

ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Трикладная Динамическая инамика



ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
(Москва, Россия)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

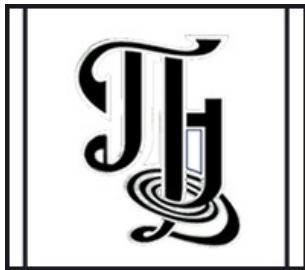
И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)
А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского
(Саратов, Россия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

М. В. Сысоева, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)
Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского
(Саратов, Россия)
С. Боккалетти, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном
исследовательском совете (Флоренция, Италия)
А. М. Быков, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН
(Санкт-Петербург, Россия)
Н. С. Гинзбург, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН
(Нижний Новгород, Россия)
С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского
(Нижний Новгород, Россия)
А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
(Москва, Россия)
О. И. Канаков, д.ф.-м.н., ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)
С. А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова
(Ярославль, Россия)
А. В. Красков, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)
Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)
Ж. ван Луйтелаар, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени
святого Радбода Уtrechtского (Неймеген, Нидерланды)
А. Люттиохани, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета
имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)
Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
(Москва, Россия)
В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского
(Нижний Новгород, Россия)
А. Б. Нейман, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)
В. И. Некоркин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН
(Нижний Новгород, Россия)
А. Н. Писарчик, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)
А. В. Порубов, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)
В. В. Тучин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского
(Саратов, Россия)
А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)
Е. Я. Фрисман, чл.-корр. РАН, д.б.н., профессор, ИКАРП ДВО РАН
(Биробиджан, Россия)
А. Е. Храмов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, РЭУ имени Г. В. Плеханова
(Москва, Россия)
В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А. (Саратов, Россия)
В. А. Черепенин, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова
РАН (Москва, Россия)
М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)
В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Издатель

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Журнал «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика» зарегистрирован
в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-77991 от 20 марта 2020 года

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index
(WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное
издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы
основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание
ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени
(физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая
физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы,
1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписной индекс издания 73498. Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-
каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Свободная цена

Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией Д. А. Лачинова

Редакторы: А. Р. Нигметуллина, А. В. Князева

Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (927) 625-9020,
e-mail: andjournal@sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

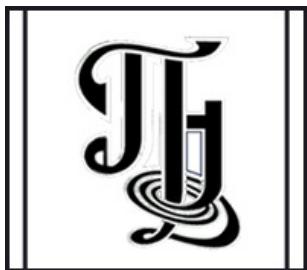
Подписан в печать 13.01.2026

Вышел в свет 30.01.2026

Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 20,69 (22,25)

Тираж 100 экз. Заказ № 1-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



**Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS**

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The journal "Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics" is registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Registration ПИ № ФС77-77991 of 20 March 2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

The journal subscription index is 73498. A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru). Free price

The journal is Open Access

Head of Editorial office D. A. Lachinova
Editors: A. R. Nigmatulina, A. V. Knyazeva
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (927) 625-9020,
e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 13.01.2026. Published 30.01.2026
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 20,69 (22,25)
Edition of 100 copies. Order No. 1-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
научно-технический журнал
издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

2026, том 34, № 1

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ОТ РЕДАКТОРА

Подлазов А. В. 70 лет Георгию Геннадьевичу Малинецкому 5

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС.
КВАНТОВЫЙ ХАОС

Кащенко С. А. Локальная динамика непериодических цепочек с односторонними
связями 9

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

*Боровкова Е. И., Дубинкина Е. С., Караваев А. С., Пономаренко В. И., Мягков И. А.,
Прохоров М. Д., Безручко Б. П.* Изменение статистических характеристик сигналов
сердечно-сосудистой системы и нелинейных мер кардиореспираторного взаимодействия
у здоровых добровольцев в ходе тестов с биологической обратной связью 34

Храменков В. А., Дмитричев А. С., Некоркин В. И. Устойчивость многомашинной
энергосети с общей нагрузкой к подключению и отключению генераторов 49

Варварин Е. М., Осипов Г. В. Синхронизация и десинхронизация в ансамблях
мобильных агентов 68

Усмонов Б. Ш., Мухитдинов Р. Т., Элибоев Н. Р., Ахмедов Н. Б. Нестационарное
рассеяние упругих волн на сферическом включении 84

Бачурин Д. В., Мурзаев Р. Т. Делокализованные нелинейные колебательные моды
и их влияние на свойства бинарного сплава NiTi 98

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

Шендерюк-Жидков А. В., Максименко В. А., Храмов А. Е. Коэволюция нейротехнологий
и ИИ: этические вызовы и подходы к регуляции 116

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Alcover-Garau P.-M., Неротисено Е. When integers embrace the beauty of complex
numbers [Когда целые числа обретают красоту комплексных чисел] 161

PERSONALIA

Гришин С. В. Памяти Юрия Павловича Шараевского 176

C O N T E N T S

EDITORIAL

<i>Podlazov A. V. On the 70th anniversary of Georgiy G. Malinetskiy</i>	5
---	---

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.
QUANTUM CHAOS

<i>Kashchenko S. A. Local dynamics of aperiodic chains with unidirectional couplings.....</i>	9
---	---

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Borovkova E. I., Dubinkina E. S., Karavaev A. S., Ponomarenko V. I., Miagkov I. A., Prokhorov M. D., Bezruchko B. P. The change in statistical characteristics of cardiovascular system signals and nonlinear measures of cardiorespiratory interaction in healthy volunteers during biofeedback tests.....</i>	34
<i>Khramenkov V. A., Dmitrichev A. S., Nekorkin V. I. Stability of multi-machine power grid with a common load to connecting and disconnecting of generators</i>	49
<i>Varvarin E. M., Osipov G. V. Synchronization and desynchronization in ensembles of mobile agents.....</i>	68
<i>Usmonov B. Sh., Mukhitdinov R. T., Eliboyev N. R., Akhmedov N. B. Nonstationary scattering of elastic waves by a spherical inclusion.....</i>	84
<i>Bachurin D. V., Murzaev R. T. Delocalized nonlinear vibrational modes and their effect on the properties of binary NiTi alloy.....</i>	98

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

<i>Shenderyuk-Zhidkov A. V., Maksimenko V. A., Hramov A. E. Co-evolution of neurotechnology and AI: ethical challenges and regulatory approaches</i>	116
--	-----

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

<i>Alcover-Garau P.-M., Nepomuceno E. When integers embrace the beauty of complex numbers</i>	161
---	-----

PERSONALIA

<i>Grishin S. V. To the memory of Yurii P. Sharaevskii</i>	176
--	-----



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-003206

EDN: QCYTWA

70 лет Георгию Геннадьевичу Малинецкому

A. B. Подлазов

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
E-mail: Tiger@Keldysh.ru

Поступила в редакцию 2.12.2025, опубликована 30.01.2026

Для цитирования: Подлазов А. В. 70 лет Георгию Геннадьевичу Малинецкому // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 5–8. DOI: 10.18500/0869-6632-003206. EDN: QCYTWA

For citation: Podlazov AV. On the 70th anniversary of Georgiy G. Malinetskiy. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1):5–8. DOI: 10.18500/0869-6632-003206

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

3 февраля мы отмечаем семидесятилетие заведующего отделом математического моделирования нелинейных процессов Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН профессора Георгия Геннадьевича Малинецкого.

Г. Г. Малинецкий — один из ведущих специалистов в России в области синергетики, нелинейной динамики, математического моделирования, управления рисками, математической истории и проектирования будущего, автор около 1000 научных и более 150 научно-популярных и публицистических работ. Лауреат премии Ленинского комсомола в области науки и техники (1985), премии Правительства Российской Федерации в области образования (2002), Макарievской премии в номинации «Научные исследования в области естественных и точных наук, имеющие высокое общественное и гражданское значение» (2018). Один из создателей и ныне вице-президент Нанотехнологического общества России.

Георгий Геннадьевич — член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», член научно-редакционных советов журналов «Информационные войны», «Экономические стратегии», «Экономика науки» и альманаха «История и Математика», главный редактор журнала «Искусственный интеллект: Теория и практика» и председатель редакционного совета «Журнала интегративных исследований культуры». Он, являясь председателем редакционных коллегий серий «Синергетика: от прошлого к будущему» и «Будущая Россия» издательства URSS, в которых к настоящему времени суммарно выпущено более 150 книг, ведет огромную работу по сохранению научного пространства России.

Г. Г. Малинецкий родился в 1956 году в Уфе. После окончания уфимской средней школы № 62 в 1973 г. поступил на физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, который с отличием окончил в 1979 г., и далее продолжил обучение в аспирантуре Института прикладной математики. В 1982 г. он защитил кандидатскую диссертацию «Локальные диссипативные структуры в некоторых нелинейных средах», а 1990 г. — докторскую диссертацию «Хаотические режимы и новые типы диссипативных структур в системах типа “реакция – диффузия”».

Начало научной карьеры Г. Г. Малинецкого было связано с изучением нелинейных систем «реакция–диффузия» под руководством академика А. А. Самарского и члена-корреспондента РАН С. П. Курдюмова. В этих системах возникают нестационарные диссипативные структуры, развивающиеся в режиме с обострением, при котором переменные достигают бесконечных величин за конечное время. На основе вычислительного эксперимента и асимптотического анализа при участии Г. Г. Малинецкого была построена теория взаимодействия тепловых структур в многомерных областях и установлены качественные особенности процессов в многокомпонентных системах «реакция – диффузия». Было показано, что структуры, развивающиеся в режиме с обострением, могут возникать при сравнительно слабых нелинейностях.

Продолжением этих теоретических работ выступили задачи лазерной термохимии и теории СВЧ-пробоя, для которых Г. Г. Малинецким и его коллегами были определены постановки, для которых в установившемся режиме могут возникать пространственно-локализованные диссипативные структуры. Построенная теория позволила обнаружить предсказанные эффекты при воздействии лазерного излучения небольшой мощности на поверхность металлов и объяснить ряд качественных эффектов, наблюдавшихся при СВЧ-пробое в верхних слоях атмосферы. Развитием теории систем «реакция – диффузия» стала иерархия математических моделей для описания сложной упорядоченности и диффузионного хаоса в небольших пространственных областях. При этом было предсказано возникновение двухчастотных режимов и хаотических спиральных волн в рассматриваемых средах, впоследствии обнаруженное экспериментально и играющее важную роль в возникновении сердечных аритмий.

Г. Г. Малинецким впервые получен и исследован ряд модельных уравнений, выполняющих роль нормальных форм в системах «реакция – диффузия» с малой диффузией. Построенная для них иерархия упрощенных моделей принципиально отличается от иерархии, описывающей конвективную неустойчивость, для которой из-за эффекта «ложного хаоса» не удается на основе простейших моделей предсказать поведение решений исходных гидродинамических уравнений. А для систем «реакция – диффузия» вычислительный эксперимент и асимптотический анализ позволили показать, что качественные особенности аттракторов системы дифференциальных уравнений в частных производных, напротив, могут быть предсказаны, исходя из информации об аттракторах одномерных и двумерных отображений и сравнительно простых динамических систем.

Дальнейшие исследования Г. Г. Малинецкого были связаны с задачами прогноза поведения сложных систем. При его активном участии разработаны эффективные вычислительные алгоритмы оценки количественных характеристик динамического хаоса по временному ряду наблюдений. Эти принципиальные результаты нашли применение в задачах геофизики, гидродинамики и медицинской диагностики. Также были развиты новые подходы к прогнозу редких катастрофических событий и разработаны распознающие нейронные сети с хаотическим поведением элементов. Применение таких сетей резко снижает возможность ложного распознавания образов и вероятность эффекта ложной памяти.

Следующим большим этапом развития научных интересов Г. Г. Малинецкого стало распространение идей, методов и походов, разработанных для решения естественно-научных задач, на область наук о человеке и обществе. Под руководством Георгия Геннадьевича и при его непосредственном участии был выполнен ряд принципиальных работ по моделированию и прогнозу развития высшей школы. Построен ряд компьютерных моделей для анализа, прогноза

Подлазов А. В.

Известия вузов. ПНД, 2026, т. 34, № 1

и мониторинга инновационных процессов в экономике России. Были предложены новые классы математических моделей — нейронные сети с переменной структурой, которые оказались эффективными при анализе ряда проблем математической психологии, и динамические системы с «джокерами», меняющие видение широкого класса социополитических процессов и динамических задач.

Отдельного упоминания заслуживает большой исследовательский проект по построению теории управления риском, выполнявшийся по инициативе Г. Г. Малинецкого и под его руководством. Эта теория, опирающаяся на методы и модели нелинейной динамики, позволяет эффективно использовать для прогноза и предупреждения природных бедствий, техногенных катастроф и социальных нестабильностей ряд новых подходов и подходов, ранее применявшихся в фундаментальных исследованиях. Принципиальные результаты этих исследований существенно изменили само понимание риска, переведя его из инженерно-финансовой плоскости в пространство стратегического планирования и философской рефлексии.

Современные научные интересы Г. Г. Малинецкого охватывают математическое моделирование социоэкономических систем, развитие математической истории, изучение перспектив цифровой реальности, приложения искусственного интеллекта и квантовых походов в различных сферах, вопросы геокультуры и философии человека, предвидение дальнейшей траектории России и мира в XXI в. Все эти области исследования можно охарактеризовать как задачи проектирования будущего, устремленность в которое была и остается фирменной чертой научного стиля юбиляра.

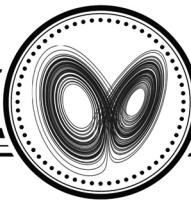
Георгий Геннадьевич воплощает собой научную преемственность, сочетая живую память об учителях и выдающихся предшественниках с неизменной поддержкой инициативы учеников и уважением их научной свободы. Он является синергетиком не только в смысле работы в области междисциплинарных исследований, но и в смысле объединения для совместного действия людей разных научных культур, школ и воззрений.

Коллеги, друзья, ученики и редакция журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» поздравляют Георгия Геннадьевича с 70-летием и желают ему крепкого здоровья, творческого порыва и неослабевающей веры в науку!

Монографии Г. Г. Малинецкого

1. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Парадоксы мира нестационарных структур. М.: Знание, 1983. 48 с.
2. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика – теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы. М.: Знание, 1983. 63 с.
3. Малинецкий Г. Г., Курдюмов С. П., Потапов А. Б. Синергетика – новые направления. М.: Знание, 1989. 64 с.
4. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992. 544 с.
5. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. М.: Наука, 1997. 253 с.
6. Владимиров В. А., Воробьев Ю. Л., Салов С. С., Фалеев М. И., Архипова Н. И., Капустин М. А., Кащенко С. А., Косяченко С. А., Кузнецов И. В., Кульба В. В., Малинецкий Г. Г., Махутов Н. А., Писаренко В. Ф., Подлазов А. В., Посашков С. А., Потапов А. Б., Шнирман М. Г., Скворцов К. Ф., Ставицкий И. Б., Стародубов В. С., Хрульков В. А., Черничкин А. С., Шатилов А. А., Шачнев Ю. А., Якушев А. И., Древаль А. Е., Скороходов Е. А., Шумилов И. С., Архаров А. М., Афанасьев В. Н. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. М.: Наука, 2000. 429 с.

7. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики / Изд. 2. М.: URSS, 2002. 358 с.
8. *Малинецкий Г.Г.* Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент / Изд. 8. М.: Ленанд, 2017. 312 с.
9. *Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Синергетика и прогнозы будущего / Изд. 3. М.: URSS, 2003. 288 с.
10. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. М.: Физматлит, 2007. 488 с.
11. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Нелинейная динамика и хаос: Основные понятия / Изд. 3. М.: URSS, 2011. 236 с.
12. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В.* Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды. М.: URSS, 2016. 280 с.
13. *Малинецкий Г.Г.* Чтобы сказку сделать былью: Высокие технологии – путь России в будущее. М.: URSS, 2021. 224 с.
14. *Малинецкий Г.Г.* Пространство синергетики: Взгляд с высоты. М.: URSS, 2013. 247 с.
15. *Малинецкий Г.Г.* Задачи по курсу нелинейной динамики / Изд. 2. М.: URSS, 2018. 136 с.
16. *Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Синергетика и прогнозы будущего: Книга 2. Образование. Демография. Проблемы прогноза / Изд. 4. М.: URSS, 2020. 384 с.
17. *Иванов В.В., Малинецкий Г.Г.* Россия: XXI век. Стратегия прорыва. Технологии. Образование. Наука / Изд. 3. М.: Ленанд, 2020. 304 с.
18. *Малинецкий Г.Г.* Синергетика – новый стиль мышления: Предметное знание, математическое моделирование и философская рефлексия в новой реальности. М.: URSS, 2022. 288 с.
19. *Малинецкий Г.Г.* Постиндустриальный вызов и новая гуманитаристика: Взгляд на проблемы человека и общества через призму самоорганизации. М.: URSS, 2024. 232 с.
20. *Малинецкий Г.Г.* Императивы развития России, стратегические вызовы и их преодоление в контексте самоорганизации: Наука. Образование. Война. Россия и Европа. Глобальные перемены и искусственный интеллект. М.: URSS, 2024. 344 с.
21. *Гоноцкая Н.В., Малинецкий Г.Г.* Философские этюды. М.: URSS, 2025. 202 с.
22. *Аладин В., Ковалёв В., Малков С., Малинецкий Г.* Помни войну. М.: Ин-т русской цивилизации, 2016. 469 с.
23. *Малинецкий Г.Г.* Развитие компьютерного пространства как фактор стратегической стабильности России. М: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2024. 104 с. DOI: 10.20948/mono-2024-malin.



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1)

Научная статья
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003197
EDN: KBINPI

Локальная динамика непериодических цепочек с односторонними связями

C. A. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия

E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 4.08.2025, принята к публикации 1.10.2025,
опубликована онлайн 15.10.2025, опубликована 30.01.2026

Аннотация. Рассматриваются цепочки N односторонне связанных нелинейных уравнений первого порядка, у которых значение последнего элемента определяется через первый элемент цепочки. Цель работы состоит в исследовании локальной — в окрестности нулевого состояния равновесия — динамики этой системы. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и построены нормальные формы, определяющие локальное поведение решений. В простейших случаях, когда $N = 2$ и $N = 3$, проведен детальный анализ. Наиболее интересная часть исследований относится к случаю, когда значение N достаточно велико. Показано, что критические случаи тогда имеют бесконечную размерность. **Методы.** Стандартная схема исследования, базирующаяся на использовании метода локальных инвариантных многообразий и метода нормальных форм, оказывается неприменимой. Используется разработанный автором специальный метод бесконечномерной нормализации. **Основные результаты** состоят в построении так называемых квазинормальных форм — аналогов нормальных форм для бесконечномерного случая. Важно подчеркнуть, что даже при достаточно больших значениях количества элементов N цепочки квазинормальные формы, определяющие динамику исходной системы, существенно зависят от варьирования величины N . Отметим, что при определенных значениях коэффициентов системы динамика ее может быть достаточно сложной.

Ключевые слова: динамика, дифференциальное уравнение, цепочка, нормальная форма, устойчивость.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2025-1636).

Для цитирования: Кащенко С. А. Локальная динамика непериодических цепочек с односторонними связями // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 9–33. DOI: 10.18500/0869-6632-003197. EDN: KBINPI

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Local dynamics of aperiodic chains with unidirectional couplings

S. A. Kashchenko

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Russia

E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Received 4.08.2025, accepted 1.10.2025,
available online 15.10.2025, published 30.01.2026

Abstract. Chains of N unidirectionally coupled nonlinear first-order equations are considered, where the value of the last element is determined through the first element of the chain. The *aim* of this work is to investigate the local — in the neighborhood of the zero equilibrium state — dynamics of this system. Critical cases in the problem of equilibrium state stability are identified, and normal forms determining the local behavior of solutions are constructed. A detailed analysis is performed in the simplest cases, where $N = 2$ and $N = 3$. The most interesting part of the research concerns the case where the value of N is sufficiently large. It is shown that the critical cases then have infinite dimension. *Methods.* The standard research scheme, based on the use of the method of local invariant manifolds and the method of normal forms, turns out to be inapplicable. A special method of infinite-dimensional normalization developed by the author is used. The main *results* consist in the construction of so-called quasi-normal forms — analogs of normal forms for the infinite-dimensional case. It is important to emphasize that even for sufficiently large values of the number of chain elements N , the quasi-normal forms determining the dynamics of the original system significantly depend on variations in the value of N . Note that for certain values of the system coefficients, its dynamics can be quite complex.

Keywords: dynamics, differential equation, chain, normal form, stability.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of a development programme for the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of the Yaroslavl State University with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement on provision of subsidy from the federal budget No. 075-02-2025-1636).

For citation: Kashchenko SA. Local dynamics of aperiodic chains with unidirectional couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(1):9–33. DOI: 10.18500/0869-6632-003197

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Постановка задачи

Рассмотрим одно из простейших нелинейных уравнений первого порядка

$$\dot{u} + au = f(u), \quad (1)$$

где $a > 0$, а достаточно гладкая функция $f(u)$ имеет в нуле порядок малости выше первого:

$$f(u) = f_2 u^2 + f_3 u^3 + O(u^4).$$

Цепочкой из N уравнений вида (1) с односторонними связями называется система уравнений

$$\dot{u}_j + au_j = f(u_j) + bu_{j+1} \quad (b \neq 0), \quad (2)$$

в которой $j = 1, \dots, N$ и на правом конце этой цепочки для $u_{N+1}(t)$ выполнено граничное условие

$$u_{N+1} = \gamma u_1 \quad (\gamma \neq 0). \quad (3)$$

Цепочки вида (2) являются важными объектами для исследований. Им уделяется особое внимание. Такие цепочки возникают при моделировании многих прикладных задач в радиофизике [1–8], лазерной физике [9–13], математической экологии [14, 15], теории нейронных

Кашенко С. А.

сетей [16–21], оптике [3, 8, 22, 23], биофизике [24] и др. Релаксационные колебания в связанных цепочках с финитной нелинейностью и запаздыванием для небольшого количества элементов изучались в [25, 26]. Отметим еще работу [27], в которой рассмотрена динамика периодической цепочки с большим количеством элементов.

Поставим задачу исследования поведения при $t \rightarrow \infty$ всех решений цепочки (2), (3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Важную роль в этом вопросе играет линеаризованная в нуле система уравнений:

$$\dot{u}_j + au_j = bu_{j+1}, \quad u_{N+1} = \gamma u_1 \quad (j = 1, \dots, N). \quad (4)$$

Характеристическое уравнение для системы (4) имеет вид

$$[(\lambda + a)b^{-1}]^N = \gamma, \quad (5)$$

поэтому для корней $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ этого уравнения верны равенства

$$\ln \gamma = \ln |\gamma| + i \arg(\gamma), \quad (6)$$

где $\arg(\gamma) = 0$ при $\gamma > 0$ и $\arg(\gamma) = \pi$ при $\gamma < 0$.

При условии, когда все N корней (6) имеют отрицательные вещественные части, все решения системы (4) и системы (2), (3) с начальными условиями из достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же в (6) есть корень с положительной вещественной частью, то система (4) имеет экспоненциально растущее при $t \rightarrow \infty$ решение, а задача о динамике (2), (3) перестает быть локальной: ее нулевое решение неустойчиво, и в его достаточно малой окрестности не может быть аттрактора.

Ниже будем рассматривать критический случай в задаче об устойчивости, когда у (6) нет корней с положительной вещественной частью, но существует корень с нулевой вещественной частью.

Поскольку параметр a положителен, то при достаточно малых значениях параметра b все корни (6) имеют отрицательные вещественные части. Через b^+ будем обозначать наименьшее положительное значение параметра b , при котором в (6) есть корень с нулевой вещественной частью. Если такого значения не существует, то полагаем $b^+ = \infty$. Соответственно, через b^- обозначим наибольшее отрицательное значение b (если оно существует, иначе положим $b^- = -\infty$). Таким образом, при $b \in (b^-, b^+)$ все корни (6) имеют отрицательные вещественные части.

Введем в рассмотрение еще две величины: γ^+ и γ^- , которые по смыслу «похожи» на b^+ и b^- соответственно. При малых значениях γ все корни (6) имеют отрицательные вещественные части. Через γ^+ будем обозначать наименьшее положительное значение параметра γ , при котором в (6) есть корень с нулевой вещественной частью. Если такого значения не существует, то полагаем $\gamma^+ = \infty$. Соответственно, через γ^- обозначим наибольшее отрицательное значение γ (если оно существует, иначе положим $\gamma^- = -\infty$). Таким образом, при $\gamma \in (\gamma^-, \gamma^+)$ все корни (6) имеют отрицательные вещественные части.

В разделах 1 и 2 изучим две ситуации, когда $N = 2$ и $N = 3$. В разделе 3 приведем результаты для произвольного N . В разделе 4, который является центральным в настоящей работе, предполагается, что количество уравнений N достаточно велико, то есть

$$N \gg 1. \quad (7)$$

В частности, для этих случаев будут определены значения b^\pm и γ^\pm . В методическом плане исследования локальной динамики в разделах 1–3 базируются на использовании методов локальных инвариантных интегральных многообразий и метода нормальных форм (см., например, [28, 29]).

В условиях раздела 4 эти методы непосредственно не применимы, поскольку критические случаи тогда имеют бесконечную размерность. Используется разработанный автором специальный метод бесконечномерной нормализации [13, 14, 30]. Основные результаты состоят в построении так называемых квазинормальных форм — аналогов нормальных форм для бесконечномерного случая.

В плане одного из важных обобщений модели цепочки (2), (3) укажем, что полученные результаты распространяются и на цепочки уравнений (1) с другими односторонними связями

$$\dot{u}_j + au_j = f(u_j) + b(u_{j+1} - u_j),$$

в которых, как и для цепочки (2),

$$j = 1, \dots, N; \quad u_{N+1} = \gamma u_1.$$

Отметим, что в наиболее интересном случае (7) цепочки, для которых выполнено условие «периодичности»

$$u_{N+1} = u_1,$$

изучались в [27]. Сразу подчеркнем, что граничное условие (3) при $\gamma \neq 1$ принципиально усложняет динамические свойства системы (2).

1. Случай $N = 2$

Этот случай наиболее простой. Рассматривается система двух уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 + au_1 &= f(u_1) + bu_2, \\ \dot{u}_2 + au_2 &= f(u_2) + b\gamma u_1. \end{aligned} \tag{8}$$

При $\gamma < 0$ имеем $b^\pm = \pm\infty$. Тем самым при всех b корни (6) имеют отрицательные вещественные части.

Пусть

$$\gamma > 0.$$

Тогда $b^\pm = \pm a(\sqrt{\gamma})^{-1}$ ($\sqrt{\gamma} > 0$ — арифметический корень из γ). При $b = b^\pm$ линейная система (4) (для $N = 2$) имеет постоянные решения

$$\begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^\pm \\ a \end{pmatrix} \cdot \text{const.}$$

Фиксируем произвольно значение b_1 и введем малый параметр $\varepsilon : 0 < \varepsilon \ll 1$. Положим в (8)

$$b = b^\pm + \varepsilon b_1. \tag{9}$$

Тогда в (6) имеется один отрицательный (и отделенный от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$) корень и один корень $\lambda_0(\varepsilon)$, близкий к нулю:

$$\lambda_0(\varepsilon) = \varepsilon b_1 \sqrt{\gamma} + O(\varepsilon^2).$$

При малых ε в фазовом пространстве системы (8) имеется локальное инвариантное одномерное интегральное устойчивое многообразие (см., например, [31]), на котором система (8) (при некотором условии невырожденности) с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon)$ принимает вид скалярного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\xi}{d\tau} = b_1 \sqrt{\gamma} \xi + a(1 + (\sqrt{\gamma})^{-1}) \xi^2, \tag{10}$$

где $\tau = \varepsilon t$ — «медленное» время, а функция $\xi(\tau)$ связана с решениями (8) асимптотическим равенством

$$\begin{pmatrix} u_1(t, \varepsilon) \\ u_2(t, \varepsilon) \end{pmatrix} = \varepsilon \xi(\tau) \begin{pmatrix} b^\pm \\ a \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2). \quad (11)$$

При $b_1 \neq 0$ уравнение (10) имеет ненулевое состояние равновесия $\xi_0 = -b_1\sqrt{\gamma}[a + (1 + (\sqrt{\gamma})^{-1})]^{-1}$. Оно устойчиво при $b_1 > 0$ и неустойчиво при $b_1 < 0$. Поэтому и система (8) при $\gamma > 0$, при условии (9) и при достаточно малых ε имеет состояние равновесия

$$\begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{pmatrix} = \varepsilon \xi_0 \begin{pmatrix} b^\pm \\ a \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

которое устойчиво (неустойчиво) при $b_1 > 0$ ($b_1 < 0$). В рассмотренном близком к критическому случаю уравнение (10) называют нормальной формой. Упомянутое выше условие невырожденности состоит в том, что $f_2 \neq 0$. При $f_2 = 0$ и $f_3 \neq 0$ изменения не существенны. В нормальной форме квадратичное слагаемое заменится на кубическое, а асимптотическое разложение — аналог (11) — идет по степеням $\varepsilon^{1/2}$.

Тем самым изучение локальной динамики системы (8) завершено.

Приведем для системы (8) значения γ^+ и γ^- :

$$\gamma^+ = \left(\frac{a}{b} \right)^2, \quad \gamma^- = -\infty.$$

2. Случай $N = 3$

Система (2), (3) при $N = 3$ принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 + au_1 &= f(u_1) + bu_2, \\ \dot{u}_2 + au_2 &= f(u_2) + bu_3, \\ \dot{u}_3 + au_3 &= f(u_3) + b\gamma u_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Для линеаризованной системы

$$\dot{v} = A_\gamma v, \quad \text{где } v = (v_1, v_2, v_3), \quad A_\gamma = \begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ 0 & -a & b \\ b\gamma & 0 & -a \end{pmatrix}, \quad (13)$$

корни λ_1, λ_2 и λ_3 характеристического уравнения определяются равенствами

$$\lambda_1 + a = b\sqrt[3]{\gamma}, \quad \lambda_2 + a = b\sqrt[3]{\gamma} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \lambda_3 + a = b\sqrt[3]{\gamma} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad (14)$$

где $\sqrt[3]{\gamma}$ — арифметический корень ($\sqrt[3]{\gamma} > 0$ при $\gamma > 0$ и $\sqrt[3]{\gamma} < 0$ при $\gamma < 0$).

Для значений γ^\pm верны равенства

$$\gamma^+ = \begin{cases} \left(\frac{a}{b} \right)^3, & \text{если } b > 0, \\ \left(\frac{2a}{|b|} \right)^3, & \text{если } b < 0, \end{cases} \quad \gamma^- = \begin{cases} -\left(\frac{2a}{b} \right)^3, & \text{если } b > 0, \\ \left(\frac{a}{b} \right)^3, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

Приведем значения величины b^\pm :

$$b^+ = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt[3]{\gamma}}, & \text{если } \gamma > 0, \\ -\frac{2a}{\sqrt[3]{\gamma}}, & \text{если } \gamma < 0, \end{cases} \quad b^- = \begin{cases} -\frac{2a}{\sqrt[3]{\gamma}}, & \text{если } \gamma > 0, \\ \frac{a}{\sqrt[3]{\gamma}}, & \text{если } \gamma < 0. \end{cases}$$

При условиях $\gamma \in (\gamma^-, \gamma^+)$ ($b \in (b^-, b^+)$) корни (14) имеют отрицательные вещественные части, а при $\gamma \in (-\infty, \gamma^-)$ и $\gamma \in (\gamma^+, \infty)$ ($b \in (-\infty, b^-)$ и $b \in (b^+, \infty)$) среди корней (14) есть корень с положительной вещественной частью. При условиях $\gamma = \gamma^\pm$ ($b = b^\pm$) в задаче об устойчивости решений (12) возникают критические случаи нулевого корня или критические случаи пары чисто мнимых корней. Рассмотрим их.

2.1. Критический случай нулевого корня. Данный случай возникает при условии, когда $b > 0$ и $\gamma = \gamma^+$, либо при $b < 0$ и $\gamma = \gamma^-$. Ограничимся рассмотрением только первого из приведенных условий, то есть ниже считаем, что

$$b > 0 \text{ и } \gamma = \gamma^+ = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

Линейная система (13) при $\gamma = \gamma^+$ имеет постоянные решения $v = d_0 = \text{const}$, где $d_0 = (1, ab^{-1}, a^2b^{-2})$.

Фиксируем произвольно значение γ_1 и положим в (12)

$$\gamma = \gamma^+ + \varepsilon\gamma_1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Тогда корни λ_2 и λ_3 имеют при малых ε отрицательные вещественные части: $\operatorname{Re} \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}a + O(\varepsilon)$, а для корня $\lambda_1(\varepsilon)$ верно асимптотическое равенство

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon\mu_1\gamma_1 + O(\varepsilon^2), \quad \text{где } \mu_1 = b^3(3a^2)^{-1}.$$

Отсюда следует, что в достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия системы (12) существует устойчивое локальное инвариантное одномерное интегральное многообразие, на котором эта система с точностью до $O(\varepsilon)$ представима в виде нормальной формы (при выполнении некоторого условия невырожденности)

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha\xi + \beta\xi^2, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (15)$$

Для определения коэффициентов α и β подставим в (12) решение $u = (u_1, u_2, u_3)$ в виде асимптотического ряда

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon\xi(\tau)d_0 + \varepsilon^2U_2(\tau) + \dots$$

Собирая коэффициенты при первой степени ε в получившемся формальном тождестве, получаем верное равенство, а учитывая коэффициенты при ε^2 , приходим к системе для определения функции $U_2(\tau)$:

$$A_{\gamma_+}U_2 = -d_0 \frac{d\xi}{d\tau} + f_2\xi^2 d_0 \cdot d_0 + b\gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

здесь и ниже умножение векторов покоординатное.

Система (16) разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть ортогональна вектору $h_0 = (1, ba^{-1}, b^2a^{-2})$ — ненулевому решению однородного сопряженного уравнения $A^*h_0 = 0$. Учитывая это, получаем, что в (15)

$$\alpha = \mu_1\gamma_1 = b^3(3a^2)^{-1}\gamma_1, \quad \beta = \frac{1}{3}f_2(d_0 \cdot d_0, h_0). \quad (17)$$

Упомянутое выше условие невырожденности состоит в выполнении неравенства $f_2 \neq 0$. Используя (17) в (15), получаем полную картину поведения решений (15), а значит, и решений (12) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

2.2. Критический случай пары чисто минимых корней. Данный случай возникает при условиях

$$b < 0 \text{ и } \gamma^+ = \left(\frac{2a}{|b|} \right)^3, \text{ либо } b > 0 \text{ и } \gamma^- = -\left(\frac{2a}{b} \right)^3.$$

Пусть выполнены первые из этих условий

$$b < 0, \quad \gamma^+ = \left(\frac{2a}{|b|} \right)^3.$$

Тогда $\lambda_1 = -a + b\sqrt[3]{\gamma^+} < 0$ и $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{3}a$. Линейная система (13) при этом имеет периодические решения

$$v_0(t) = g_0 \exp(ia\sqrt{3}t), \quad g_0 = \begin{pmatrix} -\gamma^{+1/3}(1 + i\sqrt{3}) \\ \gamma^{+2/3} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Фиксируем произвольно значение γ_1 и положим в (12) и (13):

$$\gamma = \gamma^+ + \varepsilon\gamma_1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

При всех достаточно малых ε в не зависящей от ε достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия (12) существует (см., например, [31]) двумерное устойчивое локально инвариантное интегральное многообразие, на котором система (12) может быть с точностью до слагаемых порядка ε представлена в виде нормальной формы — комплексного скалярного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta\xi + \sigma\xi|\xi|^2, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (18)$$

Для определения коэффициентов δ и σ подставим в (12) решение в виде формального ряда

$$\begin{aligned} U(t, \varepsilon) = & \varepsilon^{1/2} (\xi(\tau)g_0 \exp(ia\sqrt{3}t) + \bar{\xi}(\tau)\bar{g}_0 \exp(-ia\sqrt{3}t)) + \varepsilon U_2(t, \tau) + \\ & + \varepsilon^{3/2} U_3(t, \tau) + \dots, \end{aligned}$$

где зависимость от $t = 2\pi(a\sqrt{3})^{-1}$ -периодическая. В получившемся формальном тождестве будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . На первом шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$, приходим к верному равенству. На следующем шаге получаем систему уравнений для определения функции $U_2(t, \tau) = U_{20}|\xi|^2 + U_{21}\xi^2 \exp(2ia\sqrt{3}t) + \bar{U}_{21}\bar{\xi} \exp(-2ia\sqrt{3}t)$:

$$AU_{20} = f_2 \begin{pmatrix} 4(\gamma^+)^{2/3} \\ (\gamma^+)^{4/3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (A - 2ia\sqrt{3}I)U_{21} = f_2 \begin{pmatrix} (\gamma^+)^{2/3}(4 + 2i\sqrt{3}) \\ (\gamma^+)^{4/3} \\ 1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что

$$U_{20} = f_2 A^{-1} \begin{pmatrix} 4(\gamma^+)^{2/3} \\ (\gamma^+)^{4/3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_{21} = f_2 (A - 2ia\sqrt{3}I)^{-1} \begin{pmatrix} (\gamma^+)^{2/3}(4 + 2i\sqrt{3}) \\ (\gamma^+)^{4/3} \\ 1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

На третьем шаге собираем коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$. В результате приходим к системе уравнений относительно вектор-функции $U_3(t, \tau)$, которую будем искать в виде

$$U_3(t, \tau) = U_{31}(\tau) \exp(ia\sqrt{3}t) + \bar{c}c + U_{33}(\tau) \exp(3ia\sqrt{3}t) + \bar{c}c.$$

Здесь и ниже через $\bar{c}c$ обозначается слагаемое, комплексно сопряженное к предыдущему.

Выражение для $U_{33}(\tau)$ просто находится. Ниже оно не понадобится, поэтому приводить его не будем. Для $U_{31}(\tau)$ получаем систему уравнений

$$(A_{\gamma_+} - ia\sqrt{3}I)U_{31}(\tau) = -b\gamma_1(\gamma^+)^{1/3}(1 + i\sqrt{3}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xi - g_0 \frac{d\xi}{d\tau} + \xi |\xi|^2 B, \quad (19)$$

где $B = 2f_2(g_0U_{20} + \bar{g}_0U_{21}) + 3f_3g_0 \cdot g_0 \cdot \bar{g}_0$.

Необходимым и достаточным условием разрешимости этой системы является условие ортогональности правой части (19) вектору h — ненулевому решению однородного сопряженного уравнения $A_{\gamma_+}h = -ia\sqrt{3}h$. Находим, что $h = ((1 + i\sqrt{3})^2a^2, (1 + i\sqrt{3})ab, b^2)$.

В итоге для определения $\xi(\tau)$ получаем уравнение (18), в котором

$$\delta = b^2(6a)^{-1}(1 + i\sqrt{3})\gamma_1, \quad \sigma = (B, h)((g_0, h))^{-1}.$$

Для примера сформулируем один результат.

Теорема 1. Пусть параметры γ_1, f_2 и f_3 таковы, что $\operatorname{Re} \delta > 0$ и $\operatorname{Re} \sigma < 0$. Тогда уравнение (18) имеет устойчивый цикл $\rho_0 \exp(i\varphi_0\tau)$, где $\rho_0 = (\operatorname{Re} \delta \cdot (\operatorname{Re} \sigma)^{-1})^{1/2}$, $\psi = \sqrt{3}\gamma_1 \operatorname{Re} \delta + \rho_0^2 \operatorname{Im} \sigma$, а система (12) при достаточно малых ε имеет устойчивый цикл

$$u_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}(g_0\rho_0 \exp((ia\sqrt{3} + \varepsilon i\psi + O(\varepsilon^2))t) + \bar{c}c) + O(\varepsilon).$$

3. Случай произвольного номера N

Прежде всего определим значения γ^\pm :

$$\gamma^+ = \begin{cases} (ab^{-1})^N, & \text{если } b > 0, \\ (a|b|^{-1})^N, & \text{если } b < 0 \text{ и } N \text{ — нечетно,} \\ (a|b|^{-1})^N \left(\cos \frac{\pi}{N}\right)^{-N}, & \text{если } b < 0 \text{ и } N \text{ — четно;} \end{cases}$$

$$\gamma^- = \begin{cases} -(ab^{-1})^N \left(\cos \frac{\pi}{N}\right)^N, & \text{если } b > 0 \text{ и } N \text{ — четно,} \\ -(ab^{-1})^N, & \text{если } b > 0 \text{ и } N \text{ — нечетно,} \\ -(a|b|^{-1})^N, & \text{если } b < 0 \text{ и } N \text{ — нечетно,} \\ -(a|b|^{-1})^N \left(\cos \frac{\pi}{N}\right)^N, & \text{если } b < 0 \text{ и } N \text{ — четно.} \end{cases}$$

Напомним, что при $\gamma \in (\gamma^-, \gamma^+)$ нулевое решение системы (20) асимптотически устойчиво, а при $\gamma < \gamma^-$ или $\gamma > \gamma^+$ — неустойчиво. Критические случаи в задаче об устойчивости нулевого

состояния равновесия возникают при $\gamma = \gamma^+$ или при $\gamma = \gamma^-$. В этом разделе рассмотрим локальную динамику системы (20) в случаях, близких к критическим.

Приведем несколько формул, которые понадобятся в дальнейшем. Пусть γ_N — арифметический корень N -й степени из $|\gamma|$. Положим

$$\gamma_0 = \begin{cases} \gamma_N, & \text{если } \gamma > 0, \\ \gamma_N \exp\left(i \frac{\pi}{N}\right), & \text{если } \gamma < 0, \end{cases}$$

и пусть

$$\alpha_k = \gamma_0 \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right), \quad k = 1, \dots, N.$$

Отметим, что $\alpha_k^N = \gamma$. Систему (2), (3) запишем в виде

$$\dot{u} = Au + F(u), \quad (20)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & b \\ b\gamma & 0 & 0 & \dots & -a \end{pmatrix}, \quad F(u) = f_2 u \cdot u + f_3 u \cdot u \cdot u + \dots$$

Здесь и ниже умножение векторов покоординатное, $u = (u_1, \dots, u_N)$.

Матрица A имеет собственные значения

$$\lambda_k = -a + b\alpha_k \quad (k = 1, \dots, N)$$

и отвечающие им собственные векторы

$$g_k = (1, \alpha_k, \alpha_k^2, \dots, \alpha_k^{N-1}).$$

Отметим, что у сопряженной к A матрицы A^* соответствующие собственные векторы $h_k = (1, \alpha_k^{-1}, \alpha_k^{-2}, \dots, \alpha_k^{-(N-1)})$.

3.1. Случай произвольного номера N . Здесь предполагаем, что $N > 2$ и матрица A имеет нулевое собственное значение, то есть

$$b > 0 \text{ и } \gamma = \gamma^+ = (ab^{-1})^N, \quad (21)$$

либо

$$b < 0, \quad \gamma = \gamma^- = (a|b|^{-1})^N \text{ и } N \text{ — нечетно.}$$

Коротко остановимся только на случае (21). Собственные значения $\lambda_2, \dots, \lambda_N$ имеют отрицательные вещественные части. Собственному значению $\lambda_1 = 0$ отвечает собственный вектор $g^0 = (1, a/b, a^2/b^2, \dots, a^{N-1}/b^{N-1})$. Фиксируем произвольно γ_1 и положим в (1)

$$g = g^+ + \varepsilon \gamma_1, \quad \text{где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (22)$$

Для нахождения в рассматриваемом случае коэффициентов α и β нормальной формы — скалярного уравнения

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha\xi + \beta|\xi|^2, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (23)$$

будем решения $u(t, \varepsilon)$ системы (1) искать в виде формального ряда

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon\xi(\tau)g_0 + \varepsilon^2U_2(\tau) + \dots$$

Тогда для нахождения $U_2(\tau)$ получим систему уравнений

$$AU_2 = -g_0 \frac{d\xi}{d\tau} + b\gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xi + f_2\xi^2 g^0 \cdot g^0.$$

Для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы ее правая часть была ортогональна вектору $h^0 = (1, b/a, b^2/a^2, \dots, b^{N-1}/a^{N-1})$. Отсюда приходим к выводу, что в уравнении (23)

$$\alpha = \frac{a\gamma_1}{N\gamma^+}, \quad \beta = \frac{1 - \gamma^+}{N(1 - ab^{-1})}. \quad (24)$$

Итак, показано, что при достаточно малых ε динамические свойства решений (20) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия описываются уравнением (23) с коэффициентами (24).

3.2. Критический случай пары чисто мнимых корней. Здесь предполагаем, что матрица A имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$ ($\omega > 0$), а все остальные ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части, то есть выполнены условия

$$b < 0, \quad \gamma^+ = (a|b|^{-1})^N \left(\cos \frac{\pi}{N} \right)^N \text{ и } N \text{ — четно,} \quad (25)$$

либо

$$b > 0, \quad \gamma^- = -(ab^{-1})^N \left(\cos \frac{\pi}{N} \right)^N \text{ и } N \text{ — четно,}$$

либо

$$b < 0, \quad \gamma^- = -(a|b|^{-1})^N \left(\cos \frac{\pi}{N} \right)^N \text{ и } N \text{ — четно.}$$

Остановимся только на случае (25). Матрица A тогда имеет собственные значения $\lambda^\pm = \pm i\omega$, где $\omega = a \operatorname{tg} \frac{\pi}{N}$. Им отвечают собственные векторы g_0 и \bar{g}_0 соответственно, и $g_0 = (1, \alpha_{N/2}, \alpha_{N/2}^2, \dots, \alpha_{N/2}^{N-1})$.

Пусть для γ выполнено равенство (22). Нормальной формой, описывающей динамические свойства системы (20) при условии (22) и (25), является скалярное комплексное уравнение (18). Для нахождения коэффициентов этого уравнения рассмотрим формальный ряд

$$\begin{aligned} U(t, \varepsilon) = & \varepsilon^{1/2} (\xi(\tau)g_0 \exp(i\omega t) + \bar{c}\bar{c}) + \varepsilon(|\xi|^2 U_{20} + \xi^2 U_{21} \exp(2i\omega t) + \bar{c}\bar{c}) + \\ & + \varepsilon^{3/2} ((U_{31} \exp(i\omega t) + \bar{c}\bar{c}) + \bar{c}\bar{c} + \xi^3 U_{32} \exp(3i\omega t) + \bar{c}\bar{c}) + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Подставим (26) в (20) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . При $\varepsilon^{1/2}$ получаем верное равенство. На следующем шаге находим, что

$$U_{20} = 2f_2 A^{-1} g_0 \cdot \bar{g}_0, \quad U_{21} = f_2 (A - 2i\omega I)^{-1} g_0 \cdot g_0.$$

Собирая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$, получаем уравнения для U_{31} и U_{32} . Выражение для U_{32} определяется просто. Ниже оно не понадобится, поэтому его приводить не будем. Для определения U_{31} приходим к системе

$$(A - i\omega I)U_{31} = B, \quad (27)$$

где

$$B = -g_0 \frac{d\xi}{d\tau} + \gamma_1 b \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xi + 2f_2 g_0 U_{20} + 2f_2 \bar{g}_0 U_{21} + 3f_3 g_0 \cdot g_0 \cdot \bar{g}_0.$$

Для разрешимости системы (27) необходимо и достаточно, чтобы вектор B стал ортогонален вектору h_0 — решению однородного сопряженного уравнения $A^*h = -i\omega h$. В итоге для коэффициентов уравнения (18) получаем равенства

$$\delta = -b\gamma_1(\gamma^+)^{(1/N-1)}N^{-1}, \quad (28)$$

$$\sigma = \frac{1}{N} \left[2f_2((g_0 U_{20}, h_0) + (\bar{g}_0 U_{21}, h_0)) + 3f_3(g_0 \cdot g_0 \cdot \bar{g}_0, h_0) \right]. \quad (29)$$

При условиях невырожденности $\operatorname{Re} \delta \neq 0$ и $\operatorname{Re} \sigma \neq 0$ уравнение (18) с коэффициентами (28), (29) полностью определяет локальную динамику уравнения (20). С помощью (26) получаем асимптотическое представление решений (20) через решения (18).

4. Случай достаточно больших значений N

Построения для этого случая существенно сложнее предыдущих. Здесь предполагаем, что значение N достаточно велико, то есть достаточно малой является величина

$$\varepsilon = N^{-1} \ll 1.$$

Исследуем локальную динамику системы (20) в этом случае.

Сначала сформулируем одно простое утверждение, вытекающее из формулы (6) для корней характеристического уравнения (5).

Лемма 1. *Пусть выполнено неравенство*

$$a|b|^{-1} < 1. \quad (30)$$

Тогда при всех достаточно малых ε все корни (6) имеют отрицательные вещественные части, которые отделены от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если

$$a|b|^{-1} > 1, \quad (31)$$

то при достаточно малых значениях ε найдется корень уравнения (5), вещественная часть которого положительна и отделена от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В случае (30) при малых ε решения (20) с начальными условиями из малой и не зависящей от ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. В случае (31) нулевое решение (20) неустойчиво и задача о динамике (20) становится нелокальной. Поэтому ниже предполагаем, что

$$|b| = a. \quad (32)$$

В частности, $b^+ = a + O(\varepsilon)$, $b^- = -a + O(\varepsilon)$. При условии (32) у (5) нет корней с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью, но есть бесконечно много корней, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия (20) реализуется критический случай бесконечной размерности. Отдельно рассмотрим случай, когда $b = a$ и когда $b = -a$.

Отметим работы автора [13, 14, 17, 32], в которых в других ситуациях изучались динамические свойства систем в бесконечномерных критических случаях.

Элементы $u_j(t)$ удобно переобозначить с помощью функции двух переменных $u_j(t) = u(t, x_j)$, где $x_j \in [0, 1]$ – равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ точки $x_j = 2\pi j/N = 2\pi i \varepsilon j$ ($j = 0, 1, \dots, N$).

Систему (2), (3) для $x = x_j$ тогда можно записать в виде уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + au = bu(t, x + \varepsilon) - f(u) \quad (33)$$

с краевыми условиями

$$u(t, 1) = \gamma u(t, 0), \quad (34)$$

а для линеаризованного в нуле уравнения (33) получим выражение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + av = bv(t, x + \varepsilon), \quad (35)$$

$$v(t, 1) = \gamma v(t, 0). \quad (36)$$

Уравнения (33) и (35) нельзя рассматривать для непрерывного аргумента $x \in [0, 1]$, поскольку неопределены выражения $u(t, x + \varepsilon)$ и $v(t, x + \varepsilon)$ при $x + \varepsilon > 1$. Исключение составляет случай, когда $\gamma = 1$. Он был рассмотрен в [27]. Тогда считаем, что $x \in (-\infty, \infty)$, а функции u, v рассматривались как периодические по x с периодом 1. Для корней $\lambda_k(\varepsilon)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) характеристического уравнения для (35) при $\gamma = 1$ имеет место формула

$$\lambda_k(\varepsilon) = -a + b \exp(2\pi k i \varepsilon),$$

а для соответствующих собственных функций $\varphi_k(t, x, \varepsilon)$ получаем выражение

$$\varphi_k(t, x, \varepsilon) = \exp(\lambda_k(\varepsilon)t) \exp(2\pi k i \varepsilon).$$

Отметим, что при условии (32) бесконечно много корней $\lambda_k(\varepsilon)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Важно подчеркнуть, что при $b = a + o(\varepsilon)$ функции $\varphi_k(t, x, \varepsilon)$ гладко зависят от ε и, что то же самое, выполнено условие регулярности

$$\varphi_k(t, x, \varepsilon) = \varphi_k(t, x, 0) + \varepsilon \frac{\partial \varphi_k(t, x, 0)}{\partial x} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi_k(t, x, 0)}{\partial x^2} + o(\varepsilon^2).$$

Если же $b = -a + o(\varepsilon)$, то для тех целых k , для которых $\lambda_k(\varepsilon)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что

$$\varphi_k(t, x, \varepsilon) = \exp(i\pi \varepsilon^{-1} x) \psi_k(t, x, \varepsilon),$$

где $\psi_k(t, x, \varepsilon)$ регулярно зависит от ε .

