ribeiro A. H., Pedregosa F., van Mulbregt P., SciPy 1.0 Contributors.* SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python // *Nat. Methods*. 2020. Vol. 17. P. 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
36. *Kramis R., Vanderwolf C. H., Bland B. H.* Two types of hippocampal rhythmical slow activity in both the rabbit and the rat: relations to behavior and effects of atropine, diethyl ether, urethane, and pentobarbital // *Exp. Neurol.* 1975. Vol. 49, no. 1. P. 58–85. DOI: 10.1016/0014-4886(75)90195-8.
37. *Stewart M., Fox S. E.* Detection of an atropine-resistant component of the hippocampal theta rhythm in urethane-anesthetized rats // *Brain Res.* 1989. Vol. 500, no. 1–2. P. 55–60. DOI: 10.1016/0006-8993(89)90299-0.
38. *Fuhrmann F., Justus D., Sosulina L., Kaneko H., Beutel T., Friedrichs D., Schoch S., Schwarz M. K., Fuhrmann M., Remy R.* Locomotion, theta oscillations, and the speed-correlated firing of hippocampal neurons are controlled by a medial septal glutamatergic circuit // *Neuron*. 2015. Vol. 86, no. 5. P. 1253–1264. DOI: 10.1016/j.neuron.2015.05.001.
39. *Justus D., Dalügge D., Bothe S., Fuhrmann F., Hannes C., Kaneko H., Friedrichs D., Sosulina L., Schwarz I., Elliott D. A., Schoch S., Bradke F., Schwarz M. K., Remy S.* Glutamatergic synaptic integration of locomotion speed via septoentorhinal projections // *Nat. Neurosci.* 2017. Vol. 20, no. 1. P. 16–19. DOI: 10.1038/nn.4447.
40. *Zhou T. L., Tamura R., Kuriwaki J., Ono T.* Comparison of medial and lateral septal neuron activity

- during performance of spatial tasks in rats // *Hippocampus*. 1999. Vol. 9, no. 3. P. 220–234. DOI: 10.1002/(SICI)1098-1063(1999)9:3<220::AID-HIPO3>3.0.CO;2-E.
41. *Tsanov M.* Speed and oscillations: medial septum integration of attention and navigation // *Front. Syst. Neurosci.* 2017. Vol. 11. P. 67. DOI: 10.3389/fnsys.2017.00067.
42. *Colgin L. L.* Mechanisms and functions of theta rhythms // *Annu. Rev. Neurosci.* 2013. Vol. 36. P. 295–312. DOI: 10.1146/annurev-neuro-062012-170330.

References

1. Buzsáki G. *Rhythms of the Brain*. Oxford: Oxford University Press; 2006. 464 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195301069.001.0001.
2. Başar E, Başar-Eroglu C, Karakaş S, Schürmann M. Gamma, alpha, delta, and theta oscillations govern cognitive processes. *Int. J. Psychophysiol.* 2001;39(2-3):241–248. DOI: 10.1016/s0167-8760(00)00145-8.
3. Waldhoer M, Bartlett SE, Whistler JL. Opioid receptors. *Annu. Rev. Biochem.* 2004;73:953–990. DOI: 10.1146/annurev.biochem.73.011303.073940.
4. Nozdrachev AD, Barannikova IA, Batuev AS, Kassil VG, Konstantinov AI, Lapitskii VP, Matyushkin DP, Pushkarev YuP. *General Course in Human and Animal Physiology. Book One. Physiology of the Nervous, Muscular, and Sensory Systems*. M.: Vysshaya Shkola; 1991. 509 p. (in Russian).
5. Léger D, Debellemanniere E, Rabat A, Bayon V, Benchenane K, Chennaoui M. Slow-Wave Sleep: From the Cell to the Clinic. *Sleep Medicine Reviews*. 2018;41:113–132. DOI: 10.1016/j.smrv.2018.01.008.
6. Vinogradova OS. *The Hippocampus and Memory*. M.: Nauka; 1975. 332 p.
7. Crouzier D, Baubichon D, Bourbon F, Testylier G. Acetylcholine release, EEG spectral analysis, sleep staging and body temperature studies: a multiparametric approach on freely moving rats. *J. Neurosci. Methods*. 2006;151(2):159–167. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2005.07.003.
8. Young CK, McNaughton N. Coupling of theta oscillations between anterior and posterior midline cortex and with the hippocampus in freely behaving rats. *Cerebral Cortex*. 2009;19(1):24–40. DOI: 10.1093/cercor/bhn055.
9. Silva AL, Fry WHD, Sweeney C, Trainor BC. Effects of photoperiod and experience on aggressive behavior in female California mice. *Behavioural Brain Research*. 2010;208(2):528–534. DOI: 10.1016/j.bbr.2009.12.038.
10. Green JD, Arduini AA. Hippocampal electrical activity in arousal. *Journal of Neurophysiology*. 1954;17(6):533–557. DOI: 10.1152/jn.1954.17.6.533.
11. Vanderwolf CH. Hippocampal electrical activity and voluntary movement in the rat. *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.* 1969;26(4):407–418. DOI: 10.1016/0013-4694(69)90092-3.
12. Buzsáki G. Theta rhythm of navigation: link between path integration and landmark navigation, episodic and semantic memory. *Hippocampus*. 2005;15(7):827–840. DOI: 10.1002/hipo.20113.
13. Nuñez A, Buño W. The theta rhythm of the hippocampus: from neuronal and circuit mechanisms to behavior. *Front. Cell. Neurosci.* 2021;15:649262. DOI: 10.3389/fncel.2021.649262.
14. Maurer AP, Vanrhoads SR, Sutherland GR, Lipa P, McNaughton BL. Self-motion and the origin of differential spatial scaling along the septo-temporal axis of the hippocampus. *Hippocampus*. 2005;15(7):841–852. DOI: 10.1002/hipo.20114.
15. Buzsáki G, Leung LW, Vanderwolf CH. Cellular bases of hippocampal EEG in the behaving rat. *Brain Res. Rev.* 1983;6(2):139–171. DOI: 10.1016/0165-0173(83)90037-1.
16. Terrazas A, Krause M, Lipa P, Gothard KM, Barnes CA, McNaughton BL. Self-motion and the hippocampal spatial metric. *J. Neurosci.* 2005;25(35):8085–8096. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0693-05.2005.

17. Czurkó A, Hirase H, Csicsvari J, Buzsáki G. Sustained activation of hippocampal pyramidal cells by ‘space clamping’ in a running wheel. *Eur. J. Neurosci.* 2001;11(1):344–352. DOI: 10.1046/j.1460-9568.1999.00446.x.
18. Sheremet A, Burke SN, Maurer AP. Movement enhances the nonlinearity of hippocampal theta. *J. Neurosci.* 2016;36(15):4218–4230. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.3564-15.2016.
19. Harper RM. Frequency changes in hippocampal electrical activity during movement and tonic immobility. *Physiol. Behav.* 1971;7(1):55–58. DOI: 10.1016/0031-9384(71)90235-6.
20. Coenen AM. Frequency analysis of rat hippocampal electrical activity. *Physiol. Behav.* 1975;14(3):391–394. DOI: 10.1016/0031-9384(75)90053-0.
21. Leung LW, Lopes da Silva FH, Wadman WJ. Spectral characteristics of the hippocampal EEG in the freely moving rat. *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.* 1982;54(2):203–219. DOI: 10.1016/0013-4694(82)90162-6.
22. Blekhman II, Fradkov AL, Nijmeijer H, Pogromsky AYU. On self-synchronization and controlled synchronization. *Systems and Control Letters.* 1997;31(5):299–305. DOI: 10.1016/S0167-6911(97)00047-9.
23. Blekhman II. Frequency synchronization and its possible role in microworld phenomena. *Autom. Remote Control.* 2020;81:1405–1412. DOI: 10.1134/S0005117920080044.
24. Tang DY, Dykstra R, Hamilton MW, Heckenberg NR. Stages of chaotic synchronization. *Chaos.* 1998;8(3):697–701. DOI: 10.1063/1.166352.
25. Suleymanova EM, Shangaraeva VA, van Rijn CM, Vinogradova LV. The cannabinoid receptor agonist WIN55.212 reduces consequences of status epilepticus in rats. *Neuroscience.* 2016;334:191–200. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2016.08.004.
26. Dolinina AYU, van Rijn CM, Sysoeva MV, Sysoev IV. Detection of spike-wave discharge restarts in genetic rat model based on frequency dynamics. *Cybernetics and Physics.* 2022;11(3):121–130. DOI: 10.35470/2226-4116-2022-11-3-121-130.
27. Dolinina AYU, Sysoeva MV, van Rijn CM, Sysoev IV. Frequency synchronization reveals that spike-wave discharges in WAG/RIJ rats are significantly nonlinear phenomenon. *Journal of Biological Systems.* 2024;32(1):239–250. DOI: 10.1142/S0218339024500098.
28. Junge L, Parlitz U. Phase synchronization of coupled Ginzburg–Landau equations. *Phys Rev E.* 2000;62(1):438–441. DOI: 10.1103/PhysRevE.62.438.
29. Picovsky A, Roseblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences.* Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 411 p.
30. Mormann F, Lehnertz K, David P, Elder CE. Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients. *Physica D.* 2000;144(3–4):358–369. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00087-7.
31. Mormann F, Andrzejak RG, Kraskov A, Lehnertz K, Grassberger P. Measuring synchronization in coupled model systems: A comparison of different approaches. *Physica D.* 2007;225(1):29–42. DOI: 10.1016/J.PHYSD.2006.09.039.
32. Nikiyas CL, Raghuvver MR. Bispectrum estimation: A digital signal processing framework. *Proceedings of the IEEE.* 1987;75(7):869–891. DOI: 10.1109/PROC.1987.13824.
33. Sigl JC, Chamoun NG. An introduction to bispectral analysis for the electroencephalogram. *J. Clin. Monitor. Comput.* 1994;10:392–404. DOI: 10.1007/BF01618421.
34. Basarab MA, Volosyuk VK, Goryachkin OV, Zelenskii AA, Kravchenko VF, Ksendzuc AV, Kutuza BG, Lukin VV, Trotskii AV, Yakovlev VP. *Digital Signal and Image Processing in Radiophysical Applications.* M.: Fizmatlit; 2007. 544 p. (in Russian).
35. Virtanen P, Gommers R, Oliphant TE, Haberland M, Reddy T, Cournapeau D, Burovski E, Peterson P, Weckesser W, Bright J, van der Walt SJ, Brett M, Wilson J, Millman KJ, Mayorov N, Nelson ARJ, Jones E, Kern R, Larson E, Carey CJ, Polat I, Feng Yu, Moore EW,

- VanderPlas J, Laxalde D, Perktold J, Cimrman R, Henriksen I, Quintero EA, Harris CR, Archibald AM, Ribeiro AH, Pedregosa F, van Mulbregt P, SciPy 1.0 Contributors. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nat. Methods*. 2020;17:261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
36. Kramis R, Vanderwolf CH, Bland BH. Two types of hippocampal rhythmical slow activity in both the rabbit and the rat: relations to behavior and effects of atropine, diethyl ether, urethane, and pentobarbital. *Exp. Neurol.* 1975;49(1):58–85. DOI: 10.1016/0014-4886(75)90195-8.
 37. Stewart M, Fox SE. Detection of an atropine-resistant component of the hippocampal theta rhythm in urethane-anesthetized rats. *Brain Res.* 1989;500(1–2):55–60. DOI: 10.1016/0006-8993(89)90299-0.
 38. Fuhrmann F, Justus D, Sosulina L, Kaneko H, Beutel T, Friedrichs D, Schoch S, Schwarz MK, Fuhrmann M, Remy R. Locomotion, theta oscillations, and the speed-correlated firing of hippocampal neurons are controlled by a medial septal glutamatergic circuit. *Neuron*. 2015; 86(5):1253–1264. DOI: 10.1016/j.neuron.2015.05.001.
 39. Justus D, Dalügge D, Bothe S, Fuhrmann F, Hannes C, Kaneko H, Friedrichs D, Sosulina L, Schwarz I, Elliott DA, Schoch S, Bradke F, Schwarz MK, Remy S. Glutamatergic synaptic integration of locomotion speed via septoentorhinal projections. *Nat. Neurosci.* 2017;20(1):16–19. DOI: 10.1038/nn.4447.
 40. Zhou TL, Tamura R, Kuriwaki J, Ono T. Comparison of medial and lateral septal neuron activity during performance of spatial tasks in rats. *Hippocampus*. 1999;9(3):220–234. DOI: 10.1002/(SICI)1098-1063(1999)9:3<220::AID-HIPO3>3.0.CO;2-E.
 41. Tsanov M. Speed and oscillations: medial septum integration of attention and navigation. *Front. Syst. Neurosci.* 2017;11:67. DOI: 10.3389/fnsys.2017.00067.
 42. Colgin LL. Mechanisms and functions of theta rhythms. *Annu. Rev. Neurosci.* 2013;36:295–312. DOI: 10.1146/annurev-neuro-062012-170330.



Долнина Анастасия Юрьевна — родилась в с. Соловьевск Амурской области (1999). Окончила бакалавриат факультета нано- и биомедицинских технологий СГУ (2021) и магистратуру Института физики СГУ (2023). Аспирант 2 года обучения по направлению «Физические науки» (СГУ). Младший научный сотрудник СПбПУ. Научные интересы — анализ сигналов биологической природы, моделирование биологических процессов, нейронаука. Автор 2 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
 E-mail: dolinina13nastya@yandex.ru
 ORCID: 0000-0001-6608-1534
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1120287



Сулейманова Елена Мирзануровна — родилась в г. Елизово Камчатской области (1987). Окончила с отличием биологический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова по специальности «Физиология» (2009). Кандидат биологических наук (2012, МГУ им. М. В. Ломоносова). Старший научный сотрудник лаборатории молекулярной нейробиологии Института высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН. Научные интересы — нейробиология, экспериментальные модели эпилепсии. Автор 15 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 117485 Москва, ул. Бутлерова, 5А
 Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН
 E-mail: e.m.suleymanova@gmail.com
 ORCID: 0000-0001-5457-0584
 AuthorID (eLibrary.Ru): 879236

Корнилов Максим Вячеславович — родился в Саратове (1988). Окончил механико-математический факультет (2009, бакалавр математики) и факультет нано- и биомедицинских технологий (2011, магистр техники и технологии) Саратовского государственного университета. Кандидат физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2015, СГУ). Доцент кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ имени Н. Г. Чернышевского, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории «Фундаментальные когнитивные исследования» СПбПУ. Научные интересы — анализ временных рядов, математическое моделирование биологических процессов, автоматическое распознавание изображений, компьютерное зрение. Автор 14 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.



Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
E-mail: kornilovmv@gmail.com
ORCID: 0000-0003-1634-9007
AuthorID (eLibrary.Ru): 681980

Сысоева Марина Вячеславовна — родилась в Саратове (1987). Окончила бакалавриат (2009) и магистратуру (2011) Саратовского государственного университета по направлению «Биомедицинская инженерия». Доктор физико-математических наук по специальностям «Радиофизика» и «Биофизика» (2023, СГТУ). Доцент по специальности «Радиофизика» (2021, СГТУ). Профессор кафедры физики СПбПУ. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, радиотехническое моделирование. Автор 49 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.



Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
E-mail: bobrichkek@mail.ru
ORCID: 0000-0003-4228-9124
AuthorID (eLibrary.Ru): 651344

Сысоев Илья Вячеславович — родился в Саратове (1983). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по специальности «Физика» (2004). Доктор физико-математических наук (2019, ИРЭ) по специальности «Радиофизика», профессор по специальности «Радиофизика» (2024, СГУ). Заведующий кафедрой высшей математики СПбПУ, профессор кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ, ведущий научный сотрудник ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН, ведущий научный сотрудник ИВНД и НФ РАН. Научные интересы — исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор более 100 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.



Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
E-mail: ivssci@gmail.com
ORCID: 0000-0002-9203-5504
AuthorID (eLibrary.Ru): 128457



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6)

Научная статья
УДК 004.032.26, 530.152.2

DOI: 10.18500/0869-6632-003177
EDN: VYXWAN

Влияние внутреннего шума на точность работы свёрточной нейронной сети

Н. И. Семенова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: ✉semenovani@sgu.ru

*Поступила в редакцию 28.03.2025, принята к публикации 26.05.2025,
опубликована онлайн 30.05.2025, опубликована 28.11.2025*

Аннотация. Цель настоящего исследования — установить особенности распространения и накопления шумов в свёрточной нейронной сети. В данной статье рассматривается, как меняется точность работы обученной свёрточной сети в зависимости от типа шумового воздействия и его интенсивности. **Методы.** В качестве источников шумов рассматриваются источники белого гауссовского шума. В зависимости от способа воздействия шума на искусственные нейроны использовались аддитивное и мультипликативное шумовое воздействие, а в зависимости от влияния на слой нейронов рассматривалось коррелированное и некоррелированное воздействие. **Результаты.** Было показано, что аддитивные шумы (как коррелированный, так и некоррелированный) в сетях со свёрточным слоем накапливаются сильнее, чем в сети без него. Зависимости точности работы сети от интенсивности мультипликативного коррелированного шума выглядят одинаково для сетей со свёрточным слоем и без, а аналогичные зависимости для мультипликативного некоррелированного шума выглядят гораздо лучше для сети со свёрточным слоем. Также были рассмотрены слои дискретизации с MaxPooling и MeanPooling. Их использование позволяет существенно поднять точность при наличии аддитивного шума в свёрточном слое. Спадание точности при увеличении интенсивности мультипликативного коррелированного шума практически одинаковое для сетей со слоем субдискретизации и без него. Что же касается некоррелированного мультипликативного шума, то сети с MaxPooling менее устойчивы к его воздействию. **Заключение.** Показано, что аддитивный шум сильно ухудшает работу сети при наличии свёрточного слоя, однако его негативное воздействие можно уменьшить при наличии слоя субдискретизации сразу после слоя свёртки. Для мультипликативного шума выводы не такие однозначные. В большинстве случаев его влияние одинаково независимо от наличия слоев свёртки и субдискретизации. Однако использование MaxPooling в слое субдискретизации делает сеть менее устойчивой к мультипликативному некоррелированному шумовому воздействию.

Ключевые слова: нейронные сети, свёрточные нейронные сети, шумовое воздействие, белый шум, уменьшение шума.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-72-01094, <https://rscf.ru/project/23-72-01094/>.

Для цитирования: Семенова Н. И. Влияние внутреннего шума на точность работы свёрточной нейронной сети // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 6. С. 898–916. DOI: 10.18500/0869-6632-003177. EDN: VYXWAN

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

The impact of internal noise on the performance of convolutional neural network

N. I. Semenova

Saratov State University, Russia
E-mail: ✉semenovani@info.sgu.ru

Received 28.03.2025, accepted 26.05.2025,
available online 30.05.2025, published 28.11.2025

Abstract. *Purpose.* This study aims to establish the characteristics of noise propagation and accumulation in convolutional neural networks. The article investigates how the accuracy of a trained convolutional network varies depending on the type and intensity of noise exposure. *Methods.* White Gaussian noise sources were used as the basis for noise exposure. Two types of noise exposure were applied to artificial neurons: additive and multiplicative. Additionally, the effects of correlated and uncorrelated noise on the layers of neurons were examined. *Results.* The findings indicate that additive noise (both correlated and uncorrelated) accumulates more significantly in networks with convolutional layers compared to those without. The relationship between network accuracy and the intensity of multiplicative correlated noise is similar for both types of networks. However, the impact of multiplicative uncorrelated noise is more favorable for networks with convolutional layers. The study also considered pooling layers, specifically MaxPooling and MeanPooling, which significantly enhance accuracy in the presence of additive noise within the convolutional layer. The decline in accuracy due to increasing intensity of multiplicative correlated noise is nearly identical for networks with and without pooling layers. Conversely, networks employing MaxPooling demonstrate reduced resilience to uncorrelated multiplicative noise. *Conclusion.* The study demonstrates that additive noise severely degrades network performance when a convolutional layer is present, though this negative effect can be mitigated by including a pooling layer immediately following the convolutional layer. In contrast, the effects of multiplicative noise are less clear-cut. In most cases, its impact remains consistent regardless of the presence of convolution and pooling layers. However, the use of MaxPooling in the pooling layer may compromise the network's robustness against multiplicative uncorrelated noise.

Keywords: neural networks, convolutional neural networks, noise influence, white noise, noise reduction.

Acknowledgements. The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-72-01094, <https://rscf.ru/project/23-72-01094/>.

For citation: Semenova NI. The impact of internal noise on the performance of convolutional neural network. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(6):898–916. DOI: 10.18500/0869-6632-003177

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Искусственные нейронные сети (ИНС) за последние несколько лет стали мощным инструментом, позволяющим решать задачи, которые ранее считались неразрешимыми без привлечения естественного интеллекта [1]. На данный момент нейронные сети активно применяются в системах диагностики, для распознавания образов [2, 3], решения задач классификации, распознавания речи [4], предсказания климатических явлений [5] и многого другого. Изначально общая структура ИНС была вдохновлена работой человеческого мозга, но в современных ИНС свойства нейронов и особенности связи между ними зависят от решаемой задачи и довольно далеки от изначального биологического примера.

С точки зрения использования ИНС их моделирование и проведение вычислений на компьютерах или вычислительных кластерах является весьма ресурсоемкой задачей. Согласно статистике компании OpenAI [6], за последние 20 лет рост производительности ИНС реализуется гораздо быстрее, чем ранее. Если до 2012 рост производительности (в Petaflop/s-days) происходил с удвоением каждые 2 года, то после 2012 года период удвоения составляет 3–4 месяца.

С точки зрения увеличения мощности современного компьютерного оборудования рост не такой стремительный. Таким образом, моделирование нейронной сети на цифровом оборудовании является узким горлышком при масштабировании сети, скорости получения, обработке информации и энергоэффективности [7, 8]. В последние годы все больше исследователей в области нейронных сетей заинтересованы в создании аппаратных нейронных сетей [9], в которых нейроны и связь между ними представляют собой реальное устройство, способное обучаться и решать задачи. В зарубежной литературе можно встретить названия “analog neural network” и “hardware neural network”. В рамках этого направления нейронные сети не моделируются на компьютере, а представляют собой реальное устройство, в котором сами нейроны сети и связь между ними реализованы на физическом уровне, что позволяет получить существенный прирост в скорости и энергоэффективности [10, 11]. В рамках этого направления наблюдается экспоненциальный рост числа работ с аппаратными реализациями ИНС. Наибольшую эффективность на данный момент показывают аппаратные ИНС, в основе которых лежат лазеры [12], мемристоры [13], спин-трансферные осцилляторы [14]. Связь между нейронами в оптических реализациях ИНС основывается на принципах голографии [15], дифракции [16, 17], интегрированных сетей модуляторов Маха–Цендера [18], спектрального уплотнения каналов [19], оптических связей, реализованных при помощи 3D-принтера [20–22].