Вернемся к случаю произвольного γ . Для корней $\lambda_k(\varepsilon)$ уравнения (35) имеет место формула

$$\lambda_k(\varepsilon) = -a + b \exp(\varepsilon(\ln \gamma + 2\pi k i)), \quad (37)$$

в которой номер k принимает значения $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Фиксируем произвольно значение b_1 , и пусть либо

$$b = a + \varepsilon b_1, \quad (38)$$

либо

$$b = -a(1 + \varepsilon b_1). \quad (39)$$

В случае (38) применим в (35) условие регулярности

$$v(t, x + \varepsilon) = v(t, x) + \varepsilon \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} + O(\varepsilon^2).$$

Тогда с точностью до $O(\varepsilon^2)$ приходим к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon b_1 v + \varepsilon a \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v(t, 1) = \gamma v(t, 0).$$

В нерегулярном случае, когда выполнено условие (39), получаем, что

$$v(t, x) = \exp(i\pi\varepsilon^{-1}x)\bar{v} + \bar{c}c$$

и

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \varepsilon b_1 \bar{v} + \varepsilon a \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \quad (\bar{v}(t, 1) + \bar{c}c) \exp(i\pi N) = \gamma \bar{v}(t, 0) + \bar{c}c.$$

Положим в (37) $\lambda_k(\varepsilon) = \varepsilon \lambda_{k1}(\varepsilon)$. вещественные части всех $\lambda_{k1}(\varepsilon)$ имеют асимптотику

$$b_1 + \ln |\gamma| + O(\varepsilon).$$

Отсюда получаем критерий устойчивости нулевого состояния равновесия: при $b_1 + \ln |\gamma| > 0$ состояние равновесия неустойчиво, а при $b_1 + \ln |\gamma| < 0$ — устойчиво.

Отметим, что в случае (6) все решения (33) (при условии (9)) из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, а в случае (7) задача о локальной динамике (33), (34) не является локальной. Ниже рассмотрим критический случай, когда параметр $\gamma = \gamma_0$ выбран так, что

$$|\gamma_0| \exp(a^{-1}b_1) = 1.$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр b близок к параметру a и когда близок к параметру $-a$. В первом случае в разделах 4.1 и 4.2 речь пойдет о регулярных решениях, а во-втором случае в разделе 4.3 — о нерегулярных.

4.1. Случай, когда параметр b близок к значению a и параметр γ положителен. В этом разделе полагаем, что выполнено равенство (38) и

$$\gamma > 0 \quad \text{и} \quad f_2 \neq 0.$$

Тогда для каждого целого k выполняется асимптотическое равенство

$$\lambda_k(\varepsilon) = \varepsilon[b_1 + a(\ln \gamma + 2\pi k i)] + O(\varepsilon^2), \quad (40)$$

а собственные функции $v_k(t, x)$, отвечающие корню $\lambda_k(\varepsilon)$, представимы в виде

$$v_k(t, x) = \exp(2\pi i k x + \lambda_k(\varepsilon)t). \quad (41)$$

Рассмотрим регулярные решения краевой задачи (33), (34), то есть положим

$$u(t, x + \varepsilon) = u(t, x) + \varepsilon \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + O(\varepsilon^2).$$

Через t_1 обозначим «медленное» время $t_1 = \varepsilon t$ и произведем замену $u(t, x) = \varepsilon u_1(t_1, x)$. Тогда, отбрасывая слагаемые порядка ε^2 , приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} = a \frac{\partial u_1}{\partial x} + b_1 u_1 - f_2 u_1^2, \quad u_1(t_1, 1) = \gamma u_1(t_1, 0). \quad (42)$$

В (42) существует нулевое состояние равновесия $u_1 \equiv 0$ и, возможно, ненулевое

$$u_1 = u_0(x) = [-f_2 b_1^{-1} + c_0 \exp(b_1 a^{-1} x)]^{-1}, \quad c_0 = f_2 b_1^{-1} (\gamma - 1) (\gamma \exp(b_1 a^{-1}) - 1),$$

если выполнены условия $\gamma > 0, \gamma \neq 1, -f_2 + c_0 b_1 \exp(b_1 a^{-1} x) \neq 0$ для $x \in [0, 1]$.

Краевая задача (42) является квазинормальной формой для краевой задачи (33), (34). Это означает, что по ограниченному при $t_1 \rightarrow \infty, x \in [0, 1]$ решению $u_1(t_1, x)$ определяется функция $u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon u_1(\varepsilon t, x)$, которая удовлетворяет (33), (34) с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

Исследуем поведение всех решений (42) (а значит, и (33), (34)) из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Сформулируем простое утверждение.

Лемма 2. *При условии $\exp(-b_1 a^{-1}) > \gamma (< \gamma)$ нулевое состояние равновесия в (42) и в (33), (34) асимптотически устойчиво (неустойчиво).*

Рассмотрим критический случай, когда $\gamma = \gamma_0$, где

$$\gamma_0 = \exp(-b_1 a^{-1}), \quad (43)$$

и повторим схему нормализации. Фиксируем произвольно значение b_2 и положим

$$b = a + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2. \quad (44)$$

Для регулярных решений $u(t, x + \varepsilon)$ учтем в (33) слагаемые порядка ε^2 . В результате получаем, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} = a \frac{\partial u_1}{\partial x} + (b_1 + \varepsilon b_2) u_1 + \frac{1}{2} a \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f_2 u_1^2 + \varepsilon f_3 u_1^3, \quad u_1(t_1, 1) = \gamma u_1(t_1, 0). \quad (45)$$

Линеаризованная в нуле при $\varepsilon = 0$ краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} = a \frac{\partial u_1}{\partial x} + b_1 u_1, \quad u_1(t_1, 1) = \gamma u_1(t_1, 0). \quad (46)$$

Её характеристическое уравнение

$$(\lambda - b_1)v = a \frac{dv}{dx}, \quad v(1) = \gamma v(0), \quad (47)$$

в силу (43), имеет бесконечно много корней $\lambda_k = 2\pi k i a$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Корню λ_k отвечает собственная функция $v_k(x) = \exp(-b_1 a^{-1} x) \exp(\lambda_k a^{-1} x)$. Положим $y = t_1 - a^{-1} x$ и $w_k(y) = \exp(\lambda_k y)$. Тогда $v_k(t_1, x) = \exp(-b_1 a^{-1} x) \exp(\lambda_k y) = \exp(-b_1 a^{-1} x) w_k(y)$.

Поэтому произвольная линейная комбинация функций

$$w(x, y) = \exp(-b_1 a^{-1} x) \cdot \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} c_k w_k(y)$$

тоже является решением (46).

Опираясь на алгоритм метода построения квазинормальных форм [13, 14, 17, 32], решения нелинейной краевой задачи (45) ищем в виде формального ряда

$$u_1(\tau, x, \varepsilon) = \varepsilon w(\tau, y) \exp(-b_1 a^{-1} x) + \varepsilon^2 U_2(\tau, x, y) + \dots, \quad (48)$$

где $\tau = \varepsilon t_1$, а по переменной y выполнено условие 1-периодичности.

Подставим (48) в (45) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . На первом шаге, собирая коэффициенты при нулевой степени ε , получим верное равенство. На следующем шаге соберем коэффициенты при ε^2 . В результате получаем соотношение

$$a \frac{\partial U_2}{\partial x} + b_1 U_2 = \varphi(\tau, x, y), \quad U_2(1) = \gamma U_2(0).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, x, y) = & \left[-\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b_1 \frac{\partial w}{\partial y} + (b_1^2 (2a)^{-1} + b_2) w \right] \exp(-b_1 a^{-1} x) + \\ & + f_2 w \exp(-2b_1 a^{-1} x). \end{aligned} \quad (49)$$

Воспользуемся следующим простым утверждением.

Лемма 3. *Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна. Тогда для разрешимости краевой задачи*

$$a \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_1 \psi = \varphi(x), \quad \psi(1) = \gamma_0 \psi(0) + \alpha$$

в классе непрерывных функций необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^1 \varphi(s) \exp(b_1 a^{-1} s) ds = a \cdot \alpha \gamma_0. \quad (50)$$

Учитывая в (50) равенство (49), приходим к краевой задаче для определения функции $w(\tau, y)$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b_1 \frac{\partial w}{\partial y} + (b_1^2 (2a)^{-1} + b_2) w + f_2 (1 - \gamma) b_1^{-1} a_1 w^2, \quad (51)$$

$$w(\tau, y + 1) \equiv w(\tau, y). \quad (52)$$

Сформулируем основной результат этого раздела.

Теорема 2. *Пусть краевая задача (51), (52) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty, y \in [0, 1]$ решение $w_0(\tau, y)$. Тогда функция $u(t_1, x) = \varepsilon^2 w_0(\varepsilon^2 t, y) \exp(-b_1 a^{-1} x)$ удовлетворяет краевой задаче (33), (34) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.*

Отметим, что в случае, когда $f_2 = 0$ (или $\gamma = 1$), в (51) вместо квадратичной нелинейности появляется кубическая нелинейность. Важно подчеркнуть, что устойчивым решением краевой задачи (51), (52) может быть только однородное состояние равновесия.

4.2. Случай, когда параметр b близок к a и параметр γ отрицателен. Здесь полагаем, что

$$\gamma < 0. \quad (53)$$

Повторяя построения предыдущего раздела, то есть учитывая формулы (40)–(41), приходим также к краевой задаче (42). При условии (53) у (42) есть только нулевое состояние равновесия. Исследуем его устойчивость.

Лемма 4. *При условии $\exp(-b_1 a^{-1}) > |\gamma| (< |\gamma|)$ нулевое состояние равновесия в (42) и в (33), (34) асимптотически устойчиво (неустойчиво).*

Рассмотрим критический случай, когда

$$|\gamma| = \gamma_0 = \exp(-b_1 a^{-1}). \quad (54)$$

Пусть выполнено равенство (44). Для регулярных решений $u(t, x + \varepsilon)$ учтем в (33) слагаемые порядка ε^2 . Тогда снова приходим к краевой задаче (45). Для линеаризованной краевой задачи (46) исследуем характеристическое уравнение (47). Оно, в отличие от предыдущего случая, имеет бесконечно много корней $\lambda_k = \pi i(2k + 1)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Как и выше, положим $y = t_1 - a^{-1}x$, $w_k(y) = \exp(\lambda_k y)$. Тогда $v_k(t, x) = \exp(-b_1 a^{-1})w_k(y)$. Решения нелинейной краевой задачи (45) в случае (53) ищем в виде

$$u_1(\tau, x, y) = \varepsilon^{1/2}w(\tau, y) \exp(-b_1 a^{-1}) + \varepsilon U_2(\tau, x, y) + \varepsilon^{3/2}U_3(\tau, x, y) + \dots, \quad (55)$$

где $\tau = \varepsilon t_1$, а функция $w(\tau, y)$ имеет структуру

$$w(\tau, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\tau)w_k(y).$$

Подставим формальное выражение (55) в (45) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . На первом шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$, получим верное равенство. На следующем шаге соберем коэффициенты при первой степени ε . В результате приходим к краевой задаче для нахождения $U_2(\tau, x, y)$:

$$a \frac{\partial U_2}{\partial x} + bU_2 = f_2 \exp(-2b_1 a^{-1}x)w^2(\tau, y), \quad U_2(\tau, 1, y) = \gamma U_2(\tau, 0, y).$$

Отсюда находим, что

$$U_2 = \exp(-b_1 a^{-1}x) \left[c(\tau, y) + f_2 w^2(\tau, y) \cdot ab_1^{-1}(1 - \exp(-b_1 a^{-1}x)) \right],$$

где

$$c(\tau, y) = af_2(b_1(\gamma - 1))^{-1}w^2(\tau, y)|\gamma|(1 - |\gamma|).$$

На третьем шаге получаем уравнение для определения $U_3(\tau, x, y)$. Из условия его разрешимости (согласно лемме 3) получаем краевую задачу для нахождения функции $w(\tau, y)$:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{1}{2}a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b_1 \frac{\partial w}{\partial y} + (b_1^2(2a)^{-1} + b_2)w + \delta w^3, \quad (56)$$

$$w(\tau, y + 1) \equiv -w(\tau, y), \quad (57)$$

в которой

$$\delta = 2f_2^2(b_1^{-2})[2a\gamma(1 + \gamma)^2 + 3a(|\gamma|^3 - 1)].$$

Приведем основной результат.

Теорема 3. Пусть краевая задача (56), (57) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty, y \in (-\infty, \infty)$ решение $w_0(\tau, y)$. Тогда функция $u(t_1, x, \varepsilon) = \varepsilon^{3/2} w_0(\varepsilon^2 t_1, t_1 + a^{-1}x)$ удовлетворяет краевой задаче (33), (34) с точностью до $o(\varepsilon^2)$.

Отметим, что краевая задача (56), (57) может иметь неоднородное устойчивое состояние равновесия.

4.3. Случай, когда параметр b близок к параметру $-a$. Пусть для произвольно фиксированного значения b_1 выполнено условие (39). Рассмотрим линеаризованную краевую задачу (35), (36). Ее характеристическое уравнение (37) при условии (39) имеет бесконечно много корней $\lambda_k(\varepsilon)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), которые стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым реализуется критический случай бесконечной размерности. Корню $\lambda_k(\varepsilon)$ отвечает собственная функция $\varphi_k(t, x, \varepsilon)$, которая асимптотически быстро осциллирует по пространственной переменной x . Это означает, что соответствующие решения имеют нерегулярную структуру.

В (35), (36) полагаем

$$u(t, x) = v(t, x) \exp(i\pi\varepsilon^{-1}x) + \bar{c}\bar{c}. \quad (58)$$

Учитывая, что $u(t, 1) = v(t, 1) \exp(i\pi N) + \bar{c}\bar{c}$ и что $\varepsilon = N^{-1}$, получаем равенство

$$v(t, 1) + \bar{v}(t, 1) = \gamma(-1)^N(v(t, 0) + \bar{v}(t, 0)). \quad (59)$$

Тогда для $v(t, x)$ приходим к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} + av = -bv(t, x + \varepsilon). \quad (60)$$

Используя равенство (39), заключаем, что функция $v(t, x)$ является регулярной, то есть

$$v(t, x + \varepsilon) = v(t, x) + \varepsilon \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dots$$

Подставим это выражение в (33), (34). Тогда на основании (58) приходим к уравнению

$$\frac{\partial v_1}{\partial t_1} + a \frac{\partial v_1}{\partial x} + b_1 v_1 = \exp(-b_1 a^{-1}x) f_2(v_1 \exp(i\pi\varepsilon^{-1}x) + \bar{c}\bar{c})^2 \quad (61)$$

с краевым условием (59). Здесь $t_1 = \varepsilon t$, $v = \varepsilon v_1$. Для этой краевой задачи имеет место утверждение, аналогичное лемме 2.

Лемма 5. При условии $\exp(-b_1 a^{-1}) > |\gamma|$ ($< |\gamma|$) нулевое состояние равновесия в (61), (59) и в (33), (34) асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Остановимся на рассмотрении критического случая, когда выполнены равенства (54). В этом случае линеаризованная краевая задача (60), (59) имеет бесконечно много периодических по y решений $v_{1k} = \exp(-b_1 a^{-1}x) w_k(y)$, где $y = t_1 - a^{-1}x$, $w_k(y) = \exp(\lambda_k y)$, где $\lambda_k = 2\pi i k a$, если $\gamma(-1)^N > 0$ и $\lambda_k = \pi i a(2k + 1)$, если $\gamma(-1)^N < 0$.

Положим

$$b = -(a + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2) \quad \text{и} \quad \gamma = \gamma_0 + \varepsilon \gamma_1. \quad (62)$$

Рассмотрим вопрос о поведении при условиях (54) и (62) всех решений (33), (34) из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Введем в рассмотрение формальное выражение

$$\begin{aligned}
v(t_1, x) = & \varepsilon (w(\tau, y) \exp(-b_1 a^{-1} x) \exp(i\pi \varepsilon^{-1} x) + \bar{c}c) + \\
& + \varepsilon^2 \left[u_{20}(t, x, y) + \bar{c}c + \exp(i\pi z) u_{21}(t, x, y) + \bar{c}c + \right. \\
& + \exp(2i\pi z) u_{22}(t, x, y) + \bar{c}c + \\
& \left. + \exp(3i\pi z) u_{23}(t, x, y) + \bar{c}c \right] + \dots,
\end{aligned} \tag{63}$$

где $z = x\varepsilon^{-1}$, $u_1(t_1, x, y) = w(\tau, y) \exp(-b_1 a^{-1} x)$, $\tau = \varepsilon t_1$, $w(\tau, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\tau) w_k(y)$, а по переменной y все функции из (63) периодичны.

Рассмотрим отдельно два случая. В первом из них предполагаем, что

$$(-1)^N \gamma_0 > 0, \tag{64}$$

а во втором случае выполнено неравенство

$$(-1)^N \gamma_0 < 0. \tag{65}$$

4.3.1. Построение асимптотики решений при условии (64). Пусть выполнено условие (64). Подставим (63) в (33), (34) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате получим равенства

$$a \frac{\partial u_1}{\partial x} + b_1 u_1 = 0, \tag{66}$$

$$2au_{20} = f_2 |u_1|^2, \quad 2au_{22} = f_2 u_1^2, \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
a \frac{\partial u_{21}}{\partial x} + b_1 u_{21} = & \left[-(b_2 + b_1^2 (2a)^{-1})w - \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{a}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b_1 \frac{\partial w}{\partial y} \right] \times \\
& \times \exp(-b_1 a^{-1} x) + [f_2 u_{20} + 2f_2 u_{22} + 3f_3] \cdot w |w|^2 \exp(-3b_1 a^{-1} x),
\end{aligned} \tag{68}$$

$$a \frac{\partial u_{23}}{\partial x} + b_1 u_{23} = [a^{-1} f_2^2 + f_3] u_1^3. \tag{69}$$

Из граничных условий получаем соотношения

$$(-1)^N (u_1 + \bar{c}c) \Big|_{x=1} = \gamma_0 (u_1 + \bar{c}c) \Big|_{x=0}, \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
& \left(u_{20} + \bar{c}c + (-1)^N u_{21} + \bar{c}c + u_{22} + \bar{c}c + (-1)^N u_{23} + \bar{c}c \right) \Big|_{x=1} = \\
& = \gamma_0 \left(u_{20} + \bar{c}c + u_{21} + \bar{c}c + u_{22} + \bar{c}c + u_{23} + \bar{c}c \right) \Big|_{x=0} + \gamma_1 (u_1 + \bar{c}c) \Big|_{x=0}.
\end{aligned} \tag{71}$$

Равенства (66) и (70) выполнены в силу определения u_1 . Из (67) и (68) находим, что

$$u_{20} = (2a)^{-1} f_2 |u_1|^2, \quad u_{22} = (2a)^{-1} f_2 u_1^2, \tag{72}$$

а из (69) получаем, что

$$u_{23} = -(2b_1)^{-1} (f_2^2 + a f_3) \left[\exp \left(-\frac{3b_1}{a} x \right) - \exp \left(-\frac{b_1}{a} x \right) \right] w^3. \tag{73}$$

Рассмотрим вопрос о разрешимости относительно $u_{21}(\tau, x, y)$ уравнения (68) с краевым условием (71). Согласно лемме 3, необходимыми и достаточными условиями разрешимости этой краевой задачи является выполнение равенств

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{a}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b_1 \frac{\partial w}{\partial y} + c_1 w + c_2 |w|^2 + c_2 w^2 + c_3 w^3 + c_4 w |w|^2, \quad (74)$$

$$w(\tau, y + 1) \equiv w(\tau, y), \quad (75)$$

где

$$c_1 = -(b_2 + (2a)^{-1} b_1^2) + a \gamma_0^2 \gamma_1,$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \gamma_0^2 f_2 (1 - \gamma_0), \quad c_3 = c_2,$$

$$c_4 = -a(2b_1)^{-1} (f_2^2 + a f_3) \gamma_0^2 (\gamma_0^2 - 1), \quad c_5 = 3(2b_1)^{-1} a (\gamma_0^2 - 1) \cdot [f_3 + a^{-1} f_2^2].$$

Сформулируем основное утверждение, которое вытекает из приведенного выше алгоритма построения асимптотики решений.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (62) и (64). Пусть функция $w(\tau, y)$ является ограниченным при $\tau \rightarrow \infty$, $y \in [0, 1]$ решением краевой задачи (74), (75). Тогда функция*

$$\begin{aligned} u(t, x, y) = & \varepsilon (w(\tau, y) \exp(-b_1 a^{-1} x) \exp(i\pi \varepsilon^{-1} x) + \overline{c}c) + \\ & + \varepsilon^2 \left[u_{20}(t, x, y) + \overline{c}c + \exp(i\pi z) u_{21}(t, x, y) + \overline{c}c + \right. \\ & + \exp(2i\pi z) u_{22}(t, x, y) + \overline{c}c + \\ & \left. + \exp(3i\pi z) u_{23}(t, x, y) + \overline{c}c \right] + \dots, \end{aligned}$$

удовлетворяет краевой задаче (33), (34) с точностью до $O(\varepsilon^4)$.

4.3.2. Построение асимптотики решений при условии (65). Пусть выполнено неравенство (65). В этом случае соответствующие построения усложняются. Снова рассмотрим асимптотическое выражение (63), но фигурирующую в нем функцию $u_{21}(\tau, x, y)$ представим в виде суммы двух функций

$$u_{21}(\tau, x, y) = v_1(\tau, x, y) + v_2(\tau, x, y). \quad (76)$$

Первая из них — 1-антiperиодическая по y , как и функция $w(\tau, y)$, то есть содержит только гармоники с нечетными номерами $\exp(i\pi(2k + 1))$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Вторая функция — $v_2(\tau, x, y)$ — 1-периодична по y , то есть ее разложение в ряд Фурье содержит только гармоники $\exp(2i\pi k)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Подставим (63) с учетом (76) в (33), (34) и произведем стандартные действия. В результате получим равенства (66), (67), (69), (70). Равенства (66), (70) определяют функцию $u_1(\tau, x, y) = w(\tau, y) \exp(-b_1 a^{-1} x)$, а из (67) и (69) находим u_{20} , u_{22} и u_{23} согласно формулам (72), (73). Уравнение для v_1 получаем, заменив в левой части уравнения (68) функцию u_{21} и v_1 , а уравнение v_2 имеет вид

$$a \frac{\partial v_2}{\partial x} + b_1 v_2 = 0. \quad (77)$$

Основываясь на формуле для краевых условий (71), определим краевые условия для функций v_1 и v_2 :

$$(-1)^N v_1 \Big|_{x=1} = -(-1)^N u_{23} \Big|_{x=1} + \left[\gamma_0 v_1 + \gamma_0 u_{23} + \gamma_0 \gamma_1 u_1 \right] \Big|_{x=0}, \quad (78)$$

$$(-1)^N v_2 \Big|_{x=1} = -u_{20} \Big|_{x=1} - u_{22} \Big|_{x=1} + \gamma_0 \left[v_2 + u_{20} + u_{22} \right] \Big|_{x=0}. \quad (79)$$

Из краевой задачи (77), (79) находим, что

$$v_2 = v_2(\tau, x, y) = (2a|\gamma_0|)^{-1} f_2 \gamma_0 (1 - \gamma_0) w \left[\bar{w} - \frac{1}{2} w \right] \exp(-b_1 a^{-1} x).$$

Для разрешимости краевой задачи (68) (с заменой u_{21} на v_1), (78), как следует из леммы 3, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{a}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - b_1 \frac{\partial w}{\partial y} + c_1 w + c_3 w^3 + c_4 w |w|^2$$

и 1-антипериодические краевые условия

$$w(\tau, y + 1) \equiv -w(\tau, y). \quad (80)$$

Сформулируем основной результат

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (62) и (65). Пусть функция $w(\tau, y)$ является ограниченным при $\tau \rightarrow \infty$, $y \in [0, 1]$ решением краевой задачи (74), (75). Тогда функция*

$$\begin{aligned} u(t, x, y) = & \varepsilon \left(w(\tau, y) \exp(-b_1 a^{-1} x) \exp(i\pi\varepsilon^{-1} x) + \bar{c} \bar{c} \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left[u_{20}(t, x, y) + \bar{c} \bar{c} + \exp(i\pi z) u_{21}(t, x, y) + \bar{c} \bar{c} + \right. \\ & + \exp(2i\pi z) u_{22}(t, x, y) + \bar{c} \bar{c} + \\ & \left. + \exp(3i\pi z) u_{23}(t, x, y) + \bar{c} \bar{c} \right] + \dots, \end{aligned}$$

удовлетворяет краевой задаче (33), (34) с точностью до $O(\varepsilon^4)$.

Замечание 1. *Можно рассмотреть задачу, в которой варьируются граничные условия: вместо граничных условий (3) выполнено равенство*

$$u_N(t) = \gamma u_M(t),$$

где M ($M < N$) — некоторое целое. Наибольший интерес представляет изучение влияния этих граничных условий при достаточно больших значениях N .

Отметим сначала, что при условии $M \sim \text{const}$ (при $\varepsilon \rightarrow 0$) задача о динамике рассматриваемой системы сводится к случаю малого возмущения параметра γ в задаче (33), (34).

Существенные изменения могут происходить в случаях, когда номер M тоже является достаточно большим. Пусть, например, $M = \frac{m}{n} N$, где m и n — натуральные числа и $m < n$. Тогда в граничных условиях (70), (71) появляются множители $\exp(i\pi N)$ и $\exp(i\pi \frac{m}{n} N)$. Отсюда следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) возникают порядка n различных и чередующихся при $N \rightarrow \infty$ граничных условий. Тем самым динамические свойства решений описываются при увеличении N чередующимися n сценариями.

Выводы

Рассмотрена задача о локальной — в окрестности состояния равновесия — динамике системы N односторонне связанных простейших нелинейных уравнений первого порядка. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что уже при

Кащенко С. А.

$N = 2$ может возникнуть критический случай нулевого корня, а при $N = 3$ могут реализоваться критические случаи одного нулевого корня или пары чисто мнимых корней. В этих случаях построены соответствующие нормальные формы и рассмотрены бифуркационные задачи. Приведены построения для произвольного значения N . В разделе 4, который является основным, рассмотрены случаи, когда значение N является достаточно большим, то есть параметр $\varepsilon = N^{-1}$ является достаточно малым. В этом случае от дискретной системы N уравнений осуществлен переход к пространственно-непрерывной задаче.

Определены значения параметров, при которых могут реализоваться критические случаи. Главная особенность состоит в том, что критические случаи имеют бесконечную размерность, то есть бесконечно много корней характеристического уравнения линеаризованной задачи стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Применяя развитый в работах автора [13, 14, 17, 32] метод бесконечномерной нормализации — метод квазинормальных форм — удалось построить специальные нелинейные уравнения в частных производных параболического типа с граничными условиями. Эти краевые задачи не содержат малого параметра, и их нелокальная динамика определяет поведение всех решений исходной системы из достаточно малой окрестности состояния равновесия.

При определенных условиях соответствующие уравнения могут иметь нестандартный вид и содержать как квадратичные, так и кубические нелинейности. Динамика таких краевых задач может быть достаточно сложной (см., например, [33]).

Построена асимптотика главных членов асимптотического представления решений.

Важно отметить, что решения исходной системы могут иметь особую «чувствительность» динамических свойств к изменению малого параметра ε . Это следует из того, что изменение количества (большого) N всего на 1 может существенно менять даже внешний вид соответствующих уравнений с частными производными и менять периодические граничные условия на антiperиодические.

Список литературы

1. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Turukina L. V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // Physics Letters A. 2013. Vol. 377, no. 45–48. P. 3291–3295. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013.
2. *Osipov G. V., Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, no. 3. P. 2353–2361. DOI: 10.1103/physreve.55.2353.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p.
4. *Dodla R., Sen A., Johnston G. L.* Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69, no. 5. P. 056217. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.056217.
5. *Williams C. R. S., Sorrentino F., Murphy T. E., Roy R.* Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays // Chaos. 2013. Vol. 23, no. 4. P. 043117. DOI: 10.1063/1.4829626.
6. *Rao R., Lin Z., Ai X., Wu J.* Synchronization of epidemic systems with Neumann boundary value under delayed impulse // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 12. P. 2064. DOI: 10.3390/math10122064.
7. *Van der Sande G., Soriano M. C., Fischer I., Mirasso C. R.* Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77, no. 5. P. 055202. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.055202.

8. Клинишов В. В., Некоркин В. И. Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // УФН. 2013. Т. 183, № 12. С. 1323–1336. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323.
9. Heinrich G., Ludwig M., Qian J., Kubala B., Marquardt F. Collective dynamics in optomechanical arrays // Phys. Rev. Lett. Vol. 107, no. 4. P. 043603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.043603.
10. Zhang M., Wiederhecker G. S., Manipatruni S., Barnard A., McEuen P., Lipson M. Synchronization of micromechanical oscillators using light // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 109, no. 23. P. 233906. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.233906.
11. Lee T. E., Sadehgpour H. R. Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 111, no. 23. P. 234101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.234101.
12. Yanchuk S., Wolfrum M. Instabilities of stationary states in lasers with longdelay optical feedback // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2012. Vol. 9, no. 2. P. 519–535. DOI: 10.20347/WIAS.PREPRINT.962.
13. Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A. Complexity near equilibrium in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // In: 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications. NOLTA'98. 14–17 September, 1998, Crans-Montana, Switzerland. NOLTA Society, 1998. P. 495–498.
14. Kashchenko S. A. Quasinormal forms for chains of coupled logistic equations with delay // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 15. P. 2648. DOI: 10.3390/math10152648.
15. Кащенко С. А. Динамика цепочки логистических уравнений с запаздыванием и с антидиффузионной связью // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2022. Т. 502, № 1. С. 23–27. DOI: 10.31857/S2686954322010064.
16. Thompson J. M. T., Stewart H. B. Nonlinear Dynamics and Chaos. New York: Wiley, 2002. 458 p.
17. Kashchenko S. A. Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain // Chaos. 2021. Vol. 31, no. 3. P. 033147. DOI: 10.1063/5.0040689.
18. Kanter I., Zigzag M., Englert A., Geissler F., Kinzel W. Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor // Europhysics Letters. 2011. Vol. 93, no. 6. P. 60003. DOI: 10.1209/0295-5075/93/60003.
19. Rosin D. P., Rontani D., Gauthier D. J., Schöll E. Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 110, no. 10. P. 104102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.104102.
20. Yanchuk S., Perlikowski P., Popovych O. V., Tass P. A. Variability of spatiotemporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons // Chaos. 2011. Vol. 21, no. 4. P. 047511. DOI: 10.1063/1.3665200.
21. Klinshov V., Nekorkin V. Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling // Cybern. Phys. 2012. Vol. 1, no. 2. P. 106–112.
22. Stankovski T., Pereira T., McClintock P. V. E., Stefanovska A. Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms // Rev. Mod. Phys. 2017. Vol. 89, no. 4. P. 045001. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.045001.
23. Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Wolfrum M., D'Huys O., Nekorkin V. Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring // Phys. Rev. E. 2017. Vol. 96, no. 4. P. 042217. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
24. Караваев А. С., Иибулатов Ю. М., Киселев А. Р., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Миронов С. А., Шварц В. А., Гридинев В. И., Безручко Б. П. Модель сердечно-сосудистой системы человека с автономным контуром регуляции среднего артериального давления // Физиология человека. 2017. Т. 43, № 1. С. 70–80. DOI: 10.7868/S0131164616060096.
25. Кащенко А. А. Зависимость динамики модели связанных осцилляторов от числа осциллято-

ров // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2021. Т. 501. С. 46–51. DOI: 10.31857/S2686954321060096.

26. Kashchenko A. A. Relaxation modes of a system of diffusion coupled oscillators with delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. Vol. 93, no. 6. P. 105488. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105488.
27. Кащенко С. А. Динамика цепочек из большого числа осцилляторов с односторонней и двусторонней запаздывающими связями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63, № 10. С. 1617–1636. DOI: 10.31857/S0044466923090107.
28. Hartman P. Ordinary Differential Equations. New York: Wiley, 1964. 612 p.
29. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Berlin: Springer, 1981. 350 p. DOI: 10.1007/BFb0089647.
30. Kaschenko S.A. Normalization in the systems with small diffusion // Int. J. Bifurc. Chaos. 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
31. Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей односторонней связью // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 189–207. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207.
32. Клиньшов В. В. Коллективная динамика сетей активных элементов с импульсными связями: Обзор // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 5. С. 465–490. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-5-465-490.
33. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992. 544 с.

References

1. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Sataev IR, Turukina LV. About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators. Physics Letters A. 2013;377(45–48):3291–3295. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013.
2. Osipov GV, Pikovsky AS, Rosenblum MG, Kurths J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators. Phys. Rev. E. 1997;55(3):2353–2361. DOI: 10.1103/physreve.55.2353.
3. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 411 p.
4. Dodla R, Sen A, Johnston GL. Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators. Phys. Rev. E. 2004;69(5):056217. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.056217.
5. Williams CRS, Sorrentino F, Murphy TE, Roy R. Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays. Chaos. 2013;23(4):043117. DOI: 10.1063/1.4829626.
6. Rao R, Lin Z, Ai X, Wu J. Synchronization of epidemic systems with Neumann boundary value under delayed impulse. Mathematics. 2022;10(12):2064. DOI: 10.3390/math10122064.
7. Van der Sande G, Soriano MC, Fischer I, Mirasso CR. Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators. Phys. Rev. E. 2008;77(5):055202. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.055202.
8. Klinshov VV, Nekorkin VI. Synchronization of delay-coupled oscillator networks. Phys. Usp. 2013;56(12):1217–1229. DOI: 10.3367/UFNe.0183.201312c.1323.
9. Heinrich G, Ludwig M, Qian J, Kubala B, Marquardt F. Collective dynamics in optomechanical arrays. Phys. Rev. Lett. 2011;107(4):043603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.043603.
10. Zhang M, Wiederhecker GS, Manipatruni S, Barnard A, McEuen P, Lipson M. Synchronization

- of micromechanical oscillators using light. *Phys. Rev. Lett.* 2012;109(23):233906. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.233906.
11. Lee TE, Sadeghpour HR. Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions. *Phys. Rev. Lett.* 2013;111(23):234101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.234101.
 12. Yanchuk S, Wolfrum M. Instabilities of stationary states in lasers with long-delay optical feedback. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2012;9(2):519–535. DOI: 10.20347/WIAS.PREPRINT.962.
 13. Grigorieva EV, Haken H, Kashchenko SA. Complexity near equilibrium in model of lasers with delayed optoelectronic feedback. In: 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications. 14–17 September, 1998, Crans-Montana, Switzerland. NOLTA Society; 1998. P. 495–498.
 14. Kashchenko SA. Quasinormal forms for chains of coupled logistic equations with delay. *Mathematics.* 2022;10(15):2648. DOI: 10.3390/math10152648.
 15. Kashchenko SA. Dynamics of a chain of logistic equations with delay and antidiffusive coupling. *Dokl. Math.* 2022;105:18–22. DOI: 10.1134/S1064562422010069.
 16. Thompson JMT, Stewart HB. *Nonlinear Dynamics and Chaos.* New York: Wiley; 2002. 458 p.
 17. Kashchenko SA. Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain. *Chaos.* 2021;31(3):033147. DOI: 10.1063/5.0040689.
 18. Kanter I, Zigzag M, Englert A, Geissler F, Kinzel W. Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor. *Europhysics Letters.* 2011;93(6):60003. DOI: 10.1209/0295-5075/93/60003.
 19. Rosin DP, Rontani D, Gauthier DJ, Schöll E. Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks. *Phys. Rev. Lett.* 2013;110(10):104102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.104102.
 20. Yanchuk S, Perlikowski P, Popovych OV, Tass PA. Variability of spatiotemporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons. *Chaos.* 2011;21(4):047511. DOI: 10.1063/1.3665200.
 21. Klinshov V, Nekorkin V. Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling. *Cybern. Phys.* 2012;1(2):106–112.
 22. Stankovski T, Pereira T, McClintock PVE, Stefanovska A. Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms. *Rev. Mod. Phys.* 2017;89(4):045001. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.045001.
 23. Klinshov V, Shchapin D, Yanchuk S, Wolfrum M, D’Huys O, Nekorkin V. Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring. *Phys. Rev. E.* 2017;96(4):042217. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
 24. Karavaev AS, Ishbulatov YuM, Kiselev AR, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Mironov SA, Schwartz VA, Gridnev VI, Bezruchko BP. Model of the human cardiovascular system with an autonomous regulation circuit of mean arterial pressure. *Human Physiology.* 2017;43(1):70–80. DOI: 10.1134/S0362119716060098.
 25. Kashchenko AA. Dependence of the dynamics of a model of coupled oscillators on the number of oscillators. *Dokl. Math.* 2021;104(3):355–359. DOI: 10.1134/S1064562421060090.
 26. Kashchenko AA. Relaxation modes of a system of diffusion coupled oscillators with delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2021;93(6):105488. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105488.
 27. Kashchenko SA. Dynamics of chains of many oscillators with unidirectional and bidirectional delay coupling. *Comput. Math. and Math. Phys.* 2023;63(10):1817–1836. DOI: 10.1134/S0965542523090105.
 28. Hartman P. *Ordinary Differential Equations.* New York: Wiley; 1964. 612 p.
 29. Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations.* Berlin: Springer; 1981. 352 p. DOI: 10.1007/BFb0089647.

30. Kaschenko SA. Normalization in the systems with small diffusion. *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1996;6(6): 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
31. Grigorieva EV, Kashchenko SA. Local dynamics of a model of a chain of lasers with optoelectronic delayed unidirectional coupling. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(2): 189–207 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-189-207.
32. Klinshov VV. Collective dynamics of networks of active elements with impulsive connections: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2020;28(5):465–490 (in Russian).
33. Akhromeeva TS, Kurdyumov SP, Malinetskii GG, Samarskii AA. *Nonstationary Structures and Diffusion Chaos.* M.: Nauka; 1992. 544 p.

Кащенко Сергей Александрович – родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1989) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, директор объединенного Института математики и компьютерных наук им. А. Н. Колмогорова. Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В. В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е. В. Григорьевой). Опубликовал более 500 научных работ и 10 монографий. За заслуги в разработке приоритетных направлений науки, создании научной школы, воспитании и подготовке научных кадров в 2020 году награжден почетным званием «Заслуженный деятель науки Российской Федерации». В 2023 году награжден медалью «За вклад в реализацию государственной политики в области образования и научно-технологического развития» Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.



Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru
ORCID: 0000-0002-8777-4302
AuthorID (eLibrary.Ru): 8238



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1)

Научная статья
УДК 612.18

DOI: 10.18500/0869-6632-003194

EDN: INAJDG

Изменение статистических характеристик сигналов сердечно-сосудистой системы и нелинейных мер кардиореспираторного взаимодействия у здоровых добровольцев в ходе тестов с биологической обратной связью

Е. И. Боровкова¹✉, Е. С. Дубинкина¹, А. С. Караваев^{1,2}, В. И. Пономаренко^{1,2},
И. А. Мягков¹, М. Д. Прохоров^{1,2}, Б. П. Безручко^{1,2}

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

E-mail: ✉rubanei@mail.ru, kometa.ed@gmail.com, karavaevas@gmail.com, ponomarenkovi@gmail.com, miagkova@gmail.com, mdprokhorov@yandex.ru, bezruchkobp@gmail.com

Поступила в редакцию 31.03.2025, принята к публикации 5.09.2025,
опубликована онлайн 12.09.2025, опубликована 30.01.2026

Аннотация. Цель настоящего исследования заключается в изучении воздействия биологической обратной связи, осуществляемой через контролируемое медленное дыхание и ритмичные сокращения скелетных мышц на частоте барорефлекторного резонанса, на физиологические параметры организма. **Методы.** Для достижения поставленной цели был проведен анализ сигналов дыхания, кардиоинтервалограммы и фотоплетизмограммы. Использовались статистический и спектральный анализ, а также расчет нелинейных мер взаимодействия, таких как фазовая когерентность и суммарный процент фазовой синхронизации. **Результаты.** Исследование показало, что медленное дыхание в частотном диапазоне барорефлекторного резонанса (около 0.1 Гц) приводит к статистически значимому увеличению амплитуды колебаний кардиоинтервалограммы и мощности процессов симпатической и парасимпатической регуляции ритма сердца. Также наблюдалось повышение фазовой когерентности между дыханием и кардиоинтервалограммой и фазовой синхронизацией контуров симпатической регуляции кровообращения. **Заключение.** Выявлен резонансный частотно-избирательный отклик систем автономной регуляции ритма сердца на медленное дыхание. Эффекты, наблюдаемые при медленном дыхании, оказались значительно более выраженным по сравнению с ритмичным сокращением скелетных мышц на той же частоте, что подчеркивает различия в биофизических механизмах воздействия этих методов на систему кровообращения. Применение методов нелинейной динамики сыграло ключевую роль при решении поставленных задач.

Ключевые слова: кардиореспираторное взаимодействие, фазовая когерентность, синхронизация, медленное дыхание, ритмичное сокращение скелетных мышц, биологическая обратная связь.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-12-00241, <https://rscf.ru/project/23-12-00241/>.

Для цитирования: Боровкова Е. И., Дубинкина Е. С., Караваев А. С., Пономаренко В. И., Мягков И. А., Прохоров М. Д., Безручко Б. П. Изменение статистических характеристик сигналов сердечно-сосудистой системы и нелинейных мер кардиореспираторного взаимодействия у здоровых добровольцев в ходе тестов с биологической обратной связью // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 34–48. DOI: 10.18500/0869-6632-003194. EDN: INAJDG

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

The change in statistical characteristics of cardiovascular system signals and nonlinear measures of cardiorespiratory interaction in healthy volunteers during biofeedback tests

E. I. Borovkova¹✉, E. S. Dubinkina², A. S. Karavaev^{1,2}, V. I. Ponomarenko^{1,2},
I. A. Miagkov¹, M. D. Prokhorov^{1,2}, B. P. Bezruchko^{1,2}

¹Saratov State University, Russia

²Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioelectronics and Electronics, Russia

E-mail: ✉rubanei@mail.ru, kometa.ed@gmail.com, karavaevas@gmail.com, ponomarenkovi@gmail.com,
miagkovia@gmail.com, mdpokhorov@yandex.ru, bezruchkobp@gmail.com

Received 31.03.2025, accepted 5.09.2025, available online 12.09.2025, published 30.01.2026

Abstract. The purpose of this work is to investigate the influence of biofeedback, implemented through controlled slow breathing and rhythmic contraction of skeletal muscles at the frequency of baroreflex resonance, on the physiological parameters of the body. *Methods.* To achieve this goal, an analysis of breathing signals, heart rate variability (HRV), and photoplethysmography was conducted. Statistical and spectral analyses were employed, as well as the calculation of nonlinear interaction measures such as phase coherence and the total percentage of phase synchronization. *Results.* The study showed that slow breathing in the frequency range of baroreflex resonance (around 0.1 Hz) leads to a statistically significant increase in the amplitude of heart rate variability oscillations and the power of sympathetic and parasympathetic regulation processes of heart rhythm. An increase in phase coherence between breathing and heart rate variability was also observed, as well as phase synchronization of the sympathetic regulation circuits of circulation. *Conclusion.* A resonant frequency-selective response of the autonomic regulation systems of heart rhythm to slow breathing was identified. The effects observed during slow breathing were significantly more pronounced compared to rhythmic contraction of skeletal muscles at the same frequency, highlighting the differences in the biophysical mechanisms of these methods' impact on the circulatory system.

Keywords: cardiorespiratory interaction, phase coherence, synchronization, slow breathing, rhythmic contraction of skeletal muscles, biofeedback.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation under Grant № 23-12-00241, <https://rscf.ru/project/23-12-00241/>.

For citation: Borovkova EI, Dubinkina ES, Karavaev AS, Ponomarenko VI, Miagkov IA, Prokhorov MD, Bezruchko BP. The change in statistical characteristics of cardiovascular system signals and nonlinear measures of cardiorespiratory interaction in healthy volunteers during biofeedback tests. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1): 34–48. DOI: 10.18500/0869-6632-003194

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Авторы данного сообщения — сотрудники лаборатории моделирования в нелинейной динамике Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук (ИРЭ РАН), а также преподаватели, аспиранты и студенты кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Формирование нашего коллектива началось уже в 1980-х годах, когда при активном участии Ю. В. Гуляева в Саратове среди новых организаций Академии наук появился филиал ИРЭ РАН. С подачи Ю. В. Гуляева направлениями работы нашей научной группы стали генераторы шума с использованием полупроводниковых материалов и устройств, изучение фундаментальных закономерностей в реализации динамического хаоса [1], исследование нелинейных явлений и процессов [2], физическое и математическое моделирование. Развитые при этих исследованиях методы обработки экспериментальных данных оказались востребованными при решении актуальных задач биомедицины. Традиционно исследование живого радиофизическими

методами является одним из приоритетных направлений многолетней работы Ю. В. Гуляева и его коллег в ИРЭ РАН [3–5]. Продолжением этого процесса можно считать и подготовку нами данной статьи, посвященной описанию особенностей подхода к управлению физиологическими функциями человеческого организма, именуемого в литературе биологической обратной связью (БОС).

БОС представляет собой метод, основанный на сознательном контроле добровольцем физиологических параметров организма. Этот подход позволяет индивиду управлять своими физиологическими функциями, такими как сердечный ритм, дыхание и мышечное напряжение, с целью улучшения здоровья [6–8]. Работы известных авторов свидетельствуют о том, что БОС, осуществляемая через управляемое медленное дыхание на частоте барорефлекторного резонанса (около 0.1 Гц), а также управляемое ритмичное сокращение скелетных мышц на этой частоте, оказывает выраженный физиологический эффект и имеет важное значение для персонализированной терапии ряда заболеваний. Эти методы демонстрируют потенциал для улучшения здоровья и повышения качества жизни пациентов [9–11].

Несмотря на известные положительные эффекты, механизмы действия БОС на органы и системы организма остаются недостаточно изученными [12, 13]. Существенной проблемой здесь является принципиальная нелинейность исследуемых явлений и систем, для изучения которых приходится использовать подходы нелинейной динамики. Важными задачами остаются: разработка методики оценки частоты барорефлекторного резонанса, изучение возможности замены тестов с медленным дыханием на ритмичное сокращение скелетных мышц с заданной частотой [14], разработка методов экспериментального получения резонансной кривой [15, 16].

В данной работе мы исследуем нелинейные резонансные свойства системы барорефлекторной регуляции кровообращения при организации биологической обратной связи, осуществляющей через управляемое медленное дыхание и управляемое ритмичное сокращение скелетных мышц на частоте барорефлекторного резонанса [12]. Для решения этой задачи критическое значение имеет выбор инструментария [17]. Мы применяем несколько количественных мер, включая методы нелинейной динамики, которые уже зарекомендовали себя при анализе данных живой природы [18–20], но не были использованы для исследования резонансных зависимостей и частотно-избирательного отклика физиологических показателей. Применение методов нелинейной динамики позволяет более точно оценить резонансные свойства системы барорефлекторной регуляции кровообращения и влияние различных методов БОС на физиологические параметры.

Целью данной работы является исследование влияния биологической обратной связи, осуществляющей через управляемое медленное дыхание и управляемое ритмичное сокращение скелетных мышц на частоте барорефлекторного резонанса около 0.1 Гц, на физиологические параметры организма. В работе количественно оцениваются линейные характеристики вариабельности сердечного ритма и нелинейные характеристики кардиореспираторного взаимодействия, а также синхронизация контуров автономной регуляции кровообращения у здоровых добровольцев, выполняющих перечисленные тесты БОС.

1. Методика

1.1. Экспериментальные данные. В исследовании участвовали 7 здоровых мужчин в возрасте 21 ± 3 года (среднее \pm стандартное отклонение) с умеренным уровнем физической активности. Дизайн исследования представлен на рис. 1. Для каждого добровольца проводилось шесть последовательных серий экспериментов. Интервал между сериями составлял одну неделю.

Дизайн I–V серий экспериментов был одинаковым. В I–V серии экспериментов проводились эксперименты с БОС, реализуемой с помощью управляемого медленного дыхания в частотном диапазоне ожидаемого барорефлекторного резонанса конкретного добровольца (около 0.1 Гц) [12].

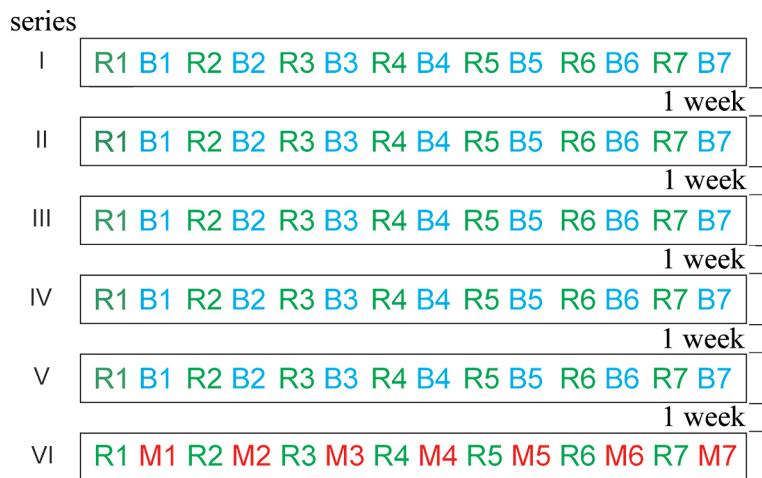


Рис. 1. Дизайн экспериментального исследования. Эпохи I–V серии: отдых (R1), дыхание с частотой 0.075 Гц (B1), отдых (R2), дыхание с частотой 0.08 Гц (B2), отдых (R3), дыхание с частотой 0.09 Гц (B3), отдых (R4), дыхание с частотой 0.1 Гц (B4), отдых (R5), дыхание с частотой 0.11 Гц (B5), отдых (R6), дыхание с частотой 0.12 Гц (B6), отдых (R7), дыхание с частотой 0.13 Гц. Эпохи VI серии: отдых (R1), сокращение мышц с частотой 0.075 Гц (B1), отдых (R2), сокращение мышц с частотой 0.08 Гц (B2), отдых (R3), сокращение мышц с частотой 0.09 Гц (B3), отдых (R4), сокращение мышц с частотой 0.1 Гц (B4), отдых (R5), сокращение мышц с частотой 0.11 Гц (B5), отдых (R6), сокращение мышц с частотой 0.12 Гц (B6), отдых (R7), сокращение мышц с частотой 0.13 Гц (B7) (цвет онлайн)

Fig. 1. Design of the experimental study. Epochs I–V series: rest (R1), breathing at frequency 0.075 Hz (B1), rest (R2), breathing at frequency 0.08 Hz (B2), rest (R3), breathing at frequency 0.09 Hz (B3), rest (R4), breathing at frequency 0.1 Hz (B4), rest (R5), breathing at frequency 0.11 Hz (B5), rest (R6), breathing at frequency 0.12 Hz (B6), rest (R7), breathing at frequency 0.13 Hz. Epochs VI series: rest (R1), muscle contraction at frequency 0.075 Hz (B1), rest (R2), muscle contraction at frequency 0.08 Hz (B2), rest (R3), muscle contraction at frequency 0.09 Hz (B3), rest (R4), muscle contraction at frequency 0.1 Hz (B4), rest (R5), muscle contraction at frequency 0.11 Hz (B5), rest (R6), muscle contraction at frequency 0.12 Hz (B6), rest (R7), muscle contraction at frequency 0.13 Hz (B7) (color online)

Серии I–V включали эпохи: отдых (R1), дыхание с частотой 0.075 Гц (B1), отдых (R2), дыхание с частотой 0.08 Гц (B2), отдых (R3), дыхание с частотой 0.09 Гц (B3), отдых (R4), дыхание с частотой 0.1 Гц (B4), отдых (R5), дыхание с частотой 0.11 Гц (B5), отдых (R6), дыхание с частотой 0.12 Гц (B6), отдых (R7), дыхание с частотой 0.13 Гц (B7). Длительность каждой эпохи составляла 5 минут. Во время эпох отдыха добровольцам было предложено сидеть в удобном кресле и дышать с комфортной частотой дыхания. Во время этапов медленного дыхания специальное звуковое устройство издавало звуковые сигналы, которые являлись стимулами ко вдоху и выдоху. Соотношение фаз вдоха и выдоха составляло 1:1.1. Добровольцам было предложено дышать в соответствии с заданным ритмом.

В VI серии экспериментов проводились эксперименты с биологической обратной связью, реализуемой с помощью управляемого ритмичного сокращения скелетных мышц на частоте барорефлекторного резонанса при дыхании с комфортной частотой. Серия VI включала эпохи: отдых (R1), сокращение мышц с частотой 0.075 Гц (B1), отдых (R2), сокращение мышц с частотой 0.08 Гц (B2), отдых (R3), сокращение мышц с частотой 0.09 Гц (B3), отдых (R4), сокращение мышц с частотой 0.1 Гц (B4), отдых (R5), сокращение мышц с частотой 0.11 Гц (B5), отдых (R6), сокращение мышц с частотой 0.12 Гц (B6), отдых (R7), сокращение мышц с частотой 0.13 Гц (B7). Во время эпох сокращения мышц добровольцам было предложено дышать с комфортной частотой дыхания. Специальное звуковое устройство издавало звуковые сигналы, которые являлись стимулами к сокращению и расслаблению скелетных мышц кистей и стоп в положении сидя. Фазы сокращения и расслабления мышц составляли 1:1.1, аналогично фазам дыхания в I–V сериях экспериментов.

Боровкова Е. И., Дубинкина Е. С., Караваев А. С., Пономаренко В. И.,

Мягков И. А., Прохоров М. Д., Безручко Б. П.

Известия вузов. ПНД, 2026, т. 34, № 1

При проведении исследования соблюдались все основные рекомендации стандартных протоколов экспериментов с биологической обратной связью [12] и протокола, предложенного в работе [14].

Во время всех серий экспериментов добровольцам выполнялась одновременная регистрация сигналов электрокардиограммы (ЭКГ), фотоплетизмограммы (ФПГ) и дыхания. Регистрация сигналов производилась электроэнцефалографом-регистратором «Энцефалан-ЭЭГР-19/26» модификации «Мини» [21]. Частота дискретизации составляла 250 Гц. Полоса пропускания составляла 0.016...70 Гц. Для регистрации сигнала дыхания использовался датчик рекурсии дыхания. Запись сигнала ЭКГ осуществлялась в I стандартном отведении.

1.2. Анализ экспериментальных данных. Экспериментальные сигналы каждой серии экспериментов делились на эпохи длительностью 5 минут. Каждая эпоха эксперимента анализировалась независимо. Из ЭКГ был выделен сигнал последовательности RR-интервалов. Затем последовательность RR-интервалов была линейно интерполирована и дискретизирована с частотой 5 Гц в соответствии с рекомендациями [22]. Для полученного с помощью описанной процедуры сигнала (RRi) на всех эпохах эксперимента был рассчитан спектр мощности в соответствии с рекомендациями [22]. В соответствии с методическими рекомендациями для каждого RRi оценивалось стандартное отклонение (*SDNN*) и суммарная спектральная мощность колебаний в так называемом низкочастотном 0.05...0.15 Гц (Low frequency, LF) и высокочастотном 0.15...0.50 Гц (High frequency, HF) частотном диапазоне (Total power, *TP*).

Из временных реализаций x и y с помощью идеального цифрового спектрального фильтра с полосой пропускания Δf выделили временные ряды $x_{\Delta f}$ и $y_{\Delta f}$, из которых с помощью преобразования Гильберта [23] выделялись мгновенные фазы $\phi_{x_{\Delta f}}$ и $\phi_{y_{\Delta f}}$ и вычислялась разность фаз $\Delta\phi = |\phi_{x_{\Delta f}} - \phi_{y_{\Delta f}}|$. По полученным разностям фаз диагностировали участки, на которых разность фаз колеблется около некоторого постоянного значения: $|\Delta\phi - \varepsilon| < \text{const}$, где ε — некоторая константа. Для поиска таких участков использовался алгоритм, основанный на линейной аппроксимации мгновенной разности фаз $\Delta\phi$ в скользящем окне шириной b . В случае если угловой коэффициент наклона аппроксимирующей прямой α_i удовлетворял условию $|\alpha_i| < k$, где k — пороговое значение коэффициента наклона, на интервале длительностью не менее l , такой интервал диагностировался как участок когерентного поведения.

Между колебаниями RRi и дыханием в *TP*-диапазоне таким образом рассчитывалась мера, учитывающая нелинейный характер динамики исследуемых систем — коэффициент удельной фазовой когерентности (*SPC*) [24], как суммарной длительности всех когерентных участков, отнесенная к длительности анализируемой временной реализации. Для расчета *SPC* были использованы значения параметров, выбранные в работе [24]: $b = 4$ с и $l = 4$ с, $k = 0.01$.

Между колебаниями RRi и ФПГ в *LF*-диапазоне, которые отражают активность взаимодействующих автоколебательных систем регуляции [25, 26], рассчитывался индекс суммарного процента фазовой синхронизации (*S*) [27] как сумма длин синхронных участков, отнесенная к длительности анализируемой временной реализации, выраженная в процентах. Для расчета *S* были использованы значения параметров, выбранные в работе [27]: $b = 13$ с и $l = 16$ с, $k = 0.01$.

Разные термины для индексов, рассчитываемых похожим способом в различных полосах частот, сознательно использовались для того, чтобы подчеркнуть различную биофизическую интерпретацию рассматриваемых процессов: результат взаимодействия процессов парасимпатической регуляции сердечного ритма и дыхания [28] в одном случае и фазовую синхронизацию взаимодействующих контуров симпатической регуляции частоты сердечных сокращений и среднего артериального давления, связь которого с ФПГ отмечается в целом ряде работ, в частности [25, 26], в другом.

Для каждого из добровольцев в первой серии экспериментов были усреднены индексы, рассчитанные в эпохах B1, B2, B3, B4, B5, B6 и B7. Аналогичным образом в первой серии экспериментов были усреднены индексы, рассчитанные в эпохах R1, R2, R3, R4, R5, R6 и R7 для каждого из добровольцев. В шестой серии экспериментов были усреднены индексы, рассчитанные в эпохах M1, M2, M3, M4, M5, M6 и M7 для каждого из добровольцев.

Для каждого из добровольцев было исследовано распределение индексов на каждой из эпох медленного дыхания. Для этого индексы, рассчитанные в I–V серии экспериментов, усреднялись отдельно для каждой из эпох: B1, B2, B3, B4, B5, B6 и B7.

Для оценки изменений индексов на эпохах медленного дыхания по сравнению с предыдущей эпохой отдыха для каждого добровольца была рассчитана разность индексов для каждой пары эпох. Далее разности индексов, полученные в I–V серии экспериментов, усреднялись отдельно для каждой пары эпох: R1 и B1, R2 и B2, R3 и B3, R4 и B4, R5 и B5, R6 и B6, R7 и B7.

Для контроля статистической значимости межгрупповых различий оценок использовался Краскал–Уоллис тест [29] и U-тест Манна–Уитни [30]. Результаты считались статистически значимыми при $p < 0.05$.

2. Результаты

На рис. 2 представлены результаты сопоставления вариабельности ритма сердца, характеристик кардиореспираторного взаимодействия и взаимодействия процессов автономной регуляции элементов сердечно-сосудистой системы (ССС), усредненных на эпохах отдыха первой серии эксперимента (рис. 2, R_I), эпохах сокращения мышц шестой серии эксперимента (рис. 2, M_{VI}) и эпохах медленного дыхания (рис. 2, B_I). Для всех индексов были выявлены статистически значимо более высокие значения на эпохах медленного дыхания (рис. 2, B_I) по сравнению с этапами ритмичного сокращения скелетных мышц и дыхания с комфорктной частотой для каждого добровольца (рис. 2, этапы M_{VI} и R_I). Полученные результаты свидетельствуют о чувствительности ряда используемых индексов к физиологическим изменениям, вызванным тестами со стимулированным медленным дыханием. В то же время не было выявлено статистически значимых отличий

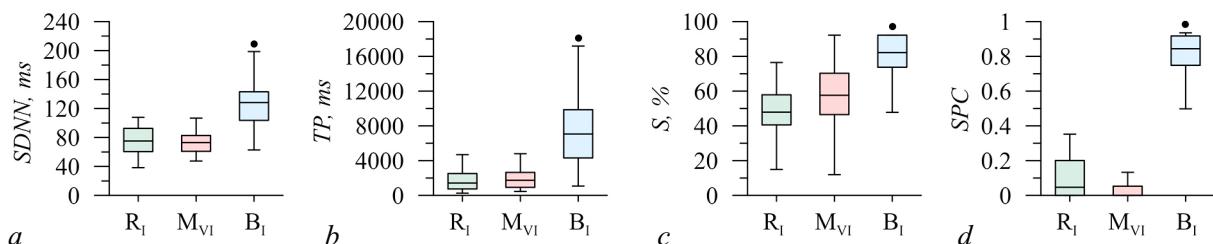


Рис. 2. Результаты сопоставления эпох отдыха, медленного сокращения мышц и медленного дыхания. Индексы: a – SDNN, b – TP, c – S, d – SPC. R_I – индексы, усредненные для эпох R1–R7 для каждого из добровольцев в I серии экспериментов. M_{VI} – индексы, усредненные для эпох M1–M7 для каждого из добровольцев в VI серии экспериментов. B_I – индексы, усредненные для эпох B1–B7 для каждого из добровольцев в I серии экспериментов. Нижняя, верхняя границы ящиков и черта внутри – первый, третий квартиль и медиана соответственно; усы отмечают минимальное и максимальное по выборке значения. Точкой отмечены статистически значимые различия ($p < 0.05$) (цвет онлайн)

Fig. 2. Results of the comparison of epochs of rest, slow muscle contraction, and slow breathing. Indices: a – SDNN, b – TP, c – S, d – SPC. R_I – indices averaged for epochs R1–R7 for each of the volunteers in the I series of experiments. M_{VI} – indices averaged for epochs M1–M7 for each of the volunteers in the VI series of experiments. B_I – indices averaged for epochs B1–B7 for each of the volunteers in the I series of experiments. The lower and upper boundaries of the boxes and the line inside represent the first, third quartiles, and the median, respectively; the whiskers indicate the minimum and maximum sample values. Statistically significant differences are marked with a dot ($p < 0.05$) (color online)

в значениях индексов между этапами дыхания с комфорктной частотой и этапами сокращения скелетных мышц.

На рис. 3 представлено распределение индексов на каждой из эпох медленного дыхания для добровольца #1. Индексы $SDNN$, TP и S на нескольких эпохах медленного дыхания демонстрируют рост значений.

На рис. 4 представлено распределение относительного изменения индексов на эпохах медленного дыхания по сравнению с предыдущей эпохой отдыха для добровольца #1. Данные, представленные на рис. 4, дополняют результаты, показанные на рис. 3. Индексы ΔTP и ΔS демонстрируют значительный относительный рост значений на нескольких эпохах медленного дыхания.

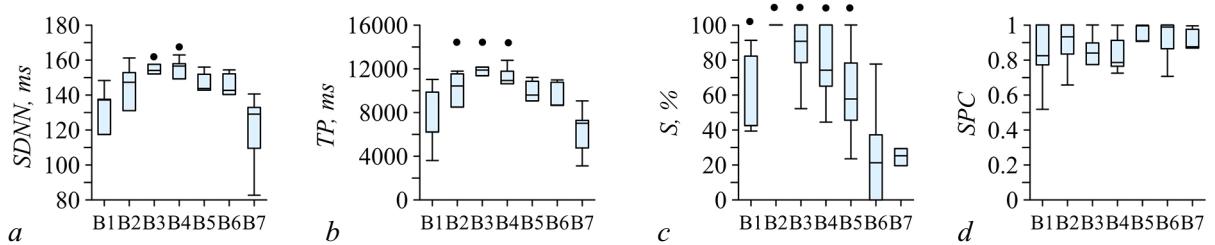


Рис. 3. Результаты сопоставления эпох медленного дыхания для добровольца #1. Усреднялись индексы: *a* – $SDNN$, *b* – TP , *c* – S , *d* – SPC . Индексы, рассчитанные в I–V сериях экспериментов, усреднялись отдельно для каждой из эпох: B1–B7. Нижняя, верхняя границы ящиков и черта внутри – первый, третий квартиль и медиана соответственно; усы отмечают минимальное и максимальное по выборке значения. Точкой отмечены статистически значимые различия данной эпохи эксперимента от других изображенных ($p < 0.05$)

Fig. 3. Results of the comparison of slow breathing epochs for volunteer #1. The indices were averaged: *a* – $SDNN$, *b* – TP , *c* – S , *d* – SPC . The indices calculated in the I–V series of experiments were averaged separately for each of the epochs: B1–B7. The lower and upper boundaries of the boxes and the line inside represent the first, third quartiles, and the median, respectively; the whiskers indicate the minimum and maximum sample values. The point indicates statistically significant differences of this experiment epoch from the other depicted ones ($p < 0.05$)

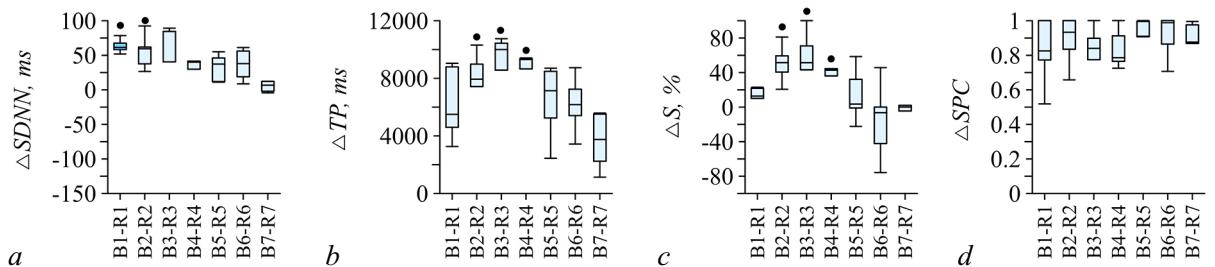


Рис. 4. Результаты сопоставления пар эпох медленного дыхания и предшествующего отдыха для добровольца #1. Усреднялись индексы: *a* – $\Delta SDNN$, *b* – ΔTP , *c* – ΔS , *d* – ΔSPC . Разности индексов, рассчитанные в I–V сериях экспериментов усреднялись отдельно для каждой пары из эпох: R1 и B1, R2 и B2, R3 и B3, R4 и B4, R5 и B5, R6 и B6, R7 и B7. Нижняя, верхняя границы ящиков и черта внутри – первый, третий квартиль и медиана соответственно; усы отмечают минимальное и максимальное по выборке значения. Точкой отмечены статистически значимые различия данной эпохи от предыдущей эпохи отдыха ($p < 0.05$)

Fig. 4. Results of the comparison of pairs of slow breathing epochs and preceding rest for volunteer #1. The indices were averaged: *a* – $\Delta SDNN$, *b* – ΔTP , *c* – ΔS , *d* – ΔSPC . The differences in indices calculated in the I–V series of experiments were averaged separately for each pair of epochs: R1 and B1, R2 and B2, R3 and B3, R4 and B4, R5 and B5, R6 and B6, R7 and B7. The lower and upper boundaries of the boxes and the line inside represent the first, third quartiles, and the median, respectively; the whiskers indicate the minimum and maximum sample values. The point indicates statistically significant differences of this epoch from the previous resting epoch ($p < 0.05$)

Тем не менее только индексы S и ΔS показывают статистически значимые различия между эпохами медленного дыхания ($p < 0.05$, по результатам теста Краскала–Уоллиса). Что может объясняться тем, что они, в отличие от других индексов, учитывают особенности нелинейной динамики исследуемых систем. Попарное сравнение эпох выявляет статистически значимые различия между эпохами медленного дыхания B2–B4, которые демонстрируют высокие значения индекса S и ΔS ($p < 0.05$, по результатам U-теста Манна–Уитни) по сравнению с эпохами B1, B5–B7.

Зависимости на рис. 3 и 4, приведенные для добровольца #1, являются типичными для всего экспериментального ансамбля. Таким образом, индекс S демонстрирует резонансный отклик на возбуждение элементов регуляции ССС на конкретных частотах.

Мы считаем, что изменения характера зависимости $\Delta SDNN$ на рис. 4 относительно $SDNN$ на рис. 3 обусловлено тем, что дыхание на эпохах B2 и B3 осуществляется вблизи собственной частоты, которая характерна и на соответствующих этапах отдыха R2 и R3.

3. Обсуждение

Механизмы влияния биологической обратной связи на органы и системы организма остаются открытым вопросом. Полученные нами результаты показывают, что медленное дыхание на частоте барорефлекторного резонанса вызывает увеличение амплитуды колебаний кардиоинтервалограммы (рис. 2, a), рост амплитуды колебаний процессов симпатической и парасимпатической регуляции ритма сердца (рис. 2, b), увеличение фазовой когерентности дыхания и кардиоинтервалограммы (рис. 2, c), увеличение синхронизации процессов автономной регуляции ритма сердца и среднего артериального давления (рис. 2, d).

Полученные нами результаты не подтверждают гипотезы, выдвинутые в работе [14], о возможности замены медленного дыхания на частоте барорефлекторного резонанса на ритмичное напряжение скелетных мышц (сокращения кистей и стоп в положении сидя) на частоте барорефлекторного резонанса. Выявлено, что эффекты, наблюдаемые в экспериментах с медленным дыханием, оказываются заметно более выраженным, чем в экспериментах с ритмичным напряжением скелетных мышц на соответствующей частоте (см. рис. 2). Полученные результаты свидетельствуют о невозможности однозначной замены дыхания на сокращение мышц на частоте барорефлекторного резонанса около 0.1 Гц, что предлагалось в известной работе [14].

В серии повторных экспериментов проведено исследование распределения рассчитанных индексов в зависимости от частоты медленного дыхания. В работе был выявлен резонансный отклик контуров симпатической и парасимпатической регуляции ритма сердца на возбуждающий сигнал медленного дыхания с разной частотой (см. рис. 3, рис. 4). Мы вводим понятие резонансного отклика для автоколебательной системы. Под резонансным откликом в данном контексте подразумевается увеличение амплитуды колебаний контура регуляции при совпадении его собственной частоты колебаний с частотой действующей силы. Для каждого из добровольцев был выявлен диапазон частот дыхания, демонстрирующий статистически значимое более выраженное увеличение фазовой синхронизации процессов автономной регуляции ритма сердца и среднего артериального давления (рис. 3, c). Причем эффект был выявлен при сопоставлении абсолютных и относительных значений рассчитанных индексов (см. рис. 4). Это свидетельствует о наблюдении резонансного отклика контуров симпатической и парасимпатической регуляции ритма сердца, возбуждаемого сигналом дыхания, и увеличении связи в процессе кардиореспираторного взаимодействия.

В данном исследовании между LF -колебаниями RRi и ФПГ рассчитывался индекс S [27], который характеризует нелинейное взаимодействие симпатической регуляции ритма сердца и симпатической регуляции среднего артериального давления [25, 26]. Необходимо отметить,

что связь между ФПГ и средним АД является хорошо установленной. Существуют работы, в которых значения АД определяются на основе анализа сигнала ФПГ [31, 32]. Однако в нашем исследовании целью не было прямое измерение АД из ФПГ. Вместо этого мы сосредоточились на изучении взаимодействия между симпатической регуляцией ритма сердца и регуляцией среднего артериального давления через фазовую синхронизацию.

Значимость различий рассчитываемых индексов на сопоставляемых этапах и сериях экспериментов подтверждается статистическими тестами. Полученные результаты показывают чувствительность используемого индекса S к физиологическим изменениям, обусловленным биологической обратной связью, реализуемой с помощью стимулированного медленного дыхания на частоте барорефлекторного резонанса. Использование нелинейных методов способствовало более точному выявлению этих изменений и углублению понимания механизмов, определяющих физиологические процессы, связанные с биологической обратной связью.

Индекс SPC , в отличие от других индексов, не демонстрирует значимых отличий на различных частотах действующих стимулов (рис. 3, *d* и рис. 4, *d*). Мы считаем, что низкая чувствительность этого индекса обусловлена сильной связью процессов дыхания и процессов парасимпатической регуляции, которая неоднократно отмечалась в литературе [24, 33] и на фоне которой небольшие изменения значимо диагностировать не удалось.

В работе частота дыхания и сокращения мышц нарастала ступенчато и монотонно. Для повышения достоверности результатов целесообразно было бы сопоставить данные результаты с результатами исследований, в которых использовался бы другой закон изменения частоты действующих стимулов, например, случайное чередование фиксируемых на ступенях частот дыхания. Отсутствие такого сопоставления относится к ограничениям данного исследования и планируется в дальнейших исследованиях.

Заключение

В данной работе проведена оценка стандартного отклонения и суммарной спектральной мощности колебаний последовательности RR-интервалов в LF- и HF-частотных диапазонах, а также коэффициента фазовой когерентности между HF-колебаниями последовательности RR-интервалов и дыханием и суммарного процента фазовой синхронизации между LF-колебаниями последовательности RR-интервалов и ФПГ у здоровых испытуемых. Эксперименты осуществлялись с использованием биологической обратной связи. В качестве БОС применялось управляемое медленное дыхание на частоте барорефлекторного резонанса конкретных добровольцев. Также исследовалось ритмичное сокращение скелетных мышц с заданной частотой. Дополнительно анализировались данные на эпохах с комфортной для каждого испытуемого частотой и глубиной дыхания.

Результаты показали статистически значимо более высокие значения всех характеристик на этапах стимулированного медленного дыхания по сравнению с этапами ритмичного сокращения скелетных мышц и дыхания с комфортной частотой. Значимость различий всех индексов на этапах стимулированного медленного дыхания подтверждается статистическими тестами. Эти данные указывают на чувствительность используемых индексов к физиологическим изменениям, вызванным биологической обратной связью.

Эффекты, наблюдаемые в экспериментах с медленным дыханием, оказались значительно более выраженным. Полученные результаты свидетельствуют о невозможности однозначной замены дыхания на сокращение мышц на частоте барорефлекторного резонанса около 0.1 Гц. Применение нелинейных методов позволило более точно выявить эти различия и углубить понимание механизмов, лежащих в основе физиологических изменений, вызванных биологической обратной связью.

Список литературы

1. Безручко Б. П., Гуляев Ю. В., Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. Новый тип критического поведения связанных систем при переходе к хаосу // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 3. С. 619–622.
2. Астахов В. В., Безручко Б. П., Гуляев Ю. В., Селезнев Е. П. Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 3. С. 60–65.
3. Гуляев Ю. В. Физические поля и излучения человека. Новые неинвазивные методы медицинской диагностики. М.: РВОФ «Знание» им. С.И. Вавилова, 2009. 28 с.
4. Гуляев Ю. В., Годик Э. Э. Физические поля биологических объектов // В кн.: Кибернетика живого: биология и информация. М.: Наука, 1984. С. 111–116.
5. Годик Э. Э., Гуляев Ю. В. Физические поля человека и животных // В мире науки. 1990. № 5. С. 75–83.
6. Gevirtz R. N., Lehrer P. M., Schwartz M. S. Cardiorespiratory biofeedback // In: Schwartz M. S., Andrasik F. (eds) Biofeedback: A Practitioner's Guide. NY: The Guilford Press, 2016. P. 196–213.
7. Корчин В. И., Кормилец А. Ю., Кормилец В. С., Еремеева О. В., Еремеев С. И. Обзор протоколов адаптивной биологической обратной связи по параметрам электроэнцефалограммы // Научный медицинский вестник Югры. 2017. № 3–4 (13–14). С. 36–44.
8. Hammond D. C. What is neurofeedback: An update // Journal of Neurotherapy. 2011. Vol. 15, no. 4. P. 305–336. DOI: 10.1080/10874208.2011.623090.
9. Мельникова М. С., Орлов А. Б. Психотерапевтический потенциал биологической обратной связи: эмпирическое исследование // Вопросы психологии. 2016. № 2. С. 91–97.
10. Галкин С. А., Симуткин Г. Г., Счастный Е. Д., Иванова С. А., Боян Н. А. Обзор применения биологической обратной связи в терапии пациентов с депрессивными расстройствами // Современная терапия психических расстройств. 2020. № 3. С. 38–43.
11. Александров А. Ю., Уплисова К. О., Иванова В. Ю. Влияние параметров и характера биологической обратной связи на амплитуду физиологического трепора // Физиология человека. 2020. Т. 46, № 2. С. 22–29. DOI: 10.31857/S0131164620010038.
12. Shaffer F., Meehan Z. M. A practical guide to resonance frequency assessment for heart rate variability biofeedback // Front. Neurosci. 2020. Vol. 14. P. 570400. DOI: 10.3389/fnins.2020.570400.
13. Першина Л. Ю. Оценка зависимости вариабельности сердечного ритма от условий реализации сеанса биологической обратной связи // Научно-практические исследования. 2017. № 4 (4). С. 59–61.
14. Vaschillo E. G., Vaschillo B., Pandina R. J., Bates M. E. Resonances in the cardiovascular system caused by rhythmical muscle tension // Psychophysiology. 2011. Vol. 48, no. 7. P. 927–936. DOI: 10.1111/j.1469-8986.2010.01156.x.
15. Lin G., Xiang Q., Fu X., Wang S., Wang S., Chen S., Shao L., Zhao Y., Wang T. Heart rate variability biofeedback decreases blood pressure in prehypertensive subjects by improving autonomic function and baroreflex // J. Altern. Complement. Med. 2012. Vol. 18, no. 2. P. 143–152. DOI: 10.1089/acm.2010.0607.
16. Steffen P. R., Austin T., DeBarros A., Brown T. The impact of resonance frequency breathing on measures of heart rate variability, blood pressure, and mood // Front. Public Health. 2017. Vol. 5. P. 222. DOI: 10.3389/fpubh.2017.00222.
17. Безручко Б. П., Смирнов Д. А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. 320 с.
18. Боровкова Е. И., Храмков А. Н., Дубинкина Е. С., Безручко Б. П., Гридинев В. И., Прохоров М. Д., Караваев А. С. Анализ биосигналов при когнитивной нагрузке и стрессе // В сб.: Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине - 2023: Сборник статей Всероссийской школы-семинара. Саратов: Саратовский источник, 2023. С. 35–37.
19. Боровкова Е. И., Храмков А. Н., Караваев А. С., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Синхро-

Боровкова Е. И., Дубинкина Е. С., Караваев А. С., Пономаренко В. И.,

Мягков И. А., Прохоров М. Д., Безручко Б. П.

Известия вузов. ПНД, 2026, т. 34, № 1

- низация процессов автономного контроля кровообращения у людей отличается в состоянии бодрствования и в разных стадиях сна // В сб.: Сборник тезисов XXIV съезда физиологического общества им. И. П. Павлова. 11–15 сентября 2023 года, Санкт-Петербург, Россия. Санкт-Петербург: ВВМ, 2023. С. 556.

 20. Киселев А. Р., Гридинев В. И., Караваев А. С., Посненкова О. М., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Безручко Б. П., Шварц В. А. Оценка пятилетнего риска летального исхода и развития сердечно-сосудистых событий у пациентов с острым инфарктом миокарда на основе синхронизации 0,1 Гц-ритмов в сердечно-сосудистой системе // Саратовский научно-медицинский журнал. 2010. Т. 6, № 2. С. 328–338.
 21. Medicom MTD [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://medicom-mtd.com/htm/Products/eegr-main.html>.
 22. Баевский Р. М., Иванов Г. Г., Чирейкин Л. В., Гаврилушкин А. П., Довгалевский П. Я., Кукушин Ю. А., Миронова Т. Ф., Прилуцкий Д. А., Семенов Ю. Н., Федоров В. Ф., Флейшман А. Н., Медведев М. М. Анализ вариабельности сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем (Часть 1) // Вестник аритмологии. 2002. № 24. С. 65–86.
 23. Gabor D. Theory of communication // J. Inst. Electr. Eng. 1946. Vol. 93, no. 3. P. 429–441.
 24. Ponomarenko V. I., Karavaev A. S., Borovkova E. I., Hramkov A. N., Kiselev A. R., Prokhorov M. D., Penzel T. Decrease of coherence between the respiration and parasympathetic control of the heart rate with aging // Chaos. 2021. Vol. 31, no. 7. P. 073105. DOI: 10.1063/5.0056624.
 25. Nitzan M., Babchenko A., Khanokh B., Landau D. The variability of the photoplethysmographic signal: A potential method for the evaluation of the autonomic nervous system // Physiol. Meas. 1998. Vol. 19, no. 1. P. 93–102. DOI: 10.1088/0967-3334/19/1/008.
 26. Allen J. Photoplethysmography and its application in clinical physiological measurement // Physiol. Meas. 2007. Vol. 28, no. 3. P. R1–R39. DOI: 10.1088/0967-3334/28/3/R01.
 27. Безручко Б. П., Гридинев В. И., Караваев А. С., Киселев А. Р., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Рубан Е. И. Методика исследования синхронизации колебательных процессов с частотой 0,1 Гц в сердечно-сосудистой системе человека // Известия вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 6. С. 44–56. DOI: 10.18500/0869-6632-2009-17-6-44-56.
 28. Флейшман А. Н. Медленные колебания кардиоритма и феномены нелинейной динамики: классификация фазовых портретов, показателей энергетики, спектрального и детрентного анализа // В сб.: Медленные колебательные процессы в организме человека. Теоретические и прикладные аспекты нелинейной динамики, хаоса и фракталов в физиологии и медицине. Материалы 3-го Всероссийского симпозиума. 21–25 мая 2001 г. Новокузнецк, 2001. С. 49–61.
 29. Kruskal W. H., Wallis W. A. Use of ranks in one-criterion variance analysis // J. Am. Stat. Assoc. 1952. Vol. 47. P. 583–621. DOI: 10.2307/2280779.
 30. Mann H. B., Whitney D. R. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other // Ann. Math. Stat. 1947. Vol. 18, no. 1. P. 50–60. DOI: 10.1214/aoms/1177730491.
 31. Тарасов А. А. Использование фотоплетизмограммы для автоматического неинвазивного измерения артериального давления // Врач-аспирант. 2006. Т. 12, № 3. С. 241–245.
 32. Гогиберидзе Н. А., Сагирова Ж. Н., Кузнецова Н. О., Гогниева Д. Г., Чомахидзе П. Ш., Сапнер Х., Копылов Ф. Ю. Сравнение безманжетного измерения артериального давления с помощью монитора электрокардиограммы с функцией фотоплетизмографии с измерением по методу Короткова: пилотное исследование // Сеченовский вестник. 2021. Т. 12, № 1. С. 39–49. DOI: 10.47093/2218-7332.2021.12.1.39-49.
 33. Bartsch R. P., Liu K. K., Ma Q. D., Ivanov P. C. Three independent forms of cardio-respiratory coupling: Transitions across sleep stages // Comput. Cardiol. 2014. Vol. 41. P. 781–784.

References

1. Bezruchko BP, Gulyaev YV, Kuznetsov SP, Seleznev EP. New type of critical behavior of coupled systems at the transitions to chaos. Sov. Phys. Doklady. 1986;287(3):619–622 (in Russian).

Боровкова Е. И., Дубинкина Е. С., Караваев А. С., Пономаренко В. И.,
Мягков И. А., Прохоров М. Д., Безручко Б. П.
Известия вузов. ПНД, 2026, т. 34, № 1

2. Astakhov VV, Bezruchko BP, Gulyaev YV, Seleznev EP. Multistable states of dissipatively coupled Feigenbaum systems. *Tech. Phys. Lett.* 1989;15(3):60–65 (in Russian).
3. Gulyaev YV. Physical Fields and Radiation of a Human. New Non-Invasive Methods of Medical Diagnostics. M.: Znanie; 2009. 28 p. (in Russian).
4. Gulyaev YV, Godik EE. Physical fields of biological objects. In: *Cybernetics of the Living: Biology and Information*. M.: Nauka; 1984. P. 111–116.
5. Godik EE, Gulyaev YV. Physical fields of humans and animals. In: *The World of Science*. 1990;(5):75–83.
6. Gevirtz RN, Lehrer PM, Schwartz MS. Cardiorespiratory biofeedback // In: Schwartz MS, Andrasik F, editors. *Biofeedback: A Practitioner's Guide*. NY: The Guilford Press; 2016. P. 196–213.
7. Korchin VI, Kormilets AYu, Kormilets VS, Yremeeva OV, Yremeev SI. Review of adaptive biological feedback protocols based on electroencephalogram parameters. *Scientific Medical Bulletin of Yugra*. 2017;(3–4(13–14)):36–44 (in Russian).
8. Hammond DC. What is neurofeedback: An update. *Journal of Neurotherapy*. 2011;15(4):305–336. DOI: 10.1080/10874208.2011.623090.
9. Melnikova MS, Orlov AB. Psychotherapeutic potential of biological feedback: an empirical study. *Questions of Psychology*. 2016;(2):91–97.
10. Galkin SA, Simutkin GG, Schastny ED, Ivanova SA, Bokhan NA. Review of the application of biological feedback in the therapy of patients with depressive disorders. *Modern Therapy of Mental Disorders*. 2020;(3):38–43.
11. Alexandrov AYu, Uplisova KO, Ivanova VYu. Biofeedback specialization effect on physiological tremor amplitude dynamics. *Hum. Physiol.* 2020;46:127–133. DOI: 10.1134/S036211972001003X.
12. Shaffer F, Meehan ZM. A practical guide to resonance frequency assessment for heart rate variability biofeedback. *Front. Neurosci.* 2020;14:570400. DOI: 10.3389/fnins.2020.570400.
13. Pershina LYu. Assessment of the dependence of heart rate variability on the conditions of the biological feedback session implementation. *Scientific and Practical Research*. 2017;(4(4)):59–61.
14. Vaschillo EG, Vaschillo B, Pandina RJ, Bates ME. Resonances in the cardiovascular system caused by rhythmical muscle tension. *Psychophysiology*. 2011;48:927–936. DOI: 10.1111/j.1469-8986.2010.01156.x.
15. Lin G, Xiang Q, Fu X, Wang S, Wang S, Chen S, Shao L, Zhao Y, Wang T. Heart rate variability biofeedback decreases blood pressure in prehypertensive subjects by improving autonomic function and baroreflex. *J. Altern. Complement. Med.* 2012;18(2):143–152. DOI: 10.1089/acm.2010.0607.
16. Steffen PR, Austin T, DeBarros A, Brown T. The impact of resonance frequency breathing on measures of heart rate variability, blood pressure, and mood. *Front. Public Health*. 2017;5:222. DOI: 10.3389/fpubh.2017.00222.
17. Bezruchko BP, Smirnov DA. Mathematical Modeling and Chaotic Time Series. Saratov: College; 2005. 320 p.
18. Borovkova EI, Hramkov AN, Dubinkina ES, Bezruchko BP, Gridnev VI, Prokhorov MD, Karavaev AS. Analysis of biosignals under cognitive load and stress. In: *Methods of Computer Diagnostics in Biology and Medicine - 2023. Proceedings of the All-Russian School-Seminar*. Saratov; 2023. P. 35–37.
19. Borovkova EI, Hramkov AN, Karavaev AS, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Synchronization of autonomic control processes of circulation in humans differs in the state of wakefulness and in different stages of sleep. In: *Proceedings of the XXIV Congress of the Physiological Society named after I.P. Pavlov*. St. Petersburg; 2023. P. 556.
20. Kiselev AR, Gridnev VI, Karavaev AS, Posnenkova OM, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Bezruchko BP, Shvarts VA. Assessment of five-year risk of fatal outcome and development of cardiovascular events in patients with acute myocardial infarction based on synchronization of 0.1 Hz rhythms in the cardiovascular system. *Saratov Scientific Medical Journal*. 2010;6(2):328–338.

21. Medicom MTD [Electronic resource]. Available from: <http://medicom-mtd.com/htm/Products/eegr-main.html>.
22. Baevskiy RM, Ivanov GG, Chireikin LV, Gavrilushkin AP, Dovgalevskiy PY, Kukushkin YA, Mironova TF, Prilutskiy DA, Semenov YN, Fedorov VF, Fleishman AN, Medvedev MM. Analysis of heart rate variability using various electrocardiographic systems (methodological recommendations). *Vestnik Arrhythmology*. 2001;(24):65–86.
23. Gabor D. Theory of communication. *J. Inst. Electr. Eng.* 1946;93(3):429–441.
24. Ponomarenko VI, Karavaev AS, Borovkova EI, Hramkov AN, Kiselev AR, Prokhorov MD, Penzel T. Decrease of coherence between the respiration and parasympathetic control of the heart rate with aging. *Chaos*. 2021;31(7):073105. DOI: 10.1063/5.0056624.
25. Nitzan M, Babchenko A, Khanokh B, Landau D. The variability of the photoplethysmographic signal: A potential method for the evaluation of the autonomic nervous system. *Physiol. Meas.* 1998;19(1):93–102. DOI: 10.1088/0967-3334/19/1/008.
26. Allen J. Photoplethysmography and its application in clinical physiological measurement. *Physiol. Meas.* 2007;28(3):R1–R39. DOI: 10.1088/0967-3334/28/3/R01.
27. Bezruchko BP, Gridnev VI, Karavaev AS, Kiselev AR, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Ruban EI. Technique of investigation of synchronization between oscillatory processes with the frequency of 0.1 hz in the human cardiovascular system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2009;17(6):44–56 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2009-17-6-44-56.
28. Fleishman AN. Slow oscillations of cardiac rhythm and phenomena of nonlinear dynamics: classification of phase portraits, energy indicators, spectral and detrended analysis. In: *Slow Oscillatory Processes in the Human Body. Theoretical and Applied Aspects of Nonlinear Dynamics, Chaos, and Fractals in Physiology and Medicine. Proceedings of the 3rd All-Russian Symposium*. 21–25 May, 2001. Novokuznetsk; 2001. P. 49–61.
29. Kruskal WH, Wallis WA. Use of ranks in one-criterion variance analysis. *J. Am. Stat. Assoc.* 1952;47:583–621. DOI: 10.2307/2280779.
30. Mann HB, Whitney DR. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. *Ann. Math. Stat.* 1947;18(1):50–60. DOI: 10.1214/aoms/1177730491.
31. Tarasov AA. The use of photoplethysmograms for automatic noninvasive blood pressure measurement. *Postgraduate Doctor*. 2006;12(3):241–245.
32. Gogiberidze NA, Sagirova ZN, Kuznetsova NO, Gognieva DG, Chomakhidze PS, Saner H, Kopylov FY. Comparison of non-cuff blood pressure measurement using an electrocardiogram monitor with photoplethysmography function with measurements by Korotkov's method: a pilot study. *Sechenov Medical Journal*. 2021;12(1):39–49. DOI: 10.47093/2218-7332.2021.12.1.39-49.
33. Bartsch RP, Liu KK, Ma QD, Ivanov PC. Three independent forms of cardio-respiratory coupling: Transitions across sleep stages. *Comput Cardiol*. 2014;41:781–784.

Боровкова Екатерина Игоревна — родилась в Энгельсе (1989). Окончила факультет нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета по направлению «Биомедицинская инженерия» (2004). Кандидат физико-математических наук (2018, СГУ). С 2010 года работает на кафедре динамического моделирования и биомедицинской инженерии Саратовского государственного университета, с 2019 — в должности доцента. Научные интересы: методы обработки и анализа сигналов сложных систем, разработка программного обеспечения для персональных компьютеров, нейрофизиологические исследования. Имеет более 100 научных публикаций, включая учебные пособия, свидетельства о регистрации ПО.



Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: rubanei@mail.ru
ORCID: 0000-0002-9621-039X
AuthorID (eLibrary.Ru): 682183

Боровкова Е. И., Дубинкина Е. С., Караваев А. С., Пономаренко В. И.,
Мягков И. А., Прохоров М. Д., Безручко Б. П.
Известия вузов. ПНД, 2026, т. 34, № 1

Дубинкина Елизавета Сергеевна — родилась в Энгельсе (2002). Студентка 5 курса специалитета факультета фундаментальной медицины и медицинских технологий Саратовского государственного университета по направлению «Медицинская биофизика». Получила дополнительное образование по профилю «Специалист по анализу медицинских данных» на цифровой кафедре ПМГМУ им. И. М. Сеченова (2024). С 2020 года работает на кафедре динамического моделирования и биомедицинской инженерии Саратовского государственного университета в должности лаборанта-исследователя. Научные интересы: постановка и проведение биомедицинских экспериментов, статистическая обработка данных, анализ временных рядов. Автор 30 научных публикаций.



Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: kometa.ed@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4636-3937
AuthorID (eLibrary.Ru): 1204137

Караваев Анатолий Сергеевич — родился в Саратове (1981). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2004). Доктор физико-математических наук (2019, СГТУ), доцент (2018). Заведующий кафедрой динамического моделирования и биомедицинской инженерии Саратовского государственного университета, старший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Член редколлегий научных журналов (WoS, Scopus, ВАК), имеет дипломы, грамоты победителя Всероссийских научных конкурсов, благодарственные и почетные грамоты за успехи в научной и педагогической деятельности. Научные интересы: радиофизические устройства регистрации и анализа сигналов биологических объектов, разработка программного обеспечения для персональных компьютеров и цифровых сигнальных процессоров. Имеет около 300 научных публикаций, включая учебные пособия, свидетельства о регистрации ПО.



Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: karavaevas@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4678-3648
AuthorID (eLibrary.Ru): 128455

Пономаренко Владимир Иванович — родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Доктор физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии Саратовского государственного университета. Область научных интересов — статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 130 научных публикаций, включая учебные пособия, свидетельства о регистрации ПО.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: rponomarenkovi@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1579-6465
AuthorID (eLibrary.Ru): 39986

Мягков Иван Андреевич — родился в Саратове (2006). Студент 2 курса бакалавриата Института физики Саратовского государственного университета по направлению «Биотехнические системы и технологии». С 2024 года работает на кафедре динамического моделирования и биомедицинской инженерии Саратовского государственного университета в должности лаборанта и лаборантом учебной лаборатории беспилотных систем Саратовского государственного университета. Научные интересы: нейросети, машинное обучение, создание биомедицинских приборов. Победитель кубка России по программированию БПЛА «Пармабас» (2025). Кандидат в мастера спорта по спортивному программированию.



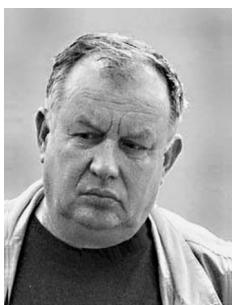
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Чернышевского Н. Г.
E-mail: miagkovia@gmail.com
ORCID: 0009-0001-9549-5426

Прохоров Михаил Дмитриевич — родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Доктор физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.



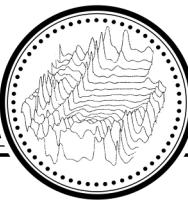
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-4069-9410
AuthorID (eLibrary.Ru): 39985

Безручко Борис Петрович — родился в 1946 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (СГУ, 1969). Доктор физико-математических наук (СГУ, 1994). Профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии факультетаnano- и биомедицинских технологий СГУ, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в нелинейной динамике в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Действительный член Международной Академии наук высшей школы (МАНВШ). Область научных интересов: радиофизика и электроника, нелинейная динамика, моделирование по временным рядам с приложением к задачам физиологии и медицинской диагностики, физический эксперимент. Опубликовал более 100 статей в научных журналах и 2 монографии (в соавторстве).



Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Чернышевского Н. Г.
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: bezruchkobp@gmail.com
ORCID: 0000-0002-6691-8653
AuthorID (eLibrary.Ru): 484

*Боровкова Е. И., Дубинкина Е. С., Караваев А. С., Пономаренко В. И.,
Мягков И. А., Прохоров М. Д., Безручко Б. П.
Известия вузов. ПНД, 2026, т. 34, № 1*



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003195
EDN: JGCTL

Устойчивость многомашинной энергосети с общей нагрузкой к подключению и отключению генераторов

В. А. Храменков¹, А. С. Дмитричев¹✉, В. И. Некоркин^{1,2}

¹Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики
им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

²Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: hramenkov.vlad@ipfran.ru, ✉admitry@ipfran.ru, vnekorkin@ipfran.ru

Поступила в редакцию 21.07.2025, принята к публикации 5.09.2025,
опубликована онлайн 12.09.2025, опубликована 30.01.2026

Аннотация. Цель настоящего исследования — изучение устойчивости энергосети из произвольного числа синхронных генераторов, работающих на общую пассивную линейную нагрузку, к их отключению и подключению. **Методы.** В данной работе применяется численное моделирование работы энергосети и второй метод Ляпунова. **Результаты.** Получены условия безопасного отключения и подключения генераторов, при которых в измененной энергосети устанавливается синхронный режим. **Заключение.** Рассмотрена энергосеть из произвольного числа синхронных генераторов, работающих на общую пассивную линейную нагрузку. С помощью подхода, базирующегося на втором методе Ляпунова, найдены условия на параметры, обеспечивающие безопасное отключение генераторов, включающих, если таковой имеется, и генератор, входящий в «неоднородный» путь питания нагрузки, который отличается от остальных током и передаваемой мощностью. Полученные оценки подтверждены численно для энергосетей различного размера. Также численно прослежена эволюция области, отвечающей безопасному подключению генератора к энергосети из пяти генераторов.

Ключевые слова: энергосети, синхронные машины, синхронные режимы, устойчивость, мультистабильность, отключение и подключение генераторов.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-12-00245.

Для цитирования: Храменков В. А., Дмитричев А. С., Некоркин В. И. Устойчивость многомашинной энергосети с общей нагрузкой к подключению и отключению генераторов // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 49–67. DOI: 10.18500/0869-6632-003195. EDN: JGCTL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Stability of multi-machine power grid with a common load to connecting and disconnecting of generators

V. A. Khramenkov¹, A. S. Dmitrichev¹✉, V. I. Nekorkin²

¹FRC A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: hramenkov.vlad@ipfran.ru, ✉admitry@ipfran.ru, vnekorkin@ipfran.ru

Received 21.07.2025, accepted 5.09.2025, available online 12.09.2025, published 30.01.2026

Abstract. The purpose of this work is studying the stability of the power grid, consisting of an arbitrary number of synchronous generators supplying a common passive linear load, to disconnection and connection of generators. *Methods.* In this paper, numerical modeling of the power grid operation and the second Lyapunov method are used. *Results.* Conditions for safe disconnection and connection of generators have been revealed, under which a synchronous mode is established in the disturbed power grid. *Conclusion.* The power grid consisting of an arbitrary number of synchronous generators supplying a common passive linear load is considered. Using the approach based on the second Lyapunov method, conditions on parameters are found that ensure safe disconnection of generators, including, if any, a generator involving in the «inhomogeneous» load supply path, that differs from the others in current and transmitted power. The obtained estimates are confirmed numerically for power grids of various sizes. The evolution of the area corresponding to the safe connection of a generator to the power grid of five generators is also numerically traced.

Keywords: power grids, synchronous machines, synchronous modes, stability, multistability, disconnection and connection of generators.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation, project No. 24-12-00245.

For citation: Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. Stability of multi-machine power grid with a common load to connecting and disconnecting of generators. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1):49–67. DOI: 10.18500/0869-6632-003195

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В настоящее время наблюдается непрерывный рост энергосетей, который сопровождается созданием крупных энергообъединений, состоящих из большого числа генераторов, узлов нагрузки — потребителей, внутрисистемных и межсистемных связей — линий (электро)передачи. Эксплуатация таких систем — очень тяжелая комплексная задача, для решения которой применяются различные по своей сложности и полноте описания подходы и методы [1–9].

При своей работе энергосети постоянно подвергаются воздействию различных возмущений, таких как колебания генерируемой и потребляемой мощности, короткие замыкания, срабатывания устройств релейной защиты и отключения линий передачи и генераторов и т. д. Возникающие при этом переходные процессы могут сопровождаться значительными колебаниями токов и напряжений. Последние из-за дальнейшего срабатывания устройств релейной защиты способны приводить как к единичным и кратковременным сбоям в энергоснабжении, затрагивающим относительно небольшие части системы, так и к каскадным сбоям [10, 11] с серьезными и масштабными отключениями энергоснабжения [12–16]. Таким образом, исследование устойчивости энергосетей к различным видам возмущений является одной из важных задач как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения.

Ранее изучались эффекты, возникающие при коммутации линий электропередачи [17–19], генераторов и потребителей [20], а также при однократных скачкообразных (импульсных) [21–28] и длительных шумовых [28–33] возмущениях генерируемой и потребляемой мощностей.

В наших предыдущих работах [28, 34] была рассмотрена энергосеть из синхронных генераторов, работающих на общую пассивную линейную нагрузку. Мы показали, что в случае, когда один из генераторов находится «ближе» к нагрузке (из-за более короткой линии передачи

и/или продольной компенсации индуктивного сопротивления), для описания динамики такой энергосети может быть использована модель редуцированной эффективной сети в виде ансамбля с хаб-топологией (топологией «звезда»). Обнаружено, что в сети могут устанавливаться два разных типа синхронных режимов: однородный и неоднородный. Первый характеризуется равными мощностями и токами, текущими через все пути питания нагрузки, кроме одного. Второй имеет еще один дополнительный путь, отличающийся от остальных током и передаваемой мощностью. Причем токи, текущие по одному и тому же пути, но в разных режимах, различаются. Показана возможность существования однородного и неоднородных синхронных режимов, а также квазисинхронных и асинхронных режимов, выделены соответствующие области в пространстве параметров энергосети.

В настоящей статье мы продолжим исследование данной энергосети и рассмотрим ее устойчивость к отключению и подключению генераторов. С применением численного моделирования и подхода, базирующегося на втором методе Ляпунова, будут установлены условия безопасного отключения и подключения генераторов, при которых в измененной энергосети устанавливается синхронный режим. Заметим, что отключение генераторов, например, может быть связано со срабатыванием релейных (токовых) защит линий передачи из-за возникновения коротких замыканий или же с плановой остановкой генераторов на ремонт. В свою очередь, подключение генераторов может происходить, например, при резком увеличении нагрузки. В этом случае посредством устройств АВР (автоматического ввода резерва) задействуются генераторы, реализующие так называемый резерв мощности [35].

В разделе 1 приводится архитектура энергосети и применяемая для ее описания динамическая модель. В разделе 2 обсуждаются общие вопросы устойчивости энергосети к изменению числа входящих в нее генераторов. В разделе 3 анализируется устойчивость энергосети к отключению генераторов, а в разделе 4 — к их подключению. В Заключении представлено краткое обсуждение результатов.