В аппаратных ИНС исчезает проблема обращения к памяти и математических операций над большим количеством данных, так как каждый нейрон соответствует аппаратному нелинейному компоненту, а каждое соединение — физическому каналу связи. Это дает существенный прирост в скорости обработки информации и энергоэффективности, однако аппаратные ИНС подвержены внутренним шумам, исходящим из составляющих компонент таких устройств. В случае цифровой компьютерной реализации ИНС шум может попасть в систему исключительно с входным сигналом, тогда как в аппаратной ИНС существует множество внутренних источников шума с различными свойствами. Поэтому исследование влияния различных шумов на работу таких сетей, а также поиск топологий, при которых сеть сама сможет подавлять внутренние шумы, является актуальной и важной задачей. В предыдущих работах мы рассматривали влияние внутренних шумов на работу обученных глубоких сетей прямого распространения [23] и рекуррентных сетей [24], а также были предложены универсальные стратегии уменьшения внутренних шумов сети [25, 26].

В данной статье рассматривается еще один принципиально важный тип ИНС — свёрточные нейронные сети. По аналогии с нашими предыдущими статьями будут рассмотрены аддитивный и мультипликативный шумы в зависимости от воздействия на конкретные нейроны, а также коррелированный и некоррелированный шумы в зависимости от влияния на слой сети, состоящий из нейронов. Рассматриваемые типы шумового воздействия были вдохновлены аппаратной сетью из [16], реализованной в оптическом эксперименте. При анализе выходного сигнала этой сети было получено, что внутренние шумы в установке, как правило, бывают аддитивными и мультипликативными, и вместе с тем коррелированными и некоррелированными. При моделировании можно использовать источники белого гауссовского шума с нулевым средним. Также были установлены интенсивности шумовых воздействий, характерных для этой экспериментальной установки [16, 27]. Однако в данной статье будут рассматриваться разные интенсивности шума, чтобы полученные результаты охватывали не одну отдельно взятую аппаратную ИНС, а могли быть адаптированы и для других аппаратных реализаций ИНС.

Свёрточные нейронные сети (в англоязычной литературе “convolutional neural networks”) являются особым подвидом глубоких нейронных сетей. Работа свёрточной нейронной сети обычно интерпретируется как переход от конкретных особенностей изображения к более абстрактным деталям и далее к ещё более абстрактным деталям вплоть до выделения понятий высокого уровня. При этом в процессе обучения сеть самонастраивается и вырабатывает сама необходимую

иерархию абстрактных признаков (последовательности карт признаков), фильтруя маловажные детали и выделяя существенное. С точки зрения построения сети это выливается в чередование свёрточных слоев (convolution layers) и слоев субдискретизации (pooling layers). Подобные особенности функционирования делают свёрточные сети весьма эффективными в распознавании изображений, и их часто используют во многих областях, включая компьютерное зрение и обработку естественного языка [28]. Особый тип связи и наличие слоев с чередующейся топологией позволяет взглянуть на вопросы шумового воздействия и накопления шума с принципиально новой стороны.

1. Исследуемые системы

1.1. Свёрточные сети. В данной статье рассматривается влияние шума на свёрточную нейронную сеть (СНС). Для того чтобы исключить сложное влияние статистических характеристик матриц связи, будет рассмотрена упрощенная обученная сеть, состоящая из основных компонент, присущих именно свёрточным сетям. Ранее нами были рассмотрены глубокие сети прямого распространения [23], где были сделаны выводы о распространении шума исходя из дисперсии шумового воздействия и статистических свойств матриц связи в обученной сети. В данной статье мы будем отталкиваться от сделанных ранее выводов, но их необходимо скорректировать исходя из особенностей слоев свёртки и субдискретизации, которые используются в СНС.

Для обучения сети будет использоваться довольно стандартная задача распознавания рукописных цифр из базы данных MNIST [29]. В этой базе данных содержатся 70000 изображений в черно-белом формате размером 28×28 пикселей. Часть этих изображений используется для обучения сети (60000), а оставшаяся часть — для тестирования. При работе с базой данных MNIST определенные условия накладываются на входной и выходной слой сети. Входной слой должен быть составлен таким образом, чтобы каждый входной нейрон принимал на вход значение соответствующего пикселя изображения. Так как изображения имеют размер 28×28 пикселей, то входной слой должен состоять из 784 нейронов. Для удобства работы значения, полученные из входного изображения, будут отнормированы на 255, чтобы входные значения сети принадлежали диапазону $[0, 1]$.

Нейронная сеть должна быть обучена для решения задачи классификации изображений, то есть каждое входное изображение необходимо отнести к одному из 10 возможных классов (цифры 0–9). Тогда выходной слой должен состоять из 10 нейронов, причем каждый выходной нейрон отвечает за свою цифру. Выходным сигналом сети считается не сам выходной сигнал выходных нейронов, а то, какой именно выходной нейрон имеет максимальное значение. Например, если на вход сети передается изображение с цифрой 0, тогда максимальным значением должен обладать 0-й выходной нейрон. Такая операция называется softmax.

В последующих разделах в СНС будет добавляться шум, а её структура будет постепенно усложняться введением новых компонент (рис. 1). Сначала будет рассмотрено влияние шума на максимально упрощенную сеть, в которой нет скрытых слоев (рис. 1, *a*) и которая состоит из входного и выходного полносвязных слоев. Шум будет вводиться в последний выходной слой, чтобы было понятно, как сильно влияет шум на точность работы сети, когда после слоя с шумовым воздействием нет никаких дополнительных слоев, так как матрицы связи между слоями могут оказывать дополнительное влияние на накопление или уменьшение внутренних шумов [23].

На следующем этапе (рис. 1, *b*) будет рассмотрена сеть, в которой добавлен слой свёртки (в англоязычной литературе “convolutional layer”). В этой сети шум уже будет добавляться в слой свёртки. Смысл слоя свёртки заключается в фильтрации изображения. Слой свёртки включает в себя фильтр с ядром определенного размера. В данной работе мы рассмотрим размеры 3×3 и 5×5 . По сути, свёрточный слой представляет собой матрицу или несколько матриц

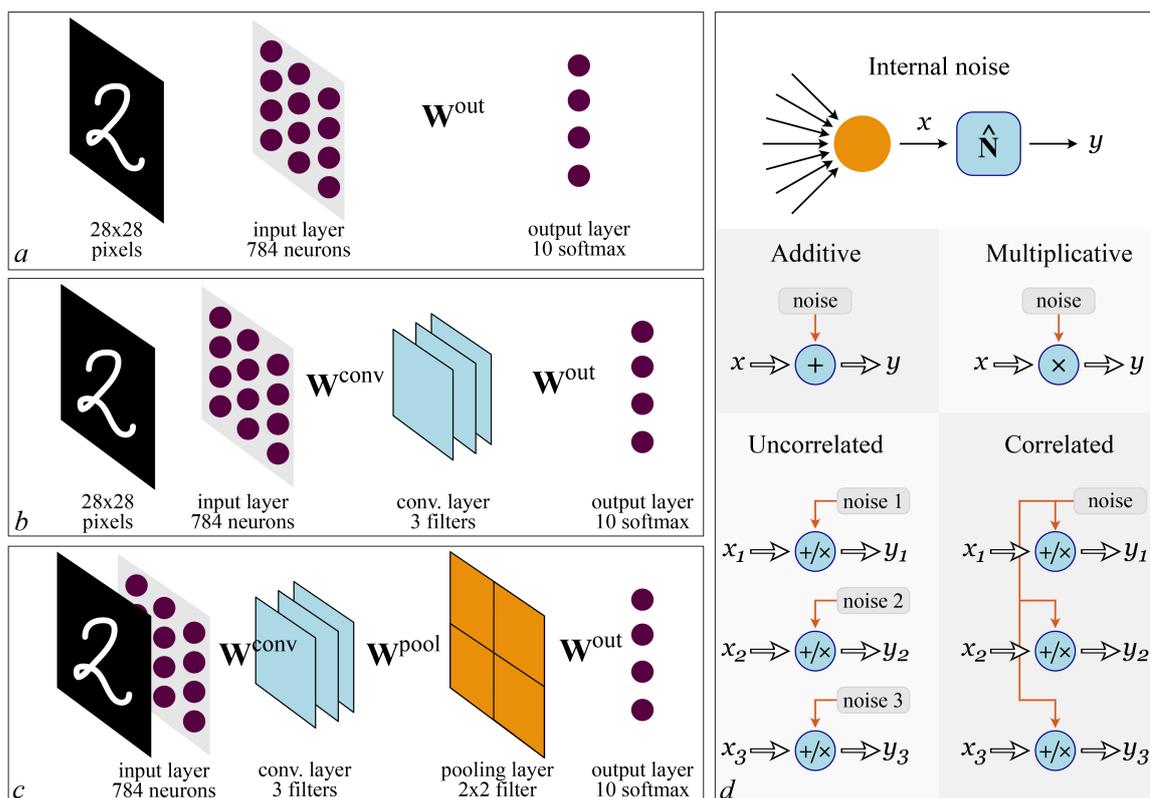


Рис. 1. Схематичное представление рассматриваемых сетей (a–c) и способов введения шумового воздействия (d) (цвет онлайн)

Fig. 1. Schematic representation of considered neural networks (a–c) and methods of introducing the noise exposure (d) (color online)

(если фильтров несколько) определенного размера, значения которой подбираются в процессе обучения. Применение фильтра размером 3×3 на этапе свёртки заключается в следующем. Например, из входного слоя мы получили матрицу значений, состоящую 784 значений. Для удобства интерпретации расположим их так, чтобы они имели вид матрицы размером 28×28 . Фильтр будет применен к левому верхнему углу матрицы, захватывая 9 элементов, далее происходит поэлементное перемножение этих 9 элементов матрицы и элементов фильтра, и их суммарное значение записывается уже в новую матрицу. Затем фильтр сдвигается на один столбец вправо, и процедура повторяется, пока фильтр не дойдет до конца строки матрицы, после этого фильтр сдвигается на одну строку вниз, и вся процедура снова повторяется. В конце после применения фильтра мы получаем новую матрицу, но ее размер уже составляет 26×26 (то есть 676 нейронов понадобится для обработки этих значений). Если фильтр имеет размер 5×5 , тогда несложно получить, что входное изображение сжимается до 24×24 (соответствует 576 нейронам).

На этапе свёртки таких фильтров может быть несколько. Если фильтр 3×3 всего один, то на этапе свёртки задействовано 676 нейронов, и выходная матрица \mathbf{W}^{out} , связывающая скрытый слой с выходным слоем, должна иметь размер 676×10 . Если используется два фильтра, тогда нейронов становится 1352, и размер \mathbf{W}^{out} составляет 1352×10 . Использование 5 фильтров приводит уже к $676 * 5 = 3380$ нейронам и так далее. Для топологии сети, приведенной на рис. 1, b, шум будет вводиться в нейроны, полученные в результате применения слоя свёртки.

Также важно отметить, что применение свёртки можно представить в матричном виде, характерном для двух полносвязных слоев, \mathbf{W}^{conv} . Процедура представления свёрточного слоя

в виде двух полносвязных слоев и матричного умножения детально описана в книге [30] и заключается в особом заполнении матрицы \mathbf{W}^{conv} значениями из фильтров свёртки. Применяемые фильтры можно представить в виде трехмерной матрицы \mathbf{K} размерностью $m \times n \times n$, где m — число фильтров размером $n \times n$. Тогда для входных изображений размером $N \times N$ после применения свёртки получается m новых изображений размером $(N - n + 1) \times (N - n + 1)$, а элементы двумерной матрицы \mathbf{W}^{conv} определяются как

$$W_{i_1 \cdot N + j_1, k \cdot (N - n + 1)^2 + i_2 \cdot (N - n + 1) + j_2}^{\text{conv}} = K_{k, i_1 - i_2, j_1 - j_2}, \quad (1)$$

если элементы матрицы \mathbf{K} существуют. В остальных случаях элементы матрицы \mathbf{W}^{conv} задаются равными нулю. Уравнение (1) задает связь между элементами (i_1, j_1) исходного изображения $N \times N$ с элементами нового изображения (i_2, j_2) размером $(N - n + 1) \times (N - n + 1)$ после применения k -го фильтра.

Слой субдискретизации (иначе подвыборки или пулинга, “pooling” в англоязычной литературе) применяется для уменьшения размерности, которая создается после свёртки (рис. 1, с). Роль субдискретизации заключается в выделении входного значения одного нейрона из некоторой группы нейронов. Преобразование имеет вид непересекающихся прямоугольников или квадратов одинакового размера, каждый из которых захватывает определенную группу нейронов для последующей трансформации их значений в одно. Наиболее часто применяется выделение максимального значения (MaxPooling) или среднего значения (MeanPooling). Субдискретизация интерпретируется так: если на предыдущей операции свёртки уже были выявлены некоторые признаки, то для дальнейшей обработки настолько подробное изображение уже не нужно, и оно уплотняется до менее подробного. Например, после применения свёртки с одним фильтром 3×3 образовалось 676 нейронов, которые можно расположить в виде квадрата 26×26 . Применение субдискретизации с фильтром 2×2 приводит к тому, что матрица значений 26×26 разбивается на ячейки размером 2×2 . Из каждой ячейки выбирается только одно значение (максимум или среднее), и, таким образом, размерность матрицы уменьшается до 13×13 , что соответствует 169 нейронам, тогда размер выходной матрицы \mathbf{W}^{out} уже становится 169×10 . На рис. 1, с вся процедура субдискретизации представлена в виде матрицы связи \mathbf{W}^{pool} , которая в случае фильтра 2×2 и использования MeanPooling заполняется значениями $1/4$. В случае MaxPooling ситуация немного сложнее и требует использования функции наподобие softmax. Подробно этот переход описан в книге [30].

Для всех типов сетей обучение проводилось при помощи свободно распространяемой библиотеки Keras [31] на языке программирования Python, используя оптимизатор “adam” и категориальную кросс-энтропию (categorical cross-entropy). Суть обучения сети заключается в корректном определении принадлежности каждого изображения из базы данных MNIST к одному из 10 возможных классов (10 цифр). Категориальная кросс-энтропия — это функция потерь, которая используется в задачах многоклассовой классификации:

$$L(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = - \sum_{i=1}^{Cl} y_i \log(\hat{y}_i), \quad (2)$$

где \mathbf{y} — истинное распределение вероятностей на выходе сети, $\hat{\mathbf{y}}$ — предсказанное распределение вероятностей, Cl — общее количество классов. В данном случае их 10. Adam (Adaptive Moment Estimation) — это широко распространенный алгоритм оптимизации градиентного спуска, который активно используется в глубоком обучении. Он предназначен для эффективного обновления весов сети в процессе обучения путем адаптации скорости обучения для каждого параметра в отдельности. Благодаря этому алгоритму удается в несколько раз ускорить обучения и использовать

меньшее количество эпох. Обучение проводилось в течение 100 эпох. Ниже приведена часть кода, которая задает свёрточную сеть с пятью фильтрами размером 3×3 в свёрточном слое и фильтром 2×2 MaxPooling в слое субдискретизации.

```
kernel_size=3
filters_number = 5
# Задание структуры нейросети
model = tf.keras.models.Sequential([
    tf.keras.layers.Input(shape=(28, 28, 1)),
    tf.keras.layers.Conv2D(filters_number, kernel_size=kernel_size,
        activation=None, use_bias=False),
    tf.keras.layers.MaxPooling2D((2, 2)),
    tf.keras.layers.Flatten(),
    tf.keras.layers.Dense(10, activation='softmax', use_bias=False)
])
# Компиляция и обучение сети
model.compile(optimizer='adam',
    loss='sparse_categorical_crossentropy',
    metrics=['accuracy'])
model.fit(x_train, y_train, epochs=100)
```

1.2. Типы внутренних шумов. Свойства и особенности введения внутренних шумовых воздействий аналогично нашим предыдущим работам [23, 25]. Исходные типы внутренних шумов, их интенсивности и методы введения были получены из аппаратной реализации ИНС в оптическом эксперименте, предложенном в работе [16]. Но здесь будут рассмотрены различные интенсивности шума, чтобы сделать результаты более общими и применимыми к другим аппаратным сетям.

Схематично все рассматриваемые типы шумов приведены на рис. 1, *d*. В зависимости от того, как шум влияет на сигнал одного отдельно взятого нейрона, будут рассмотрены аддитивный и мультипликативный шум. Будем считать, что каждый нейрон обладает своим свободным от шума выходным сигналом x_i , в который включено влияние матриц связи, всевозможные дополнительные операции типа свёртки или субдискретизации. Затем в этот сигнал добавляется шумовое воздействие:

$$y_i(t) = x_i(t) \cdot \left(1 + \sqrt{2D_M} \xi_M(t, i)\right) + \sqrt{2D_A} \xi_A(t, i). \quad (3)$$

Аддитивный шум ξ_A добавляется к выходному незашумленному сигналу, а мультипликативный шум (с индексами “M”) умножается на него. Обозначение ξ соответствует белому гауссовскому шуму с нулевым средним значением и дисперсией, равной единице. Его множитель $\sqrt{2D}$ определяет общую дисперсию шумового воздействия, равную $2D$. Величину D часто называют интенсивностью шумового воздействия. В уравнении (3) индекс i соответствует номеру нейрона в пределах одного слоя, а t — номеру входного изображения.

В экспериментальных реализациях нейронных сетей часто имеют место шумы, которые являются одинаковыми для групп нейронов. Поэтому наряду с классификацией шумов в зависимости от воздействия на отдельно взятый нейрон необходимо еще ввести классификацию шумового воздействия в зависимости от влияния на группу нейронов (в этой статье это один слой). Шумовое воздействие, значения которого для каждого нового входного изображения разные, но они одинаковые для всех нейронов в пределах одного слоя, мы будем называть коррелированным (correlated, $\sqrt{2D_A^C} \xi_A^C(t)$, $\sqrt{2D_M^C} \xi_M^C(t)$), а шумовое воздействие, значения которого разные для этих нейронов, будем называть некоррелированным воздействием (uncorrelated, $\sqrt{2D_A^U} \xi_A^U(t, i)$, $\sqrt{2D_M^U} \xi_M^U(t, i)$).

Таким образом, всего в статье будет рассматриваться четыре типа шумового воздействия:

- аддитивный некоррелированный шум: $y_i(t) = x_i(t) + \sqrt{2D_A^U \xi_A^U(t, i)}$;
- аддитивный коррелированный шум: $y_i(t) = x_i(t) + \sqrt{2D_A^C \xi_A^C(t)}$;
- мультипликативный некоррелированный шум: $y_i(t) = x_i(t) \cdot (1 + \sqrt{2D_M^U \xi_M^U(t, i)})$;
- мультипликативный коррелированный шум: $y_i(t) = x_i(t) \cdot (1 + \sqrt{2D_M^C \xi_M^C(t)})$;

Таким образом, оператор, отвечающий за общее шумовое воздействие, \hat{N} может быть введен следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= \hat{N} \vec{x}(t), \\ y_i(t) &= x_i(t) \cdot (1 + \sqrt{2D_M^C \xi_M^C(t)}) (1 + \sqrt{2D_M^U \xi_M^U(t, i)}) + \sqrt{2D_A^C \xi_A^C(t)} + \sqrt{2D_A^U \xi_A^U(t, i)}. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом получается, что шум добавляется к выходному сигналу нейронов, поэтому функция активации при этом не играет никакой роли. Распространение шума будет зависеть от следующей за зашумленным слоем матрицы связи. Аддитивный шум при этом можно интерпретировать как шум, исходящий из нейрона, а мультипликативный — как шум, встроенный в связь между зашумленным слоем и следующим.

В дальнейшем оценка влияния шумового воздействия будет проводиться с точки зрения изменения точности распознавания изображений в зависимости от интенсивности шума. Так как рассматриваются естественные шумы, характерные для физических систем, оценка влияния шума будет проводиться следующим образом. Один и тот же входной сигнал повторяется несколько раз (в данной статье 100 раз), затем для каждого повторения вычисляется точность работы зашумленной сети, а затем считается средняя точность, характерная для обученной зашумленной сети при определенной интенсивности шумового воздействия.

2. Шум в выходном слое сети

Для начала рассмотрим наиболее простой случай сети, состоящей из входного и выходного полносвязных слоев (см. рис. 1, а). Далее топология сети будет усложняться добавлением слоя свёртки и субдискретизации.

Выходной сигнал такой сети будет определяться как

$$\vec{x}^{\text{out}} = \vec{x}^{\text{in}} \cdot \mathbf{W}^{\text{out}}, \quad \vec{y}^{\text{out}} = \hat{N} \vec{x}^{\text{out}}, \quad (5)$$

где \vec{x}^{in} определяет вектор состояний нейронов входного слоя. По сути, это значения, соответствующие входному изображению, представленные в виде вектора длиной 784. Оператор \hat{N} отвечает за введение шумового воздействия, упомянутого в разделе 1.2. Настолько упрощенная сеть, по сути, является линейным отображением, и её использование здесь вызвано необходимостью сравнения влияния шума в выходном слое со свёрточным слоем в последующих разделах.

Нами было обучено четыре сети. Обучение проводилось при помощи свободно распространяемой библиотеки Keras [31] на языке программирования Python, используя оптимизатор “adam” и категориальную кросс-энтропию. Обучение проводилось в течение 100 эпох. Для четырех сетей конечная точность работы на обучающих данных составила 93.85%, 93.92%, 93.93%, 93.54%, а на проверочных — 92.34%, 92.55%, 92.49%, 92.51%. Шумовое воздействие вводилось в уже обученную сеть в выходной слой. На рис. 2 приведены графики того, как меняется точность работы этих сетей на проверочных данных при увеличении интенсивности шума.