1. Архитектура энергосети и ее модель

Рассмотрим многомашинную энергосеть, принципиальная схема которой показана на рис. 1, a, а схема замещения типичного ее участка — на рис. 1, b. В этой сети группа синхронных генераторов G_i ($i = 1, \dots, n$, $n \geq 3$) посредством передающих систем, включающих входные трансформаторы T_i^{in} (замещаются импедансами $Z_{i,T}^{\text{in}}$), выходные трансформаторы T_i^{out} (замещаются импедансами $Z_{i,T}^{\text{out}}$) и линии передачи (замещаются стандартной Т-образной схемой с импедансами Z_i^{line} и проводимостями Y_i^{sh}), питает одну общую пассивную линейную нагрузку (*load*),

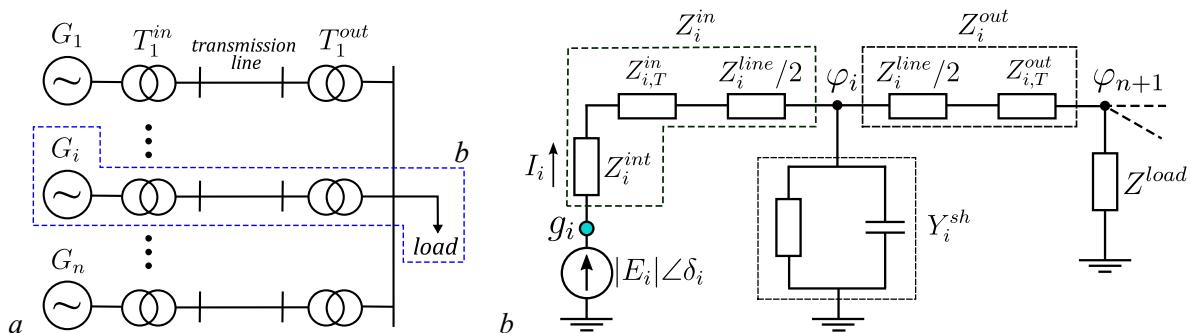


Рис. 1. Архитектура энергосети: a — принципиальная схема энергосети; b — схема замещения i -го участка сети, содержащего i -й генератор и нагрузку

Fig. 1. Architecture of power grid: a — schematic diagram; b — equivalent circuit of the i -th grid's part, containing the i -th generator and a load

характеризуемую импедансом Z_{load} . Каждый генератор характеризуется амплитудой $|E_i|$ и углом (фазой) δ_i создаваемой им электродвижущей силы (ЭДС) $E_i = |E_i| \exp(i\delta_i)$; внутренним импедансом $Z_i^{\text{int}} = r_i^{\text{int}} + ix_i^{\text{int}}$, $x_i^{\text{int}} > 0$; постоянной инерции C_i своей вращающейся части (турбина и ротор); демпферным коэффициентом D_i , суммирующим влияние как механических (трение), так и электрических (появление асинхронной мощности) факторов демпфирования; а также механической мощностью турбины $P_{T,i}$.

Предположим, что первый генератор G_1 находится значительно ближе к нагрузке, чем остальные генераторы G_2, G_3, \dots, G_n , и/или на линии передачи этого генератора выполнена продольная компенсация индуктивности. Для определенности будем считать, что постоянные инерции и демпферные коэффициенты у всех генераторов одинаковы, то есть $C_i \equiv C$, $D_i \equiv D$ ($i = \overline{1, n}$), и все генераторы, кроме первого, а также их передающие системы имеют одинаковые параметры, то есть

$$P_{T,k} = P_{T,2}, \quad |E_k| = |E_2|, \quad Z_k^{\text{in}} = Z_2^{\text{in}}, \quad Z_k^{\text{out}} = Z_2^{\text{out}}, \quad Y_k^{\text{sh}} = Y_2^{\text{sh}} \quad (k = \overline{2, n}).$$

Это фактически означает, что генераторы имеют одинаковую конструкцию и одинаково связаны с нагрузкой, за исключением передающей системы 1-го генератора. В работе [34] было показано, что динамика такой энергосети может быть описана в рамках модели редуцированной эффективной сети следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = \Delta - \mu y_i - \sin(\varphi_i + \alpha) - \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \alpha), \\ i = \overline{1, N}, \quad N = n - 1. \end{cases} \quad (1)$$

В безразмерной системе (1), определенной в цилиндрическом фазовом пространстве $G = S^N \times \mathbb{R}^N$, переменные $\varphi_i = \delta_1 - \delta_{i+1}$ определяют относительные углы ЭДС (роторов) генераторов, переменные $y_i = \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{i+1}$ — мгновенные частоты изменения относительных углов, точкой обозначено дифференцирование по времени $\tau = \sqrt{K/C} t$. Параметр Δ пропорционален разности мощностей турбин первого и $(i+1)$ -го генераторов; параметр μ представляет собой нормированный демпферный коэффициент, а параметр α характеризует пассивную часть схемы замещения. Эти параметры выражаются через величины, характеризующие схему замещения, следующим образом:

$$\Delta = \frac{A_1 - A_2}{K}, \quad \mu = \frac{D}{\sqrt{CK}}, \quad \alpha = \pi/2 - \arg(Y_{1,2}^{-1}),$$

где

$$K = |E_1 E_2 Y_{1,2}|, \quad A_k = P_{T,k} - |E_k|^2 |Y_{k,k}| \sin(\alpha_{k,k}), \quad \alpha_{k,k} = \pi/2 - \arg(Y_{k,k}^{-1}),$$

и

$$\begin{cases} Y_{1,1} = \frac{1}{Z_1^{\text{in}}} \left[1 - \frac{Z_1^{\text{out}}}{R_1} \left(1 + \frac{Z_1^{\text{in}}}{C_R R_1 Z_1^{\text{out}}} \right) \right], \\ Y_{i,i} = \frac{1}{Z_2^{\text{in}}} \left[1 - \frac{Z_2^{\text{out}}}{R_2} \left(1 + \frac{Z_2^{\text{in}}}{C_R R_2 Z_2^{\text{out}}} \right) \right], \quad Y_{1,j} = \frac{1}{C_R R_1 R_2}, \\ Y_{i,j} = \frac{1}{C_R R_2^2}, \quad j \neq i, \\ i, j = \overline{2, n}, \\ C_R = \frac{1}{Z_{\text{load}}} + \frac{1}{R_1} (1 + Y_1^{\text{sh}} Z_1^{\text{in}}) + \frac{n-1}{R_2} (1 + Y_2^{\text{sh}} Z_2^{\text{in}}), \\ R_k = Z_k^{\text{in}} + Z_k^{\text{out}} + Y_k^{\text{sh}} Z_k^{\text{in}} Z_k^{\text{out}}, \quad Z_k^{\text{in}} = Z_k^{\text{line}}/2 + Z_{k,T}^{\text{in}} + Z_k^{\text{int}}, \\ Z_k^{\text{out}} = Z_k^{\text{line}}/2 + Z_{k,T}^{\text{out}}, \quad k = 1, 2. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $Y_{i,i}$ и $Y_{i,j}$ – это так называемые собственные и взаимные комплексные проводимости ветвей генераторов. Более подробные сведения о выражениях, связывающих параметры системы (1) с параметрами схемы замещения, можно найти в [34].

Система (1) имеет поглощающую область

$$G^+ = \left\{ \phi_i \in S^1, y_i \in [y^-, y^+], i = \overline{1, N} \right\}, \quad (3)$$

где $y^\pm = \frac{1}{\mu} [\Delta \pm (2|\cos(\alpha)| + N - 1)]$, которая притягивает все траектории с начальными условиями вне этой области и содержит все аттракторы системы.

Система (1) симметрична относительно перестановки любой пары элементов. При этом получаемые всевозможными такими перестановками решения будут иметь один и тот же тип, то есть если одно решение устойчиво, то и все остальные решения также будут устойчивыми.

Исследование системы (1) показало, что при параметрах из области

$$S_N^{hom,st} = \left\{ \alpha, \Delta, \mu \mid 0 \leq \alpha \leq \pi/2, -f(N, \alpha) < \Delta < f_1(N, \alpha), \mu > 0 \right\} \quad (4)$$

существует устойчивое однородное состояние равновесия

$$O_1^{hom}(\varphi_i = \varphi^{hom}; y_i = 0), \quad (5)$$

где

$$f(N, \alpha) = \sqrt{N^2 + 2N \cos(2\alpha) + 1}, f_1(N, \alpha) = 1 + N \cos(2\alpha),$$

$$\varphi^{hom} = \beta^{hom} + \arcsin\left(\frac{\Delta}{f(N, \alpha)}\right), \sin \beta^{hom} = \frac{(N-1) \sin \alpha}{f(N, \alpha)}, \cos \beta^{hom} = \frac{(N+1) \cos \alpha}{f(N, \alpha)}, \quad (6)$$

которому соответствует однородный синхронный режим энергосети, характеризующийся равными мощностями и токами, текущими через все пути питания нагрузки, кроме первого.

В свою очередь, при параметрах из области

$$S_N^{inh,st} = \left\{ \alpha, \Delta, \mu \mid \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, -g(N, 1, \alpha) < \Delta < g_1(N, \alpha, \mu), \mu > 0 \right\} \quad (7)$$

существуют N устойчивых неоднородных состояний равновесия

$$O_j^{inh,1}(\varphi_j = -\alpha + \pi - \Phi_1^{(1)}, \varphi_{i \neq j} = -\alpha + \Phi_1^{(1)}; y_i = 0), \quad j = \overline{1, N}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} g(N, 1, \alpha) &= \sqrt{(1 + N \cos 2\alpha)^2 + (N-2)^2 \sin^2 2\alpha}, \quad g_1(N, \alpha, \mu) = \left\{ \Delta : \frac{\sqrt{4\kappa_c - \kappa_b^2}}{-\kappa_b \mu^2} = 1 \right\}, \\ \kappa_b &= a' + d' + (N-2)c', \quad \kappa_c = a'd' + (N-2)c'd' - (N-1)c'b', \\ a' &= -2 \cos(\alpha) \cos(\Phi_1^{(1)} - \alpha), \quad b' = \cos(\Phi_1^{(1)} + 2\alpha), \quad c' = -\cos(\Phi_1^{(1)} - 2\alpha), \\ d' &= 2 \cos(\alpha) \cos(\Phi_1^{(1)} + \alpha), \quad \Phi_1^{(1)} = \pi - \Omega_1^{inh} + \beta_1^{inh}, \quad \Omega_1^{inh} = \arcsin\left(\frac{\Delta}{g(N, 1, \alpha)}\right), \\ \sin \beta_1^{inh} &= \frac{(N-2) \sin 2\alpha}{g(N, 1, \alpha)}, \quad \cos \beta_1^{inh} = \frac{N \cos 2\alpha + 1}{g(N, 1, \alpha)}, \end{aligned} \quad (9)$$

каждому из которых соответствует неоднородный синхронный режим энергосети, в котором, помимо первого, есть еще один «неоднородный» ($j+1$)-й путь питания нагрузки, отличающийся от остальных током и передаваемой мощностью.

Кроме того, показана возможность сосуществования однородных и неоднородных синхронных режимов, а также квазисинхронных и асинхронных режимов.

Далее исследуем поведение энергосети, изначально работающей в одном из синхронных режимов, при отключении и подключении генераторов.

2. О безопасном отключении и подключении генераторов

Будем считать, что отключение (подключение) генераторов происходит быстро по сравнению с характерными временами эволюции измененной энергосети. В этом случае ее начальное состояние будет полностью (при отключении) или частично (при подключении) определяться синхронным режимом исходной энергосети, то есть координатами соответствующего состояния равновесия системы (1). Предположим также, что возможно отключение любых генераторов, кроме первого, а параметры подключаемых генераторов и их передающих систем такие же, как и у большинства генераторов исходной энергосети. В этом случае динамика измененной энергосети по-прежнему будет описываться системой вида (1) с учетом ее нового размера и соответствующим образом переопределенных параметров α, Δ и μ (см. выражение для C_R в (2)). Найдем условия, при которых можно пренебречь изменением параметров α, Δ и μ при переходе от исходной к измененной энергосети. Для этого рассмотрим упрощенную схему замещения линии передачи, состоящую из последовательно соединенных активного и реактивного сопротивлений. Тогда передающая система i -го генератора может быть замещена импедансом $Z_i = r_i + ix_i$, поэтому формулы для $Y_{i,i}$ и $Y_{i,j}$ (см. (2)) примут вид

$$\begin{cases} Y_{1,1} = [1 - Z_2 Y^*] / Z_1, \\ Y_{i,i} = [1 - Z_1 Y^*] / Z_2, \quad Y_{1,j} = Y^*, \\ Y_{i,j} = [Y^* Z_1] / Z_2, \quad j \neq i, \\ i, j = \overline{2, n}, \end{cases}$$

где $Y^* = Z_{\text{load}} / [Z_1 Z_2 + Z_{\text{load}} Z_2 + N Z_{\text{load}} Z_1]$. Заметим, что $Y_{i,i}$ и $Y_{i,j}$ зависят от числа генераторов только посредством Y^* . Следовательно, все различия между параметрами α, Δ и μ исходной и измененной энергосетей обусловлены именно Y^* . Предположим, что линия передачи первого генератора имеет лишь активное сопротивление, то есть $Z_1 = r_1$, что характерно, например, для кабельной линии [3]. Тогда

$$Z^* = (Y^*)^{-1} = r_2 \left(1 + \frac{r_1}{r_{\text{load}}} \right) + N r_1 + ix_2 \left(1 + \frac{r_1}{r_{\text{load}}} \right).$$

Нетрудно видеть, что при изменении N меняется только реальная часть Z^* . Таким образом, при отключении ($Z^* \rightarrow Z_-^*$; $N \rightarrow N - m$; $N - m > 1$) или подключении ($Z^* \rightarrow Z_+^*$; $N \rightarrow N + m$; $N > 1$) генераторов имеем

$$\text{Re}(Z_{\mp}^*) = r_2 \left(1 + \frac{r_1}{r_{\text{load}}} \right) + N r_1 \mp m r_1 > (r_2 + N r_1) \mp m r_1,$$

где m — число отключаемых (подключаемых) генераторов. Отсюда видно, что при

$$m r_1 / [r_2 + N r_1] \ll 1, \quad (10)$$

$$\text{Re}(Z_{\mp}^*) \approx \text{Re}(Z^*).$$

Условие (10) выполняется, когда число отключаемых (подключаемых) генераторов относительно мало по сравнению с числом исходных генераторов ($m \ll N$), а также если $r_1 \ll r_2$. Последнее имеет место при выполнении условий перехода к редуцированной эффективной сети, то есть в рассматриваемом нами здесь случае. Тогда при отключении или подключении генераторов величины Z^* и Y^* остаются почти неизменными и, следовательно, параметры α , Δ и μ тоже не претерпевают значительных изменений.

Заметим, что подключение и отключение генераторов может быть безопасным только в том случае, если в измененной энергосети, как и в исходной, существует устойчивый синхронный режим. Поэтому, прежде всего, необходимо наличие непустой области пересечения областей существования устойчивых состояний равновесия систем (1), отвечающих исходной и измененной энергосетям. Нетрудно показать, что такая область (обозначим ее через a) существует при любых соотношениях размеров исходной и измененной энергосетей, параметры которых удовлетворяют условию (10). В общем случае область a состоит из трех подобластей a_i , $i = 1, 2, 3$, отвечающих различным сочетаниям устойчивых состояний равновесия исходной и измененной систем (1). Возможные сочетания приведены в [Таблице](#), где через N_- и N_+ обозначены соответственно размеры наименьшей и наибольшей из энергосетей, то есть при отключении (подключении) размер исходной энергосети равен N_+ (N_-), а измененной — $N_- = N_+ - m$ ($N_+ = N_- + m$).

Таблица. Сочетания устойчивых состояний равновесия исходной и измененной систем (1)

Table. Combinations of stable steady states of the initial and changed systems (1)

$a_i \backslash N$	$N_- > 1$	$N_+ > 2$
a_1	O_1^{hom}	O_1^{hom}
a_2	O_1^{hom}	$O_1^{\text{hom}} \text{ и } O_j^{\text{inh},1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_+$
a_3	$O_1^{\text{hom}} \text{ и } O_j^{\text{inh},1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_-$	O_1^{hom}

Если параметры исходной и измененной энергосетей принадлежат области a_1 , то в них существуют лишь однородные синхронные режимы, отвечающие состояниям равновесия O_1^{hom} (см. (5)) соответствующих систем (1). Если же параметры принадлежат области a_2 , то в исходной энергосети в случае отключения генераторов ($N = N_+$) имеется как однородный, так и неоднородные синхронные режимы, отвечающие состояниям равновесия O_1^{hom} и $O_j^{\text{inh},1}$ (см. (8)) соответствующей системы (1), а в случае подключения генераторов ($N = N_-$) имеется лишь однородный синхронный режим, отвечающий состоянию равновесия O_1^{hom} . У измененной энергосети в случае отключения генераторов ($N = N_-$) имеется лишь однородный синхронный режим, а в случае подключения генераторов ($N = N_+$) имеются как однородный, так и неоднородные синхронные режимы. Наконец, в области a_3 сочетание синхронных режимов исходной и измененной энергосетей полностью противоположно a_2 . Таким образом, безопасное отключение генераторов всегда ассоциировано с установлением однородного синхронного режима в измененной энергосети, в то время как безопасное подключение генераторов может быть ассоциировано с установлением в ней как однородного, так и неоднородного синхронного режима.

На рис. 2 приведено разбиение плоскости параметров (α, Δ) на подобласти a_i для случая отключения генератора от системы из 6 генераторов (или, соответственно, подключения генератора к системе из 5 генераторов). Отметим, что из-за специфики кривых g и g_1 области a_2 и a_3 с уменьшением параметра μ сокращаются и при некоторых значениях этого параметра исчезают.

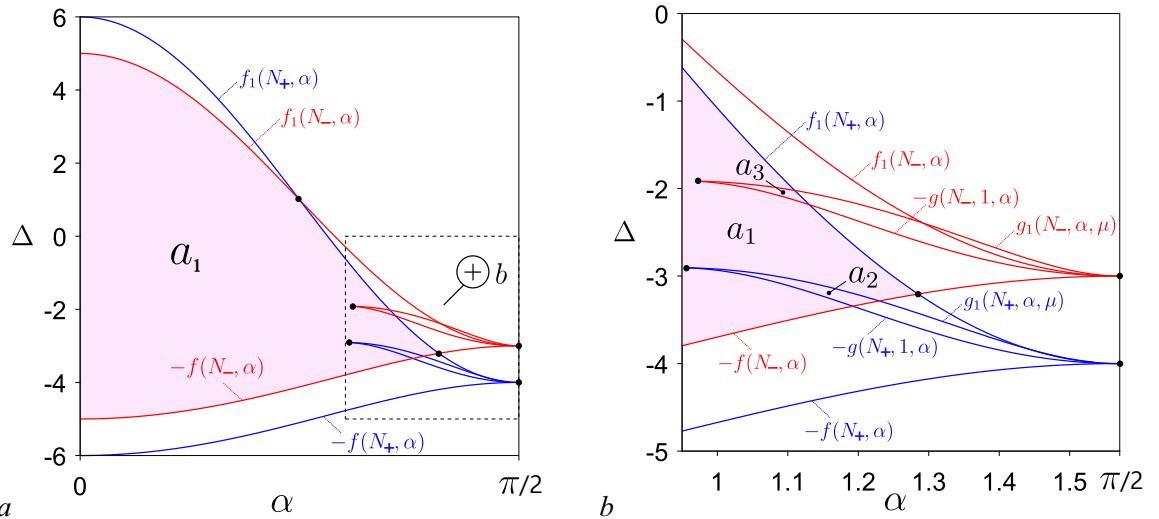


Рис. 2. Разбиение плоскости параметров (α, Δ) — a и ее увеличенный фрагмент — b на подобласти $a_i \in a$, отвечающие различным сочетаниям устойчивых состояний равновесия исходной и измененной систем (1), описывающих энергосети до и после отключения/подключения генераторов. Значения параметров $N_- = 4$, $N_+ = 5$, $\mu = 3$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Partition of the (α, Δ) -parameter plane — a and its enlarged fragment — b into the subregions $a_i \in a$, corresponding to various combinations of stable steady states of the initial and changed systems (1), describing the power grids before and after disconnecting/connecting generators. The parameter values: $N_- = 4$, $N_+ = 5$, $\mu = 3$ (color online)

Также каждая из областей a_i , $i = 1, 2, 3$, сокращается при увеличении числа одновременно отключаемых/подключаемых генераторов. При этом существуют пороговые значения числа таких генераторов, зависящие от параметра μ , при которых области a_2 и a_3 полностью исчезают.

3. Условия безопасного отключения генераторов

Рассмотрим теперь более детально отключение генераторов от энергосети. В общем случае возможно три различных сценария отключения. Во-первых, исходная энергосеть перед отключением может работать в однородном синхронном режиме (области $a_1 - a_3$ при $N = N_+$), отвечающем состоянию равновесия $O_1^{\text{hom}}(N_+)$. Тогда измененная энергосеть ($N = N_-$) сразу после отключения будет находиться в следующем однородном состоянии:

$$\vec{v}^1 = \left\{ \varphi_i = \varphi^{\text{hom}}(N_+), y_i = 0, i = \overline{1, N_-} \right\}. \quad (11)$$

Во-вторых, энергосеть изначально может работать в одном из неоднородных синхронных режимов (область a_2 при $N = N_+$). Допустим, что перед отключением энергосеть находилась в синхронном режиме, отвечающем состоянию равновесия $O_j^{\text{inh},1}(N_+)$. Как отмечалось в разделе 1, в данном режиме энергосети есть еще один «неоднородный» $(j+1)$ -й путь питания нагрузки, включающий $(j+1)$ -й генератор, который так же, как и первый, отличается от остальных током и передаваемой мощностью. Поэтому состояние энергосети после отключения будет зависеть от набора отключаемых генераторов. Если отключается в том числе $(j+1)$ -й генератор, входящий в дополнительный «неоднородный» путь питания нагрузки, то после отключения энергосеть будет находиться в следующем однородном состоянии:

$$\vec{v}^2 = \left\{ \varphi_i = -\alpha + \Phi_1^{(1)}(N_+), y_i = 0, i = \overline{1, N_-} \right\}. \quad (12)$$

Если же $(j + 1)$ -й генератор не входит в число отключаемых, то после отключения энергосеть будет находиться в одном из следующих неоднородных состояний:

$$\begin{aligned} \vec{v}_k^3 = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k = -\alpha + \pi - \Phi_1^{(1)}(N_+), \quad y_k = 0, \\ \varphi_i = -\alpha + \Phi_1^{(1)}(N_+), \quad y_i = 0, \quad i = \overline{1, N_-}, \quad i \neq k \end{array} \right\}, \\ k = \overline{1, N_- - 1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что в силу перестановочной симметрии системы (1) режимы, устанавливаемые в измененной энергосети с любого из этих состояний, будут иметь идентичные характеристики устойчивости. Поэтому достаточно проанализировать поведение энергосети, используя только одно из состояний \vec{v}_k^3 в качестве начального.

Найдем последовательно условия на параметры, при которых с каждого из начальных состояний $\vec{v}^1 - \vec{v}^3$ в измененной энергосети устанавливается синхронный режим, то есть условия безопасного отключения генераторов в соответствующей исходной энергосети.

Заметим, что в случае однородных начальных состояний \vec{v}^1 и \vec{v}^2 можно получить аналитическую оценку области установления синхронного режима. Действительно, из-за наличия у системы (1) перестановочной симметрии любое ее решение для однородных начальных условий должно иметь вид

$$\varphi_i(t) = \varphi(t), \quad y_i(t) = y(t), \quad i = \overline{1, N_-}, \quad (14)$$

где функции $\varphi(t)$ и $y(t)$ подчиняются следующей системе:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = \Delta - \mu y - f(N_-, \alpha) \sin(\varphi - \beta^{\text{hom}}(N_-, \alpha)). \end{cases} \quad (15)$$

После преобразований

$$\tau_{\text{new}} = f_{1/2}\tau, \quad \varphi_{\text{new}} = \varphi - \beta^{\text{hom}}(N_-, \alpha), \quad y_{\text{new}} = y/f_{1/2}, \quad \gamma = \Delta/f_{1/2}^2, \quad \lambda = \mu/f_{1/2},$$

где $f_{1/2} = \sqrt{f(N_-, \alpha)}$, получим систему на цилиндре ($G = S^1 \times R^1$) вида

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{\text{new}} = y_{\text{new}}, \\ \dot{y}_{\text{new}} = \gamma - \lambda y_{\text{new}} - \sin \varphi_{\text{new}}, \end{cases} \quad (16)$$

где точкой обозначена производная по τ_{new} . Система (16) описывает, в частности, динамику маятника в вязкой среде (λ), находящегося под действием постоянного внешнего момента (γ), и динамику точечного сверхпроводящего джозефсоновского контакта. Динамика системы (16) подробно изучена и широко представлена в литературе (см., например, [36–38]).

Из определения области $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ следует, что $|\Delta| < f(N_-, \alpha)$, поэтому рассмотрим систему (16) при $|\gamma| < 1$. Известно, что система в этом случае имеет два состояния равновесия:

$$O_1(\varphi_{\text{new}} = \varphi_1, y_{\text{new}} = 0) \text{ и } O_2(\varphi_{\text{new}} = \varphi_2, y_{\text{new}} = 0),$$

где $\varphi_1 = \arcsin \gamma$, $\varphi_2 = \pi - \arcsin \gamma$. Состояние равновесия O_1 является устойчивым узлом (или фокусом) и отвечает однородному синхронному режиму измененной энергосети, а O_2 — седлом.

Если при этом

$$\lambda > \lambda^* \approx 1.22 \left[\text{то есть } \mu > \lambda^* \sqrt{f(N_-, \alpha)} \right] \quad (17)$$

или

$$\lambda \leq \lambda^* \text{ и } |\gamma| < \gamma^T(\lambda) \left[\text{то есть } \mu \leq \lambda^* \sqrt{f(N_-, \alpha)} \text{ и } |\Delta| < f(N_-, \alpha) \gamma^T \left(\mu / \sqrt{f(N_-, \alpha)} \right) \right], \quad (18)$$

где $\gamma^T(\lambda)$ — кривая Трикоми, то состояние равновесия O_1 является глобально асимптотически устойчивым и устанавливается в системе (16) с любых начальных условий, в том числе отвечающих состояниям \vec{v}^1 и \vec{v}^2 . Следовательно, отключение генераторов в этом случае является безопасным вне зависимости от синхронного режима изначально установленного в исходной энергосети.

Если же ни одно из условий (17) и (18) не выполняется, то на фазовом цилиндре системы (16), наряду с состоянием равновесия O_1 , существует вращательный предельный цикл, отвечающий асинхронному режиму измененной энергосети. В этом случае состояние равновесия O_1 устанавливается в системе лишь с части начальных условий, и поэтому отключение генераторов может быть небезопасным. Известно, что функция

$$V(\varphi_{\text{new}}, y_{\text{new}}) = \frac{y_{\text{new}}^2}{2} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_{\text{new}}} (\sin \xi - \gamma) d\xi \quad (19)$$

является для системы (16) функцией Ляпунова [39]. Известно, что вдоль траекторий системы (16), то есть при увеличении времени τ_{new} , линии уровня $V(\varphi_{\text{new}}, y_{\text{new}}) = C = \text{const}$ убывают. Воспользуемся этим фактом и оценим область притяжения O_1 . На рис. 3, *a* представлены некоторые линии уровня $V(\varphi_{\text{new}}, y_{\text{new}})$, а стрелками показана ориентация векторного поля (16) на них. Можно видеть, что на фазовой плоскости системы (16) существует область Ω^+ , которая содержит состояние равновесия O_1 и внутри которой все линии уровня являются замкнутыми. Следовательно, все траектории системы (16) с начальными условиями из области Ω^+ стремятся в состояние равновесия O_1 . Заметим, что граница области Ω^+ определяется частью заключенной между точками φ_0 и φ_2 линии уровня $V(\varphi_{\text{new}}, y_{\text{new}}) = V(\varphi_2^*, 0)$, проходящей через седло O_2 (см. рис. 3, *a*), а именно

$$\Gamma_{\Omega^+} = \left\{ \varphi_{\text{new}}, y_{\text{new}} \mid \varphi_0 \leq \varphi_{\text{new}} \leq \varphi_2, \frac{y_{\text{new}}^2}{2} - \cos \varphi_{\text{new}} - \gamma \varphi_{\text{new}} = -\cos \varphi_2 - \gamma \varphi_2 \right\},$$

где φ_0 — наименьший корень уравнения $\cos \varphi + \gamma \varphi = \cos \varphi_2 + \gamma \varphi_2$. Таким образом, для того чтобы в энергосети, находящейся после отключения генераторов в состоянии \vec{v}^1 ($\varphi_v = \varphi^{\text{hom}}(N_+)$, см. рис. 3, *a*) или \vec{v}^2 ($\varphi_v = -\alpha + \Phi_1^{(1)}(N_+)$), устанавливался синхронный режим, необходимо, соответственно, выполнение условий

$$\varphi_0(N_-) < \varphi^{\text{hom}}(N^+) < \varphi_2(N_-) \quad (20)$$

и

$$\varphi_0(N_-) < -\alpha + \Phi_1^{(1)}(N_+) < \varphi_2(N_-). \quad (21)$$

На рис. 3, *b*, *c* приведены полученные из условий (20) и (21) оценки областей ($a_{\text{syn}}^{\text{est}}$) безопасного отключения одного генератора от энергосети из 4 генераторов ($N_+ = 4$, $N_- = 3$), находящейся изначально соответственно в однородном и неоднородном синхронных режимах. Заметим, что условия (20) и (21) не зависят от параметра μ . Следовательно, в приведенных областях отключение генератора будет безопасным при любых $\mu > 0$.

Области безопасного отключения одного генератора, сопряженного с установлением в измененной энергосети однородных начальных состояний \vec{v}^1 и \vec{v}^2 , были также найдены численно при различных значениях параметра μ для исходных энергосетей из $N_+ = 43, 54$ и 65 генераторов. Для этого при фиксированных значениях параметров и начальном состоянии интегрировалась соответствующая система (1) при $N = N_- = N_+ - 1$ и определялось, стремится ли ее траектория к состоянию равновесия, отвечающему синхронному режиму, или же к какому-либо аттрактору, отвечающему асинхронному режиму. Установлено, что при $\mu \geq 1.5$ во всех рассмотренных

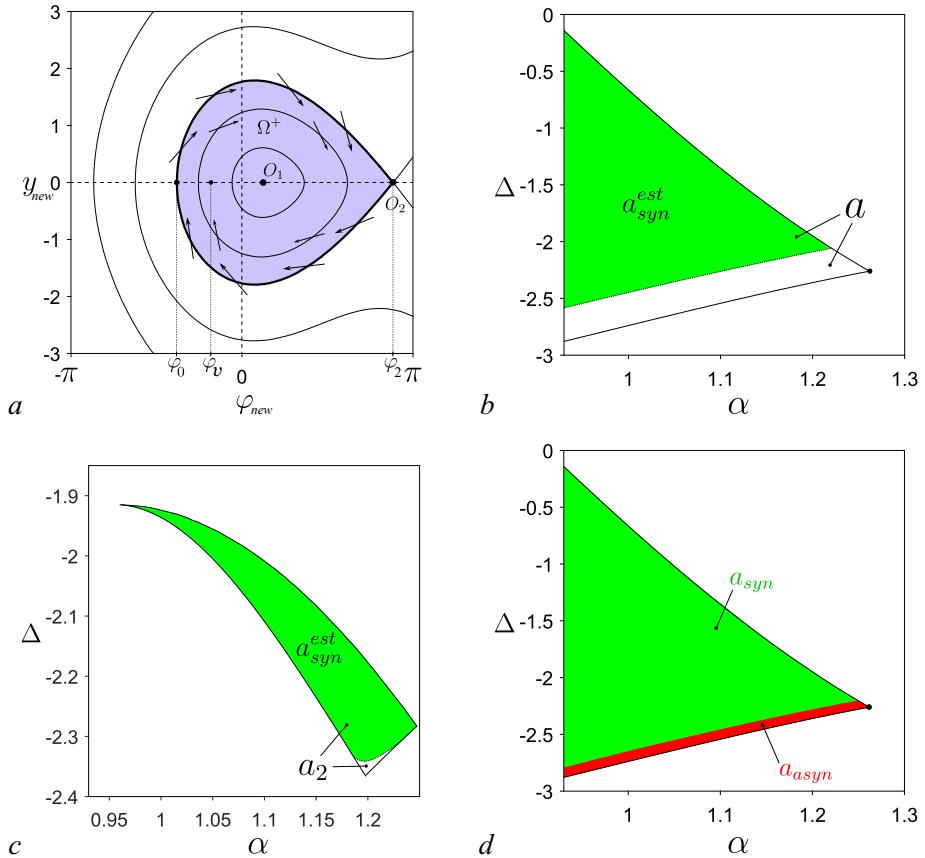


Рис. 3. Отключение генераторов, сопряженное с установлением в измененной энергосети однородных состояний: *a* — качественный вид функции Ляпунова для измененной энергосети; *b* и *c* — аналитические оценки областей установления синхронных режимов (a_{syn}^{est} , выделены зеленым цветом) из состояний \vec{v}^1 и \vec{v}^2 соответственно; *d* — численно найденные области, отвечающие установлению синхронного (a_{syn} , выделена зеленым цветом) и асинхронного режимов (a_{asyn} , выделена красным цветом) из состояния \vec{v}^1 при $\mu = 0.5$. Для соотнесения подобластей a_{syn}^{est} и a_2 последняя на (*c*) построена при $\mu = 3.0$. Значения параметров $N_+ = 4$, $N_- = 3$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Disconnecting of generators associated with the establishment of homogeneous states in the changed power grid: *a* — qualitative form of the Lyapunov function for the changed power grid; *b* and *c* — analytical estimates of the regions of establishment of synchronous modes (a_{syn}^{est} , highlighted in green) from states \vec{v}^1 and \vec{v}^2 , respectively; *d* — numerically found regions corresponding to the establishment of synchronous (a_{syn} , highlighted in green) and asynchronous modes (a_{asyn} , highlighted in red) from state \vec{v}^1 for $\mu = 0.5$. To compare the subregions a_{syn}^{est} and a_2 , the latter in (*c*) is depicted for $\mu = 3.0$. The parameter values: $N_+ = 4$, $N_- = 3$ (color online)

энергосетях отключение генератора является безопасным при любых значениях параметров α и Δ) из соответствующий областей a и a_2 , то есть областей одновременного существования синхронных режимов в исходной и измененной энергосетях. При уменьшении параметра μ появляются подобласти, в которых в измененной энергосети устанавливается асинхронный режим, то есть отключение генератора становится небезопасным. На рис. 3, *d* приведено разбиение плоскости параметров (α, Δ) при $\mu = 0.5$ на области, отвечающие установлению синхронного (a_{syn} , выделена зеленым цветом) и асинхронного режимов (a_{asyn} , выделена красным цветом), для $N_+ = 4$, $N_- = 3$ и изначального состояния \vec{v}^1 . Аналогичное разбиение для изначального состояния \vec{v}^2 не приведено ввиду малости соответствующей подобласти асинхронного поведения (опасного отключения). При дальнейшем уменьшении μ подобласти небезопасного отключения увеличиваются, сокращая область безопасного отключения до аналитически оцененных областей a_{syn}^{est} (см. рис. 3, *b*, *c*).

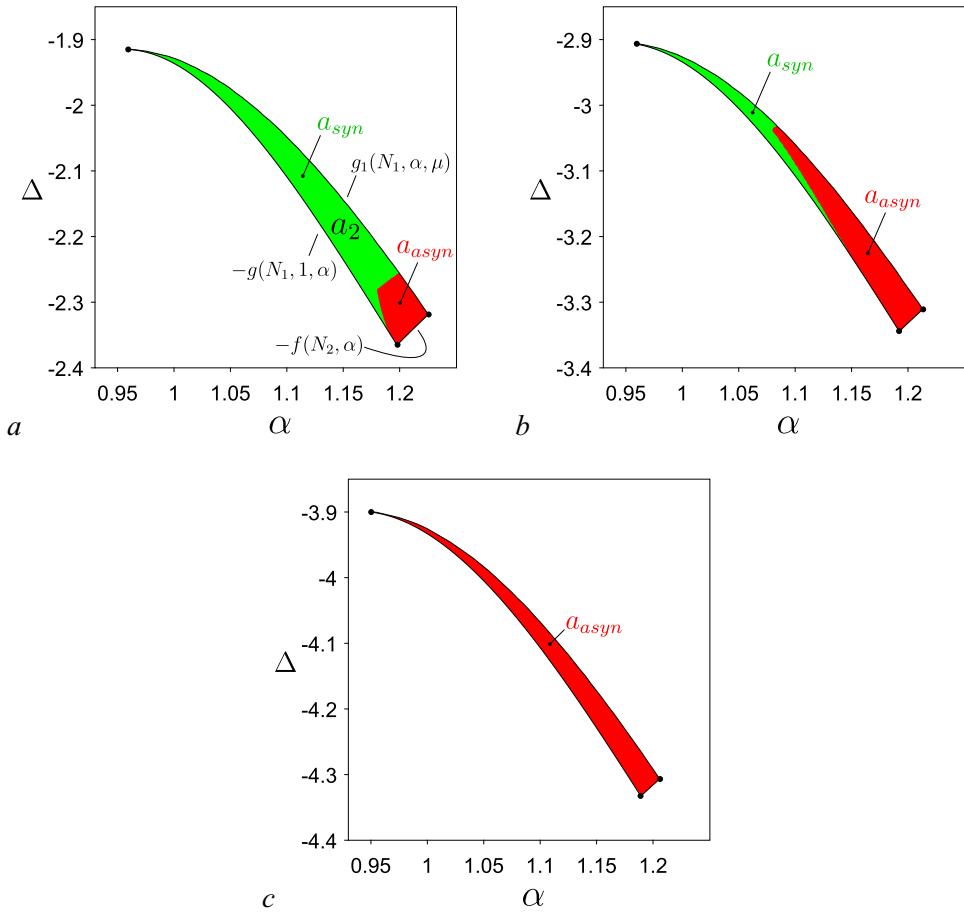


Рис. 4. Отключение генераторов, сопряженное с установлением в измененной энергосети одного из неоднородных состояний $\vec{v}_k^3, k = \overline{1, N_- - 1}$: $a-c$ — численно найденные области, соответствующие установлению синхронного (a_{syn} , выделена зеленым цветом) и асинхронного режимов (a_{asyn} , выделена красным цветом) для $N_+ = 4, N_- = 3$, $N_+ = 5, N_- = 4$ и $N_+ = 6, N_- = 5$ соответственно. Значения параметров $\mu = 1.5$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Disconnecting of generators associated with the establishment of one of the inhomogeneous states $\vec{v}_k^3, k = \overline{1, N_- - 1}$, in the changed power grid: $a-c$ — numerically found regions corresponding to the establishment of synchronous (a_{syn} , highlighted in green) and asynchronous modes (a_{asyn} , highlighted in red) for $N_+ = 4, N_- = 3$, $N_+ = 5, N_- = 4$, and $N_+ = 6, N_- = 5$, respectively. The parameter values: $\mu = 1.5$ (color online)

Случай неоднородных начальных состояний \vec{v}^3 измененной энергосети был проанализирован численно. Установлено, что для каждого фиксированного значения μ существует два критических значения размера исходной энергосети. Если энергосеть меньше минимального критического размера, то при любых значениях параметров α и Δ из соответствующих областей a_3 в измененной энергосети устанавливается синхронный режим, то есть отключение генераторов в ней всегда будет безопасным. Напротив, если размер энергосети больше максимального критического, то при любых значениях параметров из a_3 в измененной энергосети устанавливается асинхронный режим, то есть отключение генераторов в ней всегда будет опасным. Если же энергосеть имеет некоторый промежуточный размер, то соответствующая ей область a_3 разбивается на две подобласти, отвечающие соответственно безопасному и опасному отключению генераторов. На рис. 4, $a-c$ приведено разбиение плоскости параметров (α, Δ) при $\mu = 1.5$ на области, отвечающие безопасному и опасному отключению одного генератора в энергосети из $N_+ = 4, 5$ и 6 генераторов.

4. Условия безопасного подключения генераторов

Рассмотрим теперь подключение генераторов к энергосети. Будем предполагать, что роторы подключаемых генераторов предварительно разогнаны до частоты вращения, близкой к опорной частоте энергосети. В общем случае возможно два различных сценария подключения. Во-первых, исходная энергосеть перед подключением может работать в однородном синхронном режиме (области $a_1 - a_3$ при $N = N_-$), отвечающем состоянию равновесия $O_1^{\text{hom}}(N_-)$. Тогда измененная энергосеть ($N = N_+$) сразу после подключения будет находиться в состоянии вида

$$\vec{v}^4 = \left\{ \varphi_i = \varphi^{\text{hom}}(N_-), y_i = 0, i = \overline{1, N_-}; \varphi_k = \varphi_k^0, y_k = y_k^0, k = \overline{N_- + 1, N_+} \right\}, \quad (22)$$

где координаты $\varphi_k^0 = \delta_1(0) - \delta_k^0$ и $y_k^0 = \dot{\delta}_1(0) - \dot{\delta}_k^0$ определяются состояниями как подключаемых генераторов, так и исходного первого генератора. Так как ротор подключаемых генераторов был предварительно разогнан, будем считать, что эти координаты имеют случайные значения из интервалов $\varphi_k^0 \in [-\pi, \pi]$ и $y_k^0 = [y^-, y^+]$, где y^\pm вычислены по формуле (3) для $N = N_+$.

Если же исходная энергосеть работает в одном из неоднородных синхронных режимов (область a_3 при $N = N_-$), то в силу симметрии системы (1) при составлении вектора начального состояния можно использовать координаты любого из них, например, отвечающего состоянию равновесия $O_j^{\text{inh},1}(N_-)$. В этом случае измененная энергосеть ($N = N_+$) сразу после подключения будет находиться в состоянии вида

$$\vec{v}^5 = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_j = -\alpha + \pi - \Phi_1^{(1)}(N_-), \quad y_j = 0, \\ \varphi_i = -\alpha + \Phi_1^{(1)}(N_-), \quad y_i = 0, \quad i = \overline{1, N_- - 1}, \quad i \neq j, \\ \varphi_k = \varphi_k^0, \quad y_k = y_k^0, \quad k = \overline{N_- + 1, N_+} \end{array} \right\}. \quad (23)$$

Для нахождения областей безопасного подключения мы использовали следующую процедуру. При фиксированных значениях параметров на основе (22) и (23) посредством случайного выбора значений координат φ_k^0 и y_k^0 создавались соответствующие наборы начальных состояний измененной энергосети. Элементы наборов использовались в качестве начальных условий при интегрировании системы (1) для $N = N_+$ и нахождения соответствующего поведения измененной энергосети. Далее подсчитывалась доля траекторий, стремящихся в устойчивые состояния равновесия, то есть оценивалась вероятность установления в измененной энергосети синхронного режима (обозначим ее P_{syn}). В зависимости от значения P_{syn} можно выделить два характерных типа подобластей параметров. К первому типу относятся подобласти, в которых $P_{\text{syn}} = 1$, которые обозначим a_{syn} . При параметрах из этих подобластей подключение генератора является безопасным, так как в измененной энергосети гарантировается установление синхронного режима. Ко второму типу относятся подобласти, где $0 < P_{\text{syn}} < 1$, которые обозначим a_{prob} . Для параметров из этих подобластей установление синхронного режима носит вероятностный характер, поэтому подключение генератора является небезопасным.

На рис. 5 приведены результаты для случая, когда к энергосети, содержащей пять генераторов ($N_- = 4$), подключается еще один ($N_+ = 5$). Установлено, что для начальных состояний \vec{v}^4 и значений параметра $\mu > 2.00$ подобласть a_{syn} полностью совпадает с a , что гарантирует безопасное подключение генератора к исходной энергосети. В противном же случае существуют оба типа подобластей a_{syn} и a_{prob} . Взаимное расположение этих подобластей при $\mu = 1.50, 1.25$ и 1.00 приведено на рис. 5, a–c. При уменьшении параметра μ размер подобласти a_{syn} уменьшается. Суммарный размер подобластей a_{prob} при этом растет, и уменьшаются максимальные вероятности P_{syn} в данных подобластях. В свою очередь, для начальных состояний \vec{v}^5 и значений параметра $\mu \geq 1.25$ подобласть a_{syn} полностью совпадает с a_3 , что гарантирует безопасное подключение

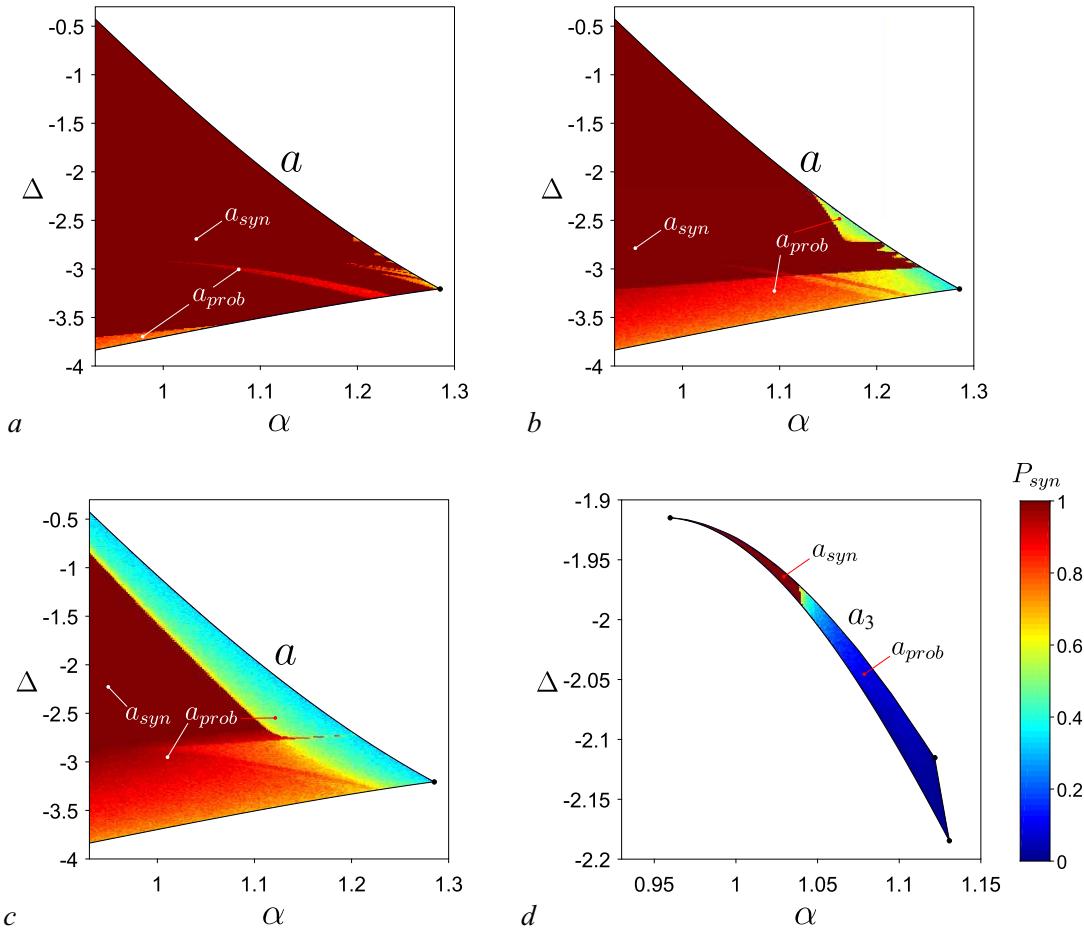


Рис. 5. Подключение генераторов: *a–c* — вероятность P_{syn} установления синхронного режима в измененной энергосети с однородного состояния исходной энергосети при $\mu = 1.50$, $\mu = 1.25$ и $\mu = 1.00$ соответственно; *d* — вероятность установления синхронного режима с неоднородного состояния исходной энергосети при $\mu = 1.00$. Значения параметров $N_- = 4$, $N_+ = 5$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Connecting of generators: *a–c* — probability P_{syn} of establishing a synchronous mode in the changed power grid from a homogeneous state of the initial power grid for $\mu = 1.50$, $\mu = 1.25$ and $\mu = 1.00$, respectively; *d* — probability of establishing a synchronous mode from an inhomogeneous state of the initial power grid for $\mu = 1.00$. The parameter values: $N_- = 4$, $N_+ = 5$ (color online)

генератора к исходной энергосети. Если $\mu < 1.25$ (см. рис. 5, *d*), то наряду с подобластью a_{syn} существует подобласть a_{prob} , то есть подключение генератора становится небезопасным. При этом обнаружено, что для параметров из подобластей a_{syn} в измененной энергосети всегда устанавливается однородный синхронный режим. В частях подобластей a_{prob} , где в измененной энергосети возможно установление неоднородных режимов, вероятность их установления не превышает 0.13.

Заключение

В данной работе рассмотрена энергосеть из произвольного числа генераторов, работающих на общую пассивную линейную нагрузку, в случае, когда один из генераторов находится «электрически» ближе к нагрузке (из-за более короткой линии передачи и/или продольной компенсации индуктивного сопротивления). Для описания динамики данной сети применяется модель редуцированной эффективной сети в виде ансамбля с хаб-топологией (топологией «звезда»). Изучена задача об устойчивости энергосети, изначально находящейся в одном из синхронных

режимов, к отключению и подключению генераторов. С помощью подхода, базирующегося на втором методе Ляпунова, найдены условия на параметры, обеспечивающие безопасное отключение генераторов, включающих, если таковой имеется, и генератор, входящий в «неоднородный» путь питания нагрузки, который отличается от остальных током и передаваемой мощностью. Полученные оценки подтверждены численным нахождением соответствующих областей для энергосетей различного размера. Также численно прослежена эволюция области, отвечающей безопасному подключению генератора к энергосети из пяти генераторов.

Список литературы

1. Жданов П. С. Вопросы устойчивости электрических систем. М.: Энергия, 1979. 456 с.
2. Веников В. А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высшая школа, 1985. 536 с.
3. Идельчик В. И. Электрические системы и сети. М.: Энергоатомиздат, 1989. 592 с.
4. Kundur P., Balu N. J., Lauby M. G. Power System Stability and Control. New York: McGraw-Hill Education, 1994. 1176 p.
5. Sauer P., Pai A. Power System Dynamics and Stability. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1998. 357 p.
6. Anderson P. M., Fouad A. A. Power System Control and Stability. NJ: IEEE, Piscataway, 2003. 672 p.
7. Horowitz S. H., Phadke A. G., Henville C. F. Power System Relaying. New York: John Wiley and Sons, 2008. 528 p.
8. Machowski J., Bialek J., Bumby D. Power System Dynamics: Stability and Control. New York: John Wiley and Sons, 2008. 629 p.
9. Grainger J. J., Stevenson W. D. Power System Analysis. New York: McGraw-Hill Education, 2016. 787 p.
10. Dobson I., Carreras B. A., Lynch V. E., Newman D. E. Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization // Chaos. 2007. Vol. 17, no. 2. P. 026103. DOI: 10.1063/1.2737822.
11. Schafer B., Withaut D., Timme M., Latora V. Dynamically induced cascading failures in power grids // Nat. Commun. 2018. Vol. 9, no. 1. P. 1975. DOI: 10.1038/s41467-018-04287-5.
12. Bialek J. W. Why has it happened again? Comparison between the UCTE blackout in 2006 and the blackouts of 2003 // In: IEEE Lausanne Power Tech. Lausanne, Switzerland. 2007. P. 51–56. DOI: 10.1109/PCT.2007.4538291.
13. Li C., Sun Y., Chen X. Analysis of the blackout in Europe on November 4, 2006 // In: 2007 International Power Engineering Conference (IPEC 2007). 2007. P. 939–944.
14. van der Vleuten E., Lagendijk V. Interpreting transnational infrastructure vulnerability: European blackout and the historical dynamics of transnational electricity governance // Energy Policy. 2010. Vol. 38, no. 4. P. 2053–2062. DOI: 10.1016/j.enpol.2009.11.030.
15. Veloza O. P., Santamaria F. Analysis of major blackouts from 2003 to 2015: classification of incidents and review of main causes // Electr. J. 2016. Vol. 29, no. 7. P. 42–49. DOI: 10.1016/j.tej.2016.08.006.
16. Shao Y., Tang T., Yi J., Wang A. Analysis and lessons of blackout in Turkey power grid on March 31 // AEPS. 2016. Vol. 40, no. 23. P. 9–14. DOI: 10.7500/AEPS20160412004.
17. Coletta T., Jacquod P. Linear stability and the Braess paradox in coupled-oscillator networks and electric power grids // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 93, no. 3. P. 032222. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.032222.
18. Khramenkov V. A., Dmitrichev A. S., Nekorkin V. I. A new scenario for Braess's paradox in power grids // Chaos. 2023. Vol. 32, no. 11. P. 113116. DOI: 10.1063/5.0093980.
19. Schafer B., Pesch T., Manik D., Gollenstede J., Lin G., Beck H. P., Withaut D., Timme M.

- Understanding Braess' paradox in power grids // *Nat. Commun.* 2022. Vol.13, no. 1. P. 5396. DOI: 10.1038/s41467-022-32917-6.
20. *Sangjoon P., Kim C. H., Kahng B.* Optimal location of reinforced inertia to stabilize power grids // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2025. Vol. 199, no. 2. P 116768. DOI: 10.1016/j.chaos.2025.116768.
 21. *Klinshov V. V., Nekorkin V. I., Kurths J.* Stability threshold approach for complex dynamical systems // *New J. Phys.* 2015. Vol. 18, no. 1. P. 013004. DOI: 10.1088/1367-2630/18/1/013004.
 22. *Mitra C., Kittel T., Choudhary A., Kurths J., Donner R. V.* Recovery time after localized perturbations in complex dynamical networks // *New J. Phys.* 2017. Vol. 19, no. 10. P. 103004. DOI: 10.1088/1367-2630/aa7fab.
 23. *Mitra C., Kittel T., Choudhary A., Sinha S., Kurths J., Donner R. V.* Multiple-node basin stability in complex dynamical networks // *Phys. Rev. E*. 2017. Vol. 95, no. 3. P. 032317. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.032317.
 24. *Wolff M. F., Lind P. G., Maass P.* Power grid stability under perturbation of single nodes: Effects of heterogeneity and internal nodes // *Chaos*. 2018. Vol. 28, no. 10. P 103120. DOI: 10.1063/1.5040689.
 25. *Klinshov V. V., Kirillov S., Kurths J., Nekorkin V. I.* Interval stability for complex systems // *New J. Phys.* 2018. Vol. 20, no. 4. P. 043040. DOI: 10.1088/1367-2630/aab5e6.
 26. *Halekotte L., Feudel U.* Minimal fatal shocks in multistable complex networks // *Sci. Rep.* 2020. Vol. 10, no. 1. P. 11783. DOI: 10.1038/s41598-020-68805-6.
 27. *Halekotte L., Vanselow A., Feudel U.* Transient chaos enforces uncertainty in the british power grid // *J. Phys. Complex*. 2021. Vol. 2, no. 3. P. 035015. DOI: 10.1088/2632-072X/ac080f.
 28. *Khramenkov V. A., Dmitriev A. S., Nekorkin V. I.* Bistability of operating modes and their switching in a three-machine power grid // *Chaos*. 2023. Vol. 33, no. 10. P 103129. DOI: 10.1063/5.0165779.
 29. *Gambuzza L. V., Buscarino A., Fortuna L., Porfiri M., Frasca M.* Analysis of dynamical robustness to noise in power grids // *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*. 2017. Vol. 7, no. 3. P. 413–421. DOI: 10.1109/JETCAS.2017.2649598.
 30. *Schmietendorf K., Peinke J., Kamps O.* The impact of turbulent renewable energy production on power grid stability and quality // *Eur. Phys. J. B*. 2017. Vol. 90. P. 222. DOI: 10.1140/epjb/e2017-80352-8.
 31. *Tumash L., Olmi S., Scholl E.* Effect of disorder and noise in shaping the dynamics of power grids // *EPL*. 2018. Vol. 123. P. 20001. DOI: 10.1209/0295-5075/123/20001.
 32. *Haehne H., Schmietendorf K., Peinke J., Kettemann S., Tamrakar S.* Propagation of wind-power-induced fluctuations in power grids // *Phys. Rev. E*. 2019. Vol. 99. P. 050301. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.050301.
 33. *Аринушкин П. А., Куприянов В. Д., Вадивасова Т. Е.* Влияние гауссовского шума и шума Леви на фазовую динамику ансамбля Курамото-подобных осцилляторов // *Известия вузов. ПНД*. 2025. Т. 33, № 3. С. 289–306. DOI: 10.18500/0869-6632-003145.
 34. *Храменков В. А., Дмитриев А. С., Некоркин В. И.* Мультистабильность синхронных режимов в многомашинной энергосети с общей нагрузкой и их устойчивость в целом и в большом // *Известия вузов. ПНД*. 2025. Т. 33, № 1. С. 38–68. DOI: 10.18500/0869-6632-003128.
 35. *Калентионок Е. В.* Устойчивость электроэнергетических систем. Минск: Техноперспектива, 2008. 375 с.
 36. *Tricomi F.* Integrazione di un' equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*. Ser. 2. 1933. Vol. 2, no. 1. P. 1–20.
 37. *Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E.* Theory of Oscillators. Oxford: Pergamon, 1966. 848 p.
 38. *Некоркин В. И.* Введение в нелинейную динамику колебаний и волн. М.: Физматлит, 2024. 352 с.
 39. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.

References

1. Zhdanov PS. Stability Issues for Electrical Systems. M.: Energy; 1979. 456 p. (in Russian).
2. Venikov VA. Transient electromechanical processes in electrical systems. M.: Vysshaya shkola; 1985. 536 p. (in Russian).
3. Idelchik VI. Electrical systems and networks. M.: Energoatomizdat; 1989. 592 p. (in Russian).
4. Kundur P, Balu NJ, Lauby MG. Power System Stability and Control. New York: McGraw-Hill Education; 1994. 1176 p.
5. Sauer P, Pai A. Power System Dynamics and Stability. Prentice-Hall: Englewood Cliffs; 1998. 357 p.
6. Anderson PM, Fouad AA. Power System Control and Stability. NJ: IEEE, Piscataway; 2003. 672 p.
7. Horowitz SH, Phadke AG, Henville CF. Power System Relaying. New York: John Wiley & Sons; 2008. 528 p.
8. Machowski J, Bialek J, Bumby D. Power System Dynamics: Stability and Control. New York: John Wiley and Sons; 2008. 629 p.
9. Grainger JJ., Stevenson WD. Power System Analysis. New York: McGraw-Hill Education; 2016. 787 p.
10. Dobson I, Carreras BA, Lynch VE, Newman DE. Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization. Chaos. 2007;17(2):026103. DOI: 10.1063/1.2737822.
11. Schafer B, Witthaut D, Timme M, Latora V. Dynamically induced cascading failures in power grids. Nat. Commun. 2018;9(1):1975. DOI: 10.1038/s41467-018-04287-5.
12. Bialek JW. Why has it happened again? Comparison between the UCTE blackout in 2006 and the blackouts of 2003. In: IEEE Lausanne Power Tech. Lausanne, Switzerland. 2007. P. 51–56. DOI: 10.1109/PCT.2007.4538291.
13. Li C, Sun Y, Chen X. Analysis of the blackout in Europe on November 4, 2006. In: 2007 International Power Engineering Conference (IPEC 2007). 2007. P. 939–944.
14. van der Vleuten E, Lagendijk V. Interpreting transnational infrastructure vulnerability: European blackout and the historical dynamics of transnational electricity governance. Energy Policy. 2010;38(4):2053–2062. DOI: 10.1016/j.enpol.2009.11.030.
15. Veloza OP, Santamaria F. Analysis of major blackouts from 2003 to 2015: classification of incidents and review of main causes. Electr. J. 2016;29(7):42–49. DOI: 10.1016/j.tej.2016.08.006.
16. Shao Y, Tang T, Yi J, Wang A. Analysis and lessons of blackout in Turkey power grid on March 31. AEPS. 2016;40(23):9–14. DOI: 10.7500/AEPS20160412004.
17. Coletta T, Jacquod P. Linear stability and the Braess paradox in coupled-oscillator networks and electric power grids. Phys. Rev. E. 2016;93(3):032222. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.032222.
18. Khramenkov VA, Dmitriev AS, Nekorkin VI. A new scenario for Braess's paradox in power grids. Chaos. 2023;32(11):113116. DOI: 10.1063/5.0093980.
19. Schafer B, Pesch T, Manik D, Gollenstede J, Lin G, Beck HP, Witthaut D, Timme M. Understanding Braess' paradox in power grids. Nat. Commun. 2022;13(1):5396. DOI: 10.1038/s41467-022-32917-6.
20. Sangjoon P, Kim CH, Kahng B. Optimal location of reinforced inertia to stabilize power grids. Chaos, Solitons and Fractals. 2025;199(2):116768. DOI: 10.1016/j.chaos.2025.116768.
21. Klinshov VV, Nekorkin VI, Kurths J. Stability threshold approach for complex dynamical systems. New J. Phys. 2015;18(1):013004. DOI: 10.1088/1367-2630/18/1/013004.
22. Mitra C, Kittel T, Choudhary A, Kurths J, Donner RV. Recovery time after localized perturbations in complex dynamical networks. New J. Phys. 2017;19(10):103004. DOI: 10.1088/1367-2630/aa7fab.

23. Mitra C, Kittel T, Choudhary A, Sinha S, Kurths J, Donner RV. Multiple-node basin stability in complex dynamical networks. *Phys. Rev. E.* 2017;95(3):032317. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.032317.
24. Wolff MF, Lind PG, Maass P. Power grid stability under perturbation of single nodes: Effects of heterogeneity and internal nodes. *Chaos.* 2018;28(10):103120. DOI: 10.1063/1.5040689.
25. Klinshov VV, Kirillov S, Kurths J, Nekorkin VI. Interval stability for complex systems. *New J. Phys.* 2018;20(4):043040. DOI: 10.1088/1367-2630/aab5e6.
26. Halekotte L, Feudel U. Minimal fatal shocks in multistable complex networks. *Sci. Rep.* 2020;10(1):11783. DOI: 10.1038/s41598-020-68805-6.
27. Halekotte L, Vanselow A, Feudel U. Transient chaos enforces uncertainty in the british power grid. *J. Phys. Complex.* 2021;2(3):035015. DOI: 10.1088/2632-072X/ac080f.
28. Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. Bistability of operating modes and their switching in a three-machine power grid. *Chaos.* 2023;33(10):103129. DOI: 10.1063/5.0165779.
29. Gambuzza LV, Buscarino A, Fortuna L, Porfiri M, Frasca M. Analysis of dynamical robustness to noise in power grids. *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems.* 2017;7(3):413–421. DOI: 10.1109/JETCAS.2017.2649598.
30. Schmietendorf K, Peinke J, Kamps O. The impact of turbulent renewable energy production on power grid stability and quality. *Eur. Phys. J. B.* 2017;90:222. DOI: 10.1140/epjb/e2017-80352-8.
31. Tumash L, Olmi S, Scholl E. Effect of disorder and noise in shaping the dynamics of power grids. *EPL.* 2018;123:20001. DOI: 10.1209/0295-5075/123/20001.
32. Haehne H, Schmietendorf K, Peinke J, Kettemann S, Tamrakar S. Propagation of wind-power-induced fluctuations in power grids. *Phys. Rev. E.* 2019;99:050301. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.050301.
33. Arinushkin PA, Kupriyanov VD, Vadivasova TE. Influence of Gaussian noise and Levy noise on the phase dynamics of the ensemble of Kuramoto-like oscillators of first and second order // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(3):289–306. DOI: 10.18500/0869-6632-003145.
34. Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. Multistability of synchronous modes in a multimachine power grid with a common load and their global and non-local stability. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(1):38–68. DOI: 10.18500/0869-6632-003128.
35. Kalentionok EV. Electric Power Systems Stability. Minsk: Technoperspectiva; 2008. 375 p. (in Russian).
36. Tricomi F. Integrazione di un' equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Ser. 2.* 1933;2(1):1–20.
37. Andronov AA, Vitt AA, Khaikin SE. Theory of Oscillators. Oxford: Pergamon; 1966. 848 p.
38. Nekorkin VI. Introduction to Nonlinear Dynamics of Oscillations and Waves. M.: Fizmatlit; 2024. 352 p. (in Russian).
39. Barbashin EA. Lyapunov Functions. M.: Nauka; 1979. 240 p. (in Russian).



Храменков Владислав Анатольевич — родился в Муроме Владимирской области (1994). Окончил бакалавриат и магистратуру по направлению «Радиофизика» Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2018) и аспирантуру Института прикладной физики РАН по направлению «Физика и астрономия» (2022). Область научных интересов — теория колебаний, синхронные машины, энергосети.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
 Институт прикладной физики РАН
 E-mail: hramenkov.vlad@appl.sci-nnov.ru
 ORCID: 0000-0001-7165-830X
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1150615



Дмитричев Алексей Сергеевич — родился в 1980 году в селе Слободское Кстовского района Горьковской области. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2002). Кандидат физико-математических наук (2010, ННГУ). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Область научных интересов — нелинейная динамика, динамические сети, структурообразование, волны и пространственно-временной хаос, синхронизация. Имеет более 50 научных публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: admity@neuron.appl.sci-nnov.ru
ORCID: 0000-0002-6142-3555
AuthorID (eLibrary.Ru): 146176



Некоркин Владимир Исаакович — родился в 1948 году. Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1971). Член-корреспондент РАН (2022), профессор (1995), доктор физико-математических наук (1992). Профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, заведующий отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН. Лауреат премии им. А. А. Андронова (2012). Область научных интересов — динамика нелинейных систем, нейродинамика, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структурообразование и нелинейные волны. Имеет более 350 научных публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 5 книг.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
Россия, 603022 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
ORCID: 0000-0003-0173-587X
AuthorID (eLibrary.Ru): 2740



Синхронизация и десинхронизация в ансамблях мобильных агентов

E. M. Варварин[✉], Г. В. Осипов

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского, Россия
E-mail: [✉]varvarin@unn.ru, grigori.osipov@itmm.unn.ru

Поступила в редакцию 25.06.2025, принята к публикации 7.11.2025,
опубликована онлайн 13.11.2025, опубликована 30.01.2026

Аннотация. Цель настоящего исследования — анализ механизмов влияния и разрушения, а также характеристик синхронного и асинхронного режимов поведения ансамблей (роев) взаимодействующих мобильных агентов, двигающихся согласно хаотическим фазовым траекториям Рёссlera и Лоренца. **Методы.** Одним из основных способов получения синхронной хаотической динамики является эффект хаотической фазовой синхронизации — процесс установления одинаковой усредненной частоты колебаний и ограниченной по модулю разности фаз при наличии достаточно сильной связи. Для моделирования и получения результатов используются различные методы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений. **Результаты.** На примере ансамблей взаимодействующих мобильных агентов, траектории движения которых подчиняются системам Рёссlera и Лоренца в хаотических режимах, было рассмотрено влияние различных видов неоднородностей на коллективную динамику. Была продемонстрирована возможность организации последовательного, параллельного движений агентов и организации различных топологических конфигураций роя агентов при определенном выборе структуры неоднородности. Рассмотрена длительность переходных процессов к синхронному режиму в ансамблях мобильных агентов, движущихся по траекториям системы Рёссlera в различных режимах. Кроме того, для случая хаотических аттракторов Рёссlera был предложен способ десинхронизации роя с помощью сильной фазовой расстройки. **Заключение.** В работе продемонстрирована возможность синхронизации и десинхронизации ансамблей мобильных агентов.

Ключевые слова: мобильный агент, ансамбль, хаотическая фазовая синхронизация, система Рёссlera, система Лоренца.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 23-12-00180 (задача синхронизации) и проекта № 0729-2020-0036 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (задача десинхронизации).

Для цитирования: Варварин Е. М., Осипов Г. В. Синхронизация и десинхронизация в ансамблях мобильных агентов // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 68–83. DOI: 10.18500/0869-6632-003199. EDN: LSIHYF

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Synchronization and desynchronization in ensembles of mobile agents

E. M. Varvarin[✉], G. V. Osipov

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: varvarin@unn.ru, grosipov@gmail.com

Received 25.06.2025, accepted 7.11.2025, available online 13.11.2025, published 30.01.2026

Abstract. The purpose of this work is to analyze the mechanisms of influence and destruction, as well as the characteristics of synchronous and asynchronous modes of behavior of ensembles (swarms) of interacting mobile agents moving according to chaotic phase trajectories of Rössler and Lorenz. *Methods.* One of the main ways to obtain synchronous chaotic dynamics is the effect of chaotic phase synchronization — the process of establishing the same averaged frequency of oscillations and modulo limited phase difference in the presence of sufficiently strong coupling. Numerical integration methods of systems of differential equations are used for modeling and obtaining results. *Results.* In the context of ensembles of interacting mobile agents whose motion trajectories obey the Rössler and Lorenz systems in chaotic regimes, the influence of different types of individualities on collective dynamics was considered. The possibility of organizing sequential and parallel action of agents and various topological configurations of the organization of a swarm of agents when choosing a uniformity structure was demonstrated. The duration of transient processes in a synchronous regime in ensembles of mobile agents moving along the trajectories of the Rössler system in different regimes was considered. In addition, for cases of chaotic Rössler attractors, a method for swarm desynchronization using independent phase tuning was proposed. *Conclusion.* The article demonstrates the ability to synchronize and desynchronize ensembles of mobile agents.

Keywords: mobile agent, ensemble, chaotic phase synchronization, Rossler system, Lorenz system.

Acknowledgements. This work was supported by RSF grant №23-12-00180 (synchronization task) and project № 0729-2020-0036 of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (desynchronization task).

For citation: Varvarin EM, Osipov GV. Synchronization and desynchronization in ensembles of mobile agents. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1):68–83. DOI: 10.18500/0869-6632-003199

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Концепция мобильного агента как динамической единицы, обладающей пространственной свободой и способностью к автономному взаимодействию, стала важной парадигмой в моделировании коллективного поведения [1, 2]. Такие агенты, в отличие от статичных узлов сетей, характеризуются пространственной подвижностью, возможностью создания локальных правил взаимодействия и эмерджентным поведением.

Как показано в [3], мобильность агентов может усиливать синхронизацию в метапопуляциях, создавая коллективные режимы, недостижимые для статичных систем. Приложения включают роевую робототехнику [4], координацию беспилотников [5] и биологическое моделирование [6]. Фундаментальную роль в таких системах играет *импульсная связь*, где взаимодействие происходит дискретно при сближении агентов. Показано, что даже простые импульсно-связанные осцилляторы способны к глобальной синхронизации [7]. Для мобильных агентов эта модель расширена: пространственное движение становится *активным регулятором* синхронных состояний [8, 9].

Развиваются гибридные подходы, комбинирующие метрические (дистанционные) и топологические (выбор соседей) взаимодействия [10]. Как отмечено в [11], пространственное движение агентов может как подавлять, так и усиливать синхронизацию в зависимости от параметров системы.

В первых исследованиях синхронизации хаотических осцилляторов в основном рассматривалась глобальная связь (см., например, [12]), что удобно при моделировании и теоретическом анализе, но слабо соотносится с реальным миром. В последних же исследованиях предпочтение отдается различным нелокальным связям, во многом отражающим реальные наблюдаемые

явления. Условия включения связи между агентами также могут быть совершенно разнообразны: элементы могут взаимодействовать только с теми, которые входят в их поле зрения [13]; при нахождении в заранее определенных зонах пространства [14] или же при нахождении на достаточно близком расстоянии друг к другу [15, 16].

В данной работе рассматривается вариант связи, при котором взаимодействие активируется только при попадании агентов в цилиндр заданного радиуса. Местоположение мобильного агента в трехмерном пространстве определяется фазовой траекторией трехмерной динамической системы, демонстрирующей хаотическое поведение. В силу хаотичности движения агенты рано или поздно оказываются в достаточной близости для того, чтобы связь была активирована. На примере хаотических аттракторов Рёссlera и Лоренца демонстрируется возможность организации последовательного и параллельного движения агентов на основе эффекта хаотической фазовой синхронизации.

1. Модель ансамбля

В качестве мобильного агента рассмотрим материальную точку, движущуюся в трехмерном пространстве (x, y, z) так, что ее траектория полностью совпадает с траекторией поставленного ей в соответствие осциллятора. Обобщенный вид, описывающий поведение ансамбля взаимодействующих частиц, следующий:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_x + d_x [\sum_{j=1}^N (x_j - x_i)], \\ \dot{y}_i = f_y + d_y [\sum_{j=1}^N (y_j - y_i)], \\ \dot{z}_i = f_z + d_z [\sum_{j=1}^N (z_j - z_i)]. \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

В отсутствие связей ($d_x = d_y = d_z = 0$) динамика отдельного агента может быть как регулярной, так и хаотической. В общем случае все агенты неидентичные.

Связь между i -м и j -м агентами включается только при их достаточной близости: тогда, когда агенты оказываются внутри цилиндра радиуса R :

$$d_k = \begin{cases} d', & (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 < R^2, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2)$$

где $k = \{x, y, z\}$, $d' = \text{const}$ — параметр, определяющий силу связи. Введённую таким образом связь при положительном d' назовём притягивающей, а при отрицательном d' — отталкивающей. Условие на область взаимодействия агентов может отличаться от условия (2). Это может быть не цилиндр, а, например, сфера, куб, полоса и т. д. Суть в том, что в силу хаотичности аттрактора и довольно большой области в фазовом пространстве, в которой могут оказаться траектории, попадание в область взаимодействия происходит с высокой (при определенных условиях на радиус r при условии (2) со стопроцентной) вероятностью. Связь между элементами во времени может быть организована тремя способами:

- после попадания траекторий в цилиндр связь между осцилляторами не отключается;
- связь может быть отключена после того, как какой-то из осцилляторов покинул цилиндр;
- связь может действовать только определенное время.

Если не оговорено специально, в работе рассматривается первый вариант.

Целью работы является исследование коллективной динамики ансамблей взаимодействующих агентов, двигающихся по хаотическим траекториям. При когерентной динамике в ансамблях возникает режим хаотической фазовой синхронизации. Для режима хаотической фазовой

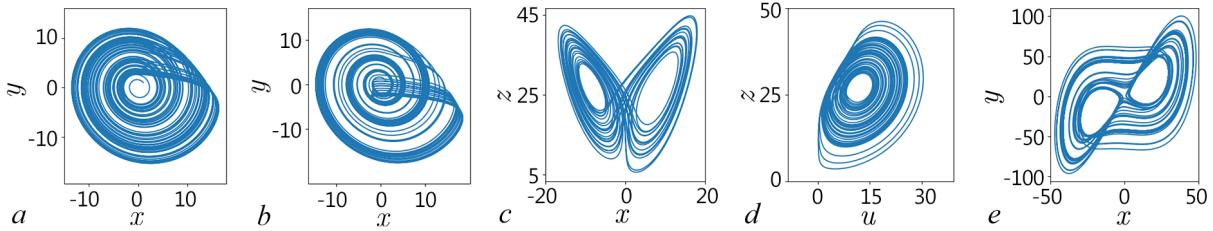


Рис. 1. Проекции хаотических аттракторов. *a* — Проекция на плоскость (x, y) аттрактора Рёсслера (система (5), $\omega = 1$) в фазо-когерентном режиме ($a = 0.16, b = 0.1, c = 8.5$); *b* — проекция на плоскость (x, y) аттрактора Рёсслера в режиме воронка ($a = 0.22, b = 0.1, c = 8.5$); *c* — проекция на плоскость (x, z) классического аттрактора Лоренца (система (12) при $d_y = 0$) ($\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$); *d* — проекция классического аттрактора Лоренца на плоскость $(u = \sqrt{x^2 + y^2}, z)$; *e* — проекция на плоскость (x, y) аттрактора Лоренца, возникающего через перемежаемость $\sigma = 10, b = 8/3, r = 166.1$

Fig. 1. Projections of chaotic attractors. *a* — projection onto the (x, y) plane of the Rössler attractor (system (5), $\omega = 1$) in the phase-coherent regime ($a = 0.16, b = 0.1, c = 8.5$); *b* — projection onto the (x, y) plane of the Rössler attractor in the funnel regime ($a = 0.22, b = 0.1, c = 8.5$); *c* — projection onto the (x, z) plane of the classical Lorenz attractor (system (12) with $d_y = 0$) ($\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$); *d* — projection of the classical Lorenz attractor onto the plane $(u = \sqrt{x^2 + y^2}, z)$; *e* — projection onto the plane (x, y) of the Lorenz attractor arising through intermittency $\sigma = 10, b = 8/3, r = 166.1$

синхронизации двух осцилляторов имеет место выполнение двух условий: совпадение средних частот:

$$\Omega_i = \langle v_i \rangle = \Omega_j = \langle v_j \rangle \quad (3)$$

и наличие ограниченной разности фаз:

$$\text{const}_1 \leq |\phi_i(t) - \phi_j(t)| \leq \text{const}_2. \quad (4)$$

В ансамблях синхронизация бывает как глобальной, так и кластерной. В первом случае все агенты двигаются по близким траекториям с некоторым интервалом между друг другом. Это обеспечивается наличием фазового сдвига $\phi_i(t) - \phi_j(t)$. Во втором случае ансамбли разбиваются на отдельные группы синхронно двигающихся агентов.

В качестве осцилляторов, по траекториям которых двигаются агенты, рассматриваются система Рёсслера и система Лоренца. Напомним, что в системе Рёсслера хаотические колебания возникают в результате каскада бифуркаций удвоения периода предельных циклов. В зависимости от параметров системы хаотический аттрактор бывает фазо-когерентным (phase-coherent) (рис. 1, *a*) или аттрактором-воронкой (funnel) (рис. 1, *b*). В системе Лоренца мы рассматриваем классический аттрактор Лоренца (рис. 1, *c*, *d*) и хаотический аттрактор, возникающий через перемежаемость (рис. 1, *e*).

2. Синхронизация аттракторов Рёсслера

Пусть движение агента происходит по хаотической траектории системы Рёсслера [17]:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -w_i y_i - z_i, \\ \dot{y}_i = w_i x_i + a y_i, \quad i = \overline{1, N}, \\ \dot{z}_i = b + z_i(x_i - c_i), \end{cases} \quad (5)$$

где a, b, c — положительные параметры. В последующих экспериментах примем $a = 0.16$ для фазо-когерентного аттрактора, $a = 0.22$ и $a = 0.28$ для аттрактора-воронки, $b = 0.1$. Параметр w_i , выбираемый случайно из интервала $[0.93; 1.07]$, характеризует временные масштабы осцилляций.

Параметр c_i , как будет показано далее, влияет на среднюю амплитуду осциллятора. В нашем исследовании примем $d' = 0.3$, $R = 4$. Значение параметра связи d' взято таким, что все взаимодействующие хаотические осцилляторы синхронизируются по фазе без введения параметра близости траекторий R [12, 18].

Параметры системы выбраны так, чтобы при достаточно близких к нулю начальных условиях (в настоящей работе рассматривался куб с длиной ребра 10 с центром в начале координат) фазовые траектории не уходили на бесконечность, а притягивались к хаотическому квазиатрактору (см, например, [19]). Формально моделирование и указанный бифуркационный сценарий дают только хаотическое множество.

Введём фазу следующим образом:

$$\phi = \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}}. \quad (6)$$

Тогда формула для вычисления средней частоты примет вид

$$\Omega = \left\langle \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right\rangle. \quad (7)$$

Формула для вычисления средней амплитуды в проекции фазовой траектории на плоскость (x, y) следующая:

$$A = \left\langle (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right\rangle. \quad (8)$$

Для подбора типа связи между агентами с целью получения заданного типа их движения было проанализировано влияние параметров a и c на амплитуду и среднюю частоту хаотических

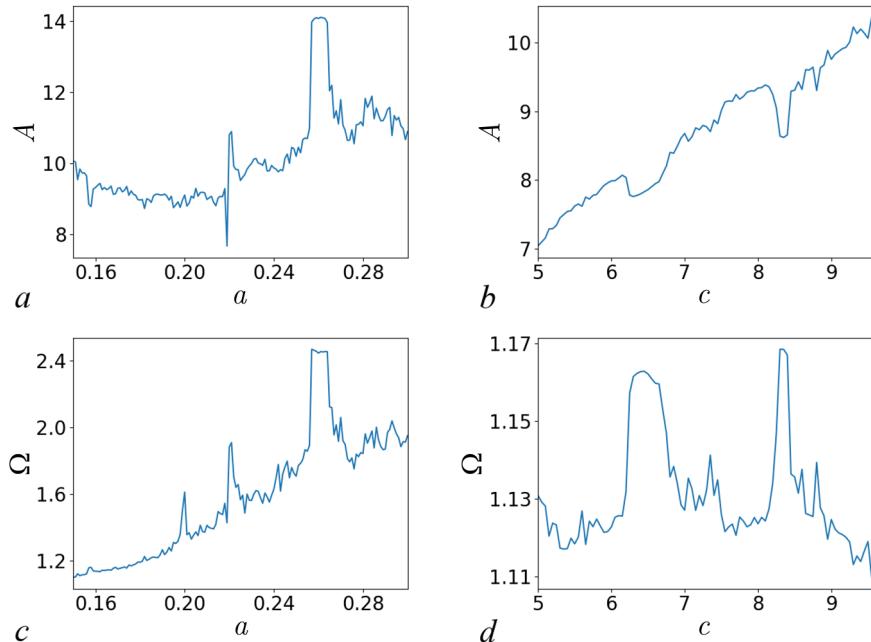


Рис. 2. Средние амплитуды и частоты аттрактора Рёсслера. *a* и *c* – Зависимости средней амплитуды и средней частоты ω от параметра a (при параметре $c = 8.5$). *b* и *d* – Зависимость средней амплитуды и средней частоты от параметра c , аттрактор в фазо-когерентном режиме ($a = 0.16$). Имеют место окна периодического поведения фазовых траекторий

Fig. 2. Average amplitudes and frequencies of the Rössler attractor. *a* and *c* are the dependences of the average amplitude and average frequency ω on the parameter a (with the parameter $c = 8.5$). *b* and *d* are the dependences of the average amplitude and average frequency on the parameter c , the attractor is in the phase-coherent regime ($a = 0.16$). There are windows of periodic behavior of the phase trajectories

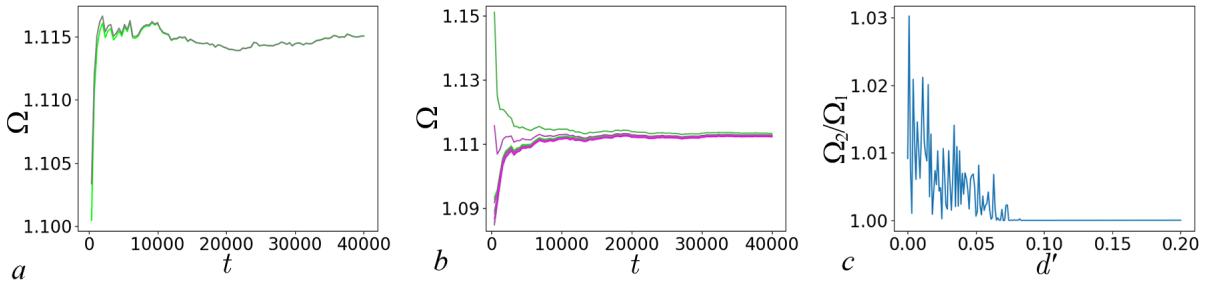


Рис. 3. Эволюция средних частот во времени: *a* – для $N = 2$ элементов при $c_1 = 8.5, c_2 = 8.501$ и *b* – для $N = 10$ элементов при $c_1 = 8.5, c_2 = 8.501, \dots, c_{10} = 8.509$ при различных начальных условиях, $d' = 0.3$. *c* – Отношение средних частот Ω_2/Ω_1 от силы связей для $N = 2$. Средние частоты становятся одинаковыми уже при $d' \approx 0.08$, что является минимальным необходимым значением силы связи для появления хаотической фазовой синхронизации. $c_1 = 8.5, c_2 = 8.501, a = 0.16$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Time evolution of average frequencies for *a* – $N = 2$ elements at $c_1 = 8.5, c_2 = 8.501$ and *b* – for $N = 10$ elements at $c_1 = 8.5, c_2 = 8.501, \dots, c_{10} = 8.509$ under different initial conditions, $d' \approx 0.08$. *c* is the ratio of average frequencies Ω_2/Ω_1 on the coupling strength for $N = 2$. The average frequencies become the same already at $d' \approx 0.08$, which is the minimum required coupling strength for the appearance of chaotic phase synchronization. $c_1 = 8.5, c_2 = 8.501, a = 0.16$ (color online)

осцилляций системы (5) (рис. 2). Из рис. 2, *a* можно сделать лишь вывод, что в случае аттрактора-воронки при увеличении параметра a растет и значение средней амплитуды.

На рис. 2, *b* можно заметить, что по мере увеличения параметра c средняя амплитуда осциллятора также возрастает. При наличии малой неоднородности по c выполняется совпадение средних частот для двух и более элементов (условие (3)), что продемонстрировано на рис. 3 *a*, *b* при достаточной силе связи (рис. 3, *c*).

Из рис. 2, *c* видно, что с ростом параметра a средняя частота осцилляций в системе Рёсслера растет. Следовательно, растёт скорость движения агента. В случае ансамбля связанных агентов увеличение скорости их движения при значениях параметра a (в экспериментах с ансамблем рассматривались значения $a = 0.22$ и $a = 0.28$), при которых реализуется аттрактор-воронка, приводит к существенному уменьшению времени переходного процесса к синхронному режиму по сравнению со случаем фазо-когерентного аттрактора ($a = 0.16$). Это нашло подтверждение в экспериментах, описываемых далее.

Рис. 2, *d* демонстрирует слабую зависимость средней частоты Ω от параметра c .

2.1. Два связанных элемента. Перед тем как продемонстрировать возможность управления поведением роя мобильных агентов, рассмотрим синхронизацию двух связанных неодинаковых по частотам $\omega_{1,2}$ и по величинам параметра $c_{1,2}$ элементов:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -w_1 y_1 - z_1 + d_x(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 = w_1 x_1 + a y_1 + d_y(y_2 - y_1), \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c_1) + d_z(z_2 - z_1), \\ \dot{x}_2 = -w_2 y_2 - z_2 + d_x(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = w_2 x_2 + a y_2 + d_y(y_1 - y_2), \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c_2) + d_z(z_1 - z_2). \end{cases} \quad (9)$$

2.1.1. Последовательное движение. Последовательным движением двух агентов назовем такое движение, которое в каждый промежуток времени удовлетворяет следующим двум условиям:

- малая разность средних амплитуд:

$$|A_2 - A_1| < \varepsilon; \quad (10)$$

- ненулевая, ограниченная по модулю разность фаз:

$$0 < \text{const}_1 \leq |\phi_2 - \phi_1| \leq \text{const}_2. \quad (11)$$

Для получения последовательного движения добавим в систему из двух элементов связи по переменной y ($d_x = d_z = 0$) и фазовую расстройку между агентами $w_{1,2} \in [0.93, 1.07]$. Начальные условия мобильных агентов различные и случайные в пределах аттрактора. С течением времени в силу хаотичности изображающиеся точки рано или поздно окажутся на расстоянии меньше r , и при достаточно большом значении силы связи (d') достигается синхронизация, при которой агенты движутся последовательно — друг за другом.

При последовательном варианте следования мобильных агентов временной интервал повторяемости движения может регулироваться с помощью изменения коэффициента связи. При его определенных значениях можно добиться получения такого временного интервала, когда фазовые переменные практически совпадают ($x_1(t) = x_2(t + \tau), \dots$). Этот эффект известен как lag-синхронизация (синхронизация с запаздыванием). При этом временной сдвиг (τ) между состояниями взаимодействующих систем уменьшается в соответствии с гиперболическим законом [20, 21].

Результат численных экспериментов представлен на рис. 4, a. Изображающие точки практически всегда двигаются по одинаковым траекториям, но с ограниченным расстоянием между ними.

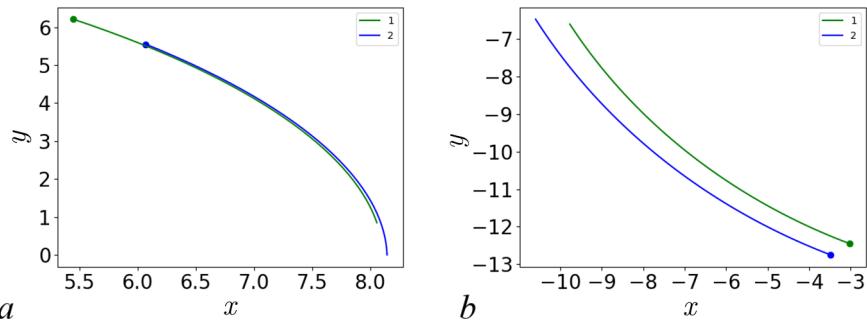


Рис. 4. Фрагмент фазовых портретов двух связанных осцилляторов Рёсслер. a — Последовательное движение мобильных агентов, $c_1 = c_2 = 8.5$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.94$. b — Параллельное движение мобильных агентов, $c_1 = 8.5$, $c_2 = 9$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$, $d' = 0.3$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Fragment of phase portraits of two coupled Rössler oscillators. a — sequential motion of mobile agents, $c_1 = c_2 = 8.5$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.94$. b — parallel motion of mobile agents, $c_1 = 8.5$, $c_2 = 9$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$, $d' = 0.3$ (color online)

2.1.2. Параллельное движение. Параллельным назовем движение двух агентов, удовлетворяющее следующим условиям:

- ограниченная по модулю разность средних амплитуд:

$$\text{const}_1 \leq |A_2 - A_1| \leq \text{const}_2; \quad (12)$$

- малая разность фаз:

$$|\phi_2 - \phi_1| < \varepsilon. \quad (13)$$

Для достижения параллельного движения вместо фазовой расстройки добавим амплитудную расстройку $c_1 = 8.5, c_2 = 8.51$, связь по переменной y ($d_x = d_z = 0$). За счёт разницы в средних амплитудах при достаточной силе связи агенты начинают двигаться с близкими фазами, но разными амплитудами, то есть достигается параллельное движение. Поведение агентов при данной связи проиллюстрировано на рис. 4, *b*.

2.2. Ансамбль из N элементов. В данном разделе мы рассмотрим ансамбль из N мобильных агентов — аттракторов Рёссlerа, описываемых следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -w_i y_i - z_i + d_x \left[\sum_{j=1}^N (x_j - x_i) \right], \\ \dot{y}_i = w_i x_i + a y_i + d_y \left[\sum_{j=1}^N (y_j - y_i) \right], \quad i = \overline{1, N}, \\ \dot{z}_i = b + z_i (x_i - c_i) + d_z \left[\sum_{j=1}^N (z_j - z_i) \right]. \end{cases} \quad (14)$$

2.2.1. Последовательное движение. Рассмотрим коллективное поведение ансамбля из 10 мобильных агентов, движение которых подчиняется хаотической траектории системы Рёссlerа — фазо-когерентному аттрактору. Пусть системы Рёссlerа связаны только по переменной y во втором уравнении системы (1), для этого d_y задаётся выражением (2), $d_x = 0, d_z = 0$.

Первые работы по хаотической фазовой синхронизации связанных систем Рёссlerа были посвящены анализу систем связанных по переменной y . Было обнаружено, что пара [12] и цепочка [22] связанных неидентичных систем Рёссlerа в хаотическом режиме переходят в синхронный режим при достижении некоторого критического значения параметра связи. В нашем случае связь между элементами включается только тогда, когда фазовые траектории какой-либо пары осцилляторов попадают внутрь цилиндра (2). Так как связь выбрана достаточно большой, то осцилляторы синхронизируются. У них имеет место совпадение средних частот, малая разность амплитуд (10) и ограниченность фазовой расстройки (11). При этом соответствующие мобильные агенты двигаются по близким траекториям на некотором расстоянии друг от друга (рис. 5, *a*) (см. также [23]).

2.2.2. Параллельное движение. Для организации параллельного движения ансамбля из N мобильных агентов, траектории которых подчиняются системе Рёссlerа, используем амплитудную расстройку при отсутствии фазовой расстройки, аналогично случаю для двух элементов.

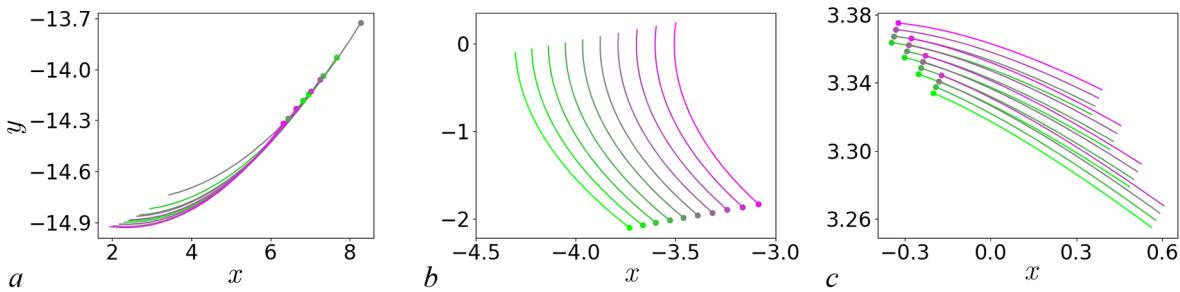


Рис. 5. Синхронизация ансамбля мобильных агентов, связь по переменной y . *a* — Последовательное движение агентов (друг за другом), $w_i \in [0.93, 1.07]$, $c_i = 8.5$; *b* — параллельное движение агентов (единым фронтом), $c_1 = 8.5, c_2 = 8.6, c_3 = 8.7, \dots, c_{10} = 9.4$. $N = 10, d' = 0.3$. *c* — Движение в виде структуры «квадрат» 4×4 элемента ($N = 16$), $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \exists! (w_i, c_i) \in \Omega \times C$ при $\Omega = [0.9, 0.95, 1.0, 1.05]$, $C = [8.5, 8.51, 8.52, 8.53]$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Synchronization of an ensemble of mobile agents, communication by variable y . *a* — Sequential movement of agents (one after another) $w_i \in [0.93, 1.07]$, $c_i = 8.5$; *b* — parallel movement of agents (as a united front), $c_1 = 8.5, c_2 = 8.6, c_3 = 8.7, \dots, c_{10} = 9.4$. $N = 10, d' = 0.3$. *c* — Movement in the form of a «square» structure of 4×4 elements ($N = 16$), $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \exists! (w_i, c_i) \in \Omega \times C$ при $\Omega = [0.9, 0.95, 1.0, 1.05]$, $C = [8.5, 8.51, 8.52, 8.53]$ (color online)

При достаточной силе связи между элементами и достаточном времени эксперимента выполняется совпадение средних частот (см. рис. 3, b), ансамбль агентов движется с близкими фазами, но с разными амплитудами (см. рис. 5).

2.2.3. Приданне рою структуры различных геометрических форм. Для формирования сложных топологических конфигураций роя агентов, таких как квадрат, прямоугольник, треугольник и др., воспользуемся комбинацией частотной и амплитудной расстроек. Далее, не теряя общности, рассмотрим конфигурацию типа «квадрат» при $N = 16$ (структура 4×4 элемента). В качестве значений параметров ω_i, c_i для мобильных агентов выберем все уникальные комбинации наборов

$$\omega = [0.9, 0.95, 1.0, 1.05],$$

$$c = [8.5, 8.501, 8.502, 8.503],$$

то есть

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \exists! (w_i, c_i) \in \omega \times c.$$

При наличии достаточной силы связи одиночные агенты, в силу хаотичности аттрактора, начинают формировать группы последовательно и параллельно двигающихся агентов. Со временем произойдет объединение кластеров в виде структуры, приведенной на рис. 5 c. Нами были также проведены успешные эксперименты по управлению ансамблями мобильных агентов, движения которых подчиняются хаотическим траекториям гиперхаотической системы Рёсслера. В качестве координат положения агентов в трехмерном реальном пространстве можно использовать набор из трех любых фазовых переменных четырехмерной системы Рёсслера.

2.2.4. Влияние параметров системы на скорость синхронизации роя. В задачах достижения синхронного режима важную роль играет длительность переходного процесса к этому режиму. Для десяти связанных систем Рёсслера проанализируем влияние двух параметров: параметра a , характеризующего степень когерентности хаотического аттрактора, и параметра τ , который влияет на скорость изменения фазовых переменных.

Рассматриваемая система (5) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \tau \cdot (-w_i y_i - z_i), \\ \dot{y}_i = \tau \cdot \left(w_i x_i + a_i y_i + d_y \cdot \left[\sum_{j=1}^N (y_j - y_i) \right] \right), \\ \dot{z}_i = \tau \cdot (b_i + z_i(x_i - c_i)), \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, \quad (15)$$

где τ — множитель фазовой скорости фазовых переменных.

Для определения момента синхронизации и замера времени воспользуемся условиями (3), (4) и формулами (6), (7). Рассмотрим различные режимы системы Рёсслера: фазо-когерентный ($a = 0.16$), аттрактор-воронка ($a = 0.22, a = 0.28$); $\tau \in \{0.1, 0.5, 1, 2, 5\}$. Для каждой пары (a, τ) проведем 1000 экспериментов при различных случайных начальных условиях, в каждом эксперименте замерим время синхронизации (время интегрирования $t_{\text{int}} = 500$, если синхронизация за это время не достигается, добавляем его в последний столбец гистограммы) и по результатам построим гистограмму. Соберем гистограммы в следующую таблицу (рис. 6).

По результатам, приведенным на рис. 6, можно сделать следующие выводы:

- Очевидно, что увеличение параметра τ приводит к увеличению скорости синхронизации роя.
- В случае фазо-когерентного аттрактора ($a = 0.16$) синхронизация происходит в среднем значительно медленнее, чем для аттрактора-воронки ($a = 0.22$ и $a = 0.28$). На рис. 2, с представлена зависимость средней частоты Ω хаотических осцилляций в зависимости от параметра a , характеризующего степень когерентности осцилляций. Видно, что с ростом некогерентности (с ростом a) имеет место существенное увеличение средней частоты Ω .

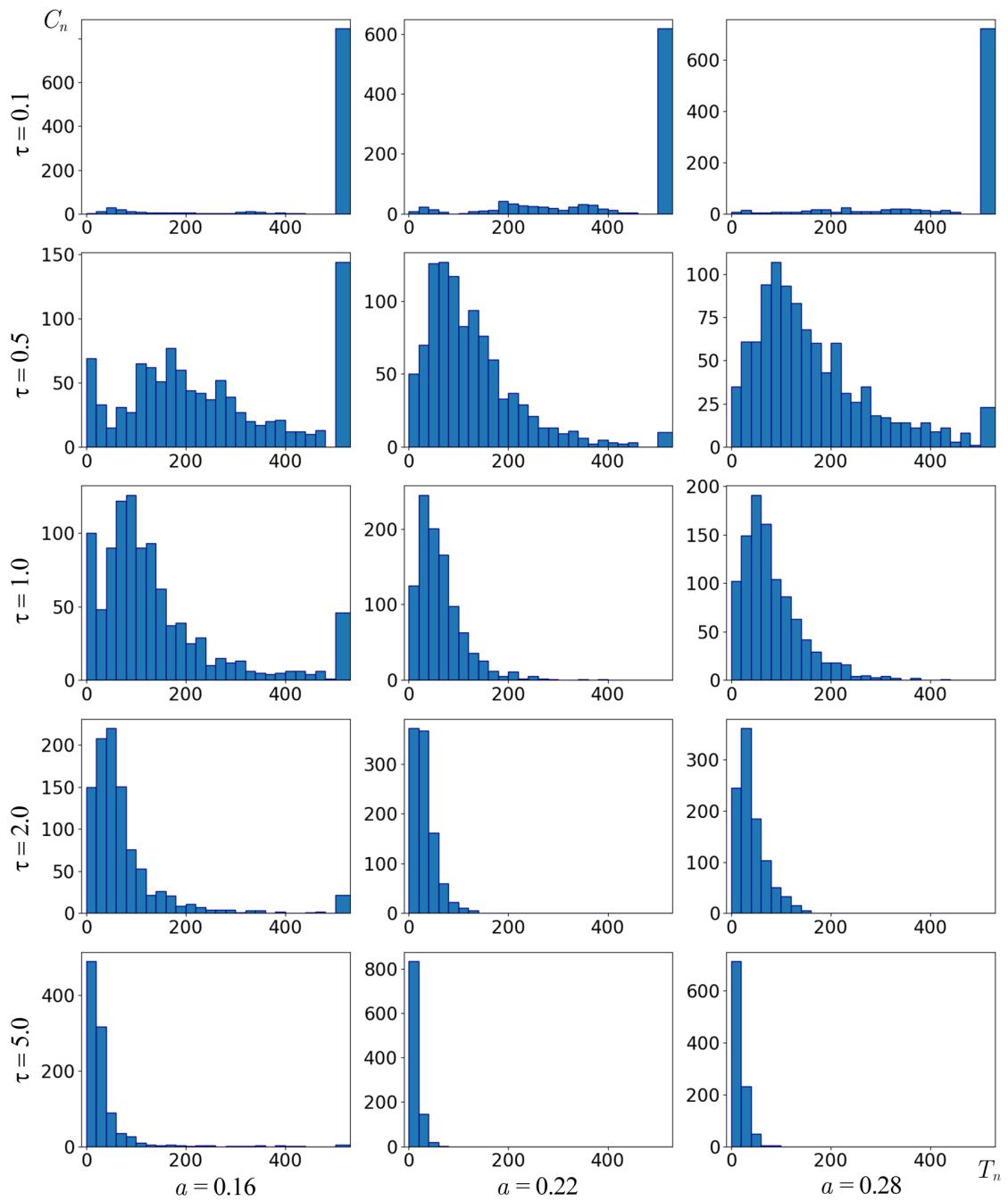


Рис. 6. Синхронизация аттракторов Рёсслера ($N = 10$). Гистограммы зависимости скорости синхронизации (T_n – время синхронизаций, C_n – число синхронизаций) для $n = 1000$ экспериментов при различных a (столбцы) и τ (строки). Во всех экспериментах $c_i = 8.5$, $d' = 0.3$, $w_i \in [0.93, 1.07]$. Начальные условия во всех экспериментах случайные

Fig. 6. Synchronization of Rössler attractors ($N = 10$). Histograms of the synchronization rate (T_n – synchronization time, C_n – number of synchronizations) for $n = 1000$ experiments with different a (columns) and τ (rows). In all experiments $c_i = 8.5$, $d' = 0.3$, $w_i \in [0.93, 1.07]$. The initial conditions in all experiments are random

Это сказывается на скорости переходных процессов к синхронному режиму. И таким образом, длительность переходных процессов в ансамблях связанных систем Ресслера с фазо-некогерентным аттрактором значительно меньше по сравнению со случаем тех же систем с фазо-когерентным аттрактором.

3. Синхронизация аттракторов Лоренца

Используя связи, описанные выше, попробуем применить те же подходы для синхронизации другого хаотического аттрактора — хаотического аттрактора Лоренца. Динамическая система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sigma(y_i - x_i) \\ \dot{y}_i = r_i x_i - y_i - x_i z_i + d_y \cdot [\sum_{j=1}^N (y_j - y_i)], \\ \dot{z}_i = -b z_i + x_i y_i, \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, \quad (16)$$

где $b = 8/3$, $\sigma = 10$, значения параметра r_i будут определяться типом аттрактора Лоренца. Величина параметра связи d_y определяется согласно условию (2).