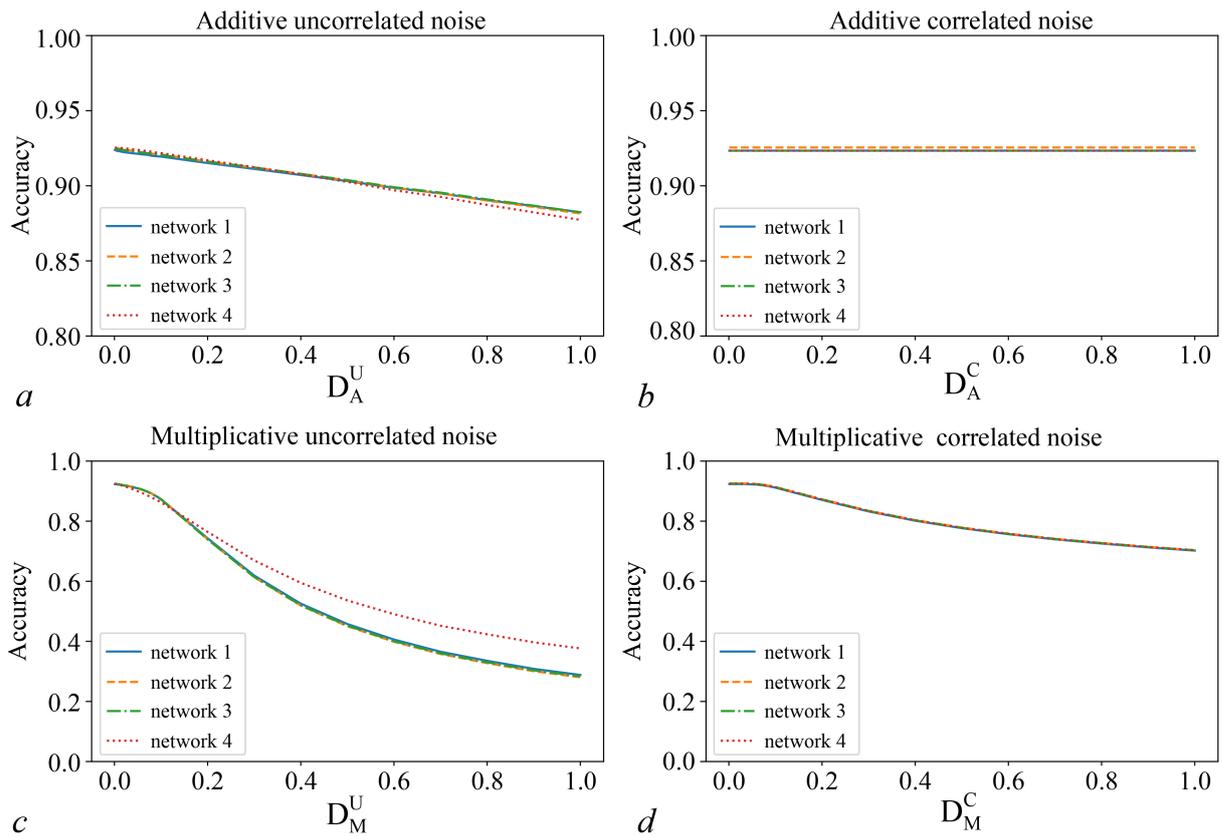


Рис. 2. Изменение точности работы сети, приведенной на рис. 1, *a*, в зависимости от интенсивности шумового воздействия, введенного в выходной слой сети. Были рассмотрены следующие способы введения шумового воздействия: *a* — аддитивный некоррелированный шум, *b* — аддитивный коррелированный шум, *c* — мультипликативный некоррелированный шум, *d* — мультипликативный коррелированный шум. Цветом показаны графики, полученные для разных нейронных сетей, которые были обучены до введения шумового воздействия (цвет онлайн)

Fig. 2. Change in the accuracy of the network shown in Fig. 1, *a*, depending on the intensity of the noise exposure introduced into the output layer of the network. The following methods of introducing noise were considered: *a* — additive uncorrelated noise, *b* — additive correlated noise, *c* — multiplicative uncorrelated noise, *d* — multiplicative correlated noise. The color shows the graphs obtained for different neural networks that were trained before introducing noise exposure (color online)

Для всех четырех обученных сетей зависимости практически совпадают. Аддитивный некоррелированный шум (рис. 2, *a*) незначительно влияет на точность работы сети. Точность линейно падает с увеличением интенсивности шума. Даже при интенсивности шума $D_A^U = 1$, которая сравнительно большая для рассматриваемого диапазона входных значений сети $[0, 1]$, точность падает примерно до 88%. Из-за решения задачи классификации и того, что не так сильно важен сам выходной сигнал нейронов, сколько то, у какого именно нейрона максимальный выходной сигнал, аддитивный коррелированный шум (рис. 2, *b*) в выходном слое никак не влияет на конечную точность. По этой же причине влияние мультипликативного коррелированного шума (рис. 2, *d*) не так критично, как мультипликативный некоррелированный шум (рис. 2, *c*). Самым критичным в выходном слое является мультипликативный некоррелированный шум. Точность при увеличении интенсивности этого шума спадает нелинейно, и при $D_M^U = 1$ точность составила примерно 30%.

На графиках приведены результаты для четырех обученных сетей. В результате их обучения статистика матриц связи \mathbf{W}^{out} в сетях 1–3 оказалась примерно похожей, а для четвертой сети

Таблица 1. Статистические характеристики матриц связи \mathbf{W}^{out} для четырех сетей, состоящих из двух полносвязанных слоев (рис. 1, а)
 Table 1. Statistical characteristics of connection matrices \mathbf{W}^{out} for all four trained networks containing two fully connected layers (Fig. 1, a)

	сеть 1	сеть 2	сеть 3	сеть 4
Точность (обуч.)	93.85%	93.92%	93.93%	93.54%
Точность (пров.)	92.34%	92.55%	92.49%	92.51%
Среднее \mathbf{W}^{out}	-0.6036	-0.6022	-0.6038	-0.2257
Квадрат среднего \mathbf{W}^{out}	0.3643	0.3627	0.3646	0.0509
Среднее квадратическое \mathbf{W}^{out}	1.7682	1.7656	1.7688	0.6238

статистические характеристики существенно отличаются (см. табл. 1). В рассмотренном типе сетей шум вводился уже в выходной слой после применения всех матрицы связи, поэтому статистика матриц связи может отразиться только на диапазоне выходных значений сети. Поэтому на рис. 2 все соответствующие зависимости для всех обученных сетей качественно одинаковые, а небольшие количественные отличия можно увидеть только для четвертой сети.

3. Шум в свёрточном слое сети

В данном разделе будет рассмотрено, как внутренний шум в свёрточном слое влияет на точность работы сети. Для этого будет обучено несколько сетей, похожих на рис. 1, б. Они отличаются от сетей, рассмотренных в предыдущем разделе тем, что добавлен один свёрточный слой. Для сравнения рассматриваются 4 типа сетей: 1 фильтр в свёрточном слое размером 3×3 , 1 фильтр размером 5×5 , 2 фильтра размером 3×3 , 5 фильтров размером 3×3 . Шум вводился в уже обученные сети в нейроны после этапа свёртки.

Применение шумового воздействия перед выходным слоем аналогично случаю, когда в аппаратной нейронной сети функция softmax реализуется уже после считывания сигнала с аппаратных нейронов, то есть связь между нейронами и сами нейроны реализованы физически, а финальный ответ сети получается уже после анализа полученных 10 выходных сигналов сети.

В сети, изображенной на рис. 1, б, выходной сигнал нейронов свёрточного слоя в общем виде определяется как

$$\vec{x}^{\text{conv}} = f(\vec{x}^{\text{in}} \cdot \mathbf{W}^{\text{conv}}), \quad \vec{y}^{\text{conv}} = \hat{\mathbf{N}}\vec{x}^{\text{conv}}. \quad (6)$$

Здесь функция $f(\cdot)$ — это функция активации. В данной статье рассматривается линейная (тождественная) функция активации $f(x) = x$. В наших предыдущих работах было показано, что нелинейная функция активации может оказывать существенное влияние на накопление шума [23, 27], поэтому в данной работе рассматриваются только упрощенные сети с линейной функцией активации. Влияние нелинейности, разных функций активации и чередование свёрточных слоев на накопление шума будет рассмотрено в следующих работах. Тем не менее в экспериментах с фотонными нейронными сетями часто используются кусочно-линейные функции типа ReLU [32, 33]. Матрица \mathbf{W}^{conv} представляет собой матрицу, связывающую нейроны входного слоя с нейронами свёрточного слоя. Содержимое этой матрицы соответствует процедуре, описанной в разделе 1.1 для сети со свёрточным слоем. Процедура представления операции свёртки в виде особой связи между двумя полносвязными слоями сети и матричного умножения детально описана в книге [30] и заключается в особом заполнении матрицы связи значениями фильтров свёртки. В данном разделе рассматриваются 4 типа свёрточного слоя: 1 фильтр 3×3 ,

Таблица 2. Различные комбинации фильтров 3×3 для рассмотренных обученных сверточных сетей рис. 1, *b*

Table 2. Different combinations of filters of size 3×3 in considered trained convolutional networks from Fig. 1, *b*

1 фильтр 3×3			2 фильтра 3×3					
-0.60	0.11	0.35	-0.13	-0.28	0.35	0.23	-0.10	0.05
1.24	0.55	-0.33	1.06	0.09	-0.07	-0.84	0.69	-0.28
-1.34	0.85	-0.15	-0.58	-0.20	0.43	0.12	-0.36	0.45
5 фильтров 3×3								
0.11	0.12	-0.04	0.04	-0.07	0.10	0.03	0.06	0.03
0.05	-0.33	0.45	0.06	-0.02	-0.004	-0.18	0.26	-0.21
0.17	0.22	-0.28	0.06	-0.13	0.08	-0.06	-0.02	0.16
0.11	-0.34	0.31	0.29	-0.18	0.06			
0.06	0.24	-0.54	-0.34	-0.16	-0.12			
0.04	-0.25	0.36	-0.16	0.45	-0.28			

Таблица 3. Фильтр 5×5 одной из обученных сверточных сетей рис. 1, *b*

Table 3. Filter of size 5×5 in one of trained convolutional networks from Fig. 1, *b*

1 фильтр 5×5				
-0.10	-0.25	-0.03	0.36	-0.07
0.21	0.44	-0.61	-0.09	0.31
-0.29	0.20	-0.67	0.57	-0.36
0.35	-0.59	0.48	-0.80	-0.50
0.18	0.01	-0.50	0.65	0.36

2 фильтра 3×3 , 5 фильтров 3×3 и 1 фильтр 5×5 . Сами значения, полученные для этих фильтров после обучения сетей, приведены в табл. 2 и 3.

После применения свёртки общий выходной сигнал сети определяется как

$$\bar{y}^{\text{out}} = \bar{y}^{\text{conv}} \cdot \mathbf{W}^{\text{out}}. \quad (7)$$

На рис. 3 приведены зависимости точности от интенсивности 4 типов шума для перечисленных выше четырех обученных сетей. Из графиков видно, что нет однозначной корреляции между снижением точности работы сети и количеством фильтров или их размером.

Исходя из наших предыдущих результатов для глубоких сетей, опубликованных в [23], наибольшее влияние на распространение различных шумов оказывают статистические характеристики матрицы связи, которая идет после слоя с внутренним шумом. В нашем случае это матрица \mathbf{W}^{out} . Влияние коррелированного шума определялось квадратом среднего матрицы связи, а влияние некоррелированного определялось средним квадратическим этой матрицы. Для всех рассмотренных сетей эта информация приведена в табл. 4.

Аддитивный некоррелированный шум (рис. 3, *a*) в свёрточном слое приводит к более выраженному падению точности, чем в выходном слое. То же самое можно сказать и про аддитивный коррелированный шум (рис. 3, *b*). Если в выходном слое даже большие интенсивности не приводили к ухудшениям работы сети, то аналогичный шум в свёрточном слое приводит к существенному падению точности вплоть до полной потери возможности распознавания цифр.

Мультипликативный некоррелированный шум (рис. 3, *c*) линейно уменьшает точность работы сети при увеличении интенсивности шума. Для шума в выходном слое аналогичная зависимость была нелинейной. Более того, из сравнения рис. 3, *c* и рис. 2, *c* видно, что графики, полученные для сетей со свёрточным слоем, находятся существенно выше, что говорит о том, что сеть сама может подавлять мультипликативный некоррелированный шум. Ранее для глубоких

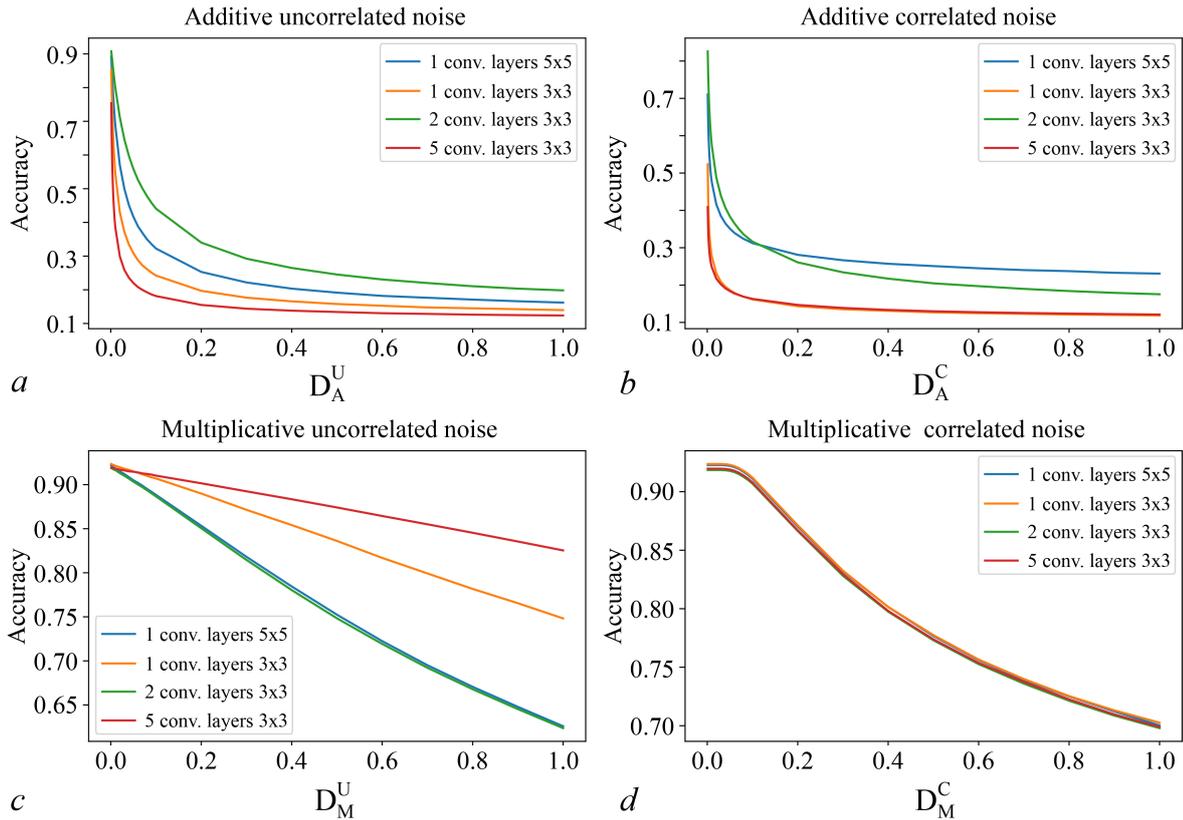


Рис. 3. Изменение точности работы сети, приведенной на рис. 1, *b*, в зависимости от интенсивности шумового воздействия, введенного в свёрточный слой сети. Были рассмотрены следующие конфигурации свёрточного слоя: 1 фильтр 5×5 (синий), 1 фильтр 3×3 (оранжевый), 2 фильтра 3×3 (зеленый), 5 фильтров 3×3 (красный). Способы введения шумового воздействия: *a* – аддитивный некоррелированный шум, *b* – аддитивный коррелированный шум, *c* – мультипликативный некоррелированный шум, *d* – мультипликативный коррелированный шум (цвет онлайн)

Fig. 3. Change in the accuracy of the network shown in Fig. 1, *b*, depending on the intensity of the noise exposure introduced into the convolutional layer of the network. The following configurations of the convolutional layer were considered: 1 filter 5×5 (blue), 1 filter 3×3 (orange), 2 filters 3×3 (green), 5 filters 3×3 (red). Methods of introducing noise exposure: *a* – additive uncorrelated noise, *b* – additive correlated noise, *c* – multiplicative uncorrelated noise, *d* – multiplicative correlated noise (color online)

Таблица 4. Статистические характеристики матриц связи \mathbf{W}^{out} для сетей со свёрточным слоем (рис. 1, *b*)

Table 4. Statistical characteristics of connection matrices \mathbf{W}^{out} for networks with convolutional layer (Fig. 1, *b*)

	1 фильтр 5×5	1 фильтр 3×3	2 фильтра 3×3	5 фильтров 3×3
Точность (обуч.)	93.73%	93.96%	94.09%	93.85%
Точность (пров.)	91.85%	92.28%	92.37%	91.97%
Среднее \mathbf{W}^{out}	0.0913	-0.1565	-0.1863	0.0316
Квадрат среднего \mathbf{W}^{out}	0.0083	0.0245	0.0347	0.0010
Среднее квадратическое \mathbf{W}^{out}	0.7273	1.1017	1.2873	1.2322

сетей было обнаружено, что мультипликативный некоррелированный шум распространяется меньше, если у следующей матрицы связи меньше среднее квадратическое. Сравнивая значения последних строк в табл. 1 и 4, видно, что при использовании свёрточного слоя значения среднего квадратического матрицы \mathbf{W}^{out} на порядок меньше, что подтверждает наше предположение.

Из графиков рис. 3, *d* видно, что независимо от матриц связи и того, какая сеть рассматривается, мультипликативный коррелированный шум влияет на сети одинаково. Полученная зависимость точности работы сети от интенсивности коррелированного мультипликативного шума качественно и количественно похожа на то, что было получено для сети без свёрточного слоя рис. 2, *d*.

Таким образом, наиболее критичным шумом можно считать аддитивный шум в свёрточном слое сети, он приводит к существенному и наиболее стремительному падению точности работы сети. Это касается как коррелированного, так и некоррелированного аддитивного шума.

4. Шум в свёрточном слое при наличии слоя субдискретизации

В данном разделе рассматривается свёрточная сеть, состоящая из слоя свёртки и слоя субдискретизации, схематично показанная на рис. 1, *c*. В сети, изображенной на рис. 1, *c*, выходной сигнал свёрточного слоя определяется так же, как для предыдущей сети (6), и шум вводится также — в свёрточный слой. Операция субдискретизации может быть представлена в виде матричного умножения, и тогда общий выходной сигнал сети:

$$\bar{y}^{\text{out}} = \left(\bar{y}^{\text{conv}} \cdot \mathbf{W}^{\text{pool}} \right) \cdot \mathbf{W}^{\text{out}}. \quad (8)$$

Здесь процедура субдискретизации заменена матричным умножением с использованием матрицы \mathbf{W}^{pool} . Подробное описание процедуры субдискретизации было приведено ранее в разделе 1.1. В данном же разделе будут рассмотрены результаты численного моделирования для обученной сети с фильтром 2×2 в слое субдискретизации с использованием MeanPooling и MaxPooling.

Из рис. 4 видно, что аддитивный некоррелированный шум удается существенно уменьшить при помощи использования MeanPooling в слое субдискретизации (рис. 4, *a*). Это довольно закономерный результат, так как в статье [26] мы предлагали технику пулов для уменьшения влияния некоррелированных шумов. Суть метода заключалась в создании дубликатов нейронов и последующем усреднении. По сути, это очень похоже на процедуру, которая происходит при применении слоя субдискретизации с усреднением (MeanPooling). В случае с MaxPooling ситуация не такая однозначная. На рис. 4, *a* голубой график, который соответствует использованию MaxPooling, находится выше красного графика, который соответствует сети без слоя субдискретизации. Однако в некоторых случаях графики могут пересекаться, и в целом использование MaxPooling при аддитивном некоррелированном шуме нельзя считать способом уменьшения шума.

В случае с аддитивным коррелированным шумом (рис. 4, *b*) видно, что оба способа введения слоя субдискретизации позволяют уменьшить влияние шума. Этот результат был получен много раз для разных обученных сетей.

При наличии в свёрточном слое мультипликативного коррелированного шума (рис. 4, *d*) значительного улучшения работы сети можно добиться, только если используется MaxPooling. Если же шум мультипликативный некоррелированный, то MaxPooling улучшает работу сети только при малых значениях интенсивности шума. При увеличении интенсивности шума больше 0.1 точность работы сети существенно снижается и становится хуже, чем в сетях без слоя субдискретизации. Для обоих мультипликативных шумов применение MeanPooling в слое субдискретизации приводит к тем же значениям точности, что и в сетях без этого слоя.

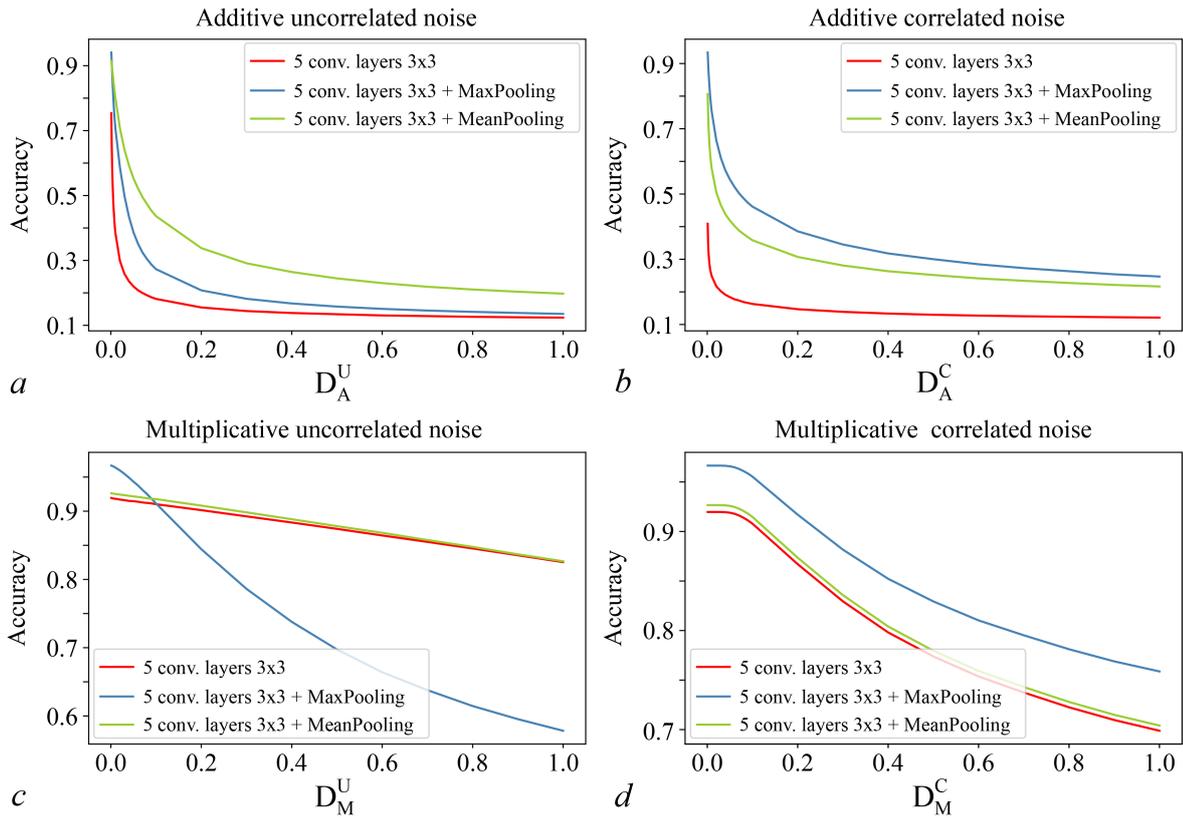


Рис. 4. Изменение точности работы сети, приведенной на рис. 1, *c*, в зависимости от интенсивности шумового воздействия, введенного в сверточный слой сети. На данном рисунке приведен случай, когда в сверточном слое находится 5 фильтров размером 3×3 . Красным цветом показаны зависимости, полученные без использования слоя субдискретизации после слоя свертки. Синие и зеленые графики соответствуют слою субдискретизации с использованием MaxPooling и MeanPooling соответственно. Способы введения шумового воздействия: *a* — аддитивный некоррелированный шум, *b* — аддитивный коррелированный шум, *c* — мультипликативный некоррелированный шум, *d* — мультипликативный коррелированный шум (цвет онлайн)

Fig. 4. Change in the accuracy of the network shown in Fig. 1, *c*, depending on the intensity of the noise exposure introduced into the convolutional layer of the network. This figure shows the case when the convolutional layer contains 5 filters of size 3×3 . The dependencies obtained without using a pooling layer after the convolution layer are shown in red. Blue and green graphs correspond to the pooling layer using MaxPooling and MeanPooling, respectively. Methods of introducing noise effect: *a* — additive uncorrelated noise, *b* — additive correlated noise, *c* — multiplicative uncorrelated noise, *d* — multiplicative correlated noise (color online)

Заклучение

В данной статье было рассмотрено влияние внутренних шумов на работу сверточной нейронной сети. Были рассмотрены сети с разными компонентами, которые часто встречаются именно в сверточных сетях. В разделе 2 была рассмотрена простая полносвязная сеть, и шум вводился в выходной слой. Далее в сеть был добавлен сверточный слой с различным числом фильтров и их размерами (раздел 3). При этом шум вводился в скрытый слой сети, который получался в результате применения свертки. Было показано, что аддитивные шумы (как коррелированный, так и некоррелированный) при этом накапливаются сильнее, чем в сети без сверточного слоя. Зависимости точности работы сети от интенсивности мультипликативного коррелированного шума выглядят одинаково для сетей со сверточным слоем и без, а аналогичные зависимости для мультипликативного некоррелированного шума выглядят гораздо лучше для сети со сверточным

слоем. Было обучено несколько сетей со свёрточными слоями, и качественно результаты для них похожи. Однако количественные результаты, а именно кривые зависимости точности работы сети от интенсивности шумового воздействия для каких фильтров располагаются выше или ниже, чаще всего вызвано другими статистическими характеристиками матрицы связи W^{out} , которая применяется к нейронам с внутренними шумами.

Использование слоя субдискретизации после слоя свёртки позволяет несколько улучшить работу сети и ее устойчивость к внутренним шумам (раздел 4). Так, использование MeanPooling и MaxPooling позволяет существенно поднять точность при наличии аддитивного шума в свёрточном слое. Что же касается мультипликативного шума, то здесь ситуация не такая однозначная. Использование MeanPooling приводит примерно к тому же результату, что и отсутствие слоя субдискретизации. Для мультипликативного коррелированного шума сеть с MaxPooling обладает изначально большей точностью, а скорость спада точности при увеличении интенсивности шума примерно такая же, как для сети с MeanPooling или для сети без слоя субдискретизации. Что же касается мультипликативного некоррелированного шума, использование MaxPooling в этом случае делает сеть менее устойчивой к шуму.

Список литературы

1. *LeCun Y., Bengio Y., Hinton G.* Deep learning // *Nature*. 2015. Vol. 521, no. 7553. P. 436–444. DOI: 10.1038/nature14539.
2. *Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G. E.* ImageNet classification with deep convolutional neural networks // *Commun. ACM*. 2017. Vol. 60, no. 6. P. 84–90. DOI: 10.1145/3065386.
3. *Maturana D., Scherer S.* VoxNet: A 3D Convolutional Neural Network for real-time object recognition // In: 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2015, Hamburg, Germany. 2015. P. 922–928. DOI: 10.1109/IROS.2015.7353481.
4. *Graves A., Mohamed A., Hinton G.* Speech recognition with deep recurrent neural networks // In: 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2013, Vancouver, BC, Canada. 2013. P. 6645–6649. DOI: 10.1109/ICASSP.2013.6638947.
5. *Kar S., Moura J. M. F.* Distributed consensus algorithms in sensor networks with imperfect communication: Link failures and channel noise // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2009. Vol. 57, no. 1. P. 355–369. DOI: 10.1109/TSP.2008.2007111.
6. AI and compute. [Electronic resource]. 2018. Available from: <https://openai.com/index/ai-and-compute/>.
7. *Hasler J., Marr H. B.* Finding a roadmap to achieve large neuromorphic hardware systems // *Front. Neurosci*. 2013. Vol. 7. P. 118. DOI: 10.3389/fnins.2013.00118.
8. *Gupta S., Agrawal A., Gopalakrishnan K., Narayanan P.* Deep Learning with Limited Numerical Precision // In: Proceedings of the 32nd International Conference on International Conference on Machine Learning. 2015. Vol. 37. P. 1737–1746. DOI: 10.1109/72.80206.
9. *Karniadakis G. E., Kevrekidis I. G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L.* Physics-informed machine learning // *Nat. Rev. Phys*. 2021. Vol. 3. P. 422–440. DOI: 10.1038/s42254-021-00314-5.
10. *Aguirre F., Sebastian A., Le Gallo M., Song W., Wang T., Yang J. J., Lu W., Chang M.-F., Ielmini D., Yang Y., Mehonic A., Kenyon A., Villena M. A., Roldán J. B., Wu Y., Hsu Hu.-H., Raghavan N., Suñé J., Miranda E., Eltawil A., Setti G., Smagulova K., Salama K. N., Krestinskaya O., Yan X., Ang K.-W., Jain S., Li S., Alharbi O., Pazos S., Lanza M.* Hardware implementation of memristor-based artificial neural networks // *Nat. Commun*. 2024. Vol. 15. P. 1974. DOI: 10.1038/s41467-024-45670-9.
11. *Chen Y., Nazhamaiti M., Xu H., Meng Y., Zhou T., Li G., Fan J., Wei Q., Wu J., Qiao F., Fang L., Dai Q.* All-analog photoelectronic chip for high-speed vision tasks // *Nature*. 2023. Vol. 623. P. 48–57. DOI: 10.1038/s41586-023-06558-8.

12. Brunner D., Soriano M. C., Mirasso C. R., Fischer I. Parallel photonic information processing at gigabyte per second data rates using transient states // *Nat. Commun.* 2023. Vol. 4. P. 1364. DOI: 10.1038/ncomms2368.
13. Tuma T., Pantazi A., Le Gallo M., Sebastian A., Eleftheriou E. Stochastic phase-change neurons // *Nature Nanotech.* 2016. Vol. 11. P. 693–699. DOI: 10.1038/nnano.2016.70.
14. Torrejon J., Riou M., Araujo F., Tsunegi S., Khalsa G., Querlioz D., Bortolotti P., Cros V., Yakushiji K., Fukushima A., Kubota H., Yuasa Sh., Stiles M. D., Grollier J. Neuromorphic computing with nanoscale spintronic oscillators // *Nature.* 2017. Vol. 547. P. 428–431. DOI: 10.1038/nature23011.
15. Psaltis D., Brady D., Gu X. G., Lin S. Holography in artificial neural networks // *Nature.* 1990. Vol. 343. P. 325–330. DOI: 10.1038/343325a0.
16. Bueno J., Maktoobi S., Froehly L., Fischer I., Jacquot M., Larger L., Brunner D. Reinforcement learning in a large-scale photonic recurrent neural network // *Optica.* 2018. Vol. 5, no. 6. P. 756–760. DOI: 10.1364/OPTICA.5.000756.
17. Lin X., Rivenson Y., Yardimci N. T., Veli M., Jarrahi M., Ozcan A. All-optical machine learning using diffractive deep neural networks // *Science.* 2018. Vol. 361. P. 1004–1008. DOI: 10.1126/science.aat8084.
18. Shen Y., Harris N. C., Skirlo S., Prabhu M., Baehr-Jones T., Hochberg M., Sun X., Zhao S., Larochelle H., Englund D., Soljacic M. Deep learning with coherent nanophotonic circuits // *Nature Photonics.* 2017. Vol. 11. P. 441–446. DOI: 10.1038/nphoton.2017.93.
19. Tait A. N., De Lima T. F., Zhou E., Wu A. X., Nahmias M. A., Shastri B. J., Prucnal P. R. Neuromorphic photonic networks using silicon photonic weight banks // *Sci. Rep.* 2017. Vol. 7, no. 1. P. 7430. DOI: 10.1038/s41598-017-07754-z.
20. Moughames J., Porte X., Thiel M., Ulliac G., Larger L., Jacquot M., Kadic M., Brunner D. Three-dimensional waveguide interconnects for scalable integration of photonic neural networks // *Optica.* 2020. Vol. 7, no. 6. P. 640–646. DOI: 10.1364/OPTICA.388205.
21. Dinc N. U., Psaltis D., Brunner D. Optical neural networks: The 3D connection // *Photonics.* 2020. Vol. 104. P. 34–38. DOI: 10.1051/photon/202010434.
22. Moughames J., Porte X., Larger L., Jacquot M., Kadic M., Brunner D. 3D printed multimode-splitters for photonic interconnects // *Optical Materials Express.* 2020. Vol. 10, no. 11. P. 2952–2961. DOI: 10.1364/OME.402974.
23. Semenova N., Larger L., Brunner D. Understanding and mitigating noise in trained deep neural networks // *Neural Netw.* 2022. Vol. 146. P. 151–160. DOI: 10.1016/j.neunet.2021.11.008.
24. Semenova N. Impact of white Gaussian internal noise on analog echo-state neural networks // arXiv:2405.07670. arXiv Preprint, 2024. 10 p. DOI: 10.48550/arXiv.2405.07670.
25. Semenova N., Brunner D. Noise-mitigation strategies in physical feedforward neural networks // *Chaos.* 2022. Vol. 32, no. 6. P. 061106. DOI: 10.1063/5.0096637.
26. Semenova N., Brunner D. Impact of white noise in artificial neural networks trained for classification: Performance and noise mitigation strategies // *Chaos.* 2024. Vol. 34, no. 5. P. 051101. DOI: 10.1063/5.0206807.
27. Semenova N., Porte X., Andreoli L., Jacquot M., Larger L., Brunner D. Fundamental aspects of noise in analog-hardware neural networks // *Chaos.* 2019. Vol. 29, no. 20. P. 103128. DOI: 10.1063/1.5120824.
28. Li Z., Liu F., Yang W., Peng S., Zhou J. A survey of convolutional neural networks: Analysis, applications, and prospects // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems.* 2022. Vol. 33, no. 12. P. 6999–7019. DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3084827.
29. LeCun Y. The MNIST database of handwritten digits [Electronic resource] // 1998. Available from: <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>.

30. Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвилль А. Глубокое обучение. М.: ДМК Пресс, 2018. 652 с.
31. Chollet F. et al. Keras [Electronic resource]. 2015. Available from: <https://github.com/fchollet/keras>.
32. Stephanie M. V., Pham L., Schindler A., Grasser T., Walzl M., Schrenk B. Photonic neuron with on frequency-domain ReLU activation function // Journal of Lightwave Technology. 2024. Vol. 42, no. 22. P. 7919–7928. DOI: 10.1109/JLT.2024.3413976.
33. Li G. H. Y., Sekine R., Nehra R., Gray R. M., Ledezma L., Guo Q., Marandi A. All-optical ultrafast ReLU function for energy-efficient nanophotonic deep learning // Nanophotonics. 2023. Vol. 12, no. 5. P. 847–855. DOI: 10.1515/nanoph-2022-0137.

References

1. LeCun Y, Bengio Y, Hinton G. Deep learning. Nature. 2015;521(7553):436–444. DOI: 10.1038/nature14539.
2. Krizhevsky A, Sutskever I, Hinton GE. ImageNet classification with deep convolutional neural networks. Commun. ACM. 2017;60(6):84–90. DOI: 10.1145/3065386.
3. Maturana D, Scherer S. VoxNet: A 3D Convolutional Neural Network for real-time object recognition. In: 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2015, Hamburg, Germany. 2015. P. 922–928. DOI: 10.1109/IROS.2015.7353481.
4. Graves A, Mohamed A, Hinton G. Speech recognition with deep recurrent neural networks. In: 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2013, Vancouver, BC, Canada. 2013. P. 6645–6649. DOI: 10.1109/ICASSP.2013.6638947.
5. Kar S, Moura JMF. Distributed consensus algorithms in sensor networks with imperfect communication: Link failures and channel noise. IEEE Transactions on Signal Processing. 2009;57(1):355–369. DOI: 10.1109/TSP.2008.2007111.
6. AI and compute. [Electronic resource]. 2018. Available from: <https://openai.com/index/ai-and-compute/>.
7. Hasler J, Marr HB. Finding a roadmap to achieve large neuromorphic hardware systems. Front. Neurosci. 2013;7:118. DOI: 10.3389/fnins.2013.00118.
8. Gupta S, Agrawal A, Gopalakrishnan K, Narayanan P. Deep Learning with Limited Numerical Precision. In: Proceedings of the 32nd International Conference on International Conference on Machine Learning. 2015. Vol. 37. P. 1737–1746. DOI: 10.1109/72.80206.
9. Karniadakis GE, Kevrekidis IG, Lu L, Perdikaris P, Wang S, Yang L. Physics-informed machine learning. Nat. Rev. Phys. 2021;3:422–440. DOI: 10.1038/s42254-021-00314-5.
10. Aguirre F, Sebastian A, Le Gallo M, Song W, Wang T, Yang JJ, Lu W, Chang M-F, Ielmini D, Yang Y, Mehonic A, Kenyon A, Villena MA, Roldán JB, Wu Y, Hsu Hu-H, Raghavan N, Suñé J, Miranda E, Eltawil A, Setti G, Smagulova K, Salama KN, Krestinskaya O, Yan X, Ang K-W, Jain S, Li S, Alharbi O, Pazos S, Lanza M. Hardware implementation of memristor-based artificial neural networks. Nat. Commun. 2024;15:1974. DOI: 10.1038/s41467-024-45670-9.
11. Chen Y, Nazhamaiti M, Xu H, Meng Y, Zhou T, Li G, Fan J, Wei Q, Wu J, Qiao F, Fang L, Dai Q. All-analog photoelectronic chip for high-speed vision tasks. Nature. 2023;623:48–57. DOI: 10.1038/s41586-023-06558-8.
12. Brunner D, Soriano MC, Mirasso CR, Fischer I. Parallel photonic information processing at gigabyte per second data rates using transient states. Nat. Commun. 2023;4:1364. DOI: 10.1038/ncomms2368.
13. Tuma T, Pantazi A, Le Gallo M, Sebastian A, Eleftheriou E. Stochastic phase-change neurons. Nature Nanotech. 2016;11:693–699. DOI: 10.1038/nnano.2016.70.
14. Torrejon J, Riou M, Araujo F, Tsunegi S, Khalsa G, Querlioz D, Bortolotti P, Cros V, Yakushiji K,

- Fukushima A, Kubota H, Yuasa Sh, Stiles MD, Grollier J. Neuromorphic computing with nanoscale spintronic oscillators. *Nature*. 2017;547:428–431. DOI: 10.1038/nature23011.
15. Psaltis D, Brady D, Gu XG, Lin S. Holography in artificial neural networks. *Nature*. 1990;343:325–330. DOI: 10.1038/343325a0.
 16. Bueno J, Maktoobi S, Froehly L, Fischer I, Jacquot M, Larger L, Brunner D. Reinforcement learning in a large-scale photonic recurrent neural network. *Optica*. 2018;5(6):756–760. DOI: 10.1364/OPTICA.5.000756
 17. Lin X, Rivenson Y, Yardimci NT, Veli M, Jarrahi M, Ozcan A. All-optical machine learning using diffractive deep neural networks. *Science*. 2018;361:1004–1008. DOI: 10.1126/science.aat8084.
 18. Shen Y, Harris NC, Skirlo S, Prabhu M, Baehr-Jones T, Hochberg M, Sun X, Zhao S, Larochelle H, Englund D, Soljacic M. Deep learning with coherent nanophotonic circuits. *Nature Photonics*. 2017;11:441–446. DOI: 10.1038/nphoton.2017.93.
 19. Tait AN, De Lima TF, Zhou E, Wu AX, Nahmias MA, Shastri BJ, Prucnal PR. Neuromorphic photonic networks using silicon photonic weight banks. *Sci. Rep.* 2017;7(1):7430. DOI: 10.1038/s41598-017-07754-z.
 20. Moughames J, Porte X, Thiel M, Ulliac G, Larger L, Jacquot M, Kadic M, Brunner D. Three-dimensional waveguide interconnects for scalable integration of photonic neural networks. *Optica*. 2020;7(6):640–646. DOI: 10.1364/OPTICA.388205.
 21. Dinc NU, Psaltis D, Brunner D. Optical neural networks: The 3D connection. *Photoniques*. 2020;104:34–38. DOI: 10.1051/photon/202010434.
 22. Moughames J, Porte X, Larger L, Jacquot M, Kadic M, Brunner D. 3D printed multimode-splitters for photonic interconnects. *Optical Materials Express*. 2020;10(11):2952–2961. DOI: 10.1364/OME.402974.
 23. Semenova N, Larger L, Brunner D. Understanding and mitigating noise in trained deep neural networks. *Neural Netw.* 2022;146:151–160. DOI: 10.1016/j.neunet.2021.11.008.
 24. Semenova N. Impact of white Gaussian internal noise on analog echo-state neural networks. arXiv:2405.07670. arXiv Preprint; 2024. 10 p. DOI: 10.48550/arXiv.2405.07670.
 25. Semenova N, Brunner D. Noise-mitigation strategies in physical feedforward neural networks. *Chaos*. 2022;32(6):061106. DOI: 10.1063/5.0096637.
 26. Semenova N, Brunner D. Impact of white noise in artificial neural networks trained for classification: Performance and noise mitigation strategies. *Chaos*. 2024;34(5):051101. DOI: 10.1063/5.0206807.
 27. Semenova N, Porte X, Andreoli L, Jacquot M, Larger L, Brunner D. Fundamental aspects of noise in analog-hardware neural networks. *Chaos*. 2019;29(20):103128. DOI: 10.1063/1.5120824.
 28. Li Z, Liu F, Yang W, Peng S, Zhou J. A survey of convolutional neural networks: Analysis, applications, and prospects. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2022;33(12):6999–7019. DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3084827.
 29. LeCun Y. The MNIST database of handwritten digits. [Electronic resource] // 1998. Available from: <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>.
 30. Goodfellow I, Bengio Y, Courville A. *Deep Learning*. MIT Press; 2016. 800 p.
 31. Chollet F et al. Keras. [Electronic resource]. 2015. Available from: <https://github.com/fchollet/keras>.
 32. Stephanie MV, Pham L, Schindler A, Grasser T, Walzl M, Schrenk B. Photonic neuron with on frequency-domain ReLU activation function. *Journal of Lightwave Technology*. 2024;42(22):7919–7928. DOI: 10.1109/JLT.2024.3413976.
 33. Li GHY, Sekine R, Nehra R, Gray RM, Ledezma L, Guo Q, Marandi A. All-optical ultrafast ReLU function for energy-efficient nanophotonic deep learning. *Nanophotonics*. 2023;12(5):847–855. DOI: 10.1515/nanoph-2022-0137.