Рассмотрим аттракторы Лоренца двух видов:

- Классический аттрактор Лоренца. Для системы из пяти элементов возьмем $r_i \in [28; 28.1]$. Для определения фазы воспользуемся следующей формулой:

$$\phi = \arctan \frac{z - z_0}{u - u_0}, \quad (17)$$

где $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $u_0 = 12$ и $z_0 = 27$.

- Аттрактор Лоренца, возникающий через перемежаемость (intermittent). В этом случае r_i равномерно случайно распределены в интервале $[166.1; 166.2]$

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (18)$$

где $[t_n; t_{n+1}]$ — цикл, состоящий из одной ламинарной и одной турбулентной стадий под номером n . Подробнее этот подход описан в [24].

Результаты численного моделирования процесса синхронизации для систем Лоренца, демонстрирующие оба типа синхронного по фазе хаотического поведения, представлены на рис. 7. В обоих случаях с течением времени, как и для связанных осцилляторов Рёсслера, сначала наступает кластерная синхронизация, а затем глобальная. Связь подобрана таким образом, что имеет место последовательное движение мобильных агентов. Следует отметить, что переход к режиму глобальной синхронизации происходит в течение короткого времени. В данной постановке реализован режим последовательного движения мобильных агентов.

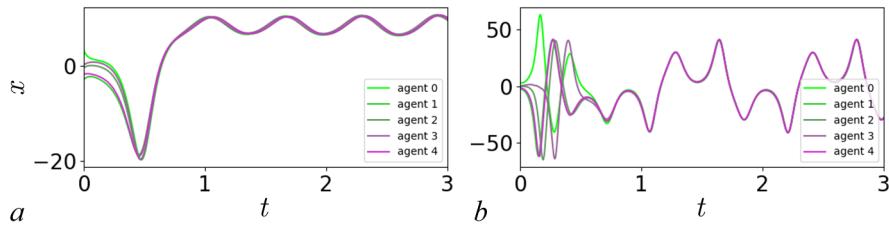


Рис. 7. Синхронизация пяти систем Лоренца. *a* — Синхронизация в случае существования классического аттрактора ($r_i = [166.1, 166.11, 166.12, 166.13, 166.14]$), *b* — синхронизация в случае аттрактора, возникшего через перемежаемость ($r = [28, 28.05, 28.10, 28.15, 28.20]$). Начальные условия для каждого агента генерировались случайно, $x \in [-5; 5]$, $y \in [-5; 5]$, $z \in [-1; 1]$. $d' = 0.2$, радиус связи $r = 10$ (цвет онлайн)

Fig. 7. Synchronization of five Lorenz systems. *a* — Synchronization in the case of the classical attractor ($r_i = [166.1, 166.11, 166.12, 166.13, 166.14]$), *b* — synchronization in the case of the attractor that emerged through intermittency ($r = [28, 28.05, 28.10, 28.15, 28.20]$). The initial conditions for each agent were generated randomly, $x \in [-5; 5]$, $y \in [-5; 5]$, $z \in [-1; 1]$. $d' = 0.2$, the communication radius $r = 10$ (color online)

4. Десинхронизация роя. Осцилляторная смерть

Если связь между элементами не очень мала, то взаимодействие неидентичного набора элементов может приводить не только к синхронизации, но и к явлению под название *осцилляторная смерть* (или *подавление колебаний*), при котором колебания полностью подавляются, и система переходит в состояние статического равновесия. Этот эффект возникает при сильной фазовой расстройке и определённых параметрах связи, когда взаимодействие между осцилляторами не синхронизирует, а взаимно гасит их колебания. Явление может быть продемонстрировано для системы (5). Для этого перепишем систему со связью только по переменной y следующим образом:

$$\dot{y}_i = w_i x_i + (a - N d_y) y_i + d_y \sum_{j=1}^N y_j. \quad (19)$$

Данная форма позволяет интерпретировать влияние связи как эффект демпфирования. При существенной частотной расстройке сила воздействия других агентов становится нерезонансной и не компенсирует возросшие диссипативные потери. Как следствие, при выполнении условия $N d > a$ (в случае синхронизации всех агентов) осциллятор может потерять способность к самовозбуждению, и колебания затухают, что является одним из способов десинхронизации роя, в результате которой все или часть агентов приходят в состояние равновесия $(0, 0)$. Ниже представлены временные реализации для осцилляторной смерти при $N = 10$ (рис. 8).

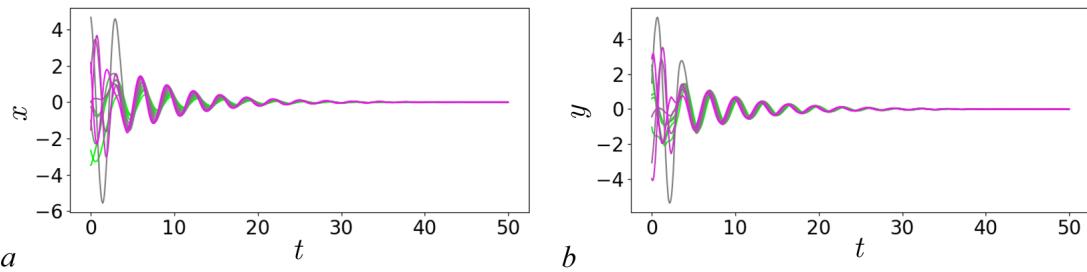


Рис. 8. Осцилляторная смерть для $N = 10$ связанных аттракторов Рёсслера. Временные реализации $x(t)$ (a) и $y(t)$ (b). За довольно короткое время все агенты приходят в состояние равновесия $(0, 0)$ и остаются в нём. $d' = 0.3$, $w_1 = 1.0$, $w_2 = 1.2, \dots, w_{10} = 2.8$ (цвет онлайн)

Fig. 8. Oscillatory death for the $N = 10$ connected Rössler attractor. Time realizations $x(t)$ (a) and $y(t)$ (b). In a relatively short time, all agents reach the equilibrium state $(0, 0)$ and remain there. $d' = 0.3$, $w_1 = 1.0, w_2 = 1.2, \dots, w_{10} = 2.8$ (color online)

5. Анализ влияния нарушения межэлементных связей

В данном разделе мы рассматриваем результаты по надёжности существования заданных геометрических структур ансамблей агентов. То есть определяются зависимости структурной устойчивости ансамбля при удалении из него части агентов. Рассмотрим два способа выбивания агентов из структуры.

1. *Выбивание элементов из центра роя.* Путём численных экспериментов было обнаружено, что при любой структуре роя существует критическое значение числа удалённых агентов, при котором структура разбивается на несколько кластеров. В результате экспериментов на структуре 10×10 при удалении 12 элементов уже наступает разделение структуры на два кластера (табл. 1). Интересно отметить, что при определённых условиях появляются уединённые агенты, которые за все время наблюдения не примыкают ни к одному из кластеров.

Таблица 1. Зависимость числа устойчивых кластеров от числа удалённых элементов из ансамбля, имеющего структуру квадрата 10×10 элементов. Все элементы удалялись из центра структуры

Table. 1. The number of stable clusters as a function of the number of elements removed from an ensemble with a 10×10 square structure. All elements were removed from the center of the structure

Кол-во удалённых элементов	4	8	12	16	24	32	36	44	52	60	64
Кол-во сохранившихся кластеров	1	1	2	2	2	3	3	2	2 и 2 уединённых	3 и 1 уединённый	4

Таблица 2. Зависимость числа устойчивых кластеров от числа удалённых элементов из ансамбля, имеющего структуру квадрата 10×10 элементов. Элементы удалялись случайно

Table. 2. Dependence of the number of stable clusters on the number of elements removed from an ensemble with a 10×10 square structure. Elements were removed randomly

Кол-во удалённых элементов	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Кол-во сохранившихся кластеров	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2

2. *Выбивание случайных элементов.* В данном эксперименте элементы удаляются из случайных позиций. Теперь количество объединённых групп агентов зависит не только от числа удалённых элементов, но и от их позиций. Структура связей организована таким образом, что при удалении целой строки агентов глобальная связь ансамбля теряется, и рой разобъётся как минимум на две части — до и после удалённой строки. Результаты представлены в табл. 2.

Согласно введённым связям, в результате выбивания случайных элементов число рядов остаётся неизменным, но внутри каждого ряда агенты смыкаются, занимая пространство удалённых элементов.

Результаты

В результате исследования синхронизации и десинхронизации роя мобильных агентов получено следующее:

- На примере ансамблей взаимодействующих мобильных агентов, траектории движения которых подчиняются системам Рёссlera и Лоренца в хаотических режимах, было рассмотрено влияние различных видов неоднородностей на коллективную динамику при наличии межэлементных связей, в частности, на возникновение синхронных и асинхронных режимов. Была продемонстрирована возможность организации последовательного (друг за другом по цепочке) и параллельного (единым фронтом) движения агентов и организации различных топологических конфигураций роя агентов при определенном выборе структуры неоднородности между элементами. Во всех случаях интервал между агентами может быть изменен в заданную сторону при уменьшении или увеличении силы связи.
- Было показано, что длительность переходных процессов к синхронному режиму в ансамблях мобильных агентов, движущихся по траекториям системы Рёссlera в режиме аттрактора-воронки, существенно меньше по сравнению со случаем фазо-когерентного аттрактора.
- Для случая хаотических аттракторов Рёссlera были предложены и успешно протестированы четыре способа десинхронизации роя: а) при введении дополнительной связи по переменной z (связь по переменной z имеет отталкивающий характер), б) при уменьшении межэлементной связи, в) при уменьшении радиуса действия связи и г) при высокой фазовой расстройке и достаточной силе связи.
- Протестирована устойчивость топологических конфигураций роя агентов при удалении агентов двумя различными способами: а) из центра роя и б) случайным образом.

Список литературы

1. *Liu Y., Bi M., Yuan T., Song J.* Event-triggered consensus tracking for multiple agents with nonlinear dynamics // In: 2018 33rd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (YAC). 2018, Nanjing, China. P. 1055–1060. DOI: 10.1109/YAC.2018.8406527.
2. *Fujiwara N., Kurths J., Diaz-Guilera A.* Synchronization in networks of mobile oscillators // *Phys. Rev. E*. 2011. Vol. 83. P. 025101. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.025101.
3. *Gómez-Gardeñes J., Nicosia V., Sinatra R., Latora V.* Motion-induced synchronization in metapopulations of mobile agents // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 87. P. 032814. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.032814.
4. *Perez-Diaz F., Zillmer R., Groß R.* Control of synchronization regimes in networks of mobile interacting agents // *Phys. Rev. Appl.* 2017. Vol. 7, no. 5. P. 054002. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.7.054002.
5. *Wang J., Xu C., Feng J., Chen M.Z., Wang X., Zhao Y.* Synchronization in moving pulse-coupled oscillator networks // *IEEE Trans. Circuits Syst. I*. 2015. Vol. 62, no. 10. P. 2544–2553. DOI: 10.1109/TCSI.2015.2477576.
6. *Urib K., Ares S., Oates A. C., Morelli L. G.* Dynamics of mobile coupled phase oscillators // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 87. P. 032911. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.032911.
7. *Mirollo R. E., Strogatz S. H.* Synchronization of pulse-coupled biological oscillators // *SIAM J. Appl. Math.* 1990. Vol. 50. P. 1645–1662. DOI: 10.1137/0150098.
8. *Prignano L., Sagorra O., Diaz-Guilera A.* Tuning synchronization of integrate-and-fire oscillators through mobility // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110. P. 114101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.114101.
9. *Janagal L., Parmananda P.* Synchronization in an ensemble of spatially moving oscillators with linear and nonlinear coupling schemes // *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 86. P. 056213. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056213.
10. *Wang L., Chen G.* Synchronization of multi-agent systems with metric-topological interactions // *Chaos*. 2016. Vol. 26, no. 9. P. 094809. DOI: 10.1063/1.4955086.
11. *Sarkar S., Parmananda P.* Synchronization of an ensemble of oscillators regulated by their spatial movement // *Chaos*. 2010. Vol. 20, no. 4. P. 043108. DOI: 10.1063/1.3496399.
12. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996 Vol. 76, no. 11. P. 1804–1807. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.1804.
13. *Perez-Diaz F., Zillmer R., Groß R.* Firefly-inspired synchronization in swarms of mobile agents // In: Proceedings of the 14th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2015). 4–8 May, 2015, Istanbul, Turkey. P. 279–286.
14. *Kim B., Do Y., Lai Y. C.* Emergence and scaling of synchronization in moving-agent networks with restrictive interactions // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 88, no. 4. P. 042818. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042818.
15. *Majhi S., Ghosh D., Kurths J.* Emergence of synchronization in multiplex networks of mobile Rössler oscillators // *Phys. Rev. E*. 2019. Vol. 99. P. 012308. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.012308.
16. *Wang L., Xue P., Kong Z., Wang X.* Locally and globally exponential synchronization of moving agent networks by adaptive control // *Journal of Applied Mathematics*. 2013. Vol. 2013. P. 241930. DOI: 10.1155/2013/241930.
17. *Левин В. А., Осипов Г. В.* Управление движением группы мобильных роботов // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, № 6. С. 42–48.
18. *Osipov G. V., Hu B., Zhou C., Kurts J.* Three types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91, no. 2. P. 024101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.024101.

19. Stankevich N. Stabilization and complex dynamics initiated by pulsed force in the Rössler system near saddle-node bifurcation // *Nonlinear Dyn.* 2024. Vol. 112. P. 2949–2967. DOI: 10.1007/s11071-023-09183-2.
20. Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 4193–4196. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4193.
21. Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е. Новый тип универсальности при хаотической синхронизации динамических систем // *Письма в ЖЭТФ* 2004. Т. 80, № 1. С. 25–28.
22. Osipov G. V., Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurts J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55, no. 3. P. 2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
23. Варварин Е. М., Осипов Г. В. Синхронизация и управление движением ансамбля мобильных агентов // *Письма в ЖТФ* 2024. Т. 50, № 13. С. 39–42. DOI: 10.61011/PJTF.2024.13.58167.19836.
24. Osipov G. V., Kurts J., Zhou C. *Synchronization in Oscillatory Networks*. Berlin: Springer, 2007. 370 p. DOI: 10.1007/978-3-540-71269-5.

References

1. Liu Y, Bi M, Yuan T, Song J. Event-triggered consensus tracking for multiple agents with nonlinear dynamics. In: 2018 33rd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (YAC), Nanjing, China 2018. P. 1055–1060. DOI: 10.1109/YAC.2018.8406527.
2. Fujiwara N, Kurths J, Diaz-Guilera A. Synchronization in networks of mobile oscillators. *Phys. Rev. E*. 2011;83:025101. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.025101.
3. Gómez-Gardeñes J, Nicosia V, Sinatra R, Latora V. Motion-induced synchronization in meta-populations of mobile agents. *Phys. Rev. E*. 2013;87:032814. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.032814.
4. Perez-Diaz F, Zillmer R, Groß R. Control of synchronization regimes in networks of mobile interacting agents. *Phys. Rev. Appl.* 2017;7(5):054002. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.7.054002.
5. Wang J, Xu C, Feng J, Chen MZ, Wang X, Zhao Y. Synchronization in moving pulse-coupled oscillator networks. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*. 2015;62(10):2544–2553. DOI: 10.1109/TCSI.2015.2477576.
6. Uriu K, Ares S, Oates AC, Morelli LG. Dynamics of mobile coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E*. 2013;87:032911. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.032911.
7. Mirollo RE, Strogatz SH. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM J. Appl. Math.* 1990;50:1645–1662. DOI: 10.1137/0150098.
8. Prignano L, Sagarra O, Díaz-Guilera A. Tuning synchronization of integrate-and-fire oscillators through mobility. *Phys. Rev. Lett.* 2013;110:114101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.114101.
9. Janagal L, Parmananda P. Synchronization in an ensemble of spatially moving oscillators with linear and nonlinear coupling schemes. *Phys. Rev. E*. 2012;86:056213. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056213.
10. Wang L, Chen G. Synchronization of multi-agent systems with metric-topological interactions. *Chaos*. 2016;26(9):094809. DOI: 10.1063/1.4955086.
11. Sarkar S, Parmananda P. Synchronization of an ensemble of oscillators regulated by their spatial movement. *Chaos*. 2010;20(4):043108. DOI: 10.1063/1.3496399.
12. Rosenblum MG, Pikovsky AS, Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1996;76(11):1804–1807. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.1804.
13. Perez-Diaz F, Zillmer R, Groß R. Firefly-inspired synchronization in swarms of mobile agents. In: Proceedings of the 14th International Conference on Autonomous Agents and MultiagentSystems (AAMAS 2015). 4–8 May, 2015, Istanbul, Turkey. P. 279–286.
14. Kim B, Do Y, Lai YC. Emergence and scaling of synchronization in moving-agent networks with restrictive interactions. *Phys. Rev. E*. 2013;88(4):042818. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042818.

15. Majhi S, Ghosh D, Kurths J. Emergence of synchronization in multiplex networks of mobile Rössler oscillators. *Phys. Rev. E*. 2019;99:012308. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.012308.
16. Wang L, Xue P, Kong Z, Wang X. Locally and globally exponential synchronization of moving agent networks by adaptive control. *Journal of Applied Mathematics*. 2013;2013:241930. DOI: 10.1155/2013/241930.
17. Levin VA, Osipov GV. Controlling the motion of a group of mobile agents. *Tech. Phys. Lett.* 2016;42(3):298–301. DOI: 10.1134/S1063785016030251.
18. Osipov GV, Hu B, Zhou C, Kurts J. Three types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2003;91(2):024101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.024101.
19. Stankevich N. Stabilization and complex dynamics initiated by pulsed force in the Rössler system near saddle-node bifurcation. *Nonlinear Dyn.* 2024;112:2949–2967. DOI: 10.1007/s11071-023-09183-2.
20. Rosenblum MG, Pikovsky AS, Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1997;78:4193–4196. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4193.
21. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Hramov AE. New universality type in chaotic synchronization of dynamic systems. *JETP Lett.* 2004;80(1):20–22. DOI: 10.1134/1.1800207.
22. Osipov GV, Pikovsky AS, Rosenblum MG, Kurts J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators. *Phys. Rev. E*. 1997;55(3):2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
23. Varvarin EM, Osipov GV. Synchronization and motion control of an ensemble of mobile agents. *Tech. Phys. Lett.* 2024;50(13):39–42 (in Russian). DOI: 10.61011/TPL.2024.07.58724.19836.
24. Osipov GV, Kurts J, Zhou C. *Synchronization in Oscillatory Networks*. Berlin: Springer; 2007. 370 p. DOI: 10.1007/978-3-540-71269-5.



Варварин Евгений Михайлович — лаборант кафедры теории управления и динамики систем, студент второго курса магистратуры по направлению «Прикладная математика и информатика» ИИТММ ННГУ им. Н. И. Лобачевского. Основные научные интересы лежат в области теории колебаний и волн.

Россия, 603022 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23к2
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: varvarin@unn.ru
ORCID: 0009-0002-5516-0020
AuthorID (eLibrary.Ru): 1297427



Осипов Григорий Владимирович — родился в Горьком (1960). Окончил Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (1982). Защитил диссертацию по математическому моделированию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Научном совете по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР (1988, Москва) и доктора физико-математических наук по радиофизике (2004, ННГУ). С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года — в качестве заведующего кафедрой теории управления и динамики систем. Соавтор монографий «Устойчивость. Структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал более 270 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.

Россия, 603022 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23к2
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: grosipov@gmail.com
ORCID: 0000-0003-2841-8399
AuthorID (eLibrary.Ru): 19695



Нестационарное рассеяние упругих волн на сферическом включении

Б. Ш. Усмонов¹, Р. Т. Мухитдинов¹, Н. Р. Элибоев¹✉, Н. Б. Ахмедов²

¹Ташкентский химико-технологический институт, Узбекистан

²Навоийский государственный горно-технологический университет, Узбекистан

E-mail: botir2468@gmail.com, ramazonmuxitdinov@gmail.com,

✉nurali_e@mail.ru, nasriddinaxmedov@gmail.com

Поступила в редакцию 28.07.2025, принята к публикации 27.10.2025,
опубликована онлайн 13.11.2025, опубликована 30.01.2026

Аннотация. Задачи рассеяния упругих волн на различных типах неоднородностей относятся к числу наиболее сложных и актуальных задач динамики деформируемых тел. С прикладной точки зрения это объясняется тем, что информация о динамическом напряжённо-деформированном состоянии в окрестности этих неоднородностей представляет большой интерес для различных инженерных и физических приложений. Целью данной работы является исследование нестационарного рассеяния упругих волн на сферическом включении, расположенному в бесконечном упругом пространстве. **Методы.** Для построения решения используются аналитические методы, включая интегральное преобразование Фурье по времени. **Результаты.** Установлено, что собственные функции исследуемой задачи нельзя рассматривать как векторы в гильбертовом пространстве: они не нормируются из-за экспоненциального роста с расстоянием, что делает необходимым использование обобщённых функций и специальных методов теории рассеяния.

Ключевые слова: сферическая оболочка, заполнитель, колебания, частотное уравнение, коэффициент демпфирования.

Для цитирования: Усмонов Б. Ш., Мухитдинов Р. Т., Элибоев Н. Р., Ахмедов Н. Б. Нестационарное рассеяние упругих волн на сферическом включении // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 84–97. DOI: 10.18500/0869-6632-003200. EDN: MSPDVQ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Nonstationary scattering of elastic waves by a spherical inclusion

B. Sh. Usmonov¹, R. T. Mukhiddinov¹, N. R. Eliboyev¹✉, N. B. Akhmedov²

¹Tashkent Institute of Chemical Technology, Uzbekistan

²Navoi State University of Mining and Technologies, Uzbekistan

E-mail: botir2468@gmail.com, ramazonmuxitdinov@gmail.com,

✉nurali_e@mail.ru, nasriddinaxmedov@gmail.com

Received 28.07.2025, accepted 27.10.2025, available online 13.11.2025, published 30.01.2026

Abstract. Problems of elastic wave scattering by various types of inhomogeneities rank among the most complex and relevant topics in the field of deformable solid dynamics. From an applied perspective, this is due to the fact that information about the dynamic stress-strain state in the vicinity of such inhomogeneities is of significant interest for various engineering and physical applications. The *purpose* of this study is to investigate the nonstationary scattering of elastic waves by a spherical inclusion embedded in an infinite elastic medium. *Methods.* The analytical approach to the solution involves the application of Fourier integral transforms with respect to time. *Results.* It is established that the eigenfunctions of the considered problem cannot be treated as vectors in a Hilbert space, since they are not square-integrable due to their exponential growth with distance. This necessitates the use of generalized functions and specialized methods from scattering theory.

Keywords: spherical shell, wave scattering, wave amplitude, eigenfunctions, eigenfrequencies.

For citation: Usmonov BSh, Mukhiddinov RT, Eliboyev NR, Akhmedov NB. Nonstationary scattering of elastic waves by a spherical inclusion. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1):84–97. DOI: 10.18500/0869-6632-003200

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Рассеивание плоской волны одним сферическим препятствием часто встречается во многих практических задачах геофизики и сейсмологии [1, 2]. В разведочной геофизике сферические объекты обеспечивают хорошее приближение для реальных объектов [3, 4]. Аналитическая формулировка одной сферы может использоваться для построения более сложных решений. В нефтяной промышленности, если нефть захвачена в полостях, разумно допустить, что сейсмическая энергия может быть захвачена резонансом жидкости. Такие резонансы трудно наблюдать из-за контрастов импеданса между породой и жидкостью [5, 6]. Точные решения для задач рассеяния очень актуальны. Хотя аналитические решения существуют для некоторых типов препятствий (сферы, цилиндра или эллипсоида), полученное понимание имеет важное значение [7, 8]. Задачи дифракции упругих волн на неоднородностях тесно связаны с рассеянными волнами, являются частью классических фундаментальных задач динамики деформируемых тел, и их решение требует сложного математического аппарата [9–11]. Для воздействия на механические и тепловые характеристики материалов довольно часто используют добавление наполнителей [12, 13].

Задача о рассеянии волн на сферической неоднородности была поставлена достаточно давно при решении многочисленных научно-технических проблем, связанных, в частности, с дифракцией электромагнитных [14], звуковых [15] и упругих [16] волн. Данная задача рассматривается обычно в стационарной постановке, когда падающая волна представляет собой бесконечную в пространстве и во времени гармоническую волну вида $\exp[i\omega(t - z/c)]$.

При этом возникает ряд трудностей, связанных с тем, что собственные функции исследуемой задачи нельзя рассматривать как векторы в гильбертовом пространстве: они не нормируются из-за экспоненциального роста с расстоянием. Этот факт, известный в общей теории рассеяния [17], вытекает из следующего обстоятельства.

Рассеянная бегущая волна, уходящая на бесконечность, ведет себя как $u \sim r^{-1} \times \exp[i\omega^{(k)}(t - r/c)]$, где $\omega^{(k)} = \omega_R^{(k)} + i\omega_I^{(k)}$ — комплексные собственные частоты системы «включение–среда» [18].

Таким образом, $u \sim r^{-1} \exp[-\omega_I^{(k)}(t - r/c)] \exp[i\omega_R^{(k)}(t - r/c)]$, и амплитуда рассеянной волны в фиксированной точке уменьшается с течением времени из-за радиальных потерь. Пространственное же распределение амплитуд в каждый данный момент времени экспоненциально увеличивается с ростом r , так как бесконечно удалённые части волны были возбуждены в более ранние промежутки времени, когда амплитуда колебаний неоднородности была бесконечно большой.

Естественно, факт бесконечного возрастания собственных функций не имеет реального физического смысла, так как, согласно принципу причинности, при $r > ct$ в точке r никакого сигнала быть не может. Поскольку мы пытаемся реальную ситуацию подменить некоторой другой, связанной с введением в бесконечном пространстве стационарного процесса, приходится неизбежно сталкиваться с «экспоненциальной катастрофой».

Для её устранения необходимо учесть, что колебания не могут существовать на протяжении бесконечно большого промежутка времени, и, следовательно, мы приходим к необходимости постановки и решения задачи о дифракции импульса той или иной формы с выраженным передним фронтом.

1. Методика

1.1. Постановка задачи и методики решения. Пусть на центр рассеяния радиуса R , помещённый в начало сферической системы координат (r, θ, φ) , совмещённой обычным образом с декартовой системой координат (x, y, z) , падает плоская волна смещения. Уравнения движения сферического тела ($k = 2$) и окружающей его среды ($k = 1$) имеют следующий вид:

$$\mu_k \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{U} - (\lambda_k + 2\mu_k) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} + \rho_k \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь λ_k, μ_k — коэффициенты Ламе для окружающей среды ($k = 1$) и сферических тел ($k = 2$), ρ_k — плотности материалов, $\vec{U}_k(u_{rk}, u_{\theta k}, u_{zk})$ — вектор перемещений.

На контакте двух тел при $r = R$ выполняется равенство смещений и напряжений (условие жёсткого контакта):

$$u_{r1} = u_{r2}, \quad u_{\theta 1} = u_{\theta 2}, \quad u_{\varphi 1} = u_{\varphi 2}, \quad \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}, \quad \sigma_{r\theta 1} = \sigma_{r\theta 2}, \quad \sigma_{r\varphi 1} = \sigma_{r\varphi 2}. \quad (2)$$

На бесконечности возмущения должны затухать:

$$\vec{U}_1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty.$$

А также заданы начальные условия:

$$\vec{U}_k|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \vec{U}_k}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Обозначим через c_{pk} и c_{sk} (для $k = 1, 2$) скорости продольных и поперечных волн соответственно. Предположим для определённости, что волна движется в положительном направлении оси $0z$. Тогда вектор смещения

$$\vec{U}_1^{(p)} = \vec{e}_1 U_0 \left(\tau_q - \frac{z}{R} - 1 \right) H \left(\tau_q - \frac{z}{R} - 1 \right), \quad (4)$$

где \vec{e}_1 — единичный вектор, задающий поляризацию волны, $\tau_1 = c_1 e / R$ — безразмерное время, $H(x)$ — ступенчатая функция Хэвисайда.

Для решения поставленной задачи воспользуемся интегральным преобразованием Фурье по времени, которое определим следующими формулами:

$$f_k(x_q) = \int_{-\infty}^{\infty} F_k(\tau_1) \exp(-ix_q\tau_1) d\tau_1, \quad F_k(\tau_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x_q) \exp(ix_q\tau_1) dx_q, \quad (5)$$

где x_q — параметр преобразования, имеющий смысл безразмерной частоты:

$$x_q = \frac{\omega R}{c_{p1}} = k_{q1} R.$$

$k_{11} = \omega/c_{p1}$; ω — частота; $c_{p1} = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}}$ — скорость распространения продольных волн в среде.

Уравнение Ламе (1) после применения преобразования (5) принимает следующий вид:

$$\mu_k \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}_k - (\lambda_k + 2\mu_k) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}_k - \rho_k \omega^2 \vec{u}_k = 0. \quad (6)$$

Применяя преобразование Фурье к падающему импульсу, получим

$$u_1^{(p)} = \vec{e}_1 \exp(-ik_{q1}z) \eta(x_q). \quad (7)$$

Здесь

$$\eta(x_q) = \exp(-ix_q) g(x_q), \quad g(x_q) = \int U_0(T_q) \exp(-ix_q T_q) dT_q, \quad T_q = \tau_q - \frac{z}{R} - 1. \quad (8)$$

Решение уравнений (4) ищется, как известно [7], в виде

$$\vec{u}_k = \frac{1}{k_{pk}} \operatorname{grad} \psi_{0k} + \frac{1}{k_{sk}} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\vec{r} \psi_{1k}) + \operatorname{rot} (\vec{r} \psi_{2k}), \quad (9)$$

причем потенциалы ψ_j удовлетворяют скалярному уравнению Гельмгольца, и решение выражается следующим образом:

$$(\psi_{0k}, \psi_{1k}, \psi_{2k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (A_{mnk}, B_{mnk}, C_{mnk}) b_n(lr) \Phi_n^m(0, \varphi), \quad k = \begin{cases} k_p, & j = 0, \\ k_s, & j = 1, 2. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $\Phi_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi)$, а $b_n(\xi)$ — сферическая функция Бесселя. Для внешней задачи в качестве $b_n(\xi)$ необходимо брать функцию Ханкеля второго рода: $b_n(\xi) = h_n^{(2)}(\xi) \equiv h_n(\xi)$, выделяющую на бесконечности расходящиеся волны. Для внутренней задачи $b_n(\xi) = j_n(\xi)$, которая удовлетворяет условию ограниченности в нуле. Падающую плоскую волну можно разложить по регулярным векторным собственным функциям $\vec{L}_{\sigma mn}^1$, $\vec{M}_{\sigma mn}^1$, $\vec{N}_{\sigma mn}^1$ векторного уравнения Гельмгольца [19]:

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \exp(-ikz) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (-i)^n [M_{c1n}^1 + iN_{c1n}^1], \\ \vec{e}_y \exp(-ikz) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (-i)^n [M_{c1n}^1 - iN_{s1n}^1], \\ \vec{e}_z \exp(-ikz) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n L_{c0n}^1, \end{aligned} \quad (11)$$

где s и c обозначают $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в выражениях для собственных векторов.

Сами векторы $\vec{L}, \vec{M}, \vec{C}$ определяются из условий непрерывности вектора смещений:

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_\varphi \vec{e}_\varphi,$$

а также вектора напряжений:

$$\vec{\sigma}_n = \sigma_{rr} \vec{e}_r + \tau_{r\theta} \vec{e}_\theta + \tau_{r\varphi} \vec{e}_\varphi$$

на границе неоднородности и вмещающей среды.

При $r = R$ должны выполняться следующие соотношения:

$$\vec{u}_1^{(p)} + \vec{u}_1 = \vec{u}_2, \quad \vec{\sigma}_1^{(p)} + \vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma}_2. \quad (12)$$

Рассчитав смещения и напряжения из потенциалов ψ_j и подставив полученные выражения в граничные условия (12), а также воспользовавшись ортогональностью сферических волновых функций на поверхности сферы, приходим к системе алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Отметим, что в случае рассеяния импульса продольной волны, как следует из (11), наблюдается вырождение по параметру m (при $m = 0$), и, следовательно, зависимость от азимутальной координаты φ в общем решении отсутствует. В случае рассеяния поперечной волны будем для определенности считать, что она поляризована в направлении \vec{e}_z . Рассеянное поле смещений во вмещающей среде выражается следующими формулами (поскольку нас интересует только внешнее поле, индекс 2 здесь и в дальнейшем будем опускать):

$$\begin{aligned} u_{r1} &= \eta(x_q) \cos(m\varphi) \sum_{n=m}^{\infty} \Omega_q \left[d_1(k_p r) \frac{A_{mn}}{k_p r} + n(n+1) h_n(k_s r) \frac{B_{mn}}{k_s r} \right] P_n^m(\cos \theta), \\ u_{\theta 1} &= \eta(x_q) \cos(m\varphi) \sum_{n=m}^{\infty} \Omega_q \left\{ \left[h_n(k_p r) \frac{A_{mn}}{k_p r} + d_2(k_s r) \frac{B_{mn}}{k_s r} \right] \tau_n(\theta) + i h_n(k_s r) \pi_n(\theta) C_{mn} \right\}, \\ u_{\varphi 1} &= -\eta(x_q) \sin(m\varphi) \sum_{n=m}^{\infty} \Omega_q \left\{ \left[h_n(k_p r) \frac{A_{mn}}{k_p r} + d_2(k_s r) \frac{B_{mn}}{k_s r} \right] \tau_n(\theta) + i h_n(k_s r) \pi_n(\theta) C_{mn} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Причём в случае падения продольной волны ($q = p, m = 0$):

$$\Omega_p = (-i)^{n+1} (2n+1), \quad C_{0n} = 0,$$

а в случае падения поперечной волны ($q = s, m = 1$):

$$\Omega_p = (-i)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

В уравнении (13) введены сокращённые обозначения:

$$\begin{aligned} d_1(k_p r) &= nh_n(k_p r) - (k_p r)h_{n+1}(k_p r), \\ d_2(k_s r) &= (n+1)h_n(k_s r) - (k_s r)h_{n+1}(k_s r), \\ \tau_n(\theta) &= \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}, \quad \pi_n(\theta) = \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Формулы для коэффициентов рассеяния, характеризующих внешнее дифрагированное поле, можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\Delta_n^a(\omega)}{\Delta_n(\omega)} \cdot \frac{\gamma j_n(x_s)}{h_n(x_s)}, & b_n &= \frac{\Delta_n^b(\omega)}{\Delta_n(\omega)} \cdot \frac{j_n(x_s)}{h_n(x_s)}, \\ c_n &= \frac{\Delta_n^c(\omega)}{\delta_n(\omega)} \cdot \frac{j_n(x_s)}{h_n(x_s)}, & A_n &= \frac{\Delta_n^A(\omega)}{\Delta_n(\omega)} \cdot \frac{j_n(x_p)}{h_n(x_p)}, \\ B_n &= \frac{\Delta_n^E(\omega)}{\Delta_n(\omega)} \cdot \frac{j_n(x_p)}{\gamma h_n(x_s)}, & C_n &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\gamma = c_{s2}/c_{p2}$, $a_n = A_{1n}$, $b_n = B_{1n}$, $c_n = C_{1n}$ — коэффициенты рассеяния поперечной волны, $A_n = A_{0n}$, $B_n = B_{0n}$, $C_n = C_{0n}$ — коэффициенты рассеяния продольной волны, $\Delta_n^{a,b,c,A,B}(\omega)$, $\Delta_n(\omega)$, $\delta_n(\omega)$ — некоторые определители, элементы которых зависят от отношений j_{n+1}/j_n (функции Бесселя) или h_{n+1}/h_n (функции Ханкеля). Можно отметить, что уравнения

$$\Delta_n(\omega) = 0, \quad \delta_n(\omega) = 0 \quad (15)$$

определяют соответственно собственные комплексные частоты сфероидальных и крутильных колебаний сферической неоднородности в бесконечной упругой среде [20].

Решение во временной области находится посредством обратного преобразования Фурье:

$$U(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \exp(ix\tau) dx, \quad (16)$$

где $u(x)$ определяется формулами (13).

Выпишем (16) в явном виде в приближении волновой зоны ($r \gg 1$). Пренебрегая членами порядка r^{-2} и воспользовавшись асимптотическим представлением функции Ханкеля:

$$h_n(\xi) \equiv h_n^{(2)}(\xi) \sim \frac{1}{\xi} i^{n+1} e^{-i\xi},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{\cos m\varphi}{2\pi i} \frac{R}{r} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \frac{S_1(0, x_q)}{x_p} \exp(i\tau'_q x_q) dx_q, \\ U_{\theta} &= \frac{\cos m\varphi}{2\pi i} \frac{R}{r} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \frac{S_2(0, x_q)}{x_s} \exp(i\tau''_q x_q) dx_q, \\ U_{\varphi} &= \frac{\sin m\varphi}{2\pi i} \frac{R}{r} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \frac{S_3(0, x_q)}{x_s} \exp(i\tau''_q x_q) dx_q, \end{aligned} \quad (17)$$

где амплитудные функции $S_j(0, x_q)$ записываются в виде

$$\begin{aligned} S_1(0, x_q) &= \sum_{n=m}^{\infty} i^{n+1} \Omega_q P_n^m(\cos \theta) A_{nm}, \\ S_2(0, x_q) &= \sum_{n=m}^{\infty} i^{n+1} \Omega_q [\tau_n(\theta) B_{mn} + \pi_n(\theta) C_{mn}], \\ S_3(0, x_q) &= \sum_{n=m}^{\infty} i^{n+1} \Omega_q [\pi_n(\theta) B_{mn} + \tau_n(\theta) C_{mn}]. \end{aligned} \quad (18)$$

В случае рассеяния продольного импульса

$$q = p, \quad m = 0, \quad C_{0n} = 0, \quad \tau'_p = \tau_p - \frac{r}{R} - 1, \quad \tau''_p = \tau_p - \frac{r}{\gamma R} - 1.$$

Для поперечного импульса

$$q = s, \quad m = 1, \quad C_{0n} = 0, \quad \tau'_s = \tau_s - \frac{\gamma r}{R} - 1, \quad \tau''_s = \tau_s - \frac{r}{\gamma R} - 1.$$

Чтобы иметь возможность вычислить интеграл (17) в конечном виде, необходимо конкретизировать вид падающего импульса (4). В качестве зондирующего сигнала выбираем импульс Берлоге, который с достаточной точностью аппроксимирует записи реальных сейсмических возбуждений:

$$U_0(T_s) = T_s e^{-aT_s} \sin(bT_s),$$

где a и b — параметры, определяющие импульс. С помощью (8) получим для спектра сигнала:

$$g(x_s) = \frac{2b(a + ix_s)}{[(a + ix_s)^2 + b^2]^2}.$$

В принципе интегралы (16) и (17) можно вычислять приближённо с помощью компьютера путём непосредственного численного интегрирования. Для получения выражения перемещений и напряжений в оригиналах применяется теория вычетов. Этот метод физически хорошо описывает рассматриваемый процесс. Заменяя интегрирование по x_q интегрированием по замкнутому контуру, состоящему из действительной оси и полуокружности в комплексной полуплоскости, интегралы сводятся к сумме вычетов по полюсам подынтегральной функции. Часть этих полосов является корнями уравнений (15). Это означает, что разложение идёт по функциям, аргументы которых включают комплексные собственные частоты, т.е. по собственным функциям сферической упругой неоднородности. Выпишем (17) в следующем виде:

$$U_n = f(n, r, \theta, \varphi) \int_{-\infty}^{\infty} g(x_p) \frac{\Delta_n^A(x_p) j_n(x_p)}{x_p \Delta_n(x_p) h_n(x_p)} \exp\left(ix_p \left(\tau_p - \frac{r}{R} - 1\right)\right) dx_p. \quad (19)$$

Выбираем падающий импульс таким образом, что его спектр $g(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Следовательно, выражение в скобках равномерно стремится к нулю.

При этом при условии $\tau_p - r/R - 1 > 0$ условия леммы Жордана [21] выполняются, и интегрированием по бесконечной полуокружности можно пренебречь.

Отметим, что последнее неравенство отражает принцип причинности: сигнал не может прийти в точку $r + R$ раньше момента времени $t = (r + R)/c_p$. Таким образом, используя теорию вычетов для вычисления интеграла (19), получаем:

$$U_n = 2\pi i f(n, r, \theta, \varphi) \sum_{k,m} \operatorname{res} \left\{ \frac{g(z) \Delta_n^A(z) j_n(z)}{z \Delta_n(z) h_n(z)} \right\}_{\substack{(k) z=z_1 \\ (k) z=z_2}} \exp(iz\tau'_p) H(\tau'_p), \quad (20)$$

где $z_1^{(k)}$ — полюсы функций $\Delta_n(z)h_n(z)$, а полюсы функции $g(z)$.

Если сферическая неоднородность мало отличается от окружающей среды, тогда мнимая часть $z_1^{(k)}$ мала, и полюсы лежат близко к действительной оси.

В геофизических приложениях часто встречается ситуация, когда рассматриваемое включение достаточно велико по своим размерам $x = \omega R/c = 2\pi R/\lambda \geq 1$ и не слишком сильно отличается своими упруго-плотностными свойствами от вмещающей среды (на 20–30% по скоростям и на 3–5% по плотности).

В этом случае амплитудные функции S_j можно получить простыми приближенными формулами.

Далее показано в работе [21], что слабо контрастная неоднородность характеризуется следующими равенствами:

$$S_1(\theta, x_p) \approx S_2(\theta, x_s) \approx S_3(\theta, x_s) \approx S(\theta, x_q),$$

и получено выражение для $S(\theta, x_q)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$S(\theta, x_q) = S_d(\theta, x_q) + S_\tau(\theta, x_q).$$

Первое слагаемое даёт известную картину дифракции Фраунгофера, а второе обусловлено лучами, прошедшими сквозь включение.

Физически это вполне оправданно, поскольку в силу слабой контрастности неоднородности лучами, претерпевающими отражения внутри сферы, можно пренебречь.

Отметим, однако, что если дифракционное слагаемое

$$S_d(\theta, x_q) = x_q^2 \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \frac{I_1(\theta x_q)}{\theta x_q} \quad (21)$$

вполне удовлетворяет требованиям геофизической точности [22], то второе слагаемое

$$S_\tau(\theta, x_q) = -2ix_q \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \frac{\alpha_q - 1}{4(\alpha_q - 1)^2 + \theta^2} \exp \left[-ix_q \sqrt{4(\alpha_q - 1)^2 + \theta^2} \right], \quad (22)$$

где $\alpha_q = c_{q2}/c_{q1}$, справедливо, вообще говоря, только в малоугловом приближении ($\theta \approx 0$) и имеет весьма приближённый характер.

Используя слабоконтрастное приближение, коэффициенты рассеяния можно представить в следующем виде:

$$A_n \approx b_n \approx c_n \approx \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon_a}} \right), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_q &= x [(\alpha \sin d_1 - \sin d) + (d - d_1) \cos d], \\ \cos d &= \frac{\gamma}{x}, \quad \cos d_1 = \frac{\gamma}{\alpha x}, \quad \left(\gamma = n + \frac{1}{2} \leq x \right). \end{aligned}$$

Подставляя (23) в (22) и заменяя функции Лежандра их асимптотическими представлениями, получим [23]:

$$S(\theta, x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \sum \sqrt{\gamma} \cos \left(\gamma \theta - \frac{\pi}{4} \right) [1 - \exp(-2i\varepsilon_a)]. \quad (24)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках, выражаемое единицей, дает дифракционную картину Фраунгофера. Для того чтобы оценить второе слагаемое, заменим сумму интегралом, который представим в следующем виде:

$$S_\tau(\theta, x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \frac{1}{2} \left[\int_0^x \sqrt{\gamma} e^{i\varphi_+(\gamma)} d\gamma + \int_0^x \sqrt{\gamma} e^{i\varphi_-(\gamma)} d\gamma \right], \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= 2x [\sin d - \alpha \sin d_1 + (d_1 - d) \cos d] + \left(\gamma \theta - \frac{\pi}{4} \right), \\ \varphi_- &= 2x [\sin d - \alpha \sin d_1 + (d_1 - d) \cos d] - \left(\gamma \theta - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Вычислим интегралы асимптотически по формулам метода стационарной фазы [24]:

$$\int \sqrt{\gamma} e^{i\varphi(\gamma)} d\gamma \approx \sqrt{\frac{2\pi\gamma_0}{|\varphi''(\gamma_0)|}} \exp \left\{ i \left[\varphi(\gamma_0) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \varphi''(\gamma_0) \right] \right\}. \quad (26)$$

Найдя сначала точку γ_0 , в окрестности которой фаза стационарна, имеем для неё условие $\varphi'_\pm(\gamma_0) = 0$, то есть $2(d_1 - d) \pm \theta = 0$. Для получения приближенного рассеяния поля используем методику, разработанную Дубровским В. А. и Марочником В. С. [25].

Тогда выражение для рассеянного поля смещений поперечного импульса выражается через вычисленные интегралы следующим образом:

$$\begin{aligned} U_r &\approx 0, \\ U_\theta &= \frac{R}{r} \cos \varphi \left[\sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} I_1^s - I_2^s \right], \\ U_\varphi &= -\frac{R}{r} \sin \varphi \left[\sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} I_1^s - I_2^s \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь

$$I_1^s = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} x_s g(x_s) \frac{J_1(\theta x_s)}{\theta x_s} \exp(i\tau_s'' x_s) dx_s. \quad (28)$$

В случае $\tau_s'' \geq 0$ его можно вычислить с помощью теории вычетов, так как условия леммы Жордана выполнены. В итоге получим

$$I_1^s = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\tau_s'' v} \left[i J_0(\theta v) - \frac{J_1(\theta v)}{\theta v} (\tau_s'' v + i) \right] \right\} \quad (\tau_s'' \geq 0), \quad v = b + ia.$$

Если $\tau_s'' < 0$, то воспользуемся интегральным представлением [24]:

$$\frac{J_1(\theta x)}{\theta x} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \exp(i\theta x w) \sqrt{1 - w^2} dw.$$

Подставив последнюю формулу в (26) и поменяв порядок интегрирования, вычислим внутренний интеграл по теории вычетов:

$$I_1^s = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \exp(-ay) \sqrt{1 - w^2} [(ay - 1) \sin(by) - by \cos(by)] H(y) dw,$$

где $y = \tau_s'' + \theta w$. В случае рассеяния продольного импульса имеем

$$\begin{aligned} U_\theta &\approx 0, \\ U_r &\approx \frac{R}{r} \left[-\frac{i}{2\pi} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} g(z_s) z_s \frac{j_1(\theta z_s)}{\theta z_s} e^{i\tau_s'' z_s} dz_s - D_s (\tau_s'' - 2\delta_s) e^{-2\delta_s} \right], \end{aligned} \quad (29)$$

где интегралы вычисляются численно методом Ромберга.

Численные результаты получены на основе комплексного программного обеспечения MATLAB. Корни (полюсы) трансцендентного уравнения находятся с помощью метода Мюллера.

2. Результаты и анализ

При вычислениях приняты следующие значения параметров:

$$\alpha_p = \frac{c_{p1}}{c_{p2}} = 0.91, \quad \alpha_s = \frac{c_{s1}}{c_{s2}} = 0.75, \quad \gamma = \frac{c_{p1}}{c_{s2}} = 0.72, \quad \eta = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0.94.$$

На рис. 1 показаны результаты расчётов рассеянной радиальной компоненты смещения u_r^* по разработанным методикам для случая рассеяния импульса продольной волны. Результаты сравнения при $\theta = 10^\circ$ с точными данными [25] совпадают с разницами до 9%.

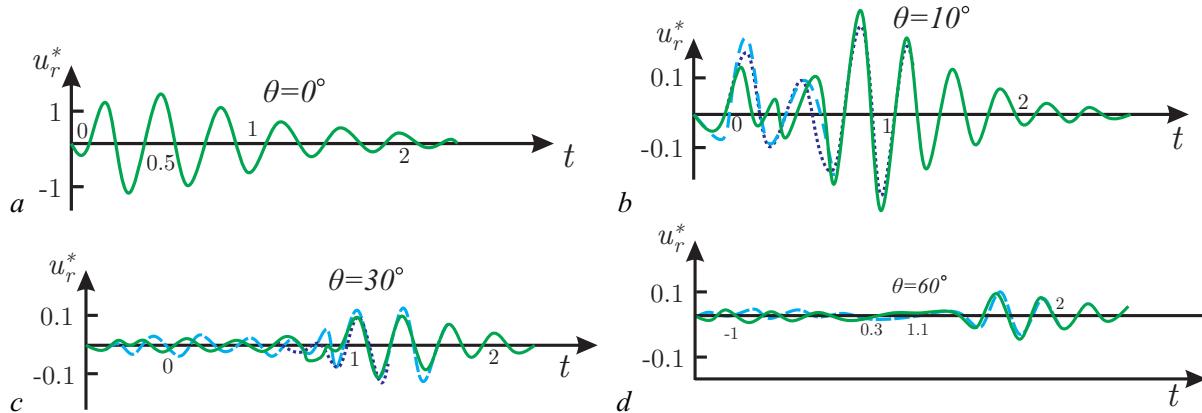


Рис. 1. Зависимость рассеяния радиальной компоненты смещения от времени при падении продольного импульса
Fig. 1. Time dependence of the scattering of the shear component under the incidence of a longitudinal pulse

В соответствии с заданным параметром α_p определено, что приближенными формулами можно пользоваться в диапазоне углов рассеяния

$$0 \leq \theta \leq 68^\circ.$$

Следует, кроме того, указать, что при $\theta = 0^\circ$ момент вступления рассеянной волны оказывается несколько «размытым». Это происходит вследствие эффекта Гиббса и для его устранения необходимо, вообще говоря, сглаживать передний фронт падающего импульса.

Проведённые численные расчёты показали, что для решения задачи нестационарного рассеяния волн на слабоконтрастной неоднородности вполне можно использовать сравнительно простые приближённые формулы.

Заключение

Разработана методика расчёта рассеяния волн в сферическом теле при падении продольных или поперечных волн. Также разработана методика и алгоритм для вычисления специальных функций Бесселя и Ханкеля с комплексным аргументом. Полученные результаты по разработанной методике сравниваются с известными методиками.

Установлено, что предложенными приближенными формулами (Дубровского В. А. и Марочника В. С.) можно пользоваться в диапазоне углов рассеяния $0 \leq \theta \leq 68^\circ$.

Список литературы

1. Formalev V., Kartashov E., Kolesnik S. Wave heat transfer in anisotropic half-space under the action of a point exponential-type heat source based on the wave parabolic-type equation // J. Eng. Phys. Thermophys. 2022. Vol. 95. P. 366–373. DOI: 10.1007/s10891-022-02490-2.