Семенова Надежда Игоревна — родилась в Саратове (1992). Окончила с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика и электроника» (2014). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2017, СГУ). Получила PhD степень по специальности «Оптика» в университете Бургундии Франш-Конте (Франция, 2021). С 2021 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета в должности доцента и старшего научного сотрудника. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, нейронные сети, машинное обучение, влияние шумов, пространственно-временные режимы в ансамблях и сетях, химерные состояния, уединенные состояния, запаздывающая обратная связь. Опубликовала свыше 50 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: semenovani@sgu.ru
ORCID: 0000-0002-9180-3030
AuthorID (eLibrary.Ru): 850757



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeni. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6)

Научная статья
УДК 537.86

DOI: 10.18500/0869-6632-003193
EDN: IJPPGU

Модифицированный осциллятор ФитцХью–Нагумо со спайковой активностью, зависящей от длительности внешнего импульсного воздействия

Д. М. Ежов¹, А. В. Курбако^{1,2}, В. И. Пономаренко^{1,2}✉, М. Д. Прохоров^{1,2}

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

E-mail: ezhovdmitryi@yandex.ru, kurbako.sasha@mail.ru, ✉ponomarenkovi@gmail.com, mdprokhorov@yandex.ru

Поступила в редакцию 3.06.2025, принята к публикации 2.09.2025,

опубликована онлайн 12.09.2025, опубликована 28.11.2025

Аннотация. Цель работы — разработка и исследование модифицированного осциллятора ФитцХью–Нагумо, спайковая активность которого определяется не только амплитудой, но и длительностью внешнего импульсного сигнала, поступающего на вход осциллятора. **Методы.** В систему известных уравнений, описывающих динамику осциллятора ФитцХью–Нагумо с постоянным значением порогового параметра, добавлено уравнение, которое описывает изменение порогового параметра во времени под действием внешних импульсных сигналов. При различных значениях параметров внешних импульсов проведено численное исследование динамики предложенного осциллятора, находящегося в состоянии равновесия в отсутствие внешнего воздействия. **Результаты.** Показано, что в отличие от классического осциллятора ФитцХью–Нагумо модифицированный осциллятор способен демонстрировать последовательность из нескольких спайков в ответ на одиночное внешнее импульсное воздействие, причем динамика осциллятора зависит как от амплитуды, так и от длительности внешних импульсов. Кроме того, предложенный осциллятор может возбуждаться последовательностью импульсов, имеющих амплитуду ниже пороговой. **Заключение.** Предложенный модифицированный осциллятор ФитцХью–Нагумо может быть использован для построения спайковых нейронных сетей. Обучение таких сетей можно реализовать с помощью изменения синаптических связей за счет настройки весов синапсов, соответствующих длительности внешних импульсных сигналов. Предложенная модификация осциллятора ФитцХью–Нагумо может быть достаточно просто реализована в радиофизическом эксперименте с использованием аналоговых электронных элементов и цифровых схем, регулирующих длительности входных импульсов.

Ключевые слова: нейроподобный осциллятор, модель ФитцХью–Нагумо, синаптическая связь, импульсное воздействие.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-12-00103, <https://rscf.ru/project/23-12-00103/>.

Для цитирования: Ежов Д. М., Курбако А. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Модифицированный осциллятор ФитцХью–Нагумо со спайковой активностью, зависящей от длительности внешнего импульсного воздействия // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 6. С. 917–928. DOI: 10.18500/0869-6632-003193. EDN: IJPPGU

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Modified FitzHugh–Nagumo oscillator with spiking activity dependent on the duration of external impulse action

D. M. Ezhov¹, A. V. Kurbako^{1,2}, V. I. Ponomarenko^{1,2}✉, M. D. Prokhorov^{1,2}

¹Saratov State University, Russia

²Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Russia
E-mail: ezhovdmitryi@yandex.ru, kurbako.sasha@mail.ru, ✉ponomarenkovi@gmail.com, mdprokhorov@yandex.ru

Received 3.06.2025, accepted 2.09.2025, available online 12.09.2025, published 28.11.2025

Abstract. The purpose of the study is to develop and investigate a modified FitzHugh–Nagumo oscillator, the spiking activity of which is determined not only by the amplitude, but also by the duration of the external impulse signal applied to the input of the oscillator. *Methods.* We have added an equation to the system of known equations describing the dynamics of the FitzHugh–Nagumo oscillator with a constant threshold parameter value. This additional equation describes the change in the threshold parameter over time under the influence of external impulse signals. For various values of the parameters of external impulses, a numerical study of the dynamics of the proposed oscillator, which is in a state of equilibrium in the absence of external influence, is carried out. *Results.* It is shown that, unlike the classical FitzHugh–Nagumo oscillator, the modified oscillator is capable of demonstrating a sequence of several spikes in response to a single external impulse action, and the oscillator dynamics depends on both the amplitude and the duration of external impulses. In addition, the proposed oscillator can be excited by a sequence of impulses with an amplitude below the threshold. *Conclusion.* The proposed modified FitzHugh–Nagumo oscillator can be used to construct spiking neural networks. Learning of such networks can be implemented by changing synaptic connections by adjusting the synapse weights corresponding to the duration of external impulse signals. The proposed modification of the FitzHugh–Nagumo oscillator can be implemented quite simply in a radio physical experiment using analog electronic elements and digital circuits regulating the duration of input impulses.

Keywords: neuron-like oscillator, FitzHugh-Nagumo model, synaptic connection, impulse action.

Acknowledgements. This study was supported by the Russian Science Foundation, Grant No. 23-12-00103, <https://rscf.ru/project/23-12-00103/>.

For citation: Ezhov DM, Kurbako AV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Modified FitzHugh–Nagumo oscillator with spiking activity dependent on the duration of external impulse action. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(6):917–928. DOI: 10.18500/0869-6632-003193

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследование спайковых нейронных сетей привлекает большое внимание специалистов в разных научных областях [1]. Такие сети используют в качестве узлов биологически реалистичные модели нейронов и способны демонстрировать присущую реальным нейронам активность, в том числе генерировать спайки (импульсы) [2]. Наиболее известными моделями нейронов являются модель типа «накопление – сброс» [3], модели Ходжкина–Хаксли [4, 5], Моррис–Лекара [6], Хиндмарша–Роуза [7, 8], ФитцХью–Нагумо [9–11], Ижикевича [12], Рутькова [13] и Курбажа–Некоркина [14].

Классические модели нейронной активности, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, такие как модели Ходжкина–Хаксли, Моррис–Лекара и ФитцХью–Нагумо, способны воспроизвести генерацию нейронами только спайков в отличие от другой классической модели – модели Хиндмарша–Роуза, способной генерировать бёрсты (группы двух или более спайков, идущих подряд друг за другом и перемежаемых периодами отсутствия активности). Для моделирования присущих реальным нейронам спайк-бёрстовых колебаний были предложены модели генерации спайков и бёрстов в непрерывном времени на основе системы фазовой

автоподстройки частоты [15–17] и осциллятора ФитцХью–Нагумо с нелинейностью на основе двух мемристивных устройств, имитирующих ионные каналы нейрона [18].

Динамика спайковых нейронных сетей зависит от выбора не только узловых элементов сети, но и от типа и структуры связей между нейронами. Обмен информацией между нейронами осуществляется с помощью входящих и исходящих сигналов, в передаче которых важную роль играют синапсы, которые бывают электрическими и химическими [2, 19]. Химические синапсы, в свою очередь, бывают как возбуждающими, так и подавляющими (тормозными) [2]. Для моделирования присущей реальным нейронам пластичности синаптических связей используют различные подходы, например, используют мемристивную связь между нейронами сети [20–24] или вводят пластичность, зависящую от времени прихода спайков [25–28].

В последние годы спайковые нейронные сети активно применяются для решения задач классификации сигналов [29], распознавания изображений [30, 31], управления движением мобильных роботов [32], моделирования различных видов нейронной активности головного мозга [33–35] и др. [1]. При этом большое внимание уделяется возможности радиотехнической реализации как самих модельных нейронов, так и способов их связи между собой. Одним из наиболее простых с точки зрения реализации в радиофизическом эксперименте является нейроподобный генератор ФитцХью–Нагумо. Однако нейронные сети, построенные из классических модельных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, плохо поддаются обучению. Таким образом, возникает потребность в такой модификации осциллятора ФитцХью–Нагумо, которая позволяла бы проводить обучение построенных из таких осцилляторов спайковых нейронных сетей и которую можно было бы легко реализовать в физическом эксперименте.

В данной работе мы предлагаем модифицированную модель ФитцХью–Нагумо, в которой спайковая активность нейрона определяется не только амплитудой, но и длительностью внешнего импульса, поступающего на вход нейрона. Такая модель демонстрирует более богатую динамику, чем классическая нейронная модель ФитцХью–Нагумо. В частности, она может сгенерировать несколько спайков подряд в ответ на одиночный внешний стимул. Кроме того, предлагаемая модифицированная модель может быть достаточно просто реализована в радиофизическом эксперименте с использованием аналоговых электронных элементов и цифровых схем, регулирующих длительности входных импульсов.

1. Исследуемая система

Нейроподобный осциллятор ФитцХью–Нагумо является классической моделью возбудимой динамики нейронов. Такой осциллятор описывается двумя дифференциальными уравнениями [2, 10], содержащими пороговый параметр a , величина которого в отсутствие внешнего воздействия определяет, находится ли осциллятор в состоянии равновесия или совершает периодические автоколебания. Если на осциллятор ФитцХью–Нагумо, находящийся в состоянии равновесия, подействовать внешним сигналом, то при амплитуде этого сигнала, превышающей некоторое пороговое значение, осциллятор начинает генерировать спайки.

Предлагаемая нами модификация осциллятора ФитцХью–Нагумо заключается во введении дополнительного третьего уравнения, которое отвечает за изменение параметра a во времени:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u}(t) &= u(t) - u^3(t)/3 - v(t), \\ \dot{v}(t) &= u(t) + a(t), \\ \tau \dot{a}(t) &= a_{\text{rest}} - a(t) + I_e(t) - I_i(t).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $u(t)$ описывает динамику мембранного потенциала нейрона, $v(t)$ отвечает за восстановление потенциала покоя мембраны, ε — параметр соотношения временных масштабов, τ — постоянная времени, a_{rest} — величина порогового параметра в состоянии равновесия, $I_e(t)$ и $I_i(t)$ — внешние токи, которые представляют собой прямоугольные импульсы с амплитудами A_e и A_i соответственно и длительностями w_e и w_i соответственно. Будем рассматривать только случай $a_{\text{rest}} > 1$, при котором генерация спайков отсутствует без внешних воздействий.

В момент прихода спайка от пресинаптического нейрона на возбуждающий синапс возникает одиночный импульс $I_e(t)$ (рис. 1), который, воздействуя на постсинаптический нейрон (1), приводит к уменьшению значения порогового параметра $a(t)$ при $A_e < 0$. Если $a(t)$ станет меньше 1, то осциллятор (1) сгенерирует спайк. В момент прихода спайка на подавляющий синапс возникает одиночный импульс $I_i(t)$ (см. рис. 1), который приводит к увеличению значения $a(t)$ при $A_i < 0$, что препятствует генерации спайка осциллятором (1).

Результат воздействия импульсов $I_e(t)$ и $I_i(t)$ на нейроподобный осциллятор (1) зависит не только от их амплитуды, но и от их длительности. Это означает, что пластичность синаптических связей можно реализовать, меняя при фиксированной амплитуде длительности импульсов w_e и w_i , поступающих на нейрон через возбуждающий и подавляющий синапсы соответственно. То есть в нейронной сети, построенной из нейронов вида (1), изменение коэффициентов связи между нейронами можно моделировать изменением длительности импульсов w_e и w_i , которые можно интерпретировать как веса синапсов. Обучение такой нейронной сети происходит за счет изменения весов синапсов w_e и w_i . Поскольку веса в подобных сетях можно рассматривать как некоторый набор параметров, а процесс обучения — процедурой поиска оптимальных (в некотором смысле) значений данных параметров, то решение задачи может быть рассмотрено, например, с позиции адаптивной идентификации параметров динамических систем [36].

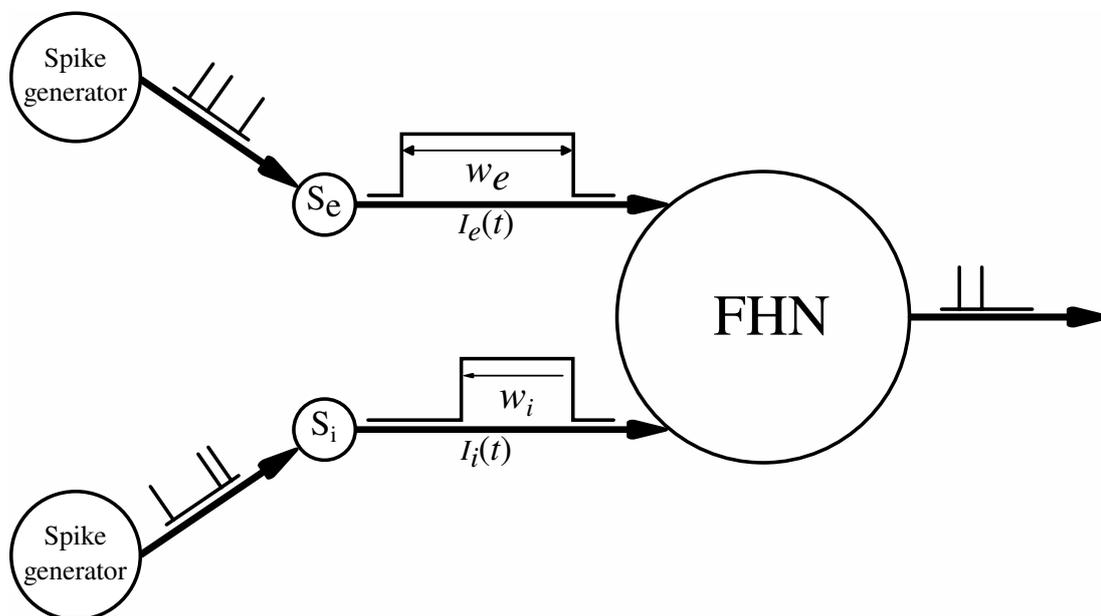


Рис. 1. Схематическое изображение нейроподобного осциллятора ФитцХью–Нагумо (FHN) под действием внешних импульсов $I_e(t)$ и $I_i(t)$. S_e и S_i — возбуждающий и подавляющий синапсы соответственно

Fig. 1. Schematic representation of the FitzHugh–Nagumo (FHN) neuron-like oscillator under the action of external impulses $I_e(t)$ and $I_i(t)$. S_e and S_i are the excitatory and inhibitory synapses, respectively

2. Результаты численного моделирования

Мы провели численное моделирование системы (1) при различных значениях параметров. Для численного решения уравнений (1) мы использовали метод Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования $h = 0.0075$. На рис. 2, *a* разными цветами показано, какое количество спайков N за время $t = 100$ демонстрирует модифицированный осциллятор ФитцХью–Нагумо в зависимости от амплитуды и длительности одиночного импульсного воздействия $I_e(t)$. Рис. 2, *a* построен при изменении амплитуды A_e импульсного сигнала с шагом 0.002 и изменении длительности w_e импульса с шагом 0.6 при параметрах осциллятора: $\varepsilon = 0.01$, $a_{\text{rest}} = 1.1$, $\tau = 10$. Начальные условия одинаковы для каждой точки на плоскости параметров (w_e, A_e) . Из рис. 2, *a* видно, что число спайков растет как с увеличением A_e по модулю, так и с увеличением w_e , то есть в ответ на внешний стимул модифицированный осциллятор ФитцХью–Нагумо может демонстрировать серию из двух или более спайков, идущих подряд друг за другом. Классический осциллятор ФитцХью–Нагумо [2, 10] способен сгенерировать лишь один спайк в ответ на одиночное импульсное воздействие и не демонстрирует серии из нескольких последовательных спайков.

На рис. 2, *b* показаны временные реализации сигналов $u(t)$, $a(t)$, $I_e(t)$ для точки на рис. 2, *a* с координатами $w_e = 10$, $A_e = -0.4$. Для наглядности момент времени $t = 10$, соответствующий началу импульсного сигнала $I_e(t)$, показан вертикальной штриховой линией. Под действием сигнала $I_e(t)$ пороговый параметр $a(t)$ становится меньше 1, и переменная $u(t)$ демонстрирует пять спайков подряд, после чего осциллятор возвращается в состояние равновесия.

Если одиночный стимул оказался слабым и сигнал $I_e(t)$ не вызвал генерацию спайка, он все равно изменил параметр $a(t)$, приблизив его к пороговому значению. После окончания импульсного воздействия параметр $a(t)$ экспоненциально стремится к значению a_{rest} . Значит, если вскоре после слабого стимула (пока $a(t)$ немного больше 1) подать на осциллятор (1) еще один точно такой же слабый стимул, осциллятор может сгенерировать спайки. На рис. 3, *a* построена зависимость количества спайков, генерируемых осциллятором (1) в ответ на два одинаковых импульсных сигнала $I_e(t)$ с $A_e = -0.3$ и $w_e = 5$, от интервала времени Δt между началом первого и началом второго импульса. При $\Delta t > 24.6$ нейроподобный осциллятор (1)

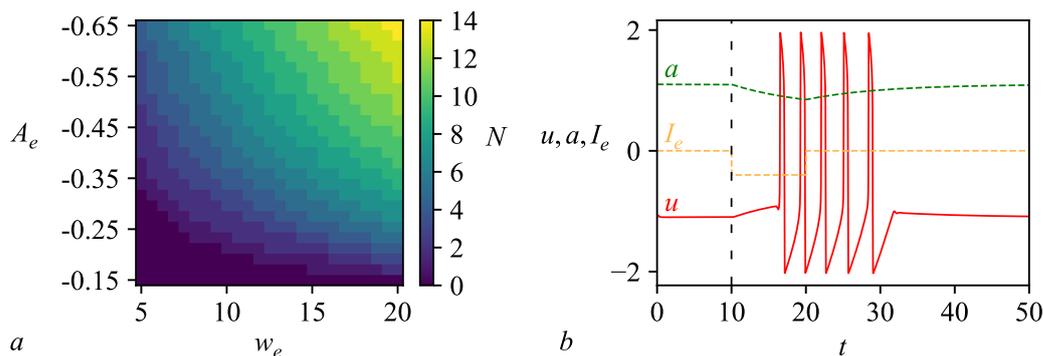


Рис. 2. *a* – Количество спайков N , генерируемых осциллятором (1) при $\varepsilon = 0.01$, $a_{\text{rest}} = 1.1$, $\tau = 10$ в зависимости от длительности и амплитуды импульсного воздействия $I_e(t)$. *b* – Временные реализации переменной $u(t)$, порогового параметра $a(t)$ и импульсного сигнала $I_e(t)$ при $A_e = -0.4$, $w_e = 10$ (цвет онлайн)

Fig. 2. *a* – Number N of spikes generated by oscillator (1) at $\varepsilon = 0.01$, $a_{\text{rest}} = 1.1$, and $\tau = 10$ depending on the duration and amplitude of the impulse action $I_e(t)$. *b* – Temporal realizations of the variable $u(t)$, threshold parameter $a(t)$, and impulse signal $I_e(t)$ at $A_e = -0.4$ and $w_e = 10$ (color online)

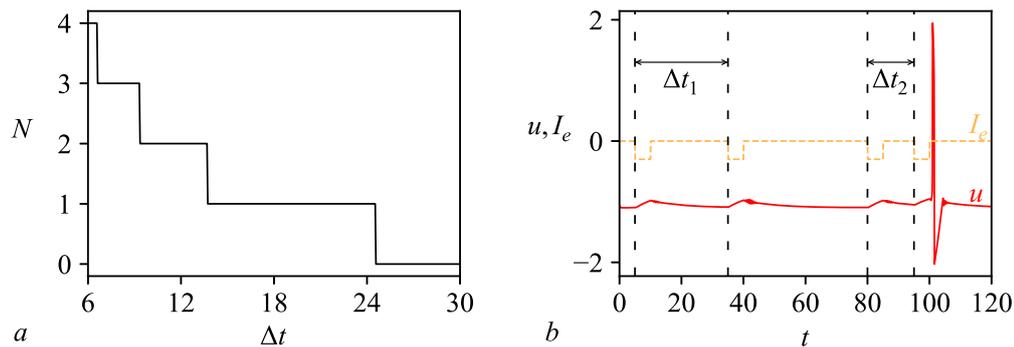


Рис. 3. *a* – Количество спайков N , генерируемых осциллятором (1) при $\varepsilon = 0.01$, $a_{\text{rest}} = 1.1$, $\tau = 10$ в зависимости от интервала времени Δt между двумя одинаковыми импульсами $I_e(t)$ при $A_e = -0.3$, $w_e = 5$. *b* – Временные реализации переменной $u(t)$ и импульсного сигнала $I_e(t)$ при $\Delta t_1 = 30$ и $\Delta t_2 = 15$. Вертикальными штриховыми линиями показаны моменты времени, соответствующие началу импульса

Fig. 3. *a* – Number N of spikes generated by oscillator (1) at $\varepsilon = 0.01$, $a_{\text{rest}} = 1.1$, and $\tau = 10$ depending on the time interval Δt between two identical impulses $I_e(t)$ at $A_e = -0.3$ and $w_e = 5$. *b* – Temporal realizations of the variable $u(t)$ and impulse signal $I_e(t)$ at $\Delta t_1 = 30$ and $\Delta t_2 = 15$. The vertical dashed lines show the moments of time corresponding to the beginning of the impulse

не демонстрирует спайков. При меньших значениях Δt два последовательных импульса $I_e(t)$ возбуждают осциллятор, при этом одного импульса $I_e(t)$ недостаточно для генерации спайка.

На рис. 3, *b* показаны временные реализации $u(t)$ и $I_e(t)$ для случаев $\Delta t_1 = 30$ и $\Delta t_2 = 15$. В первом из этих случаев спайковая активность отсутствует, а во втором случае осциллятор генерирует один спайк. В отличие от модифицированного осциллятора ФитцХью–Нагумо классический осциллятор ФитцХью–Нагумо не возбуждается последовательностью импульсов, если их амплитуда ниже пороговой.

На рис. 4 построена зависимость количества спайков N , генерируемых осциллятором (1), от величины постоянной времени τ при фиксированных значениях других параметров в случае одиночного импульсного воздействия $I_e(t)$. Выбор значений параметра τ зависит от амплитуды A_e и длительности w_e импульсного сигнала $I_e(t)$, а также целей использования модели. В случае

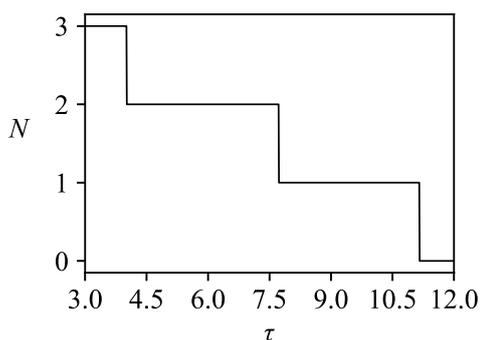


Рис. 4. Количество спайков N , генерируемых осциллятором (1) при $\varepsilon = 0.01$, $a_{\text{rest}} = 1.1$, $A_e = -0.35$, $w_e = 5$ в зависимости от постоянной времени τ

Fig. 4. Number N of spikes generated by oscillator (1) at $\varepsilon = 0.01$, $a_{\text{rest}} = 1.1$, $A_e = -0.35$, and $w_e = 5$ depending on the time constant τ

использования предложенного нейроподобного осциллятора в качестве узла спайковой нейронной сети логично будет выбрать такое значение τ , чтобы при максимально допустимом значении коэффициента синаптической связи (то есть при зафиксированном максимальном значении w_e) один импульс пресинаптического осциллятора вызывал один импульс постсинаптического осциллятора. Для случая, изображенного на рис. 4, интервал оптимальных значений параметра τ лежит примерно в интервале 8...11, на котором $N = 1$.

Рассмотрим совокупное влияние импульсных сигналов $I_e(t)$ и $I_i(t)$ на динамику осциллятора (1). Воздействие импульсом $I_e(t)$ является возбуждающим и приводит к генерации спайка, рис. 5, *a*. Однако, если следом

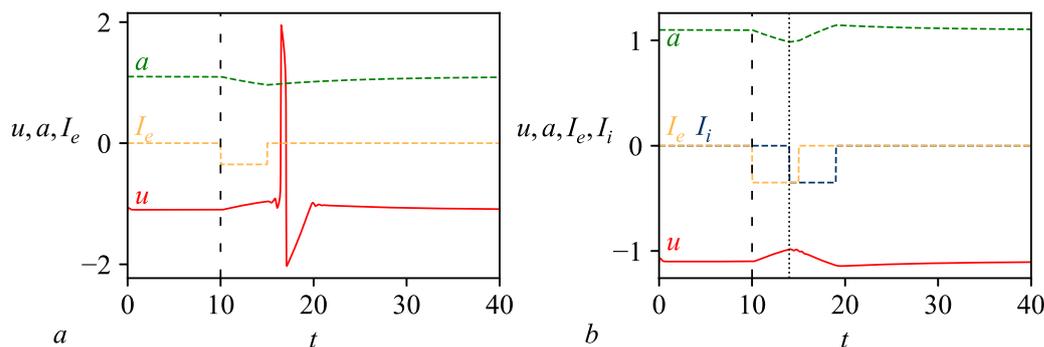


Рис. 5. Временные реализации переменной $u(t)$, порогового параметра $a(t)$ и импульсных сигналов $I_e(t)$ и $I_i(t)$ при $A_e = -0.35$, $w_e = 5$, $I_i(t) = 0$ (a) и $A_e = A_i = -0.35$, $w_e = w_i = 5$ (b). Штриховой и точечной линиями показаны моменты времени, соответствующие началу импульсов $I_e(t)$ и $I_i(t)$ соответственно (цвет онлайн)

Fig. 5. Temporal realizations of the variable $u(t)$, threshold parameter $a(t)$, and impulse signals $I_e(t)$ and $I_i(t)$ at $A_e = -0.35$, $w_e = 5$, and $I_i(t) = 0$ (a) and $A_e = A_i = -0.35$, and $w_e = w_i = 5$ (b). The dashed and dotted lines show the moments of time corresponding to the beginning of the impulses $I_e(t)$ and $I_i(t)$, respectively (color online)

за сигналом $I_e(t)$ подать на осциллятор сигнал $I_i(t)$ с такой же амплитудой и длительностью, как у $I_e(t)$, генерации спайка не происходит, рис. 5, b. Таким образом, сигнал $I_i(t)$ препятствует спайковой активности.

Заключение

Нами предложена модифицированная модель нейроподобного осциллятора ФитцХью–Нагумо, в которой величина порогового параметра зависит от времени и может меняться под действием внешних импульсных сигналов. В отличие от классического осциллятора ФитцХью–Нагумо спайковая активность модифицированного осциллятора зависит от длительности внешнего импульсного сигнала, модифицированный осциллятор способен демонстрировать серию из нескольких спайков в ответ на одиночное внешнее импульсное воздействие, а также может возбуждаться последовательностью импульсов, имеющих амплитуду ниже пороговой. Предложенную нами модель можно интерпретировать как модель бёрстового нейрона с двумя медленными переменными, в которой третье уравнение описывает динамику медленной модулирующей переменной аналогично уравнению Хиндмарша–Роуза. Однако отсутствие периодического внешнего воздействия не позволяет наблюдать в нашей модели типичную бёрстовую динамику.

Предложенная модификация осциллятора ФитцХью–Нагумо может быть достаточно просто реализована в радиофизическом эксперименте с помощью аналого-цифровой установки. При этом нейроподобный осциллятор ФитцХью–Нагумо реализуется в аналоговом виде с использованием аналоговых электронных элементов, а цифровая схема регулирует длительность входных импульсов.

В дальнейшем планируется использовать предложенную модель для построения спайковых нейронных сетей. Обучение таких спайковых нейронных сетей может быть проведено с помощью изменения синаптических связей за счет настройки весов синапсов w_e и w_i , соответствующих длительности внешних импульсных сигналов.

Список литературы

1. Yamazaki K., Vo-Ho V.-K., Bulsara D., Le N. Spiking neural networks and their applications: A review // Brain Sci. 2022. Vol. 12, iss. 7. P. 863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.

2. *Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Щапин Д. С., Некоркин В. И.* Нелинейные динамические модели нейронов: Обзор // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 4. С. 5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
3. *Lazar A. A.* Time encoding with an integrate-and-fire neuron with a refractory period // *Neurocomputing*. 2004. Vol. 58–60. P. 53–58. DOI: 10.1016/j.neucom.2004.01.022.
4. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. Vol. 117, iss. 4. P. 500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
5. *Kumar J., Gupta P. D., Ghosh S.* The role of nonlinear axonal membrane capacitance in modulating ion channel cooperativity in action potential dynamics: Studies on Hodgkin-Huxley’s model // *Biophys. Chem.* 2025. Vol. 319. P. 107391. DOI: 10.1016/j.bpc.2025.107391.
6. *Morris C., Lecar H.* Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber // *Biophys. J.* 1981. Vol. 35, iss. 1. P. 193–213. DOI: 10.1016/S0006-3495(81)84782-0.
7. *Hindmarsh J. L., Rose R. M.* A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // *Proc. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.* 1984. Vol. 221, iss. 1222. P. 87–102. DOI: 10.1098/rspb.1984.0024.
8. *Storace M., Linaro D., Lange E.* The Hindmarsh-Rose neuron model: bifurcation analysis and piecewise-linear approximations // *Chaos*. 2008. Vol. 18, iss. 3. P. 033128. DOI: 10.1063/1.2975967.
9. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes // *Biophys. J.* 1961. Vol. 1. P. 445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
10. *Dahlem M. A., Hiller G., Panchuk A., Schöll E.* Dynamics of delay-coupled excitable neural systems // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2009. Vol. 19, iss. 2. P. 745–753. DOI: 10.1142/S0218127409023111.
11. *Навроцкая Е. В., Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Оценка параметров импульсного воздействия с помощью сети нейроподобных осцилляторов // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 495–512. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512.
12. *Izhikevich E. M.* Simple model of spiking neurons // *IEEE Trans. Neural Netw.* 2003. Vol. 14, iss. 6. P. 1569–1572. DOI: 10.1109/TNN.2003.820440.
13. *Rulkov N. F.* Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65, iss. 4. P. 041922. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041922.
14. *Courbage M., Nekorkin V. I., Vdovin L. V.* Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity // *Chaos*. 2007. Vol. 17, iss. 4. P. 043109. DOI: 10.1063/1.2795435.
15. *Мищенко М. А., Шалфеев В. Д., Матросов В. В.* Нейроподобная динамика в системе фазовой синхронизации // Известия вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 4. С. 122–130. DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-4-122-130.
16. *Matrosov V. V., Mishchenko M. A., Shalfeev V. D.* Neuron-like dynamics of a phase-locked loop // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2013. Vol. 222. P. 2399–2405. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02024-9.
17. *Сысоев И. В., Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Нейроподобная динамика в системе фазовой автоподстройки частоты с запаздывающей обратной связью // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46, № 14. С. 36–38. DOI: 10.21883/PJTF.2020.14.49665.18267.
18. *Kipelkin I. M., Gerasimova S. A., Belov A. I., Guseinov D. V., Kruglov A. V., Serov D. A., Talanov M. O., Mikhaylov A. N., Kazantsev V. B.* Memristor-based model of neuronal excitability and synaptic potentiation // *Front. Neurosci.* 2024. Vol. 18. P. 1456386. DOI: 10.3389/fnins.2024.1456386.
19. *Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю.* Новый подход к математическому моделированию химических синапсов // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 376–393. DOI: 10.18500/0869-6632-003099.

20. *Xu Y., Jia Y., Ma J., Alsaedi A., Ahmad B.* Synchronization between neurons coupled by memristor // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2017. Vol. 104. P. 435–442. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.09.002.
21. *Герасимова С. А., Михайлов А. Н., Белов А. И., Королев Д. С., Горшков О. Н., Казанцев В. Б.* Имитация синаптической связи нейроноподобных генераторов с помощью мемристивного устройства // *ЖТФ*. 2017. Т. 87, № 8. С. 1248–1254. DOI: 10.21883/JTF.2017.08.44735.2033.
22. *Korneev I. A., Semenov V. V., Slepnev A. V., Vadivasova T. E.* The impact of memristive coupling initial states on travelling waves in an ensemble of the FitzHugh-Nagumo oscillators // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2021. Vol. 147. P. 110923. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110923.
23. *Stasenko S. V., Mikhaylov A. N., Fedotov A. A., Smirnov V. A., Kazantsev V. B.* Astrocyte control bursting mode of spiking neuron network with memristor-implemented plasticity // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2024. Vol. 181. P. 114648. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114648.
24. *Навроцкая Е. В., Курбако А. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Синхронизация ансамбля мемристивно связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо // *Известия вузов. ПНД*. 2024. Т. 32, № 1. С. 96–110. DOI: 10.18500/0869-6632-003085.
25. *Markram H., Gerstner W., Sjöström P. J.* Spike-timing-dependent plasticity: A comprehensive overview // *Front. Synaptic Neurosci.* 2012. Vol. 4. P. 2. DOI: 10.3389/fnsyn.2012.00002.
26. *Lobov S. A., Chernyshov A. V., Krilova N. P., Shamshin M. O., Kazantsev V. B.* Competitive learning in a spiking neural network: Towards an intelligent pattern classifier // *Sensors*. 2020. Vol. 20, iss. 2. P. 500. DOI: 10.3390/s20020500.
27. *Dong Y., Zhao D., Li Y., Zeng Y.* An unsupervised STDP-based spiking neural network inspired by biologically plausible learning rules and connections // *Neural Netw.* 2023. Vol. 165. P. 799–808. DOI: 10.1016/j.neunet.2023.06.019.
28. *Rahman N. A., Yusoff N.* Modulated spike-time dependent plasticity (STDP)-based learning for spiking neural network (SNN): A review // *Neurocomputing*. 2025. Vol. 618. P. 129170. DOI: 10.1016/j.neucom.2024.129170.
29. *Sboev A., Vlasov D., Rybka R., Serenko A.* Solving a classification task by spiking neurons with STDP and temporal coding // *Procedia Computer Science*. 2018. Vol. 123. P. 494–500. DOI: 10.1016/j.procs.2018.01.075.
30. *Diehl P. U., Cook M.* Unsupervised learning of digit recognition using spike-timing-dependent plasticity // *Front. Comput. Neurosci.* 2015. Vol. 9. P. 99. DOI: 10.3389/fncom.2015.00099.
31. *Kurbako A. V., Ezhov D. M., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* Spike-timing dependent plasticity learning of small spiking neural network for image recognition // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2025. Vol. 234. P. 3659–3668. DOI: 10.1140/epjs/s11734-025-01512-3.
32. *Lobov S. A., Mikhaylov A. N., Shamshin M., Makarov V. A., Kazantsev V. B.* Spatial properties of STDP in a self-learning spiking neural network enable controlling a mobile robot // *Front. Neurosci.* 2020. Vol. 14. P. 88. DOI: 10.3389/fnins.2020.00088.
33. *Егоров Н. М., Пономаренко В. И., Сысоев И. В., Сысоева М. В.* Имитационное моделирование эпилептиформной активности сетью нейроноподобных радиотехнических осцилляторов // *ЖТФ*. 2021. Т. 91, № 3. С. 519–528. DOI: 10.21883/JTF.2021.03.50532.237-20.
34. *Egorov N. M., Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Sysoev I. V., Sysoeva M. V.* Transient dynamics in electronic neuron-like circuits in application to modeling epileptic seizures // *Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 108. P. 4231–4242. DOI: 10.1007/s11071-022-07379-6.
35. *Егоров Н. М., Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Корнилов М. В., Сысоев И. В.* Кольцевой генератор нейроноподобной активности с перестраиваемой частотой // *Известия вузов. ПНД*. 2023. Т. 31, № 1. С. 103–120. DOI: 10.18500/0869-6632-003025.
36. *Annaswamy A. M., Fradkov A. L.* A historical perspective of adaptive control and learning // *Annu. Rev. Contr.* 2021. Vol. 52. P. 18–41. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2021.10.014.

References

1. Yamazaki K, Vo-Ho V-K, Bulsara D, Le N. Spiking neural networks and their applications: A review. *Brain Sciences*. 2022;12(7):863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.
2. Dmitrichev AS, Kasatkin DV, Klinshov VV, Kirillov SYu, Maslennikov OV, Shchapin DS, Nekorkin VI. Nonlinear dynamical models of neurons. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(4):5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
3. Lazar AA. Time encoding with an integrate-and-fire neuron with a refractory period. *Neurocomputing*. 2004;58–60:53–58. DOI: 10.1016/j.neucom.2004.01.022.
4. Hodgkin AL, Huxley AF. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* 1952;117(4):500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
5. Kumar J, Gupta PD, Ghosh S. The role of nonlinear axonal membrane capacitance in modulating ion channel cooperativity in action potential dynamics: Studies on Hodgkin-Huxley's model. *Biophys. Chem.* 2025;319:107391. DOI: 10.1016/j.bpc.2025.107391.
6. Morris C, Lecar H. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophys. J.* 2025;319:107391. DOI: 10.1016/S0006-3495(81)84782-0.
7. Hindmarsh JL, Rose RM. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.* 1984;221(1222):87–102. DOI: 10.1098/rspb.1984.0024.
8. Storace M, Lino D, Lange E. The Hindmarsh-Rose neuron model: bifurcation analysis and piecewise-linear approximations. *Chaos*. 2008;18(3):033128 DOI: 10.1063/1.2975967.
9. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes. *Biophys. J.* 1961;1:445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
10. Dahlem MA, Hiller G, Panchuk A, Schöll E. Dynamics of delay-coupled excitable neural systems. *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2009;19(2):745–753. DOI: 10.1142/S0218127409023111.
11. Navrotskaya EV, Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Estimation of impulse action parameters using a network of neuronlike oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(4):495–512. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512.
12. Izhikevich EM. Simple model of spiking neurons. *IEEE Trans. Neural Netw.* 2003;14(6):1569–1572. DOI: 10.1109/TNN.2003.820440.
13. Rulkov NF. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Phys. Rev. E*. 2002;65(4):041922. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041922.
14. Courbage M, Nekorkin VI, Vdovin LV. Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity. *Chaos*. 2007;17(4):043109. DOI: 10.1063/1.2795435.
15. Mischenko MA, Shalfeev VD, Matrosov VV. Neuron-like dynamics in phase-locked loop. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2012;20(4):122–130 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-4-122-130.
16. Matrosov VV, Mishchenko MA, Shalfeev VD. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2013;222:2399–2405. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02024-9.
17. Sysoev IV, Sysoeva MV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Neural-like dynamics in a phase-locked loop system with delayed feedback. *Tech. Phys. Lett.* 2020;46(7):710–712. DOI: 10.1134/S1063785020070287.
18. Kipelkin IM, Gerasimova SA, Belov AI, Guseinov DV, Kruglov AV, Serov DA, Talanov MO, Mikhaylov AN, Kazantsev VB. Memristor-based model of neuronal excitability and synaptic potentiation. *Front. Neurosci.* 2024;18:1456386. DOI: 10.3389/fnins.2024.1456386.
19. Glyzin DS, Glyzin SD, Kolesov AYu. A new approach to mathematical modeling of chemical synapses. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(3):376–393 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-003099.

20. Xu Y, Jia Y, Ma J, Alsaedi A, Ahmad B. Synchronization between neurons coupled by memristor. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2017;104:435–442. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.09.002.
21. Gerasimova SA, Mikhaylov AN, Belov AI, Korolev DS, Gorshkov ON, Kazantsev VB. Simulation of synaptic coupling of neuron-like generators via a memristive device. *Tech. Phys.* 2017;62:1259–1265. DOI: 10.1134/S1063784217080102.
22. Korneev IA, Semenov VV, Slepnev AV, Vadivasova TE. The impact of memristive coupling initial states on travelling waves in an ensemble of the FitzHugh-Nagumo oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2021;147:110923. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110923.
23. Stasenko SV, Mikhaylov AN, Fedotov AA, Smirnov VA, Kazantsev VB. Astrocyte control bursting mode of spiking neuron network with memristor-implemented plasticity. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2024;181:114648. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114648.
24. Navrotskaya EV, Kurbako AV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Synchronisation of the ensemble of nonidentical FitzHugh-Nagumo oscillators with memristive couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(1):96–110. DOI: 10.18500/0869-6632-003085.
25. Markram H, Gerstner W, Sjöström PJ. Spike-timing-dependent plasticity: A comprehensive overview. *Front. Synaptic Neurosci.* 2012;4:2. DOI: 10.3389/fnsyn.2012.00002.
26. Lobov SA, Chernyshov AV, Krilova NP, Shamshin MO, Kazantsev VB. Competitive learning in a spiking neural network: Towards an intelligent pattern classifier. *Sensors*. 2020;20(2):500. DOI: 10.3390/s20020500.
27. Dong Y, Zhao D, Li Y, Zeng Y. An unsupervised STDP-based spiking neural network inspired by biologically plausible learning rules and connections. *Neural Netw.* 2023;165:799–808. DOI: 10.1016/j.neunet.2023.06.019.
28. Rahman NA, Yusoff N. Modulated spike-time dependent plasticity (STDP)-based learning for spiking neural network (SNN): A review. *Neurocomputing*. 2025;618:129170. DOI: 10.1016/j.neucom.2024.129170.
29. Sboev A, Vlasov D, Rybka R, Serenko A. Solving a classification task by spiking neurons with STDP and temporal coding. *Procedia Computer Science*. 2018;123:494–500. DOI: 10.1016/j.procs.2018.01.075.
30. Diehl PU, Cook M. Unsupervised learning of digit recognition using spike-timing-dependent plasticity. *Front. Comput. Neurosci.* 2015;9:99. DOI: 10.3389/fncom.2015.00099.
31. Kurbako AV, Ezhov DM, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Spike-timing dependent plasticity learning of small spiking neural network for image recognition. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2025;234:3659–3668. DOI: 10.1140/epjs/s11734-025-01512-3.
32. Lobov SA, Mikhaylov AN, Shamshin M, Makarov VA, Kazantsev VB. Spatial properties of STDP in a self-learning spiking neural network enable controlling a mobile robot. *Front. Neurosci.* 2020;14:88. DOI: 10.3389/fnins.2020.00088.
33. Egorov NM, Ponomarenko VI, Sysoev IV, Sysoeva MV. Simulation of epileptiform activity using network of neuron-like radio technical oscillators. *Tech. Phys.* 2021;66:505–514. DOI: 10.1134/S1063784221030063.
34. Egorov NM, Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Sysoev IV, Sysoeva MV. Transient dynamics in electronic neuron-like circuits in application to modeling epileptic seizures. *Nonlinear Dynamics*. 2022;108:4231–4242. DOI: 10.1007/s11071-022-07379-6.
35. Egorov NM, Sysoeva MV, Ponomarenko VI, Kornilov MV, Sysoev IV. Ring generator of neuron-like activity with tunable frequency. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(1):103–120. DOI: 10.18500/0869-6632-003025.
36. Annaswamy AM, Fradkov AL. A historical perspective of adaptive control and learning. *Annu. Rev. Contr.* 2021;52:18–41. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2021.10.014.



Ежов Дмитрий Максимович — родился в Саратове (1999). Окончил Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского по направлению «Биотехнические системы и технологии» (2023). В настоящее время — ассистент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Научные интересы сосредоточены в области моделей нейронов и спайковых нейронных сетей.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ezhovdmitryi@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-4994-6959
AuthorID (eLibrary.Ru): 1252910



Курбако Александр Васильевич — родился в Знаменске (1997). Окончил бакалавриат (2019) и магистратуру (2021) Саратовского государственного университета по направлению «Биотехнические системы и технологии». Обучается в аспирантуре СГУ имени Н. Г. Чернышевского. Работает ассистентом на кафедре динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ и младшим научным сотрудником СФ ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов — анализ временных рядов.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН
E-mail: kurbako.sasha@mail.ru
ORCID: 0000-0002-3479-4609
AuthorID (eLibrary.Ru): 1055278



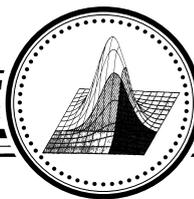
Пономаренко Владимир Иванович — родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (СГУ, 1982). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов — статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1579-6465
AuthorID (eLibrary.Ru): 39986



Прохоров Михаил Дмитриевич — родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-4069-9410
AuthorID (eLibrary.Ru): 39985



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6)

Научная статья
УДК 530.182, 517.912, 517.929

DOI: 10.18500/0869-6632-003180
EDN: XENQXM

Обращение степенных рядов и точные решения уравнений нелинейной математической физики

А. И. Землянухин[✉], Н. А. Артамонов, А. В. Бочкарев, В. И. Безлюдный

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., Россия
E-mail: ✉azemlyanukhin@mail.ru, twostvoll@bk.ru, ab2009sar@list.ru, bezlyudnyivi@mail.ru

Поступила в редакцию 22.04.2025, принята к публикации 22.05.2025,
опубликована онлайн 19.06.2025, опубликована 28.11.2025

Аннотация. Цель. Разработка нового метода нахождения точных решений уравнений нелинейной математической физики. Методы. Частичная сумма ряда метода возмущений, записанная для исходного нелинейного уравнения, представляется в форме степенного ряда по степеням экспоненциальной функции, являющейся решением линеаризованного уравнения. Рациональная производящая функция последовательности коэффициентов степенного ряда представляет собой точное решение исходного уравнения. Метод основан на использовании свойства, состоящего в том, что обращенные степенные ряды для солитоноподобных решений обрываются, начиная со степени, не менее чем на единицу превосходящей порядок полюса решения. Результаты. Эффективность метода продемонстрирована при построении точных локализованных решений неинтегрируемого уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса, а также нелинейных интегрируемых дифференциально-разностных уравнений. Заключение. Предложенный метод применим для решения интегрируемых и неинтегрируемых дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а также интегрируемых дифференциально-разностных уравнений.