2. *Формалев В. Ф., Гарибян Б. А., Колесник С. А.* Математическое моделирование динамики тепловых ударных волн в нелинейных локально-неравновесных средах // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2022. № 4(103). С. 80–94. DOI: 10.18698/1812-3368-2022-4-80-94.
3. *Формалев В. Ф., Колесник С. А.* Волновой теплоперенос в теплозащитных материалах с нелинейной зависимостью теплопроводности от температуры экспоненциального типа // ТВТ. 2022 Т. 60, № 5. С. 797–800. DOI: 10.31857/S0040364422050039.
4. *Tushavina O. V., Kriven G. I., Hein T. Z.* Study of thermophysical properties of polymer materials enhanced by nanosized particles // Int. J. Circuits, Syst. Signal Process. 2021. Vol. 15. P. 1436–1442. DOI: 10.46300/9106.2021.15.155.
5. *Sha M., Utkin Y. A., Tushavina O. V., Pronina P. F.* Experimental studies of heat and mass transfer from tip models made of carbon-carbon composite material (CCCM) under conditions of high-intensity thermal load // Per. Tche Quim. 2020. Vol. 17, no. 35. P. 988–997. DOI: 10.52571/ptq.v17.n35.2020.81_sha_pgs_988_997.pdf.
6. *Garnier B., Boudenne A.* Use of hollow metallic particles for the thermal conductivity enhancement and lightening of filled polymer // Polym. Degrad. Stab. 2016. Vol. 127. P. 113–118. DOI: 10.1016/j.polymdegradstab.2015.11.026.
7. *Mohammad S. M. H., Merkel M., Ochsner A.* Influence of the joint shape on the uniaxial mechanical properties of non-homogeneous bonded perforated hollow sphere structures // Comput. Mater. Sci. 2012. Vol. 58. P. 183–187. DOI: 10.1016/j.commatsci.2012.01.024.
8. *Safarov I. I., Teshayev M. H., Juraev Sh. I., Khomidov F. F.* Vibrations of viscoelastic plates with attached concentrated masses // Lobachevskii J. Math. 2024. Vol. 45. P. 1729–1737. DOI: 10.1134/S1995080224601474.
9. *Усмонов Б. Ш., Сафаров И. И., Тешаев М. Х.* Нелинейный флаттер переходного процесса наследственно-деформируемых систем при сверхзвуковом режиме полета // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2024. № 88. С. 124–137. DOI: 10.17223/19988621/88/10.
10. *Safarov I., Nuriddinov B., Nuriddinov Z.* Propagation of own waves in a viscoelastic cylindrical panel of variable thickness // Lobachevskii J. Math. 2024. Vol. 45. P. 1246–1253. DOI: 10.1134/S1995080224600663.
11. *Safarov I., Teshayev M.* Control of resonant oscillations of viscoelastic systems // Theoretical and Applied Mechanics. 2024. Vol. 51, no. 1. P. 1–12. DOI: 10.2298/TAM220510007S.
12. *Сафаров И. И., Тешаев М. Х.* Нестационарные движения сферических оболочек в вязкоупругой среде // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2023. № 83. С. 166–179. DOI: 10.17223/19988621/83/14.
13. *Teshayev M. K., Safarov I. I., Kuldashev N. U., Ishmamatov M. R., Ruziev T. R.* On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity // J. Vib. Eng. Technol. 2020. Vol. 8. P. 579–585. DOI: 10.1007/s42417-019-00160-x.
14. *Сафаров И. И., Тешаев М. Х.* Динамическое гашение колебаний твёрдого тела, установленного на вязкоупругих опорах // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 63–74. DOI: 10.18500/0869-6632-003021.
15. *Адамов А. А., Матвеенко В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
16. *Fedorov A. Yu., Matveenko V. P., Shardakov I. N.* Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials // IJCIET. 2018. Vol. 9, no. 8. P. 1062–1075.
17. *Быков А. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н., Шестаков А. П.* Ударно-волновой метод контроля процесса устранения трещин в железобетонных конструкциях // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 35–41.

18. *Karimov K., Akhmedov A., Karimova A.* Development of mathematical model, classification, and structures of controlled friction and vibration mechanisms // AIP Conf. Proc. 2023. Vol. 2612. P. 030014. DOI: 10.1063/5.0116891.
19. *Safarov I. I.* Numerical modeled static stress-deformed state of parallel pipes in deformable environment // Adv. Sci. Technol. Res. J. 2018. Vol. 12, no. 3. P. 114–125. DOI: 10.12913/22998624/92177.
20. *Тешаев М. Х., Каримов И. М., Умаров А. О., Жураев Ш. И.* Дифракция гармонических сдвиговых волн на эллиптической полости, находящейся в вязкоупругой среде // Известия высших учебных заведений. Математика. 2023. № 8. С. 64–70. DOI: 10.26907/0021-3446-2023-8-64-70.
21. *Popova T. V., Mayer A. E., Khishchenko K. V.* Evolution of shock compression pulses in polymethylmethacrylate and aluminum // Journal of Applied Physics. 2018. Vol. 123. P. 235902. DOI: 10.1063/1.5029418.
22. *Popova T. V., Mayer A. E., Khishchenko K. V.* Numerical investigations of shock wave propagation in polymethylmethacrylate // J. Phys.: Conf. Ser. 2015. Vol. 653. P. 012045. DOI: 10.1088/1742-6596/653/1/012045.
23. *Bouak F., Lemay J.* Use of the wake of a small cylinder to control unsteady loads on a circular cylinder // J. Visualization. 2001. Vol. 4. P. 61–72. DOI: 10.1007/BF03182456.
24. *Bhagyashекар M., Rao K., Rao R. M. V. G. K.* Studies on rheological and physical properties of metallic and non-metallic particulate filled epoxy composites // J. Reinforced Plastics and Composites. 2009. Vol. 28, iss. 23. P. 2869–2878. DOI: 10.1177/07316844080939.
25. *Дубровский В. А., Морожник В. С.* Рассеяние упругих волн на крупномасштабном слабокон-трастном сферическом включении // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 4. С. 32–41.

References

1. Formalev V, Kartashov E, Kolesnik S. Wave heat transfer in anisotropic half-space under the action of a point exponential-type heat source based on the wave parabolic-type equation. J. Eng. Phys. Thermophys. 2022;95:366–373. DOI: 10.1007/s10891-022-02490-2.
2. Formalev VF, Garibyan BA, Kolesnik SA. Mathematical simulation of thermal shock wave dynamics in nonlinear local non-equilibrium media. Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2022;4:80–94 (in Russian). DOI: 10.18698/1812-3368-2022-4-80-94.
3. Formalev VF, Kolesnik SA. Wave heat transfer in heat-shielding materials with an exponential-like nonlinear dependence of thermal conductivity on temperature. High Temp. 2022;60:731–734. DOI: 10.1134/S0018151X22050030.
4. Tushavina OV, Kriven GI, Hein TZ. Study of thermophysical properties of polymer materials enhanced by nanosized particles. Int. J. Circuits, Syst. Signal Process. 2021;15:1436–1442. DOI: 10.46300/9106.2021.15.155.
5. Sha M, Utkin YA, Tushavina OV, Pronina PF. Experimental studies of heat and mass transfer from tip models made of carbon-carbon composite material (CCCM) under conditions of high-intensity thermal load. Per. Tche Quim. 2020;17(35):988–997. DOI: 10.52571/ptq.v17.n35.2020.81_sha_pgs_988_997.pdf.
6. Garnier B, Boudenne A. Use of hollow metallic particles for the thermal conductivity enhancement and lightening of filled polymer. Polym. Degrad. Stab. 2016;127:113–118. DOI: 10.1016/j.polymer.2015.11.026.
7. Mohammad SMH, Merkel M, Ochsner A. Influence of the joint shape on the uniaxial mechanical properties of non-homogeneous bonded perforated hollow sphere structures. Comput. Mater. Sci. 2012;58:183–187. DOI: 10.1016/j.commatsci.2012.01.024.

8. Safarov II, Teshayev MH, Juraev ShI, Khomidov FF. Vibrations of viscoelastic plates with attached concentrated masses. *Lobachevskii J. Math.* 2024;45:1729–1737. DOI: 10.1134/S199508224601474.
9. Usmonov BSh, Safarov II, Teshaev MKh. Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2024;(88):124–137 (in Russian). DOI: 10.17223/19988621/88/10.
10. Safarov I, Nuriddinov B, Nuriddinov Z. Propagation of own waves in a viscoelastic cylindrical panel of variable thickness. *Lobachevskii J. Math.* 2024;45:1246–1253. DOI: 10.1134/S199508224600663.
11. Safarov I, Teshaev M. Control of resonant oscillations of viscoelastic systems. *Theoretical and Applied Mechanics.* 2024;51(1):1–12. DOI: 10.2298/TAM220510007S.
12. Safarov II, Teshaev MKh. Unsteady movements of spherical shells in a viscoelastic medium. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2023;(83):166–179. DOI: 10.17223/19988621/83/14.
13. Teshaev MK, Safarov II, Kuldashov NU, Ishmamatov MR, Ruziev TR. On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity. *J. Vib. Eng. Technol.* 2020;8:579–585. DOI: 10.1007/s42417-019-00160-x.
14. Safarov II, Teshaev MK. Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(1):63–74 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-003021.
15. Adamov AA, Matveenko VP, Trufanov NA, Shardakov IN. *Methods of Applied Viscoelasticity.* Ekaterinburg: UrO RAN; 2003. 411 p.
16. Fedorov AYu, Matveenko VP, Shardakov IN. Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials. *IJCIET.* 2018;9(8):1062–1075.
17. Bykov AA, Matveenko VP, Shardakov IN, Shestakov AP. Shock wave method for monitoring crack repair processes in reinforced concrete structures. *Mech. Solids.* 2017;52:378–383. DOI: 10.3103/S0025654417040033.
18. Karimov K, Akhmedov A, Karimova A. Development of mathematical model, classification, and structures of controlled friction and vibration mechanisms. *AIP Conf. Proc.* 2023;2612:030014. DOI: 10.1063/5.0116891.
19. Safarov II. Numerical modeled static stress-deformed state of parallel pipes in deformable environment. *Adv. Sci. Technol. Res. J.* 2018;12(3):114–125. DOI: 10.12913/22998624/92177.
20. Teshaev MKh, Karimov IM, Umarov AO, Zhuraev SI. Diffraction of harmonic shear waves on an elliptical cavity located in a viscoelastic medium. *Russ Math.* 2023;67:44–48. DOI: 10.3103/S1066369X23080108.
21. Popova TV, Mayer AE, Khishchenko KV. Evolution of shock compression pulses in polymethylmethacrylate and aluminum. *Journal of Applied Physics.* 2018;123:235902. DOI: 10.1063/1.5029418.
22. Popova TV, Mayer AE, Khishchenko KV. Numerical investigations of shock wave propagation in polymethylmethacrylate. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2015;653:012045. DOI: 10.1088/1742-6596/653/1/012045.
23. Bouak F, Lemay J. Use of the wake of a small cylinder to control unsteady loads on a circular cylinder. *J. Visualization.* 2001;4:61–72. DOI: 10.1007/BF03182456.
24. Bhagyashekhar M, Rao K, Rao RMVGK. Studies on rheological and physical properties of metallic and non-metallic particulate filled epoxy composites. *J. Reinforced Plastics and Composites.* 2009;28(23):2869–2878. DOI: 10.1177/0731684408093976.
25. Dubrovsky VA, Morozhnik VS. Scattering of elastic waves on a large-scale low-contrast spherical inclusion. *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Solid Earth.* 1986;(4):32–41 (in Russian).



Усмонов Ботир Шукуриллаевич — родился в Самаркандской области (1968). Окончил Казанский технический университет (1985–1993) и магистратуру в Университете Андра (Индия) и Техническом университете Гамбург-Харбург (Германия). Работал в Ташкентском государственном техническом институте, Ташкентском авиационном институте (на руководящих должностях), в Университете Конкук (Южная Корея, в должности профессора), в филиале МГУ в Ташкенте и Аппарате Президента РУз. Сотрудничал с компанией Daimler-Benz в Центральной Азии. Заместитель министра высшего образования (2013–2016), затем проректор ТАТУ. С 2020 года — ректор Ташкентского химико-технологического института.

Узбекистан, 100011 Ташкент, ул. Навои, 32
Ташкентский химико-технологический институт
E-mail: botir2468@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4654-9782



Мухитдинов Рамазон Тухтаевич — окончил математический факультет Национального университета Узбекистана по специальности «Математика» (1983). Кандидат физико-математических наук (1995), доцент. С 2022 года работает в должности доцента кафедры высшей математики Ташкентского химико-технологического института. Опубликовано более 20 научных статей в отечественных и зарубежных научных журналах и более 30 статей в сборниках материалов международных и республиканских научных конференций.

Узбекистан, 100011 Ташкент, ул. Навои, 32
Ташкентский химико-технологический институт
E-mail: ramazonmuxitdinov@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4235-140X



Элибоев Нурали Ражабалиевич — родился в Нуротинском районе Навоийской области Узбекистана (1990). Окончил факультет механики и математики Национального университета Узбекистана по направлению «Математика» (2016). С 2016 года работает на кафедре высшей математики Ташкентского химико-технологического института, с 2021 года — в должности старшего преподавателя. Научные интересы — механика деформируемых твёрдых тел. Автор научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100011 Ташкент, ул. Навои, 32
Ташкентский химико-технологический институт
E-mail: nurali_e@mail.ru
ORCID: 0009-0009-2429-9514



Ахмедов Насриддин Баходирович — родился в Навоийской области Республики Узбекистан (1984). Окончил факультет физики и математики Навоийского государственного педагогического института по направлению «Математика и информатика» (2007). С 2025 года работает в должности старшего преподавателя Университета Алфрагануса. Научные интересы — механика деформируемых твёрдых тел. Является автором научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 210100 Навои, просп. Галаба, 76
Навоийский государственный горно-технологический университет
E-mail: nasriddinaxmedov@gmail.com
ORCID: 0009-0003-1780-7476



Делокализованные нелинейные колебательные моды и их влияние на свойства бинарного сплава NiTi

Д. В. Бачурин, Р. Т. Мурзаев[✉]

Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа, Россия
E-mail: dvbachurin@mail.ru, [✉ murzaevrt@gmail.com](mailto:murzaevrt@gmail.com)

Поступила в редакцию 23.09.2025, принята к публикации 24.10.2025,
опубликована онлайн 24.10.2025, опубликована 30.01.2026

Аннотация. Цель работы — исследование поведения стабильных однокомпонентных делокализованных нелинейных колебательных мод в простых кубических подрешётках титана и никеля и их влияния на свойства бинарного сплава NiTi. **Методы.** Все расчёты проводятся при помощи молекулярно-динамического метода с использованием многочастичных потенциалов взаимодействия. **Результаты.** Представленные в работе семнадцать колебательных мод характеризуются устойчивыми периодическими колебаниями. Для большинства мод характерен жёсткий тип нелинейности, при котором частота атомных колебаний увеличивается с ростом амплитуды. Устойчивые моды способны аккумулировать энергию в интервале 0.1–1.5 эВ на атом в титановой подрешётке и 0.1–1.0 эВ на атом в никелевой подрешётке. Возбуждение колебательных мод в подрешётках Ni и Ti приводит к уменьшению удельной теплоёмкости для мод с жёстким типом нелинейности и к возрастанию для мод с мягким типом нелинейности. Наличие мод приводит к возникновению положительных сжимающих напряжений, величина которых пропорциональна амплитуде вектора смещения атомов. **Заключение.** Полученные данные позволяют лучше понять сложное поведение колебательных мод и их влияние на свойства бинарного сплава NiTi.

Ключевые слова: бинарный сплав NiTi, делокализованные нелинейные колебательные моды, нелинейная динамика, молекулярно-динамическое моделирование.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Института проблем сверхпластичности металлов РАН, финансируемого Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, регистрационный номер 124022900108-3.

Для цитирования: Бачурин Д. В., Мурзаев Р. Т. Делокализованные нелинейные колебательные моды и их влияние на свойства бинарного сплава NiTi // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 98–115. DOI: 10.18500/0869-6632-003198. EDN: LKYLUV

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Delocalized nonlinear vibrational modes and their effect on the properties of binary NiTi alloy

D. V. Bachurin, R. T. Murzaev[✉]

Institute for Metals Superplasticity Problems of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

E-mail: dvbachurin@mail.ru, [✉]murzaevrt@gmail.com

Received 23.09.2025, accepted 24.10.2025, available online 24.10.2025, published 30.01.2026

Abstract. The purpose of this work is to investigate the behavior of stable one-component delocalized nonlinear vibrational modes in simple cubic titanium and nickel sublattices, as well as their influence on the properties of the binary NiTi alloy. **Methods.** All calculations were performed using the molecular dynamics method with many-body interatomic potentials. **Results.** Seventeen vibrational modes are shown to exhibit stable periodic oscillations. Most of them demonstrate a hard type of nonlinearity, where the frequency of atomic vibrations increases with amplitude. Stable modes are capable of accumulating energy in the range of 0.1–1.5 eV per atom in the titanium sublattice and 0.1–1.0 eV per atom in the nickel sublattice. Excitation of vibrational modes in the Ni and Ti sublattices leads to a decrease in specific heat for modes with hard type of nonlinearity and to an increase for modes with soft type of nonlinearity. The presence of modes leads to the emergence of positive compressive stresses, the magnitude of which is proportional to the atomic displacement vector. **Conclusion.** The obtained results provide new insights into the complex behavior of vibrational modes and their impact on the properties of the binary NiTi alloy.

Keywords: binary NiTi alloy, delocalized nonlinear vibrational modes, nonlinear dynamics, molecular dynamics modeling.

Acknowledgements. The work was accomplished in terms of the State Assignment of the Institute for Metals Superplasticity Problems of the Russian Academy of Sciences financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Registration No. 124022900108-3.

For citation: Bachurin DV, Murzaev RT. Delocalized nonlinear vibrational modes and their effect on the properties of binary NiTi alloy. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1):98–115. DOI: 10.18500/0869-6632-003198

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Нелинейные решетки представляют собой системы, в которых сила взаимодействия между соседними частицами нелинейно связана с их смещением от положения равновесия. В отличие от линейных решеток, где взаимодействие подчиняется закону Гука, нелинейные решетки широко распространены в физических системах, таких как кристаллы, полимеры и биологические макромолекулы [1, 2]. Нелинейность может быть обусловлена ангармоническими потенциалами, геометрическими ограничениями или взаимодействием с внешними полями [3–5]. Такие решетки играют ключевую роль в изучении механических и термических свойств, переноса энергии, фазовых переходов, а также в разработке оптических устройств и волноводов [6–8].

Важным следствием нелинейности является возникновение локализованных колебательных мод, известных как дискретные бризеры или внутренние локализованные моды [9, 10]. Эти моды могут существовать в бездефектных кристаллических решетках и влиять на их макроскопические свойства [11]. Высокоамплитудные колебательные моды широко исследовались в нелинейных решетках Шрёдингера [12, 13] и Ферми–Паста–Улама–Цингу [14–16], а также в ГЦК [17–20], ОЦК [21–23], ГПУ-металлах [24, 25], ковалентных кристаллах [26, 27] и интерметаллидах [28, 29]. Для существования дискретных бризеров их частота должна находиться вне фононного спектра кристалла, чтобы избежать рассеяния колебательной энергии через взаимодействие с фононами решётки.

Чечин и Сахненко разработали теорию бушей нелинейных нормальных мод, также называемых делокализованными нелинейными колебательными модами (ДНКМ). Эти моды определяются на основе точечной группы симметрии кристаллической решетки [30–32]. Между ДНКМ и дискретными бризерами существует тесная связь: последние могут возникать вследствие модуляционной неустойчивости ДНКМ с частотами, выходящими за пределы фононного спектра [33, 34]. С развитием терагерцевой лазерной техники стало возможным возбуждать ДНКМ напрямую, что делает их перспективными для фотонных технологий [35, 36].

ДНКМ удобно классифицировать по их пространственной размерности и числу компонент. В одномерных ДНКМ возбужденные атомы образуют цепочки, которые делокализованы в одном направлении и локализованы в двух других. Двумерные ДНКМ простираются по двум пространственным направлениям, но локализованы вдоль третьего. Аналогично трёхмерные ДНКМ занимают весь объём кристалла. Для однокомпонентных ДНКМ характерна только одна величина атомных смещений от положений равновесия, тогда как колебательные моды с n независимыми параметрами называются n -компонентными модами.

ДНКМ оказывают влияние на механические свойства материала, его теплопроводность и фазовые переходы. До сих пор наибольшее внимание уделялось одномерным ДНКМ, для которых подробно изучено их влияние на свойства атомных цепочек [15, 16, 37–39]. Двумерные ДНКМ широко исследовались в различных типах кристаллических решёток [14, 18–20, 24, 40, 41], в то время как систематическое изучение трёхмерных ДНКМ началось лишь сравнительно недавно и проводилось в основном в однокомпонентных материалах [42–46].

В связи с этим целью настоящей работы является изучение методом молекулярной динамики однокомпонентных ДНКМ, возбуждаемых во всём объёме бинарного сплава NiTi. Выбор NiTi обусловлен его структурой, представляющей собой две вложенные друг в друга простые кубические решётки, что позволяет возбуждать моды в каждой из них. Данный материал имеет весьма перспективные применения в области медицины, материалов с эффектом памяти форм [47–49].

1. Методика

1.1. Трёхмерные колебательные моды в простой кубической решётке. Семнадцать стабильных однокомпонентных ДНКМ, полученных на основе теории бушей нелинейных нормальных мод [30–32], представлены на рис. 1 для простой кубической решётки. Эти ДНКМ отличаются делокализованным характером, распространяясь по всей бесконечной кристаллической решётке и проявляясь в виде периодических смещений атомов. Для возбуждения указанных ДНКМ задаются начальные смещения атомов. На рис. 1 показаны две соседние плоскости (001), обозначенные как (001)' и (002)', параллельные плоскости (x, y). Компоненты смещений Δx и Δy в этих плоскостях обозначены черными стрелками, а компонента Δz — красными точками (для смещения в сторону наблюдателя) и синими крестиками (для смещения от наблюдателя). Все ненулевые компоненты смещений атомов от их равновесных положений в решётке имеют одинаковую амплитуду A , вследствие чего все изучаемые в настоящей работе моды являются однокомпонентными.

ДНКМ 1, 4, 8, 12 и 23 характеризуются единственной ненулевой компонентой вектора смещения, где только $|\Delta y| = A$ или $|\Delta z| = A$, при этом остальные компоненты равны нулю. Длина вектора смещения атомов равна $D = A$. ДНКМ 2, 5, 7, 9, 11, 13 и 24 имеют две ненулевые компоненты и длину вектора смещения, равную $D = \sqrt{2}A$. Для ДНКМ 3, 6, 10, 14 и 25 характерно наличие трех ненулевых компонент вектора смещения, то есть $|\Delta x| = |\Delta y| = |\Delta z| = A$, а длина вектора смещения в этом случае составляет $D = \sqrt{3}A$. Все перечисленные ДНКМ обладают короткими длинами волн, а их волновой вектор находится на границе первой зоны Бриллюэна.

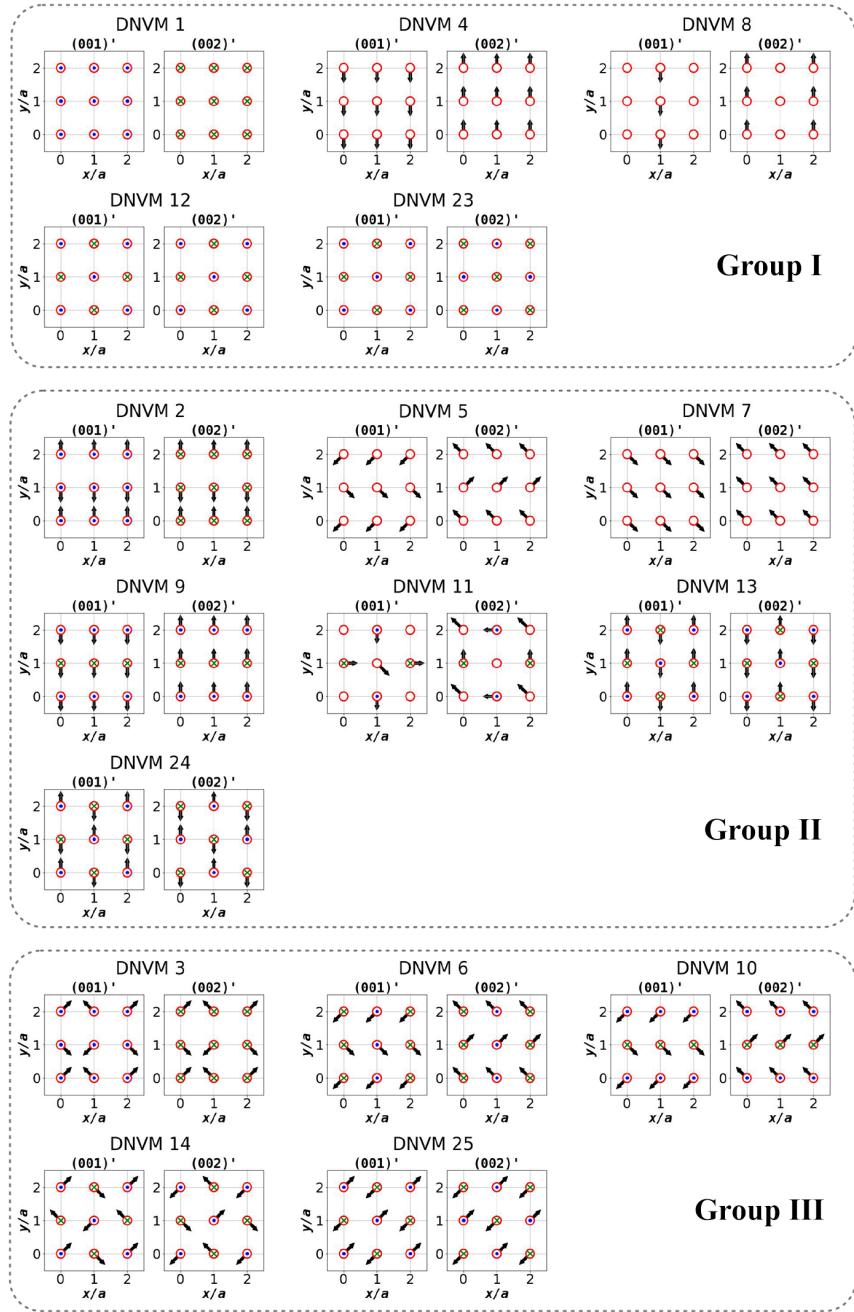


Рис. 1. Семнадцать стабильных однокомпонентных ДНКМ, используемых для возбуждения простых кубических подрешеток атомов титана или никеля в бинарном сплаве NiTi. Смещения атомов представлены в двух соседних плоскостях, обозначенных как $(001)'$ и $(002)'$, параллельных плоскости (x, y) . Красными кружками показаны только атомы одной кубической подрешетки. Компоненты смещений атомов Δx и Δy вдоль соответствующих осей от равновесных решеточных положений показаны черными стрелками. Компоненты смещений Δz , направленные к наблюдателю или от него, отмечены синими точками или зелеными крестиками соответственно (цвет онлайн)

Fig. 1. Seventeen stable one-component DNVMs used to excite simple cubic sublattices of titanium or nickel atoms in the binary NiTi alloy. Atomic displacements are represented in two adjacent planes, labeled $(001)'$ and $(002)'$, parallel to the (x, y) plane. Red circles show only atoms of one cubic sublattice. The Δx and Δy components of atomic displacements along the corresponding axes from the equilibrium lattice positions are shown by black arrows. The Δz components of displacements directed toward or away from the observer are marked by blue dots and green crosses, respectively (color online)

Семнадцать стабильных трехмерных ДНКМ классифицированы по числу ненулевых компонент смещений атомов, а именно: группа I включает моды с одной ненулевой компонентой (ДНКМ 1, 4, 8, 12, 23); группа II охватывает моды с двумя ненулевыми компонентами (ДНКМ 2, 5, 7, 9, 11, 13, 24); в группу III входят моды с тремя ненулевыми компонентами (ДНКМ 3, 6, 10, 14, 25). Для ясности в настоящей работе сохранена ранее использовавшаяся нумерация ДНКМ [46, 50].

1.2. Методика молекулярно-динамического моделирования. Бинарный сплав NiTi имеет упорядоченную структуру B2, и массы составляющих элементов в сплаве близки друг к другу: масса атома титана составляет 82% массы атома никеля. В структуре B2 атомы никеля занимают позиции простой кубической решетки, тогда как атомы титана располагаются в центрах подрешетки никеля, образуя собственную кубическую подрешетку.

Молекулярно-динамическое моделирование выполнено с использованием программного пакета LAMMPS [51, 52]. Все расчёты проводились с применением межатомного потенциала, разработанного в рамках модифицированного метода погруженного атома (MEAM) [53]. Равновесные параметры решётки, полученные с использованием выбранного потенциала, равны $a = b = c = 2.97 \text{ \AA}$.

Расчетная ячейка состоит из $10 \times 10 \times 10$ трансляционных ячеек решетки NiTi, что составляет 2000 атомов. При моделировании применялись периодические граничные условия во всех трех ортогональных направлениях. Шаг интегрирования по времени составил 1 фс. Общая длительность моделирования составила 10000 шагов по времени. Такое относительно короткое время моделирования обусловлено акцентом на изучение возможности возбуждения ДНКМ и их влияния на свойства сплава NiTi, а не на анализ времени жизни, которое при определенных параметрах может достигать порядка нескольких десятков пикосекунд. Стабильность ДНКМ оценивалась по их периодическим колебаниям в течение нескольких периодов. Интегрирование уравнений движения осуществлялось с использованием алгоритма Верле, при этом тепловые флуктуации атомов не учитывались для исключения влияния температуры. В ходе моделирования использовался термодинамический ансамбль NVE, предполагающий постоянство числа атомов (N), объема (V) и энергии (E).

Амплитуды начальных смещений атомов, применяемых для возбуждения семнадцати однокомпонентных колебательных мод (см. рис. 1), варьировались от 0.001 до 0.376 \AA с шагом 0.01 \AA . Изначально смещались атомы одной подрешётки, в то время как атомы другой подрешётки оставались неподвижными. Начальные скорости всех атомов устанавливались равными нулю.

2. Результаты

ДНКМ 1–14 и 23–25 являются стабильными, поскольку обеспечивают устойчивые периодические колебания по всему объему моделируемого кристалла NiTi при возбуждении как в подрешётке никеля, так и в подрешётке титана, при этом атомы соседней подрешётки остаются неподвижными в своих равновесных положениях. Отметим, что в нестабильных ДНКМ 15–22, которые в настоящей работе не рассматриваются, происходит перенос колебательной энергии от одной изначально возбуждённой подрешётки к другой при всех начальных амплитудах.

На рис. 2, *a* представлена зависимость смещения атомов Δr от времени моделирования для стабильной ДНКМ 4, возбужденной в подрешётке никеля с начальными амплитудами $A_z = 0.051$ и $A_z = 0.151 \text{ \AA}$. В интервале от 0 до 3 пс наблюдаются периодические колебания атомов никеля с сохранением начальной амплитуды. Атомы подрешётки титана остаются при этом невозбужденными, что подтверждается горизонтальными линиями на рис. 2, которые для двух начальных амплитуд накладываются одна на другую. На рис. 2, *b* показана та же зависимость,

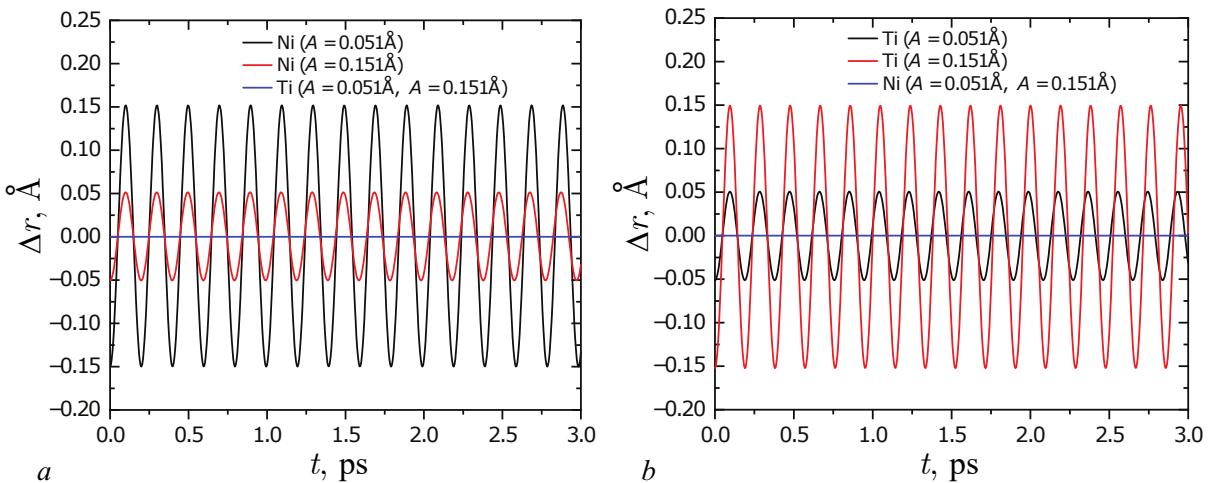


Рис. 2. Зависимость смещения колеблющегося атома от времени моделирования для стабильной ДНКМ 4 (группа I), возбужденной в подрешётке никеля (a) и титана (b) в бинарном сплаве NiTi. Расчеты приведены для двух начальных амплитуд $A = 0.051$ и $A = 0.151$ Å (цвет онлайн)

Fig. 2. The dependence of the displacement of an oscillating atom on simulation time for a stable DNVM 4 excited in nickel (a) and titanium (b) sublattices of the binary NiTi alloy. Calculations are given for two initial amplitudes $A = 0.051$ and $A = 0.151$ Å (color online)

но в этом случае ДНКМ 4 возбуждается в подрешётке титана. Как хорошо видно, атомы титана совершают периодические колебания, а у атомов никеля в соседней подрешётке смещения отсутствуют. Это указывает на то, что стабильные ДНКМ, возбужденные в одной подрешётке, даже при значительных начальных амплитудах, не передают колебательную энергию атомам соседней подрешётки. Аналогичные результаты были получены при возбуждении других стабильных ДНКМ 1–14 и 23–25 в обеих подрешётках.

Зависимость частоты колебаний от начальной амплитуды для семнадцати стабильных ДНКМ для групп I, II и III представлена на рис. 3. В целом различные группы ДНКМ демонстрируют качественно похожие частотные характеристики. ДНКМ 1 и 23 (группа I), 2 и 24 (группа II), а также 3, 6, 10, 14 и 25 (группа III) характеризуются жёстким типом нелинейности, при которой частота атомных колебаний возрастает с увеличением амплитуды. ДНКМ 5, 7, 9, 11 и 13 (группа II) демонстрируют довольно слабую зависимость частоты от амплитуды в широком интервале начальных амплитуд. ДНКМ 4, 8 и 12 (группа I) показывают мягкий тип нелинейности при возбуждении обеих подрешёток. ДНКМ 10 для подрешётки никеля и ДНКМ 9, 13 и 25 для подрешётки титана начинают проявлять мягкую нелинейность при амплитудах $A > 0.3$ Å, что обусловлено значительным отклонением атомов от равновесных положений. Это связано с наличием двух или трёх ненулевых компонент вектора смещения в модах групп II и III, что вызывает большие смещения атомов по сравнению со смещениями в группе I, приводя к мягкой нелинейности. Кроме того, такое поведение объясняется уменьшением длительности устойчивых периодических колебаний при увеличении амплитуды, что приводит к передаче энергии соседним атомам и разрушению характерной для ДНКМ структуры смещений.

Как показано на рис. 3, при малых амплитудах частотные отклики для подрешёток Ni и Ti разделяются на четыре группы. Предыдущие исследования однокомпонентных колебательных мод в ГЦК-решётке показали, что различные частоты фононов соответствуют различным точкам зоны Бриллюэна [42]. Частоты всех исследованных ДНКМ находятся в интервалах 4.3–5.3 ТГц для подрешётки никеля и 5.3–6.1 ТГц для подрешётки титана. При возбуждении подрешётки никеля ДНКМ 23–25 имеют наименьшие частоты (4.3 ТГц), а ДНКМ 12–14 — наивысшие (5.3 ТГц).

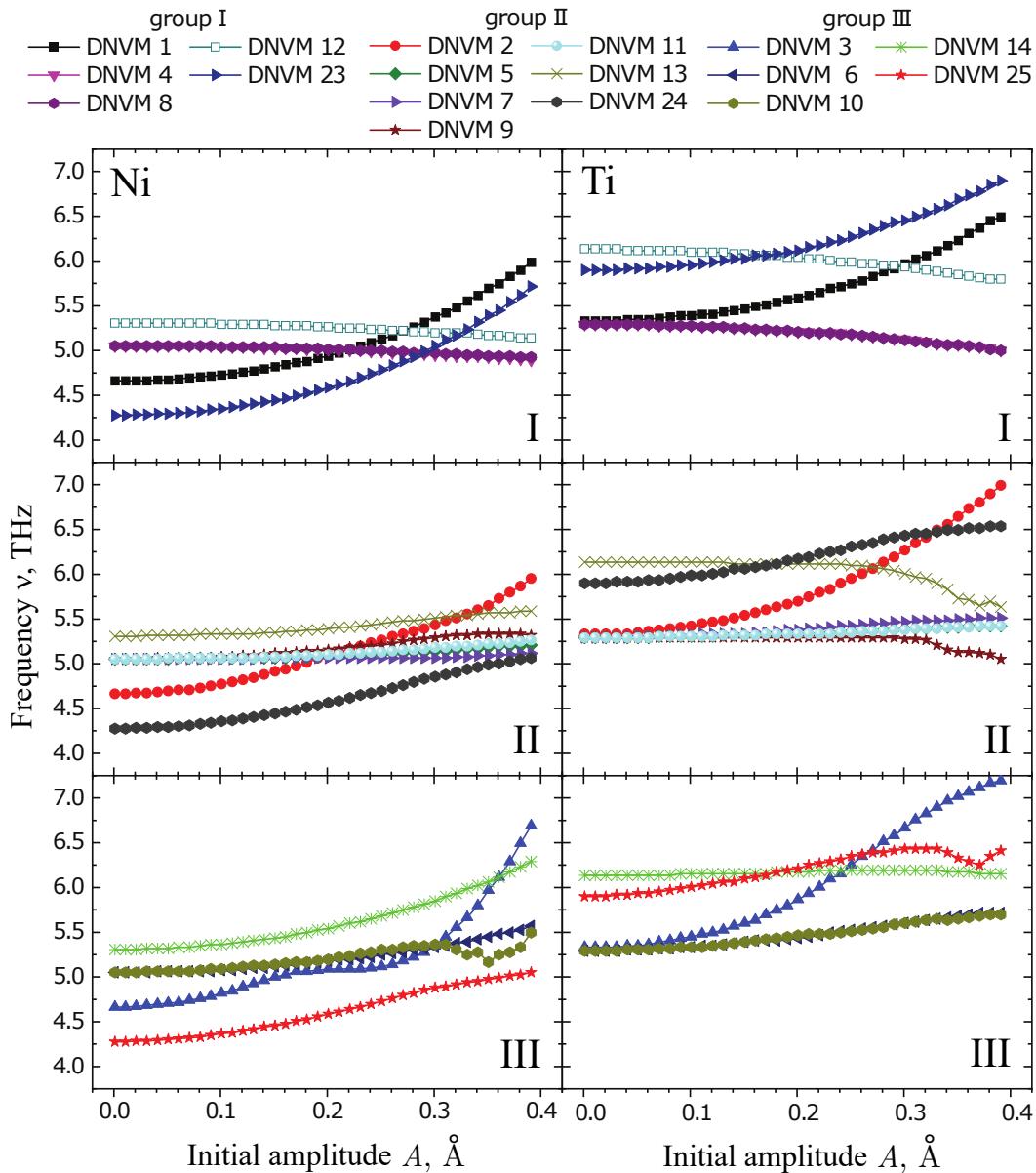


Рис. 3. Частотные характеристики семнадцати стабильных однокомпонентных ДНКМ, возбужденных в простых кубических подрешётках никеля (слева) и титана (справа) в бинарном сплаве NiTi. Для удобства данные разделены на три группы (I, II, III) по количеству ненулевых компонент вектора смещения (см. подробности в тексте). Символы «Ni» и «Ti» указывают на подрешётку с возбуждёнными атомами (цвет онлайн)

Fig. 3. Frequency characteristics of seventeen stable one-component DNVMs excited in simple cubic sublattices of nickel (left) and titanium (right) in the binary NiTi alloy. For convenience, the data are divided into three groups (I, II, III) by the number of nonzero components of the displacement vector (see text for details). The symbols “Ni” and “Ti” indicate the sublattice with excited atoms (color online)

При возбуждении подрешётки титана ДНКМ 4–11 характеризуются наименьшими частотами (5.3 ТГц), а ДНКМ 12–14 имеют самые высокие частоты (6.1 ТГц).

На рис. 4 представлена зависимость полной энергии (суммы потенциальной и кинетической компонент) на атом от начальной амплитуды для семнадцати стабильных однокомпонентных ДНКМ. Во всём интервале начальных амплитуд полная энергия увеличивается пропорционально квадрату смещения атомов от их равновесных положений в решётке. Абсолютные значения

векторов смещения для групп I, II и III соотносятся как $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$, что определяет соответствующую пропорцию полной энергии $1 : 2 : 3$. Следовательно, моды группы III обладают наивысшей энергией, за ними следуют моды группы II с меньшей энергией, а моды группы I характеризуются минимальной энергией.

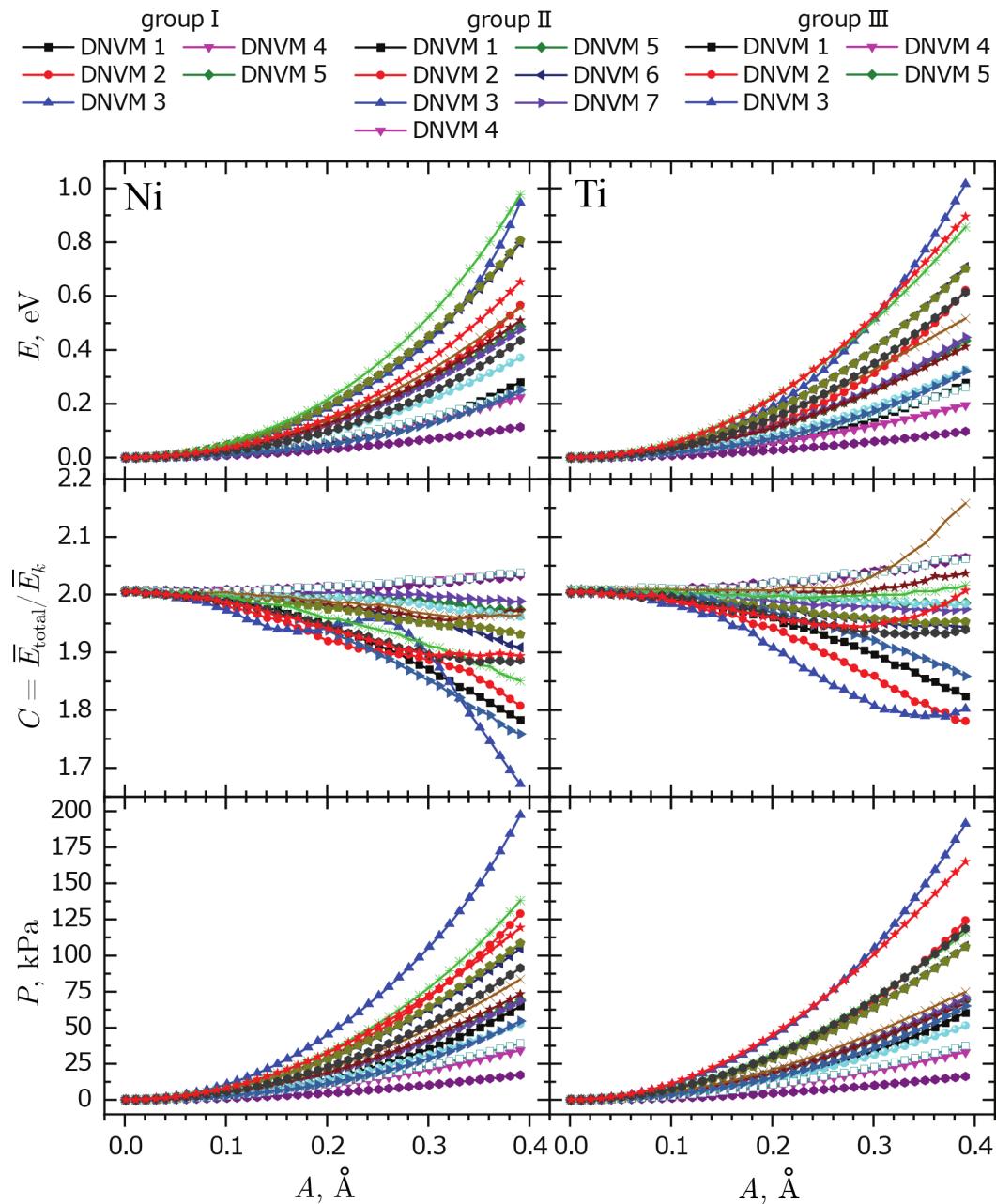


Рис. 4. Зависимость полной энергии на атом, отношение C и гидростатическое давление как функции начальной амплитуды, рассчитанные для семнадцати стабильных однокомпонентных ДНКМ, возбужденных в подрешётках никеля и титана в бинарном сплаве NiTi. Символы «Ni» и «Ti» указывают на подрешётку с возбуждёнными атомами (цвет онлайн)

Fig. 4. Total energy per atom, the ratio C , and hydrostatic pressure as functions of the initial amplitude calculated for seventeen stable one-component DNVMs excited in the nickel and titanium sublattices in the binary NiTi alloy. The symbols “Ni” and “Ti” indicate the sublattice with excited atoms (color online)

Анализ кривых для подрешётки никеля выявил, что минимальная и максимальная полные энергии составляют 0.11 эВ для ДНКМ 8 и 0.98 эВ для ДНКМ 14 соответственно. Для подрешётки титана максимальная энергия достигает 1.02 эВ для ДНКМ 3, а минимальная — 0.10 эВ для ДНКМ 8. ДНКМ 14 демонстрирует максимальную энергию 0.98 эВ, за ней следуют ДНКМ 3 (0.95 эВ) и ДНКМ 6 и 10 (0.81 эВ). При возбуждении ДНКМ 3 в подрешётке титана её энергия достигает значений 1.02 эВ, а ДНКМ 14 и 25 — 0.86 и 0.89 эВ соответственно. В отличие от бинарного сплава Ni_3Al , где ранее наблюдалось чёткое разделение энергетических зависимостей по группам [46], для NiTi такое разделение отсутствует. Моды из соседних групп часто имеют близкие значения энергии. Кроме того, в пределах одной группы могут наблюдаться значительные различия в энергии на атом, например, между ДНКМ 14 и 25 (0.98 и 0.65 эВ для никеля) и ДНКМ 3 и 10 (1.02 и 0.70 эВ для титана). Эти результаты для NiTi отличаются от полученных ранее для однокомпонентных ДНКМ, возбужденных в подрешётке алюминия для сплава Ni_3Al , где моды одной группы накапливают схожие значения энергии [46].

Оценка нелинейности ДНКМ проводилась путём определения отношения полной энергии системы E_{total} к средней кинетической энергии за период колебаний \bar{E}_k , а именно $C = E_{\text{total}}/\bar{E}_k = 1 + \bar{E}_p/\bar{E}_k$, где \bar{E}_p — средняя потенциальная энергия за период. В гармонических системах имеет место равенство $\bar{E}_k = \bar{E}_p$, что приводит к $C = 2$. Однако в нелинейных системах средняя кинетическая энергия за период колебаний не равна средней потенциальной энергии за тот же период, вследствие чего $C \neq 2$. Таким образом, отклонение значения C от 2 служит характеристикой нелинейности колебательных мод и связано с теплоёмкостью кристалла, поскольку показывает долю кинетической энергии в полной энергии системы.

На рис. 4 представлена зависимость отношения C от начальной амплитуды для семнадцати стабильных однокомпонентных ДНКМ, возбуждённых в подрешётках никеля и титана. При малых начальных амплитудах $A < 0.06 \text{ \AA}$ нелинейность ДНКМ слабо выражена для обеих подрешёток, при этом значения C изменяются менее чем на 1%. Однако с увеличением амплитуды ДНКМ с жёстким типом нелинейности демонстрируют снижение отношения C , тогда как моды с мягким типом нелинейности показывают его увеличение. Кроме того, как отмечалось ранее, некоторые ДНКМ могут изменять тип нелинейности с ростом амплитуды, и отношение C реагирует на эти изменения соответствующим образом.

Такое поведение зависимости $C(A)$ объясняется простым механизмом. С увеличением амплитуды колебаний ДНКМ с жёстким типом нелинейности возрастает частота колебаний, что приводит к увеличению средней кинетической энергии \bar{E}_k . Поскольку отношение C обратно пропорционально кинетической энергии, увеличение или уменьшение \bar{E}_k вызывает соответственно уменьшение или увеличение C . Подобное поведение зависимости $C(A)$ наблюдается и для других колебательных мод в различных кристаллических решётках, включая одномерные цепочки частиц [15, 39, 54], а также двух- и трёхмерные кристаллы [41, 44].

Применение периодических граничных условий и термодинамического ансамбля NVE (постоянный объём) при возбуждении ДНКМ приводит к возникновению внутренних механических напряжений в расчётной ячейке. Эти напряжения изменяются во времени с периодом, равным половине периода колебаний ДНКМ, поэтому для анализа используются их средние значения во времени. Зависимость гидростатического давления от начальной амплитуды для семнадцати стабильных ДНКМ, возбуждённых в подрешётках никеля и титана, представлена на рис. 4. Интересно отметить, что гидростатическое давление очень незначительно при низких амплитудах и начинает заметно возрастать при начальных амплитудах выше $A > 0.05 \text{ \AA}$. При дальнейшем увеличении амплитуды гидростатическое давление на стенки расчётной ячейки увеличивается, следуя приблизительно квадратичной зависимости. Максимальные и минимальные значения гидростатического давления составляют 197 кПа для ДНКМ 3 и 17 кПа для ДНКМ 8 в подрешётке никеля и соответственно 191 и 16 кПа в подрешётке титана. Как и в случае полной колебательной энергии (см. рис. 4), чёткое разделение на группы мод отсутствует.

В целом наблюдается корреляция между колебательной энергией мод и создаваемым гидростатическим давлением. Значения давления для ДНКМ одной группы могут существенно различаться. Например, для ДНКМ 3 и 6 (группа III) в подрешётке никеля они равны 197 и 105 кПа, а в подрешётке титана соответственно 191 и 106 кПа. Некоторые моды из различных групп, такие как ДНКМ 2 (группа II) и ДНКМ 25 (группа III) для никеля, а также ДНКМ 24 (группа II) и ДНКМ 14 (группа III) для титана, создают близкие значения гидростатического давления. В общем, однокомпонентные ДНКМ, возбужденные в подрешётках никеля и титана, генерируют очень близкие значения гидростатического давления в бинарном сплаве NiTi.

Прямое сопоставление полученных результатов с данными других авторов не представляется возможным, поскольку в настоящее время практически отсутствуют публикации, посвященные изучению ДНКМ в подрешётках бинарных сплавов. Пожалуй, единственным исключением является наша предыдущая работа [55], в которой подробно исследовались двадцать пять однокомпонентных ДНКМ, возбужденных в простой кубической подрешётке алюминия во всем объеме бинарного сплава Ni_3Al . В связи с этим дальнейшие сравнения носят приблизительный характер.

В работе [55] было установлено, что устойчивые периодические колебания поддерживаются только шестнадцатью ДНКМ 1–4, 6, 7, 9, 12–15, 18, 20, 23–25, тогда как девять ДНКМ 5, 8, 10, 11, 16, 17, 19, 21, 22 оказались нестабильными. Таким образом, в отличие от сплава NiTi, для Ni_3Al характерен другой набор стабильных и нестабильных колебательных мод, что обусловлено различиями в симметрии кристаллической решётки, влияющей на динамику атомов для некоторых ДНКМ. Отметим, что ДНКМ 1–4, 6, 7, 9, 12–14, 23–25 демонстрируют устойчивость, а ДНКМ 16, 17, 19, 21, 22 – нестабильность в обоих бинарных сплавах.

Значения полной колебательной энергии, аккумулируемой ДНКМ в Ni_3Al , сравнимы с аналогичными значениями для NiTi. Однако, в отличие от Ni_3Al , различия в полной энергии внутри одной группы мод значительно выше в NiTi. ДНКМ, возбуждаемые в NiTi, вызывают существенные отклонения в параметре C , что свидетельствует о более выраженной нелинейности и более значительном вкладе в удельную теплоемкость кристалла. Важно отметить, что в настоящей работе и в публикации [55] использовалась расчетная ячейка одинакового размера, что делает такое сравнение корректным. Таким образом, одни и те же ДНКМ, возбуждаемые на структурно эквивалентных подрешётках различных бинарных сплавов, могут обладать различными амплитудно-частотными характеристиками и оказывать различное влияние на свойства кристалла. На данном этапе исследования невозможно утверждать, что исследованные ДНКМ будут вести себя сходным образом в любом бинарном сплаве с аналогичной кристаллической решёткой. Этот вопрос требует дополнительного рассмотрения.

Изучение ДНКМ в бинарных сплавах методами молекулярной динамики с использованием многочастичных межатомных потенциалов остается относительно узкоспециализированной областью, и детализированные данные для других сплавов крайне ограничены. Значительная часть предыдущих исследований опиралась на упрощенные парные межатомные потенциалы, такие как потенциалы Морзе или β -Ферми–Паста–Улам–Цингу (β-FPUT), которые не в полной мере учитывают сложность связей в реальных материалах, особенно в металлических сплавах, где многочастичные эффекты и угловые зависимости играют ключевую роль [14, 16, 41, 43, 55–60]. Это существенно ограничивает возможности количественного сравнения результатов указанных исследований с настоящей работой.

Заключение

С использованием метода молекулярной динамики в бинарном сплаве NiTi были возбуждены однокомпонентные трёхмерные ДНКМ в кубических подрешётках никеля и титана. Эти семнадцать колебательных мод поддерживают стабильные периодические колебания. При возбуждении мод в одной подрешётке их энергия локализуется в этой подрешётке и не передаётся

в другую. В исследованном интервале амплитуд стабильные ДНКМ могут накапливать колебательную энергию от 0.11 до 0.98 эВ в подрешётке никеля и от 0.10 до 1.02 эВ в подрешётке титана на атом. Величина накопленной энергии определяется количеством ненулевых компонентов вектора смещения атомов и пропорциональна квадрату их начального смещения. Возбуждение ДНКМ приводит к снижению удельной теплоёмкости кристалла (отношение полной энергии к кинетической) для мод с жёстким типом нелинейности, тогда как для мод с мягкой нелинейностью теплоёмкость возрастает. Возбуждение стабильных ДНКМ в подрешётках никеля и титана приводит к возникновению гидростатического давления, пропорционального длине вектора смещения атомов. При этом давление, вызванное ДНКМ из группы III, превосходит давление от мод групп I и II.

Список литературы

1. *Shi J. C., Zeng L. W., Chen J. B.* Two-dimensional localized modes in saturable quintic nonlinear lattices // *Nonlinear Dyn.* 2023. Vol. 111, no. 14. P. 13415–13424. DOI: 10.1007/s11071-023-08558-9.
2. *Russell F. M., Archilla J. F. R.* Intrinsic localized modes in polymers and hyperconductors // *Low Temp. Phys.* 2022. Vol. 48, no. 12. P. 1009–1014. DOI: 10.1063/10.0015109.
3. *Abbagari S., Houwe A., Akinyemi L., Bouetou T. B.* Modulated wave patterns brought by higher-order dispersion and cubic-quintic nonlinearity in monoatomic chains with anharmonic potential // *Wave Motion*. 2023. Vol. 123. P. 103220. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2023.103220.
4. *Hall D. A.* Review nonlinearity in piezoelectric ceramics // *Journal of Materials Science*. 2001. Vol. 36, no. 19. P. 4575–4601. DOI: 10.1023/A:1017959111402.
5. *Zhang Y. N., Wu J. Y., Jia L. N., Qu Y., Yang Y. Y., Jia B. H., Moss D. J.* Graphene oxide for nonlinear integrated photonics // *Laser and Photonics Reviews*. 2023. Vol. 17, no. 3. P. 2200512. DOI: 10.1002/lpor.202200512.
6. *Sun T., Shao L. H., Zhang K.* Anomalous heat conduction and thermal rectification in weak nonlinear lattices // *Eur. Phys. J. B*. 2023. Vol. 96, no. 7. P. 99. DOI: 10.1140/epjb/s10051-023-00568-1.
7. *Ren B. Q., Arkhipova A. A., Zhang Y. Q., Kartashov Y. V., Wang H. G., Zhuravitskii S. A., Skryabin N. N., Dyakonov I. V., Kalinkin A. A., Kulik S. P., Kompanets V. O., Chekalin S. V., Zadkov V. N.* Observation of nonlinear disclination states // *Light: Science and Applications*. 2023. Vol. 12, no. 1. P. 194. DOI: 10.1038/s41377-023-01235-x.
8. *Kang J., Liu T., Yan M., Yang D. D., Huang X. J., Wei R. S., Qiu J. R., Dong G. P., Yang Z. M., Nori F.* Observation of square-root higher-order topological states in photonic waveguide arrays // *Laser and Photonics Reviews*. 2023. Vol. 17, no. 6. P. 2200499. DOI: 10.1002/lpor.202200499.
9. *Долгов А. С.* О локализации колебаний в нелинейной кристаллической структуре // *Физика твердого тела*. 1986. Т. 28, № 6. С. 1641–1644.
10. *Sievers A. J., Takeno S.* Intrinsic localized modes in anharmonic crystals // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 61, no. 8. P. 970–973. DOI: 10.1103/PhysRevLett.61.970.
11. *Дмитриев С. В., Корзикова Е. А., Баимова Ю. А., Веларде М. Г.* Дискретные бризеры в кристаллах // *УФН*. 2016. Т. 186. С. 471–488. DOI: 10.3367/UFNr.2016.02.037729.
12. *Dorignac J., Zhou J., Cambell D. K.* Discrete breathers in nonlinear Schrödinger hypercubic lattices with arbitrary power nonlinearity // *Physica D*. 2008. Vol. 237, no. 4. P. 486–504. DOI: 10.1016/j.physd.2007.09.018.
13. *Gómez-Gardeñes J., Floría L. M., Bishop A. R.* Discrete breathers in two-dimensional anisotropic nonlinear Schrödinger lattices // *Physica D*. 2006. Vol. 216, no. 1. P. 31–43. DOI: 10.1016/j.physd.2005.12.017.
14. *Babicheva R. I., Semenov A. S., Soboleva E. G., Kudreyko A. A., Zhou K., Dmitriev S. V.* Discrete breathers in a triangular beta-Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou lattice // *Phys. Rev. E*. 2021. Vol. 103, no. 5. P. 052202. DOI: 10.1103/PhysRevE.103.052202.

15. Korznikova E. A., Morkina A. Y., Singh M., Krivtsov A. M., Kuzkin V. A., Gani V. A., Bebikhov Y. V., Dmitriev S. V. Effect of discrete breathers on macroscopic properties of the Fermi-Pasta-Ulam chain // *Eur. Phys. J. B.* 2020. Vol. 93, no. 7. P. 123. DOI: 10.1140/epjb/e2020-10173-7.
16. Kolesnikov I. D., Shcherbinin S. A., Bebikhov Y. V., Korznikova E. A., Shepelev I. A., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V. Chaotic discrete breathers in bcc lattice // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2024. Vol. 178. P. 114339. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.114339.
17. Bachurina O. V. Linear discrete breather in fcc metals // *Comp. Mater. Sci.* 2019. Vol. 160. P. 217–221. DOI: 10.1016/j.commatsci.2019.01.014.
18. Bachurina O. V. Plane and plane-radial discrete breathers in fcc metals // *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 2019. Vol. 27, no. 5. P. 055001. DOI: 10.1088/1361-651X/ab17b7.
19. Bachurina O. V., Kudreyko A. A. Two-dimensional discrete breathers in fcc metals // *Comp. Mater. Sci.* 2020. Vol. 182. P. 109737. DOI: 10.1016/j.commatsci.2020.109737.
20. Bachurina O. V., Kudreyko A. A. Two-component localized vibrational modes in fcc metals // *Eur. Phys. J. B.* 2021. Vol. 94, no. 11. P. 218. DOI: 10.1140/epjb/s10051-021-00227-3.
21. Haas M., Hizhnyakov V., Shelkan A., Klopov M., Sievers A. J. Prediction of high-frequency intrinsic localized modes in Ni and Nb // *Physical Review B*. 2011. Vol. 84, no. 14. P. 144303. DOI: 10.1103/PhysRevB.84.144303.
22. Krylova K. A., Lobzenko I. P., Semenov A. S., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V. Spherically localized discrete breathers in bcc metals V and Nb // *Comp. Mater. Sci.* 2020. Vol. 180. P. 109695. DOI: 10.1016/j.commatsci.2020.109695.
23. Murzaev R. T., Kistanov A. A., Dubinko V. I., Terentyev D. A., Dmitriev S. V. Moving discrete breathers in bcc metals V, Fe and W // *Comp. Mater. Sci.* 2015. Vol. 98. P. 88–92. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.10.061.
24. Bachurina O. V., Murzaev R. T., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V., Bachurin D. V. Atomistic study of two-dimensional discrete breathers in hcp titanium // *Eur. Phys. J. B.* 2022;95(7):104. DOI: 10.1140/epjb/s10051-022-00367-0.
25. Бачурина О. В., Мурзаев Р. Т., Семенов А. С., Корзникова Е. А., Дмитриев С. В. Свойства движущихся дискретных бризеров в бериллии // Физика твердого тела. 2018. Т. 60, № 5. С. 978–983. DOI: 10.21883/FTT.2018.05.45798.334.
26. Murzaev R. T., Bachurin D. V., Korznikova E. A., Dmitriev S. V. Localized vibrational modes in diamond // *Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 381, no. 11. P. 1003–1008. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.01.014.
27. Voulgarakis N. K., Hadjisavvas G., Kelires P. C., Tsironis G. P. Computational investigation of intrinsic localization in crystalline Si // *Physical Review B*. 2004. Vol. 69, no. 11. P. 113201. DOI: 10.1103/PhysRevB.69.113201.
28. Захаров П. В., Старостенков М. Д., Дмитриев С. В., Медведев Н. Н., Еремин А. М. Моделирование взаимодействия дискретных бризеров различного типа в нановолокне кристалла Pt₃Al // ЖЭТФ. 2015. Т. 148, № 2. С. 252–257.
29. Zakharov P. V., Korznikova E. A., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G., Zhou K. Surface discrete breathers in Pt₃Al intermetallic alloy // *Surface Science*. 2019. Vol. 679. P. 1–5. DOI: 10.1016/j.susc.2018.08.011.
30. Сахненко В. П., Чечин Г. М. Симметрийные правила отбора в нелинейной динамике атомных систем // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 3. С. 308–310.
31. Сахненко В. П., Чечин Г. М. Кусты мод и нормальные колебания для нелинейных динамических систем с дискретной симметрией // Докл. РАН. 1994. Т. 338, № 1. С. 42–45.
32. Chechin G. M., Sakhnenko V. P. Interactions between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. Exact results // *Physica D*. 1998. Vol. 117, no. 1–4. P. 43–76. DOI: 10.1016/S0167-2789(98)80012-2.

33. *Daumont I., Dauxois T., Peyrard M.* Modulational instability: First step towards energy localization in nonlinear lattices // *Nonlinearity*. 1997. Vol. 10, no. 3. P. 617–630. DOI: 10.1088/0951-7715/10/3/003.
34. *Doi Y., Nakatani A., Yoshimura K.* Modulational instability of zone boundary mode and band edge modes in nonlinear diatomic lattices // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 79, no. 2. P. 026603. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.026603.
35. *Zhang X. C., Shkulinov A., Zhang Y.* Extreme terahertz science // *Nature Photon*. 2017. Vol. 11, no. 1. P. 16–18. DOI: 10.1038/nphoton.2016.249.
36. *Hafez H. A., Chai X., Ibrahim A., Mondal S., Féralchou D., Ropagnol X., Ozaki T.* Intense terahertz radiation and their applications // *J. Opt.* 2016. Vol. 18, no. 9. P. 093004. DOI: 10.1088/2040-8978/18/9/093004.
37. *Chechin G. M., Ryabov D. S., Zhukov K. G.* Stability of low-dimensional bushes of vibrational modes in the Fermi-Pasta-Ulam chains // *Physica D*. 2005. Vol. 203, no. 3–4. P. 121–166. DOI: 10.1016/j.physd.2005.03.009.
38. *Chechin G. M., Sizintsev D. A., Usoltsev O. A.* Nonlinear atomic vibrations and structural phase transitions in strained carbon chains // *Comp. Mater. Sci.* 2017. Vol. 138. P. 353–367. DOI: 10.1016/j.commatsci.2017.07.004.
39. *Morkina A. Y., Singh M., Bebikhov Y. V., Korznikova E. A., Dmitriev S. V.* Variation of the specific heat in the Fermi–Pasta–Ulam chain due to energy localization // *Phys. Solid State*. 2022. Vol. 64. P. 446–454. DOI: 10.1134/S1063783422090050.
40. *Abdullina D. U., Semenova M. N., Semenov A. S., Korznikova E. A., Dmitriev S. V.* Stability of delocalized nonlinear vibrational modes in graphene lattice // *Eur. Phys. J. B*. 2019. Vol. 92, no. 11. P. 249. DOI: 10.1140/epjb/e2019-100436-y.
41. *Upadhyaya A., Semenova M. N., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V.* Chaotic discrete breathers and their effect on macroscopic properties of triangular lattice // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2022. Vol. 112. P. 106541. DOI: 10.1016/j.cnsns.2022.106541.
42. *Shcherbinin S. A., Krylova K. A., Chechin G. M., Soboleva E. G., Dmitriev S. V.* Delocalized nonlinear vibrational modes in fcc metals // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2022. Vol. 104. P. 106039. DOI: 10.1016/j.cnsns.2021.106039.
43. *Babicheva R. I., Semenov A. S., Shcherbinin S. A., Korznikova E. A., Kudreyko A. A., Vivegananthan P., Zhou K., Dmitriev S. V.* Effect of the stiffness of interparticle bonds on properties of delocalized nonlinear vibrational modes in an fcc lattice // *Phys. Rev. E*. 2022. Vol. 105, no. 6. P. 064204. DOI: 10.1103/PhysRevE.105.064204.
44. *Morkina A. Y., Bachurin D. V., Dmitriev S. V., Semenov A. S., Korznikova E. A.* Modulational instability of delocalized modes in fcc copper // *Materials*. 2022. Vol. 15, no. 16. P. 5597. DOI: 10.3390/ma15165597.
45. *Bachurina O. V., Murzaev R. T., Shcherbinin S. A., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V., Bachurin D. V.* Multi-component delocalized nonlinear vibrational modes in nickel // *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 2023. Vol. 31. P. 075009. DOI: 10.1088/1361-651X/acf14a.
46. *Bachurina O. V., Murzaev R. T., Shcherbinin S. A., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V., Bachurin D. V.* Delocalized nonlinear vibrational modes in Ni₃Al // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2024. Vol. 132. P. 107890. DOI: 10.1016/j.cnsns.2024.107890.
47. *Ostropiko E. S., Konstantinov A. Y.* Stress-induced martensite formation under high strain rate loading in TiNi shape memory alloy // *Lett. Mater.* 2024. Vol. 14, no. 2. P. 143–149. DOI: 10.48612/letters/2024-2-143-149
48. *Rubanik V. V., Bahrets D. A., Rubanik V. V., Urban V. I., Dorodeiko V. G., Andreev V. A., Chekan N. M., Akula I. P.* Mechanical properties of TiNi medical alloy with bioinert coatings // *Lett. Mater.* 2023. Vol. 13, no. 4. P. 353–356. DOI: 10.22226/2410-3535-2023-4-353-356.

49. Resnina N. N., Ivanov A. M., Belyaev F. S., Volkov A. E., Belyaev S. P. Simulation of recoverable strain variation during isothermal holding of the Ni51Ti49 alloy under various regimes // Lett. Mater. 2023. Vol. 13, no. 1. P. 33–38. DOI: 10.22226/2410-3535-2023-1-33-38.
50. Bachurina O. V., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V., Bachurin D. V. Impact of delocalized nonlinear vibrational modes on the properties of NiTi // Phys. Lett. A. 2025. Vol. 555. P. 130769. DOI: 10.1016/j.physleta.2025.130769.
51. Thompson A. P., Aktulga H. M., Berger R., Bolintineanu D. S., Brown W. M., Crozier P. S., Veld P. J. I., Kohlmeyer A., Moore S. G., Nguyen T. D., Shan R., Stevens M. J., Tranchida J., Trott C., Plimpton S. J. LAMMPS-a flexible simulation tool for particle-based materials modeling at the atomic, meso, and continuum scales // Computer Physics Communications. 2022. Vol. 271. P. 108171. DOI: 10.1016/j.cpc.2021.108171.
52. LAMMPS [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://lammps.sandia.gov>.
53. Kim Y. K., Kim H. K., Jung W. S., Lee B. J. Development and application of Ni-Ti and Ni-Al-Ti 2NN-MEAM interatomic potentials for Ni-base superalloys // Comp. Mater. Sci. 2017. Vol. 139. P. 225–233. DOI: 10.1016/j.commatsci.2017.08.002.
54. Singh M., Morkina A. Y., Korznikova E. A., Dubinko V. I., Terentiev D. A., Xiong D. X., Naimark O. B., Gani V. A., Dmitriev S. V. Effect of discrete breathers on the specific heat of a nonlinear chain. J. Nonlinear Sci. 2021. Vol. 31, no. 1. P. 12. DOI: 10.1007/s00332-020-09663-4.
55. Naumov E. K., Bebikhov Y. V., Ekomasov E. G., Soboleva E. G., Dmitriev S. V. Discrete breathers in square lattices from delocalized nonlinear vibrational modes // Phys. Rev. E. 2023. Vol. 107, no. 3. P. 034214. DOI: 10.1103/PhysRevE.107.034214.
56. Bachurin D. V., Murzaev R. T., Abdullina D. U., Semenova M. N., Bebikhov Y. V., Dmitriev S. V. Chaotic discrete breathers in bcc lattice: Effect of the first- and second interactions // Physica D. 2024. Vol. 470. P. 134344. DOI: 10.1016/j.physd.2024.134344.
57. Bebikhov Y. V., Naumov E. K., Semenova M. N., Dmitriev S. V. Discrete breathers in a β -FPUT square lattice from in-band external driving // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2024. Vol. 132. P. 107897. DOI: 10.1016/j.cnsns.2024.107897.
58. Shcherbinin S. A., Bebikhov Y. V., Abdullina D. U., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V. Delocalized nonlinear vibrational modes and discrete breathers in a body centered cubic lattice // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2024. Vol. 135. P. 108033. DOI: 10.1016/j.cnsns.2024.108033.
59. Shepelev I. A., Soboleva E. G., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V. Influence of the relative stiffness of second-neighbor interactions on chaotic discrete breathers in a square lattice // Chaos, Solitons and Fractals. 2024. Vol. 183. P. 114885. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114885.
60. Shcherbinin S. A., Kazakov A. M., Bebikhov Y. V., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V. Delocalized nonlinear vibrational modes and discrete breathers in β -FPUT simple cubic lattice // Phys. Rev. E. 2024. Vol. 109, no. 1. P. 014215. DOI: 10.1103/PhysRevE.109.014215.

References

1. Shi JC, Zeng LW, Chen JB. Two-dimensional localized modes in saturable quintic nonlinear lattices. Nonlinear Dyn. 2023;111(14):13415–13424. DOI: 10.1007/s11071-023-08558-9.
2. Russell FM, Archilla JFR. Intrinsic localized modes in polymers and hyperconductors. Low Temp. Phys. 2022;48(12):1009–1014. DOI: 10.1063/10.0015109.
3. Abbagari S, Houwe A, Akinyemi L, Bouetou TB. Modulated wave patterns brought by higher-order dispersion and cubic-quintic nonlinearity in monoatomic chains with anharmonic potential. Wave Motion. 2023;123:103220. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2023.103220.
4. Hall DA. Review nonlinearity in piezoelectric ceramics. Journal of Materials Science. 2001;36(19): 4575–4601. DOI: 10.1023/A:1017959111402.

5. Zhang YN, Wu JY, Jia LN, Qu Y, Yang YY, Jia BH, Moss DJ. Graphene oxide for nonlinear integrated photonics. *Laser Photonics Reviews*. 2023;17(3):2200512. DOI: 10.1002/lpor.202200512.
6. Sun T, Shao LH, Zhang K. Anomalous heat conduction and thermal rectification in weak nonlinear lattices. *Eur. Phys. J. B*. 2023;96(7):99. DOI: 10.1140/epjb/s10051-023-00568-1.
7. Ren BQ, Arkhipova AA, Zhang YQ, Kartashov YV, Wang HG, Zhuravitskii SA, Skryabin NN, Dyakonov IV, Kalinkin AA, Kulik SP, Kompanets VO, Chekalin SV, Zadkov VN. Observation of nonlinear disclination states. *Light: Science and Applications*. 2023;12(1):194. DOI: 10.1038/s41377-023-01235-x.
8. Kang J, Liu T, Yan M, Yang DD, Huang XJ, Wei RS, Qiu JR, Dong GP, Yang ZM, Nori F. Observation of square-root higher-order topological states in photonic waveguide arrays. *Laser and Photonics Reviews*. 2023;17(6):2200499. DOI: 10.1002/lpor.202200499.
9. Dolgov AS. On localization of oscillations in nonlinear crystal structure. *Sov. Phys. Solid State*. 1986;28:907–910.
10. Sievers AJ, Takeno S. Intrinsic Localized Modes in Anharmonic Crystals. *Phys. Rev. Lett.* 1988;61(8):970–973. DOI: 10.1103/PhysRevLett.61.970.
11. Dmitriev SV, Korznikova EA, Baimova YA, Velarde MG. Discrete breathers in crystals. *Phys. Usp.* 2016;59(5):446–461. DOI: 10.3367/UFNe.2016.02.037729.
12. Dorignac J, Zhou J, Cambell DK. Discrete breathers in nonlinear Schrodinger hypercubic lattices with arbitrary power nonlinearity. *Physica D*. 2008;237(4):486–504. DOI: 10.1016/j.physd.2007.09.018.
13. Gómez-Gardeñes J, Floría LM, Bishop AR. Discrete breathers in two-dimensional anisotropic nonlinear Schrodinger lattices. *Physica D*. 2006;216(1):31–43. DOI: 10.1016/j.physd.2005.12.017.
14. Babicheva RI, Semenov AS, Soboleva EG, Kudreyko AA, Zhou K, Dmitriev SV. Discrete breathers in a triangular beta-Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou lattice. *Phys. Rev. E*. 2021;103(5):052202. DOI: 10.1103/PhysRevE.103.052202.
15. Korznikova EA, Morkina AY, Singh M, Krivtsov AM, Kuzkin VA, Gani VA, Bebikhov YV, Dmitriev SV. Effect of discrete breathers on macroscopic properties of the Fermi-Pasta-Ulam chain. *Eur. Phys. J. B*. 2020;93(7):123. DOI: 10.1140/epjb/e2020-10173-7.
16. Kolesnikov ID, Shcherbinin SA, Bebikhov YV, Korznikova EA, Shepelev IA, Kudreyko AA, Dmitriev SV. Chaotic discrete breathers in bcc lattice. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2024;178:114339. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.114339.
17. Bachurina OV. Linear discrete breather in fcc metals. *Computational Materials Science*. 2019;160:217–221. DOI: 10.1016/j.commatsci.2019.01.014.
18. Bachurina OV. Plane and plane-radial discrete breathers in fcc metals. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 2019;27(5):055001. DOI: 10.1088/1361-651X/ab17b7.
19. Bachurina OV, Kudreyko AA. Two-dimensional discrete breathers in fcc metals. *Computational Materials Science*. 2020;182:109737. DOI: 10.1016/j.commatsci.2020.109737.
20. Bachurina OV, Kudreyko AA. Two-component localized vibrational modes in fcc metals. *Eur. Phys. J. B*. 2021;94(11):218. DOI: 10.1140/epjb/s10051-021-00227-3.
21. Haas M, Hizhnyakov V, Shelkan A, Klopov M, Sievers AJ. Prediction of high-frequency intrinsic localized modes in Ni and Nb. *Physical Review B*. 2011;84(14):144303. DOI: 10.1103/PhysRevB.84.144303.
22. Krylova KA, Lobzenko IP, Semenov AS, Kudreyko AA, Dmitriev SV. Spherically localized discrete breathers in bcc metals V and Nb. *Comp. Mater. Sci.* 2020;180:109695. DOI: 10.1016/j.commatsci.2020.109695.
23. Murzaev RT, Kistanov AA, Dubinko VI, Terentyev DA, Dmitriev SV. Moving discrete breathers in bcc metals V, Fe and W. *Comp. Mater. Sci.* 2015;98:88–92. DOI: 10.1016/j.commatsci.2014.10.061.
24. Bachurina OV, Murzaev RT, Kudreyko AA, Dmitriev SV, Bachurin DV. Atomistic study of two-

- dimensional discrete breathers in hcp titanium. *Eur. Phys. J. B.* 2022;95(7):104. DOI: 10.1140/epjb/s10051-022-00367-0.
25. Bachurina OV, Murzaev RT, Semenov AS, Korznikova EA, Dmitriev SV. Properties of moving discrete breathers in beryllium. *Phys. Solid State.* 2018;60(5):989–994. DOI: 10.1134/S1063783418050049.
 26. Murzaev RT, Bachurin DV, Korznikova EA, Dmitriev SV. Localized vibrational modes in diamond. *Phys. Lett. A.* 2017;381(11):1003–1008. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.01.014.
 27. Voulgarakis NK, Hadjisavvas G, Kelires PC, Tsironis GP. Computational investigation of intrinsic localization in crystalline Si. *Physical Review B.* 2004;69(11):113201. DOI: 10.1103/PhysRevB.69.113201.
 28. Zakharov PV, Starostenkov MD, Dmitriev SV, Medvedev NN, Eremin AM. Simulation of the interaction between discrete breathers of various types in a Pt₃Al crystal nanofiber. *J. Exp. Theor. Phys.* 2015;121(2):217–221. DOI: 10.1134/S1063776115080154.
 29. Zakharov PV, Korznikova EA, Dmitriev SV, Ekomasov EG, Zhou K. Surface discrete breathers in Pt₃Al intermetallic alloy. *Surface Science.* 2019;679:1–5. DOI: 10.1016/j.susc.2018.08.011.
 30. Sakhnenko VP, Chechin GM. Symmetry selection rules in nonlinear dynamics of atomic systems. *Doklady Physics.* 1993;38:219–220.
 31. Sakhnenko VP, Chechin GM. Bushes of modes and normal vibrations in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. *Dokl. Math.* 1994;39(9):625–628.
 32. Chechin GM, Sakhnenko VP. Interactions between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. Exact results. *Physica D.* 1998;117(1–4):43–76. DOI: 10.1016/S0167-2789(98)80012-2.
 33. Daumont I, Dauxois T, Peyrard M. Modulational instability: First step towards energy localization in nonlinear lattices. *Nonlinearity.* 1997;10(3):617–630. DOI: 10.1088/0951-7715/10/3/003.
 34. Doi Y, Nakatani A, Yoshimura K. Modulational instability of zone boundary mode and band edge modes in nonlinear diatomic lattices. *Phys. Rev. E.* 2009;79(2):026603. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.026603.
 35. Zhang XC, Shkurinov A, Zhang Y. Extreme terahertz science. *Nature Photon.* 2017;11(1):16–18. DOI: 10.1038/nphoton.2016.249.
 36. Hafez HA, Chai X, Ibrahim A, Mondal S, Féralchou D, Ropagnol X, Ozaki T. Intense terahertz radiation and their applications. *J. Opt.* 2016;18(9):093004. DOI: 10.1088/2040-8978/18/9/093004.
 37. Chechin GM, Ryabov DS, Zhukov KG. Stability of low-dimensional bushes of vibrational modes in the Fermi-Pasta-Ulam chains. *Physica D.* 2005;203(3–4):121–166. DOI: 10.1016/j.physd.2005.03.009.
 38. Chechin GM, Sizintsev DA, Usoltsev OA. Nonlinear atomic vibrations and structural phase transitions in strained carbon chains. *Comp. Mater. Sci.* 2017;138:353–367. DOI: 10.1016/j.commatsci.2017.07.004.
 39. Morkina AY, Singh M, Bebikhov YV, Korznikova EA, Dmitriev SV. Variation of the Specific Heat in the Fermi–Pasta–Ulam Chain due to Energy Localization. *Phys. Solid State.* 2023;64:446–454. DOI: 10.1134/S1063783422090050.
 40. Abdullina DU, Semenova MN, Semenov AS, Korznikova EA, Dmitriev SV. Stability of delocalized nonlinear vibrational modes in graphene lattice. *Eur. Phys. J. B.* 2019;92(11):249. DOI: 10.1140/epjb/e2019-100436-y.
 41. Upadhyaya A, Semenova MN, Kudreyko AA, Dmitriev SV. Chaotic discrete breathers and their effect on macroscopic properties of triangular lattice. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2022;112:106541. DOI: 10.1016/j.cnsns.2022.106541.
 42. Shcherbinin SA, Krylova KA, Chechin GM, Soboleva EG, Dmitriev SV. Delocalized nonlinear vibrational modes in fcc metals. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2022;104:106039. DOI: 10.1016/j.cnsns.2021.106039.

43. Babicheva RI, Semenov AS, Shcherbinin SA, Korznikova EA, Kudreyko AA, Viveganathan P, Zhou K, Dmitriev SV. Effect of the stiffness of interparticle bonds on properties of delocalized nonlinear vibrational modes in an fcc lattice. *Phys. Rev. E.* 2022;105(6):064204. DOI: 10.1103/PhysRevE.105.064204.
44. Morkina AY, Bachurin DV, Dmitriev SV, Semenov AS, Korznikova EA. Modulational instability of delocalized modes in fcc copper. *Materials.* 2022;15(16):5597. DOI: 10.3390/ma15165597.
45. Bachurina OV, Murzaev RT, Shcherbinin SA, Kudreyko AA, Dmitriev SV, Bachurin DV. Multi-component delocalized nonlinear vibrational modes in nickel. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 2023;31:075009. DOI: 10.1088/1361-651X/acf14a.
46. Bachurina OV, Murzaev RT, Shcherbinin SA, Kudreyko AA, Dmitriev SV, Bachurin DV. Delocalized nonlinear vibrational modes in Ni_3Al . *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2024;132:107890. DOI: 10.1016/j.cnsns.2024.107890.
47. Ostropiko ES, Konstantinov AY. Stress-induced martensite formation under high strain rate loading in TiNi shape memory alloy. *Lett. Mater.* 2024;14(2):143–149. DOI: 10.48612/letters/2024-2-143-149.
48. Rubanik VV, Bahrets DA, Rubanik jr. VV, Urban VI, Dorodeiko VG, Andreev VA, Chekan NM, Akula IP. Effect Mechanical properties of TiNi medical alloy with bioinert coatings. *Lett. Mater.* 2023;13(4):353–356. DOI: 10.22226/2410-3535-2023-4-353-356.
49. Resnina NN, Ivanov AM, Belyaev FS, Volkov AE, Belyaev SP. Simulation of recoverable strain variation during isothermal holding of the Ni51Ti49 alloy under various regimes. *Lett. Mater.* 2023;13(1):33–38. DOI: 10.22226/2410-3535-2023-1-33-38.
50. Bachurina OV, Kudreyko AA, Dmitriev SV, Bachurin DV. Impact of delocalized nonlinear vibrational modes on the properties of NiTi. *Phys. Lett. A.* 2025;555:130769. DOI: 10.1016/j.physleta.2025.130769.
51. Thompson AP, Aktulga HM, Berger R, Bolintineanu DS, Brown WM, Crozier PS, Veld PJI, Kohlmeyer A, Moore SG, Nguyen TD, Shan R, Stevens MJ, Tranchida J, Trott C, Plimpton SJ. LAMMPS-a flexible simulation tool for particle-based materials modeling at the atomic, meso, and continuum scales. *Computer Physics Communications.* 2022;271:108171. DOI: 10.1016/j.cpc.2021.108171.
52. LAMMPS [Electronic resource]. Available from: <http://lammps.sandia.gov>.
53. Kim YK, Kim HK, Jung WS, Lee BJ. Development and application of Ni-Ti and Ni-Al-Ti 2NN-MEAM interatomic potentials for Ni-base superalloys. *Comp. Mater. Sci.* 2017;139:225–233. DOI: 10.1016/j.commatsci.2017.08.002.
54. Singh M, Morkina AY, Korznikova EA, Dubinko VI, Terentiev DA, Xiong DX, Naimark OB, Gani VA, Dmitriev SV. Effect of discrete breathers on the specific heat of a nonlinear chain. *J. Nonlinear Sci.* 2021;31(1):12. DOI: 10.1007/s00332-020-09663-4.
55. Naumov EK, Bebikhov YV, Ekomasov EG, Soboleva EG, Dmitriev SV. Discrete breathers in square lattices from delocalized nonlinear vibrational modes. *Phys. Rev E.* 2023;107(3):034214. DOI: 10.1103/PhysRevE.107.034214.
56. Bachurin DV, Murzaev RT, Abdullina DU, Semenova MN, Bebikhov YV, Dmitriev SV. Chaotic discrete breathers in bcc lattice: Effect of the first- and second interactions. *Physica D.* 2024;470:134344. DOI: 10.1016/j.physd.2024.134344.
57. Bebikhov YV, Naumov EK, Semenova MN, Dmitriev SV. Discrete breathers in a β -FPUT square lattice from in-band external driving. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2024;132:107897. DOI: 10.1016/j.cnsns.2024.107897.
58. Shcherbinin SA, Bebikhov YV, Abdullina DU, Kudreyko AA, Dmitriev SV. Delocalized nonlinear vibrational modes and discrete breathers in a body centered cubic lattice. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2024;135:108033. DOI: 10.1016/j.cnsns.2024.108033.

59. Shepelev IA, Soboleva EG, Kudreyko AA, Dmitriev SV. Influence of the relative stiffness of second-neighbor interactions on chaotic discrete breathers in a square lattice. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2024;183:114885. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114885.
60. Shcherbinin SA, Kazakov AM, Bebikhov YV, Kudreyko AA, Dmitriev SV. Delocalized nonlinear vibrational modes and discrete breathers in β -FPUT simple cubic lattice. *Phys. Rev. E*. 2024;109(1):014215. DOI: 10.1103/PhysRevE.109.014215.



Бачурин Дмитрий Владимирович — родился в Уфе (1978). Окончил с отличием физико-математический факультет Башкирского государственного педагогического университета (2000). Доктор физико-математических наук (2021). Старший научный сотрудник лаборатории «Нелинейная физика и механика материалов» Института проблем сверхпластичности металлов РАН. Научные интересы — нелинейная динамика кристаллической решетки, прочность и пластичность материалов, дефекты кристаллического строения, нанокристаллические материалы, ультразвуковая обработка материалов, границы зерен в металлах, дискретно-дислокационное и молекулярно-динамическое моделирование. Опубликовал свыше 70 научных статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах.

Россия, 450001 Уфа, ул. Халтурина, 39
 Институт проблем сверхпластичности металлов РАН
 E-mail: dvbachurin@mail.ru
 ORCID: 0000-0001-8995-211X
 AuthorID (eLibrary.Ru): 40984



Мурзаев Рамиль Тухфатович — родился в Баймаке БАССР (1979). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета по специальности «Теоретическая физика» (2001). Кандидат физико-математических наук (2011). С 2021 года является заведующим лабораторией «Нелинейная физика и механика материалов» Института проблем сверхпластичности металлов РАН. Научные интересы — ультразвуковая обработка материалов, дефекты кристаллического строения, границы зерен в металлах, нелинейная динамика кристаллической решетки, нанокристаллические материалы, дискретно-дислокационное и молекулярно-динамическое моделирование. Опубликовал более 100 научных статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах.

Россия, 450001 Уфа, ул. Халтурина, 39
 Институт проблем сверхпластичности металлов РАН
 E-mail: murzaevrt@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-2691-7031
 AuthorID (eLibrary.Ru): 799822



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1)

Обзорная статья
УДК 004.8

DOI: 10.18500/0869-6632-003196

EDN: JXPIOD

Коэволюция нейротехнологий и ИИ: этические вызовы и подходы к регуляции

А. В. Шендерюк-Жидков^{1,2}, В. А. Максименко³, А. Е. Храмов^{4,5}✉

¹Совет Федерации Федерального Собрания Российской Федерации, Москва, Россия

²Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия

³Автономная некоммерческая организация «Неймарк», Нижний Новгород, Россия

⁴Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, Москва, Россия

⁵ФГАОУ «Цифровые индустриальные технологии», Москва, Россия

E-mail: a.shenderyuk@yandex.ru, maximenkovl@gmail.com, ✉hramov.ae@rea.ru

Поступила в редакцию 07.07.2025, принята к публикации 1.08.2025,

опубликована онлайн 12.09.2025, опубликована 30.01.2026

Аннотация. Цель настоящего исследования — проанализировать этические вызовы, возникающие на стыке нейротехнологий и искусственного интеллекта (ИИ), а также предложить подходы к их регулированию, обеспечивающие ответственное развитие этих технологий. Особое внимание удалено вопросам автономии личности, конфиденциальности данных, социальной справедливости и предотвращению манипуляций сознанием. **Методы.** В работе использован междисциплинарный подход, включающий анализ научной литературы, нормативных документов и позиций религиозных институтов. Проведено сравнение рисков, связанных с ИИ и нейротехнологиями, с акцентом на их коэволюцию. **Результаты.** Впервые показано, что нейротехнологии, в отличие от ИИ, создают уникальные риски, такие как прямое воздействие на психику, угрозы идентичности и когнитивной свободе. Выявлены пробелы в регулировании, включая отсутствие специализированных законов о нейроданных. Предложены адаптированные этические рамки, объединяющие принципы прозрачности, подотчетности и защиты прав человека. **Заключение.** Сформулированы рекомендации по регулированию, включая запрет на манипуляцию сознанием, обязательную маркировку контента ИИ и приоритет человеческого контроля над технологиями. Подчеркнута необходимость международного сотрудничества и междисциплинарного диалога для минимизации рисков и обеспечения устойчивого развития нейротехнологий и ИИ в интересах общества.

Ключевые слова: искусственный интеллект, нейротехнологии, объяснимость, правовые нормы регулирования, этические дилеммы.

Для цитирования: Шендерюк-Жидков А. В., Максименко В. А., Храмов А. Е. Коэволюция нейротехнологий и ИИ: этические вызовы и подходы к регуляции // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 116–160. DOI: 10.18500/0869-6632-003196. EDN: JXPIOD

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Co-evolution of neurotechnology and AI: ethical challenges and regulatory approaches

A. V. Shenderyuk-Zhidkov^{1,2}, V.A. Maksimenko³, A. E. Hramov^{4,5}✉

¹Federation Council of the Russian Federation, Moscow, Russia

²Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

³Autonomous Nonprofit Organization “Neimark”, Nizhny Novgorod, Russia

⁴Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia

⁵Federal State Autonomous Institution “Digital Industrial Technologies”, Moscow, Russia

E-mail: a.shenderyuk@yandex.ru, maximenkovl@gmail.com, ✉ hramov.ae@rea.ru

Received 8.07.2025, accepted 1.08.2025, available online 12.09.2025, published 30.01.2026

Abstract. Purpose of this study is to analyze the ethical challenges at the intersection of neurotechnology and artificial intelligence (AI), and propose regulatory approaches to ensure their responsible development. Special focus is given to personal autonomy, data privacy, social justice, and prevention of mind manipulation. **Methods.** The research employs an interdisciplinary approach, including analysis of scientific literature, regulatory frameworks, and positions of religious institutions. Risks associated with AI and neurotechnologies are compared, emphasizing their co-evolution. **Results.** Neurotechnologies, unlike AI, pose unique risks such as direct mental interference and threats to identity. Regulatory gaps, including the lack of laws on neurodata, are identified. Adapted ethical frameworks combining transparency, accountability, and human rights protection are proposed. **Conclusion.** Recommendations include bans on mind manipulation, mandatory AI content labeling, and human oversight priority. International collaboration and interdisciplinary dialogue are emphasized to mitigate risks and promote sustainable development of these technologies.

Keywords: artificial intelligence, neurotechnology, explainability, legal regulatory standards, ethical dilemmas.

For citation: Shenderyuk-Zhidkov AV, Maksimenko VA, Hramov AE. Co-evolution of neurotechnology and AI: ethical challenges and regulatory approaches. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1):116–160. DOI: 10.18500/0869-6632-003196

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Политика и политики должны опережать технический прогресс и находить своевременные решения прежде, чем технологии породят новую реальность.

Д. А. Медведев. Из интервью газете «Жэньминь Жибао», 13 декабря 2015

Что касается современных технологий, то они, безусловно, угрожают человечеству, но проклинать их не следует, ибо без них будет ещё хуже.

Станислав Лем. Речь на церемонии присвоения ему степени почётного доктора университета Билефельда, 13 ноября 2003

Несмотря на все достижения технологий, что у нас есть, мы остаемся фундаментально ограничены своим биологическим «хардом» и не можем помочь «нашей Вселенной полностью раскрыть свой потенциал и окончательно пробудиться». Но есть способ преодоления этих оков «харда», и имя ему AGI (Общий искусственный интеллект).

Макс Тегмарк. «Жизнь 3.0. Быть человеком в эпоху искусственного интеллекта»

Введение

Бурное развитие нейротехнологий и искусственного интеллекта (ИИ) открывает беспрецедентные перспективы для улучшения жизни человека — от персонализации лечения заболеваний и восстановления утраченных функций до повышения когнитивных способностей [1–3], оптимизации процессов принятия решений [4] и автоматизации рутинных повторяющихся задач [5]. Генеративный ИИ и большие языковые модели уже сделали революцию в нашем восприятии новых информационных технологий, удалив барьеры на общение и взаимодействие с ИИ на естественном языке [6]. Алгоритмы машинного обучения и нейронные сети вторгаются во все сферы

деятельности, позволяя сделать скачок в автоматизации производства [7], улучшить здравоохранение [8, 9], трансформировать образование [10, 11], дать новые инструменты развития науки и технологий [12, 13]. Такие инструменты нейротехнологий, как нейровизуализация активности мозга [14], нейроинтерфейсы [15], интегрированные с биологическими обратными связями [16, 17], различные типы нейромодуляции, такие как транскраниальная магнитная [18, 19] и электрическая стимуляция [20], глубокая стимуляция [21] мозга и т. д., уже доказали свой потенциал в медицине [22], реабилитации [23] и даже в индустрии развлечений [24, 25].

Объединение нейротехнологий и ИИ в рамках одной статьи обусловлено их глубоким взаимовлиянием и схожестью вызовов, которые они ставят перед обществом. Несмотря на то, что эти направления возникли на стыке различных научных дисциплин — нейробиологии, математики и информационных технологий, — их объединяет способность существенно трансформировать человека и социум, особенно в сферах интеллектуального и когнитивного развития, что ранее считалось недоступным для машин, а теперь активно осваивается технологиями.

Например, в 1997 году суперкомпьютер Deep Blue победил чемпиона мира по шахматам Гарри Каспарова [26, 27], а в 2015 году нейросети на соревнованиях ImageNet Large Scale Visual Recognition Challenge превзошли человека в задачах классификации изображений [28]. В 2016 году AlphaGo обыграла лучшего игрока в Го, а в 2017 году AlphaGo Zero, обучаясь самостоятельно, достигла уровня, превосходящего все существующие системы игры в Го [29]. Параллельно нейротехнологии, хотя и развиваются медленнее, также демонстрируют значительные успехи. Методы нейровизуализации, такие как фМРТ [30], ЭЭГ [31], МЭГ [32], фБИКС [33], позволяют визуализировать и анализировать когнитивную или патологическую активность мозга, а нейроинтерфейсы и методы нейромодуляции — влиять на когнитивные процессы. Например, технологии ТМС и нейроинтерфейсы позволяют передавать данные в мозг, минуя традиционные органы чувств [34, 35], и повышать производительность человека при выполнении задач [36, 37]. Стартапы, такие как Neuralink и Synchron, привлекают значительные инвестиции, разрабатывая технологии для взаимодействия с мозгом. Neuralink фокусируется на роботизированной имплантации электродов [38, 39], а Synchron — на стентродах, вводимых через кровеносные сосуды мозга [40]. Эти разработки подчеркивают потенциал нейротехнологий и ИИ как прорывных технологий XXI века, способных усилить естественный интеллект и интегрировать его с искусственным.

Однако такие технологии несут и серьезные риски. Как отмечает Макс Тегмарк в книге «Жизнь 3.0. Быть человеком в эпоху искусственного интеллекта» (см. эпиграф к статье), биологическая природа человека ограничивает его возможности, что порождает стремление к «улучшению» через синергию нейротехнологий и ИИ. Это может привести к вмешательству в когнитивные способности и личность человека, а также к созданию иллюзорных миров, где контент, генерируемый ИИ, становится неотличимым от реальности. Современные тенденции, такие как распространение «умной среды» и гибридизация физической и цифровой реальности [41, 42], развитие которых невозможно без ИИ и нейротехнологий, подчеркивают необходимость всестороннего анализа этических, социальных и юридических вопросов, связанных с этими технологиями. Только опережающее регулирование и междисциплинарное сотрудничество позволят минимизировать риски и обеспечить ответственное использование нейротехнологий и ИИ в интересах общества.

22 апреля 2024 года генеральный директор ЮНЕСКО Одрэ Азуле назначила 24 эксперта для разработки первого глобального стандарта по этическим принципам развития нейротехнологий. В состав группы вошли специалисты из различных регионов мира, представляющие нейронауки, психологию, нейротехнологии, ИИ, интерфейсы «мозг-компьютер», этику и биоэтику. Азуле подчеркнула, что нейротехнологии, несмотря на их потенциал в решении проблем здравоохранения, могут угрожать правам человека, свободе мысли и неприкосновенности частной жизни. Она отметила необходимость создания международных этических рамок, аналогичных тем, что были разработаны для ИИ в 2021 году, подчеркнув, что «без нейроправа не может

быть нейроданных»¹. Однако нейроправа пока нет, а нейроданные активно регистрируются, коллекционируются в датасеты, исследуются и все чаще используются для принятия критических для человека решений.

Итак, стремительное внедрение нейротехнологий и ИИ вызывает серьезные этические опасения, связанные с автономией, конфиденциальностью, справедливостью и ответственностью. Например, использование нейроинтерфейсов и нейромодуляции для изменения поведения или когнитивных функций ставит под сомнение границы личной свободы, а сбор нейроданных повышает риски утечки конфиденциальной информации и ее использования для манипуляции или дискриминации [43, 44]. Кроме того, алгоритмы ИИ, принимающие решения, влияющие на жизнь людей, требуют четкого определения ответственности за ошибки и предвзятость [45–47], а также борьбы с фейковым контентом [48–50], который уже приводит к судебным ошибкам [51, 52]. Особую проблему представляет использование ИИ, включая большие языковые модели, такие как ChatGPT, в образовании. Эти технологии создают новые вызовы, такие как генерация текстов, программ и даже ложных данных, что требует пересмотра образовательных подходов. Вместо запретов необходимо интегрировать ИИ как инструмент, поддерживающий, но не заменяющий интеллектуальный труд студентов [53, 54].

Неоднозначные социальные последствия развития нейротехнологий и ИИ подчеркивают необходимость опережающего обсуждения и разработки нормативных рамок, обеспечивающих их ответственное применение. Отсутствие таких стандартов может привести к злоупотреблениям, углублению социального неравенства и новым формам дискриминации. Согласование этических принципов с технологическим прогрессом становится насущной задачей для обеспечения благополучия и справедливости в обществе [55].

Хотя этические проблемы ИИ [56–58] и нейротехнологий [59–61] часто изучаются отдельно, а их пересечение в методах и приложениях обсуждается [62, 63], данная статья фокусируется на коэволюции этих технологий. Мы ставим целью исследовать этические вызовы, возникающие на стыке нейротехнологий и ИИ, и предложить подходы для их согласования, обеспечивающие ответственное и социально ориентированное совместное развитие этих технологий.

1. Современное состояние развития нейротехнологий и ИИ

1.1. Нейротехнологии. Нейротехнологии — это быстро развивающаяся область, посвященная пониманию устройства мозга и созданию технологий, которые с ним взаимодействуют. Нейротехнологии включают в себя любые технологии, которые оказывают влияние на наше понимание мозга и различных аспектов сознания и мыслительной деятельности, а также технологии, которые позволяют визуализировать активность мозга, так называемая нейровизуализация. Если говорить о конкретных нейротехнологиях, которые мы рассматриваем в статье, то это в первую очередь нейроинтерфейсы, или, как их еще называют, интерфейсы «мозг-компьютер» (ИМК), технологии нейромодуляции, методы нейровизуализации (электро- и магнитоэнцефалография, функциональная магнитно-резонансная томография, функциональная ближняя инфракрасная спектроскопия, позитронно-эмиссионная томография, инвазивные методы регистрации активности мозга).

Хотя история нейротехнологий насчитывает более века, своего расцвета они достигли лишь в конце XX века. Ключевым фактором, обусловившим этот прогресс, стало развитие и внедрение в практику технологий нейровизуализации, которые позволили наблюдать активность мозга *in vivo* в процессе экспериментальных исследований [64, 65]. Нейротехнологии оказывают все большее влияние на общество, хотя их повсеместное распространение зачастую остается незамеченным. От разработки фармакологических препаратов до диагностики патологий мозга нейротехнологии

¹Этические аспекты нейротехнологий: ЮНЕСКО назначила международную группу экспертов для разработки рекомендаций // UNESCO: официальный сайт. 2021. URL: <https://www.unesco.org/ru/articles/eticheskie-aspeki-neyrotekhnologiy-yunesko-naznachila-mezhdunarodnyu-gruppu-ekspertov-dlya> (дата обращения: 28.01.2025).

оказывают прямое или косвенное воздействие на значительную часть населения развитых стран. К числу примеров относятся медикаментозные и функциональные методы лечения депрессии, инсомнии, синдрома дефицита внимания и гиперактивности (СДВГ), тревожных расстройств. В клинической практике нейротехнологии способствуют улучшению двигательной координации у пациентов, перенесших инсульт, снижению угасания когнитивных функций с возрастом, избавлению от эпилептических приступов, облегчению симптомов двигательных расстройств (болезни Паркинсона, болезни Хантингтона, бокового амиотрофического склероза) и даже снижению интенсивности фантомной боли [66–71].

По мере дальнейшего развития нейротехнологии внесут существенный вклад в улучшение самочувствия и качества жизни людей, страдающих параличом, неврологическими расстройствами и психическими заболеваниями. Одновременно нейротехнологии открывают перспективы для более глубокого понимания и контроля когнитивных и поведенческих функций, влияющих на личность и образ жизни. Уже сегодня существуют технологии, которые стремятся воздействовать на мозговые процессы. Примерами являются когнитивные тренировочные программы, направленные на улучшение различных аспектов когнитивного функционирования [72, 73], нейропомощники, управляющие индивидуальной траекторией обучения студентов с учетом особенностей организации когнитивных процессов в мозге, измеряемых с использованием методов нейровизуализации [74, 75] и т. д.

На