Ключевые слова: обращение степенного ряда, производящая функция, нелинейные дифференциальные уравнения, дифференциально-разностные уравнения, точные решения.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-29-00071).

Для цитирования: Землянухин А. И., Артамонов Н. А., Бочкарев А. В., Безлюдный В. И. Обращение степенных рядов и точные решения уравнений нелинейной математической физики // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 6. С. 929–942. DOI: 10.18500/0869-6632-003180. EDN: XENQXM

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Power series reversion and exact solutions of nonlinear mathematical physics equations

A. I. Zemlyanukhin[✉], N. A. Artamonov, A. V. Bochkarev, V. I. Bezlyudnyi

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia

E-mail: ✉azemlyanukhin@mail.ru, twostvoll@bk.ru, ab2009sar@list.ru, bezlyudnyivi@mail.ru

Received 22.04.2025, accepted 22.05.2025, available online 19.06.2025, published 28.11.2025

Abstract. *Purpose.* Develop a new method for finding exact solutions to equations of nonlinear mathematical physics. *Methods.* The partial sum of a perturbation series, written for the original nonlinear equation, is represented as a power series in powers of the exponential function, which is the solution of the linearized equation. The rational generating function of the sequence of coefficients of the power series represents the exact solution of the original equation. The method is based on the property that inverted power series for soliton-like solutions terminates at least one greater than the order of the pole of the solution. *Results.* The effectiveness of the method is demonstrated in constructing exact localized solutions of the nonintegrable Korteweg–de Vries–Burgers equation, as well as nonlinear integrable differential-difference equations. *Conclusion.* The proposed method is applicable to solving integrable and non-integrable differential equations with constant coefficients, as well as integrable differential-difference equations.

Keywords: power series reversion, generating function, nonlinear differential equations, differential-difference equations, exact solutions.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-29-00071).

For citation: Zemlyanukhin AI, Artamonov NA, Bochkarev AV, Bezlyudnyi VI. Power series reversion and exact solutions of nonlinear mathematical physics equations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(6):929–942. DOI: 10.18500/0869-6632-003180

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Проблему разработки методов построения точных частных решений, возникающих в приложениях нелинейных уравнений математической физики, актуальную на протяжении нескольких последних десятилетий, в значительной степени можно считать решенной. В настоящее время в распоряжении исследователей имеется обширный список эффективных подходов, позволяющих получать физически состоятельные точные решения, по крайней мере, в непрерывном случае [1–3]. В нелинейных дискретных системах, описываемых разностными и дифференциально-разностными уравнениями, ситуация до сих пор менее обнадеживающая. Имеющие физический смысл точные решения удается построить только для модельных интегрируемых уравнений, и список методов здесь значительно скромнее. Интегрируемость многоточечных решеточных уравнений чаще всего доказывается с использованием громоздких процедур построения пар Лакса и иерархий законов сохранения [4]. В этом случае получение явного вида точных решений остается открытой технически сложной проблемой. Одним из традиционных подходов к анализу нелинейных цепочек является переход к соответствующим континуальным длинноволновым пределам [5]. Однако даже интегрируемость непрерывного аналога с известными многосолитонными решениями не может обеспечить существования точного решения исходной дискретной модели. Цепочка Ферми–Паста–Улама прекрасно подтверждает это утверждение. По нашему мнению, остается весьма актуальной проблема разработки методов, позволяющих строить точные частные решения как в непрерывных, так и в дискретных нелинейных системах. В данной статье авторы ставят своей целью предложить простой, легко программируемый и вычислительно экономный метод для решения указанной проблемы в некоторых случаях. Статья организована

следующим образом. В первом параграфе излагается основная идея метода и иллюстрируется его использование для нахождения производящей функции известной числовой последовательности. Во втором параграфе строится точное решение неинтегрируемого нелинейного эволюционного уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса. В третьем и четвертом параграфах метод применяется для построения точных решений нелинейных трехточечного и пятиточечного интегрируемых дифференциально-разностных уравнений. В заключении обсуждаются преимущества и ограничения предложенного подхода.

1. Идея метода

На первом этапе предлагаемого подхода необходимо получить ряд по степеням экспонент, являющихся решениями последовательности линейных задач, из исходного непрерывного или дискретного уравнения. Такой ряд возникает при использовании метода возмущений, когда экспонента выступает в качестве решения линеаризованного уравнения. Известно [6, 7], что ряды метода возмущений могут сходиться медленно и даже расходиться, так что возникает проблема возможности и законности суммирования для получения точного решения. Дальнейшие рассуждения основаны на представлениях Леонарда Эйлера о суммировании расходящихся рядов [8]: «...мы скажем, что сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд». Другими словами, Эйлер принимает за сумму степенного ряда, вне зависимости от того, сходится он или расходится, выражение для производящей функции последовательности его коэффициентов. Это выражение, построенное для ряда метода возмущений, является искомым точным решением исходного уравнения, что проверяется подстановкой. В [5, 9] отмечалось, что «коэффициенты ряда Тейлора в совокупности несут гораздо большую информацию о значениях функции, чем его частичные суммы. Надо только уметь ее извлекать, и один из способов сделать это заключается в построении паде-аппроксимант». Использование диагональных аппроксимант Паде (АП) лежит в основе предложенного недавно метода геометрического ряда [10, 11]. Этот метод может применяться для непрерывных и дискретных уравнений, однако возможны вычислительные трудности, связанные с необходимостью факторизации разностей последовательных диагональных АП высоких порядков. Будем исходить из того, что искомая производящая функция рациональна. В общем случае рациональность суммы степенного ряда доказывается в терминах квазимногочленов [12] или с использованием критерия, связанного с обращением в ноль последовательности ганкелевых определителей, начиная с некоторого порядка [13]. Все известные нам физически реализуемые точные локализованные решения нелинейных уравнений представляют собой или выражаются через рациональные дроби по степеням экспоненциальных функций [10]. При этом степень знаменателя, не меньшая порядка полюса искомого решения, превосходит степень числителя дроби. Более того, после выделения из дроби постоянного слагаемого, числитель остатка, как правило, включает единственное слагаемое. Это означает, что обратная остатку дробь представляется многочленом невысокого порядка (возникающие в приложениях уравнения практически никогда не имеют решений с порядком полюса, большим четырех). Таким образом, при обращении ряда метода возмущений происходит обнуление коэффициентов, начиная со степеней, превосходящих порядок полюса решения, и ряд превращается в многочлен. Если соответствующие коэффициенты не обнуляются безусловно, то требование их обнуления доставляет дополнительные условия на коэффициенты уравнения и параметры искомого решения.

Прежде чем применять процедуру обращения степенного ряда к решению нелинейных уравнений, покажем, как её можно использовать для нахождения производящей функции числовой последовательности Пелля, определяемой рекуррентным соотношением [14]

$$p_n = 2ap_{n-1} + (b - a^2)p_{n-2}. \quad (1)$$

Вычислим коэффициенты производящей функции $P = \sum_{n=1} p_n x^n$, полагая первые два коэффициента p_1 и p_2 произвольными:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1, \\ p_2 &= p_2, \\ p_3 &= -(a^2 - b)p_1 + 2ap_2, \\ p_4 &= -2a(a^2 - b)p_1 + (3a^2 + b)p_2, \\ p_5 &= -(a^2 - b)(3a^2 + b)p_1 + 4a(a^2 + b)p_2, \\ p_6 &= -4a(a^2 - b)(a^2 + b)p_1 + (5a^4 + 10a^2b + b^2)p_2, \\ p_7 &= -(a^2 - b)(5a^4 + 10a^2b + b^2)p_1 + 2a(3a^2 + b)(a^2 + 3b)p_2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

По определению степенной ряд $P^{-1} = \sum a_n x^n$ называется обратным для ряда $P = \sum_{n=1} p_n x^n$, если

$$PP^{-1} = 1. \quad (3)$$

Чтобы произведение PP^{-1} не зависело от x , индекс в сумме $\sum a_n x^n$ должен начинаться с -1 . Найдём последовательно несколько первых коэффициентов a_n , используя равенство (3).

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{p_1}, \\ a_0 &= -\frac{p_2}{p_1^2}, \\ a_1 &= \frac{(a^2 - b)p_1^2 - 2ap_1p_2 + p_2^2}{p_1^3}, \\ a_2 &= \frac{(2ap_1 - p_2)(a^2p_1^2 - 2ap_1p_2 - bp_1^2 + p_2^2)}{p_1^4}, \\ a_3 &= \frac{(2ap_1 - p_2)^2(a^2p_1^2 - 2ap_1p_2 - bp_1^2 + p_2^2)}{p_1^5}, \\ a_4 &= \frac{(2ap_1 - p_2)^3(a^2p_1^2 - 2ap_1p_2 - bp_1^2 + p_2^2)}{p_1^6}. \end{aligned} \quad (4)$$

Обратим внимание, что числители коэффициентов с a_2 по a_4 включают два одинаковых множителя

$$\begin{aligned} C_1 &= 2ap_1 - p_2, \\ C_2 &= a^2p_1^2 - 2ap_1p_2 - bp_1^2 + p_2^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Предположим, что старшие коэффициенты также содержат эти множители.

Положив $C_1 = 0$, получим

$$p_2 = 2ap_1, \quad (6)$$

$$P^{-1} = \sum_{n=-1} a_n x^n = \frac{1}{p_1 x} - \frac{2a}{p_1} + \frac{(a^2 - b)x}{p_1} = \frac{1 - 2ax + (a^2 - b)x^2}{p_1 x}. \quad (7)$$

Обратный ряд обрывается на первых трех членах, и последняя дробь является его суммой. Следовательно, обращенная дробь играет роль суммы исходного ряда

$$P = \sum_{n=1} p_n x^n = \frac{p_1 x}{1 - 2ax + (a^2 - b)x^2}. \quad (8)$$

Выражение (8) является производящей функцией для последовательности коэффициентов (2) и определяет в замкнутой форме первую ветвь точного частного решения разностного уравнения (1). Чтобы убедиться в последнем, достаточно разложить (8) в степенной ряд и проверить, что его коэффициенты совпадают с соответствующими коэффициентами системы (2) при условии (6):

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1, \\ p_2 &= 2ap_1, \\ p_3 &= p_1(3a^2 + b), \\ p_4 &= 4ap_1(a^2 + b), \\ p_5 &= p_1(5a^4 + 10a^2b + b^2), \\ p_6 &= 2ap_1(3a^2 + b)(a^2 + 3b), \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Если положить $C_2 = 0$, получим

$$p_2 = (a \pm \sqrt{b})p_1, \quad (10)$$

$$P^{-1} = \sum_{n=-1} a_n x^n = \frac{1}{p_1 x} - \frac{a \pm \sqrt{b}}{p_1} = \frac{1 - (a \pm \sqrt{b})x}{p_1 x}, \quad (11)$$

и производящая функция второй ветви частного решения принимает вид

$$P = \frac{p_1 x}{1 - (a \pm \sqrt{b})x}. \quad (12)$$

2. Уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса

Известно [1], что уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса (КдВБ) не относится к классу точно решаемых уравнений, и решение задачи Коши для него не находится методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [15]. Это уравнение обладает некоторыми точными частными решениями в переменных бегущей волны. На рубеже 90-х годов 20 века бурно развивались методы построения точных решений неинтегрируемых МОЗР уравнений, и уравнение КдВБ является в этом отношении показательным. Дело в том, что в 1990 году вышла в свет монография [16], в которой был решен широкий круг задач волновой динамики газо- и парожидкостных сред. Относительно уравнения КдВБ на стр. 77 монографии сказано, что это уравнение «не имеет аналитических решений, и основным инструментом его исследования являются численные методы». На самом деле, уже в 1988 году точные частные решения обобщенных уравнений КдВБ были получены Н. А. Кудряшовым [17]. Построим точное частное решение неинтегрируемого уравнения КдВБ в форме

$$u_t + uu_x - Cu_{xx} + u_{xxx} = 0 \quad (13)$$

с параметром C перед диссипативным членом, используя процедуру обращения ряда.

Переходя в (13) к переменной бегущей волны $z = kx - \omega t$, после почленного интегрирования по переменной z получим

$$-\omega u + \frac{k}{2}u^2 - Ck^2u_z + k^3u_{zz} = 0. \quad (14)$$

Будем искать решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (14) в форме ряда с неизвестными коэффициентами по степеням показательной функции

$$u = \sum_{n=0} b_n (e^z)^n. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), группируя слагаемые по степеням e^z и приравнявая их нулю, в главном (нулевом) порядке получим

$$-\omega b_0 + \frac{1}{2} k b_0^2 = 0, \quad (16)$$

откуда

$$b_0 = \frac{2\omega}{k}. \quad (17)$$

В первом порядке по e^z имеем

$$(k^3 - Ck^2 + \omega)b_1 = 0, \quad (18)$$

откуда, считая $b_1 \neq 0$, получаем линейное дисперсионное соотношение

$$\omega = k^2(C - k). \quad (19)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при $(e^z)^2$, $(e^z)^3$, $(e^z)^4$, ..., получим

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{b_1^2}{2k(C - 3k)}, \\ b_3 &= \frac{b_1^3}{4k^2(C - 3k)(C - 4k)}, \\ b_4 &= \frac{b_1^4(3C - 10k)}{24k^3(C - 3k)^2(C - 4k)(C - 5k)}, \\ b_5 &= \frac{b_1^5(6C - 25k)}{96k^4(C - 3k)^2(C - 4k)(C - 5k)(C - 6k)}, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

После замены $e^z = x$ выражение (15) становится степенным рядом вида $P = \sum_{n=0} b_n x^n$, обратный ряд для которого также должен начинаться с постоянного члена: $P^{-1} = \sum_{n=0} a_n x^n$. Используя соотношение (3), получаем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2k(C - k)}, \\ a_1 &= -\frac{b_1}{4k^2(C - k)^2}, \\ a_2 &= -\frac{b_1^2}{4k^2(C - k)^3(C - 3k)}, \\ a_3 &= -\frac{b_1^3(5k + C)}{16k^3(C - k)^4(C - 3k)(C - 4k)}, \\ a_4 &= -\frac{b_1^4(5k + C)(C^2 + Ck - 14k^2)}{48k^4(C - k)^5(C - 3k)^2(C - 4k)(C - 5k)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Замечая, что коэффициенты обратного ряда, начиная с a_3 , содержат общий множитель $(5k + C)$, потребуем

$$k = -\frac{C}{5}. \quad (22)$$

При выполнении условия (22) обратный ряд обрывается на 3-м слагаемом

$$P^{-1} = -\frac{25}{12C^2} - \frac{625b_1x}{144C^4} - \frac{15625b_1^2x^2}{6912C^6} = -\frac{25}{6912} \frac{(24C^2 + 25b_1x)^2}{C^6}, \quad (23)$$

и его сумма (23) после обратной замены $x = e^z$ определяет искомого точное решение

$$u = -\frac{6912}{25} \frac{C^6}{(24C^2 + 25b_1 e^z)^2}. \quad (24)$$

Выражение (24) является точным частным решением уравнения КдВБ (14), записанного для переменной бегущей волны $z = kx - \omega t$, при выполнении условий (19), (22) и содержит две произвольные постоянные — параметр уравнения C и постоянную сдвига b_1 , всегда возникающую в решениях автономных уравнений. График решения при $b_1 > 0$ имеет форму кинка (рис. 1). В работах Н. А. Кудряшова [1, 17] для уравнения КдВБ с двумя произвольными коэффициентами найдено общее решение в переменной бегущей волны в терминах функции Вейерштрасса, которое в частном случае сводится к вещественному уединенно-волновому решению, также приведенному в [1, 17]. Точное локализованное решение (24), найденное нами для уравнения КдВБ (13) с одним произвольным коэффициентом, совпадает с упомянутым уединенно-волновым решением при соответствующем выборе коэффициентов.

Отметим, что точное решение (24) имеет полюс второго порядка, а коэффициенты обращенного ряда обнуляются, начиная с третьей степени при выполнении условия (22). Проведенные нами вычисления позволяют утверждать, что данное свойство является общим при построении локализованных решений. В случае интегрируемых эволюционных уравнений обращенные ряды обрываются безусловно, начиная со степени, на единицу превосходящей порядок полюса решения. Для неинтегрируемых уравнений, как в рассмотренном здесь примере, коэффициенты обращенного ряда обнуляются при выполнении дополнительных условий типа (22), связывающих коэффициенты уравнений с параметрами решений. Как и выше, обратный ряд обрывается, начиная со степени, по крайней мере, на единицу превосходящей порядок полюса решения.

3. Интегрируемое трехточечное дифференциально-разностное уравнение

Рассмотрим интегрируемое трехточечное дифференциально-разностное уравнение из семейства Вольтерра [4]

$$\frac{du_n}{dt} = (\alpha u_n^4 + \beta u_n^3 + \gamma u_n^2 + \lambda u_n + \mu) \left(\frac{1}{u_{n+1} - u_n} + \frac{1}{u_n - u_{n-1}} \right) \quad (25)$$

с пятью произвольными постоянными в правой части. Приведем (25) к виду

$$(u_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n-1}) \frac{du_n}{dt} - (\alpha u_n^4 + \beta u_n^3 + \gamma u_n^2 + \lambda u_n + \mu)(u_{n+1} - u_{n-1}) = 0 \quad (26)$$

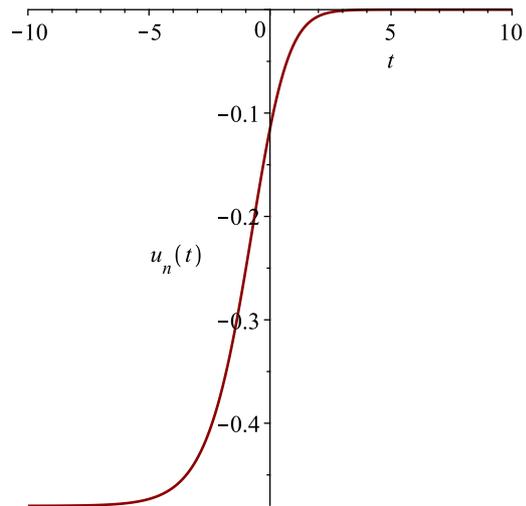


Рис. 1. График решения (24) при $C = b_1 = 1$

Fig. 1. Graph of solution (24) at $C = b_1 = 1$

и перейдем от системы двух переменных — непрерывной t и дискретной n — к единой переменной $z = dn + kt$. Тогда, если искать решение уравнения (26) в форме ряда

$$u_n = \sum_{n=0} b_n (e^z)^n, \quad (27)$$

то для остальных функций, входящих в (26), следует использовать подстановки

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dt} &= k \sum_{n=0} b_n n (e^z)^n, \\ u_{n+1} &= \sum_{n=0} b_n \delta^n (e^z)^n, \\ u_{n-1} &= \sum_{n=0} b_n \delta^{-n} (e^z)^n, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\delta = e^d$. Подставляя (27), (28) в (26) и последовательно приравнявая нулю коэффициенты при e^z , $(e^z)^2$, $(e^z)^3$, ..., найдем

$$\begin{aligned} \mu &= -b_0(\alpha b_0^3 + \beta b_0^2 + \gamma b_0 + \lambda), \\ \lambda &= -b_0(4\alpha b_0^2 + 3\beta b_0 + 2\gamma), \\ k &= \frac{(\delta + 1)(6\alpha b_0^2 + 3\beta b_0 + \gamma)}{\delta - 1}, \\ b_2 &= \frac{b_1^2(4\alpha b_0 + \beta)}{2(6\alpha b_0^2 + 3\beta b_0 + \gamma)}, \\ b_3 &= \frac{b_1^3}{36(\delta + 1)^2(2\alpha b_0^2 + \beta b_0 + \gamma/3)^2} \left(16 \left(\delta + \frac{1}{2} \right) (\delta + 2)\alpha^2 b_0^2 + \right. \\ &\quad \left. + 8\beta \left(\delta + \frac{1}{2} \right) (\delta + 2)\alpha b_0 + 4\alpha\delta\gamma + \beta^2(\delta^2 + \delta + 1) \right), \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Заменяя $x = e^z$, найдем обратный ряд $P^{-1} = \sum_{n=-1} a_n x^n$ для ряда $P = \sum_{n=0} b_n x^n - b_0$, не содержащего постоянного слагаемого:

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{b_1}, \\ a_0 &= -\frac{4\alpha b_0 + \beta}{12\alpha b_0^2 + 6\beta b_0 + 2\gamma}, \\ a_1 &= -\frac{b_1\delta(8\alpha^2 b_0^2 + 4\alpha\beta b_0 + 4\alpha\gamma - \beta^2)}{36(\delta + 1)^2(2\alpha b_0^2 + \beta b_0 + \frac{\gamma}{3})^2}, \\ a_2 &= 0, \\ a_3 &= 0, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Коэффициенты обратного ряда, начиная с a_2 , обращаются в ноль безусловно:

$$P^{-1} = \frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x, \quad (31)$$

следовательно, выражение

$$u(n, t) = b_0 + \frac{1}{\frac{a_{-1}}{\delta^n e^{kt}} + a_0 + a_1 \delta^n e^{kt}}, \quad (32)$$

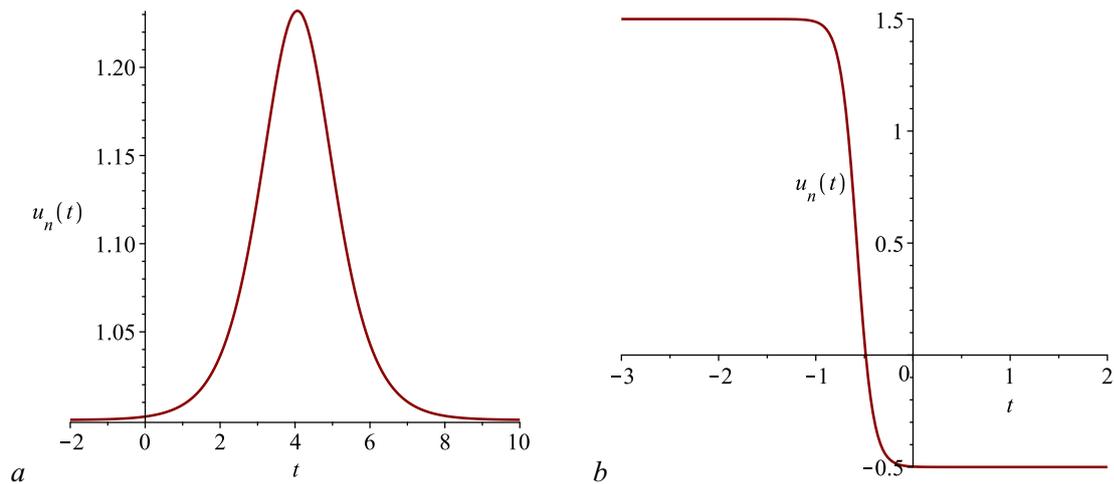


Рис. 2. График решения (32) при $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1/2$, $n = -10$, $b_1 = 2$, $\delta = 2$: $a - b_0 = 1$, $b - b_0 = -1/2$
 Fig. 2. Graph of solution (32) at $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1/2$, $n = -10$, $b_1 = 2$, $\delta = 2$: $a - b_0 = 1$, $b - b_0 = -1/2$

где коэффициенты a_{-1} , a_0 , a_1 вычисляются в соответствии с (30), а множитель k , согласно (29), является точным решением уравнения (26) при условии, что два коэффициента уравнения, μ и λ , подчиняются условиям (29). Решение (32) представляется ограниченной функцией, если корни трехчлена $a_1x^2 + a_0x + a_{-1}$ являются отрицательными или комплексными. В частности, второму случаю отвечает неравенство

$$8b_0\alpha(2b_0\alpha + \beta)(\delta^2 + 4\delta + 1) + 16\alpha\delta\gamma + \beta^2(\delta - 1)^2 < 0,$$

при котором дискриминант отрицателен. При $a_1 \neq 0$ ограниченное решение представляется солитоном на пьедестале b_0 (рис. 2, a), в противном случае решение имеет форму кинка, соединяющего два стационарных уровня b_0 и $b_0 + 1/a_0$ (рис. 2, b). Решение (32), по всей видимости, найдено впервые и в доступной авторам литературе не встречалось.

4. Интегрируемое пятиточечное дифференциально-разностное уравнение

Рассмотрим нелинейное пятиточечное дифференциально-разностное уравнение, приведенное в [18]

$$\frac{du_n}{dt} = (u_n + 1) \left(\frac{u_{n+2}u_n(u_{n+1} + 1)^2}{u_{n+1}} - \frac{u_{n-2}u_n(u_{n-1} + 1)^2}{u_{n-1}} + (2u_n + 1)(u_{n+1} - u_{n-1}) \right). \quad (33)$$

Это уравнение имеет два различных континуальных предела, являющихся интегрируемыми уравнениями Савады–Котеры и Каупа–Купершмидта. При помощи построенных пары Лакса и иерархии законов сохранения в [18] доказана интегрируемость решеточного уравнения (33). С известными интегрируемыми уравнениями подобного типа оно связано при помощи сложных соотношений, представляющих собой композиции двух преобразований типа Миуры. Отмечается [18], что использование таких соотношений для построения точных решений весьма затруднительно, поскольку задача сводится к решению дискретных уравнений типа Риккати. Покажем, что и в данном случае процедура обращения построенного ряда по степеням экспонент позволяет получить точное локализованное решение дифференциально-разностного уравнения (33).

Избавляясь, как и в случае, рассмотренном в предыдущем параграфе, от дробей в правой части уравнения, приводим (33) к виду

$$u_{n+1}u_{n-1}\frac{du_n}{dt} = (u_n + 1)(u_{n+2}u_nu_{n-1}(u_{n+1} + 1)^2 - u_{n-2}u_nu_{n+1}(u_{n-1} + 1)^2 + (2u_n + 1)(u_{n+1} - u_{n-1})u_{n+1}u_{n-1}). \quad (34)$$

Переходя к единственной переменной $z = dn + kt$, произведем в (34) замены

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{n=0} b_n(e^z)^n, \\ \frac{du_n}{dt} &= k \sum_{n=0} b_n n(e^z)^n, \\ u_{n\pm p} &= \sum_{n=0} b_n \delta^{\pm pn}(e^z)^n, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\delta = e^d$, после чего сгруппируем слагаемые в левой части уравнения по степеням и будем последовательно приравнять нулю коэффициенты при e^z , $(e^z)^2$, $(e^z)^3$, ...

$$\begin{aligned} k &= ((b_0 + 1)^2(\delta^2 + 1) + (b_0 + 2)a_0\delta)(1 - \delta^{-2})(b_0 + 1), \\ b_2 &= -\frac{b_1^2\delta((b_0^2 - 1)\delta^2 + (b_0^2 + 4b_0 + 2)\delta + b_0^2 - 1)}{b_0((b_0 + 1)(\delta^2 + 1) + (b_0 + 2)\delta)(\delta - 1)^2(b_0 + 1)}, \\ b_3 &= \frac{b_1^3\delta^2((b_0^2 - b_0 - 2)(\delta^4 + 1) + (2b_0^2 + 2b_0 - 1)(\delta^3 + \delta) + (3b_0^2 + 10b_0 + 6)\delta^2)}{b_0(b_0 + 1)^2(\delta + 1)^2(\delta - 1)^4((b_0 + 1)(\delta^2 + 1) + (b_0 + 2)\delta)}, \dots \end{aligned} \quad (36)$$

при этом коэффициенты b_0 и b_1 остаются свободными. Как и ранее, после замены $x = e^z$ вычислим для ряда $P = \sum_{n=0} b_n x^n - b_0$ коэффициенты обратного ряда $P^{-1} = \sum_{n=-1} a_n x^n$, используя условие (3):

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{b_1}, \\ a_0 &= \frac{\delta((b_0^2 - 1)(\delta^2 + 1) + (b_0^2 + 4b_0 + 2)\delta)}{b_0(b_0 + 1)(\delta - 1)^2((b_0 + 1)(\delta^2 + 1) + (b_0 + 2)\delta)}, \\ a_1 &= \frac{b_1\delta^2}{b_0^2(b_0 + 1)^2(\delta + 1)^2(\delta - 1)^4((b_0 + 1)(\delta^2 + 1) + (b_0 + 2)\delta)} ((b_0 + 1)^2(\delta^6 + 1) + \\ &+ (b_0 + 2)(b_0 - 1)(b_0 + 1)^2(\delta^5 + \delta) + (2b_0^4 + 5b_0^3 + 2b_0^2 - 2b_0 - 1)(\delta^4 + \delta^2) + \\ &+ (3b_0^4 + 8b_0^3 + 8b_0^2 + 6b_0 + 4)\delta^3), \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Коэффициенты a_2 , a_3 , a_4 , ..., не выписанные из-за громоздкости, содержат одинаковый множитель

$$(b_0 + 1)^2(\delta^2 + 1) + (b_0^2 - 2)\delta, \quad (38)$$

обращающийся в нуль при двух значениях коэффициента b_0 :

$$b_0 = -\frac{\delta^2 \pm (\delta + 1)\sqrt{\delta + 1}}{\delta^2 + \delta + 1}. \quad (39)$$

Каждое из этих значений определяет одну из ветвей точного решения уравнения (33) в форме

$$u_n = b_0 + \frac{1}{a_{-1}/\delta^n e^{kt} + a_0 + a_1 \delta^n e^{kt}}, \quad (40)$$

где $a_{-1} = 1/b_1$, и при выборе в (39) знака «−» следует принять

$$\begin{aligned} k &= \frac{2((\delta + 1)\sqrt{\delta} + \delta)^2(\delta^2 - 1)}{\delta(\delta^2 + \delta + 1)^2}, \\ a_0 &= \frac{2\delta(\delta^2 + \delta + 1)}{(\delta^2 - (\delta + 1)\sqrt{\delta} + 1)((\delta + 1)\sqrt{\delta} + 2\delta)}, \\ a_1 &= \frac{b_1 \delta^3 (\delta^2 + \delta + 1)^2 (\delta^2 + 3\delta + 2(\delta + 1)\sqrt{\delta} + 1)}{((\delta + 1)\sqrt{\delta} + 2\delta)^2 (\delta^2 - (\delta + 1)\sqrt{\delta} + 1)^2 ((\delta + 1)\sqrt{\delta} + \delta)^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

а при выборе знака «+»:

$$\begin{aligned} k &= \frac{2((\delta + 1)\sqrt{\delta} - \delta)^2(\delta^2 - 1)}{\delta(\delta^2 + \delta + 1)^2}, \\ a_0 &= -\frac{2\delta(\delta^2 + \delta + 1)}{(\delta^2 + (\delta + 1)\sqrt{\delta} + 1)((\delta + 1)\sqrt{\delta} - 2\delta)}, \\ a_1 &= \frac{b_1 \delta^3 (\delta^2 + \delta + 1)^2 (\delta^2 + 3\delta - 2(\delta + 1)\sqrt{\delta} + 1)}{((\delta + 1)\sqrt{\delta} - 2\delta)^2 (\delta^2 + (\delta + 1)\sqrt{\delta} + 1)^2 ((\delta + 1)\sqrt{\delta} - \delta)^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Решение (40) содержит два произвольных параметра b_1 и δ ($\delta > 0$, $\delta \neq 1$), и, в отличие от аналогичного по структуре выражения (32), в ограниченном случае всегда представляется солитоном на пьедестале, так как $a_1 \neq 0$ при допустимых значениях δ : $\delta > 0$, $\delta \neq 1$. Дискриминант трехчлена $a_1 x^2 + a_0 x + a_{-1}$, соответствующего знаменателю в (40), всегда равен нулю, и решение (40) является ограниченным, когда знак b_1 выбирается противоположным знаком в (39) (рис. 3). Заметим, что явное выражение (40) точного решения уравнения (33) получено и приведено впервые.

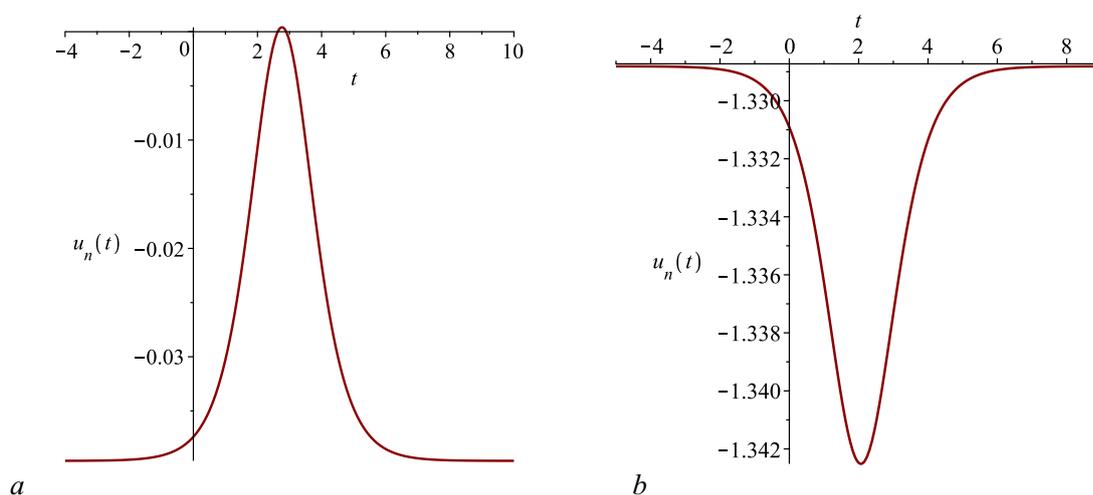


Рис. 3. График решения (40): $a - \delta = 3/2$, $b_1 = 1$, знак «−» в (39); $b - \delta = 3/2$, $b_1 = -1$, знак «+» в (39)

Fig. 3. Graph of solution (40): $a - \delta = 3/2$, $b_1 = 1$, sign “−” in formula (39); $b - \delta = 3/2$, $b_1 = -1$, sign “+” in formula (39)

Заключение

Процедура обращения асимптотического ряда иногда применяется при использовании методов возмущений для улучшения сходимости [5]. Так, априорная информация об особенностях решения в ряде случаев позволяет устранить её из ряда теории возмущений и улучшить его сходимость [19]. Например, если особенность лежит на положительной действительной полуоси, то это может свидетельствовать о многозначности функции, характеризуемой построенным степенным рядом. При этом обратная функция может быть однозначной [5, 19]. В данной статье обращение степенного ряда предлагается использовать для нахождения замкнутого выражения производящей функции последовательности его коэффициентов. Это выражение, которое по терминологии Эйлера можно называть суммой степенного ряда, представляет собой точное решение исходного нелинейного дифференциального или дифференциально-разностного уравнения. Основное наблюдение здесь состоит в том, что для локализованных решений обращенные ряды обрываются, начиная со степени, по крайней мере, на единицу превосходящей полюс искомого решения. В случае неинтегрируемых эволюционных уравнений (в статье рассмотрено уравнение КдВБ) удовлетворение требованию обнуления соответствующих коэффициентов обращенного ряда приводит к дополнительным условиям, связывающим коэффициенты уравнений с параметрами решений. Предложенный метод легко алгоритмируется и, по нашим наблюдениям, предъявляет минимальные требования к используемой вычислительной технике. Ограничением метода является его неприменимость к уравнениям с переменными коэффициентами, отличными от экспонент. К достоинствам метода относится возможность его эффективного применения к нелинейным дифференциально-разностным уравнениям, для которых наличие точного солитоноподобного решения можно рассматривать в качестве эмпирического критерия интегрируемости.

Список литературы

1. Кудряшов Н. А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Интеллект, 2010. 368 с.
2. Конт Р., Мюзетт М. Метод Пенлеве и его приложения. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, Регулярная и хаотическая динамика, 2011. 315 с.
3. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения: учебник и практикум для вузов. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Юрайт, 2025. 256 с.
4. Yamilov R. Symmetries as integrability criteria for differential-difference equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. Vol. 39. P. 541–623. DOI: 10.1088/0305-4470/39/45/R01.
5. Андрианов И., Аврейтевич Я. Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 276 с.
6. Хирота Р. Прямые методы в теории солитонов // В кн.: Солитоны. М.: Мир, 1983. С. 175–192.
7. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 296 с.
8. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М.: ГИТТЛ, 1949. 580 с.
9. Виноградов В. Н., Гай Е. В., Работнов Н. С. Аналитическая аппроксимация данных в ядерной и нейтронной физике. М.: Энергоатомиздат, 1987. 128 с.
10. Бочкарев А. В., Землянухин А. И. Метод геометрического ряда построения точных решений нелинейных эволюционных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57, № 7. С. 1113–1125. DOI: 10.7868/S0044466917070079.
11. Zemlyanukhin A. I., Bochkaev A. V., Orlova A. A., Ratushny A. V. Geometric series method and exact solutions of differential-difference equations // In: Abramian A. K., Andrianov I. V.,

- Gaiko V. A. (eds) *Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Advanced Structured Materials*. Vol. 139. Cham: Springer, 2021. P. 239–253. DOI: 10.1007/978-3-030-53006-8_15.
12. Ландо С. К. *Лекции о производящих функциях: учебное пособие*. М.: МЦНМО, 2007. 144 с.
 13. Сафонов К. В. Об условиях алгебраичности и рациональности суммы степенного ряда // Матем. заметки. 1987. Т. 41, № 3. С. 325–332.
 14. Yagtur T. New approach to Pell and Pell-Lucas sequences // *Kyungpook Math. J.* 2019. Vol. 59, no. 1. P. 23–34. DOI: 10.5666/KMJ.2019.59.1.23.
 15. Абловиц М. Д., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи*. М.: Мир, 1987. 479 с.
 16. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. *Волновая динамика газо- и парожидкостных сред*. М.: Энергоатомиздат, 1990. 246 с.
 17. Кудряшов Н. А. Преобразования Бэклунда для уравнения в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса–КдФ // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 2. С. 342–345.
 18. Гарифуллин Р. Н., Ямилов Р. И. Об интегрируемости решеточных уравнений с двумя непрерывными пределами // *Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.* 2018. Т. 152. С. 159–164.
 19. Hinch E. J. *Perturbation Methods*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 160 p. DOI: 10.1017/CBO9781139172189.

References

1. Kudryashov NA. *Methods of Nonlinear Mathematical Physics*. Dolgoprudny: Intellect; 2010. 368 p.
2. Conte R, Musette M. *The Painlevé Method and Its Applications*. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Research, Regular and Chaotic Dynamics; 2011. 315 p.
3. Polyanin AD, Zaitsev VF, Zhurov AI. *Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics. Solution Methods: Textbook and Practice for Universities*. 2nd ed., revised and expanded. Moscow: Yurait; 2025. 256 p.
4. Yamilov R. Symmetries as integrability criteria for differential-difference equations. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2006;39:541–623. DOI: 10.1088/0305-4470/39/45/R01.
5. Andrianov I, Avreytsevich Y. *Methods of Asymptotic Analysis and Synthesis in Nonlinear Dynamics and Mechanics of Deformable Solids*. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Research; 2013. 276 p. (in Russian).
6. Hirota R. *Direct Methods in Soliton Theory*. In: Bullough RK, Caudrey PJ, editors. *Solitons. Topics in Current Physics*. Vol. 17. Berlin: Springer; 1980. DOI: 10.1007/978-3-642-81448-8_5.
7. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. N.Y.: Academic Press; 1964. 229 p.
8. Euler L. *Foundations of Differential Calculus*. N.Y.: Springer; 2000. 194 p. DOI: 10.1007/b97699.
9. Vinogradov VN, Gai EV, Rabotnov NS. *Analytical Approximation of Data in Nuclear and Neutron Physics*. Moscow: Energoatomizdat; 1987. 128 p.
10. Bochkarev AV, Zemlyanukhin AI. Geometric series method for finding exact solutions of nonlinear evolution equations. *Comput. Math. Math. Phys.* 2017;57(7):1111–1123. DOI: 10.1134/S0965542517070065.
11. Zemlyanukhin AI, Bochkarev AV, Orlova AA, Ratushny AV. Geometric series method and exact solutions of differential-difference equations. In: Abramian AK, Andrianov IV, Gaiko VA, editors. *Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Advanced Structured Materials*. Vol. 139. Cham: Springer; 2021. P. 239–253. DOI: 10.1007/978-3-030-53006-8_15.
12. Lando SK. *Lectures on Generating Functions: Textbook*. Moscow: MCCME, 2007. 144 p.
13. Safonov KV. Conditions for the sum of a power series to be algebraic and rational. *Math. Notes*. 1987;41(3):325–332.

14. Yagmur T. New approach to Pell and Pell-Lucas sequences. *Kyungpook Math. J.* 2019;59(1):23–34. DOI: 10.5666/KMJ.2019.59.1.23.
15. Ablowitz MJ, Segur H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM; 1981. 425 p.
16. Nakoryakov VE, Pokusaev BG, Shreiber IR. *Wave Dynamics of Gas and Vapor-Liquid Media*. Moscow: Energoatomizdat, 1990. 246 p.
17. Kudryashov NA. Bäcklund transformation for a fourth-order partial differential equation with the Burgers-Korteweg-de Vries nonlinearity. *Sov. Phys. Dokl.* 1988;33(5):336–338.
18. Garifullin RN, Yamilov RI. On the integrability of lattice equations with two continuum limits. *J. Math. Sci.* 2021;252:283–289. DOI: 10.1007/s10958-020-05160-x.
19. Hinch EJ. *Perturbation Methods*. Cambridge: Cambridge University Press; 1991. 160 p. DOI: 10.1017/CBO9781139172189.



Землянухин Александр Исаевич — родился в Саратове (1967). Окончил с отличием механико-математический факультет Саратовского государственного университета (1989). Доктор физико-математических наук (1999) в области динамических задач механики деформируемого твердого тела; профессор. Заведующий кафедрой прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета. Автор монографии «Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны симметрии, эволюция» (1999, в соавторстве с Л. И. Могилевичем). Область научных интересов: нелинейная волновая динамика деформируемых систем, аналитические и численные методы нелинейной математической физики.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
 E-mail: azemlyanukhin@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-4379-8310
 ScopusID: 6603169205



Артамонов Николай Александрович — родился в Саратове (1996). Окончил с отличием физико-технический факультет Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. (2019). Преподаватель кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета. Область научных интересов: нелинейная волновая динамика деформируемых систем, аналитические и численные методы нелинейной математической физики.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
 E-mail: twostvoll@gmail.com
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1296661
 ScopusID: 59209431700



Бочкарёв Андрей Владимирович — родился в Саратове (1973). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доктор физико-математических наук (2022). Доцент кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета. Научные интересы: нелинейная волновая динамика деформируемых систем, точные решения нелинейных уравнений в частных производных.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
 E-mail: ab2009sar@list.ru
 ORCID: 0000-0001-9088-9234
 AuthorID (eLibrary.Ru): 10662

Безлюдный Владимир Ильич — родился в Саратове (2001). Окончил институт прикладных информационных технологий и коммуникаций Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. (2025) с присвоением звания магистра информационных систем и технологий в области искусственного интеллекта. Область научных интересов: моделирование и прогнозирование долговечности несвязных слов дорожной одежды и использование искусственного интеллекта.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
 E-mail: bezlyudnyivi@mail.ru

Землянухин А. И., Артамонов Н. А., Бочкарёв А. В., Безлюдный В. И.
 Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 6

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. N. Chumachenko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

MANAGING EDITOR

M. V. Sysoeva, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

S. Boccaletti, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

A. M. Bykov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

N. S. Ginzburg, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

O. I. Kanakov, Ph.D., Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

A. V. Kraskov, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

N. V. Kuznetsov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

G. van Luijelaar, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

A. Lüttjohann, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

I. I. Mokhov, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

A. B. Neiman, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

V. I. Nekorkin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

V. V. Tuchin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

E. Ya. Frisman, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute for Complex Analysis of Regional Problems of the RAS (Birobidzhan, Russia)

V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

V. A. Cherepenin, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >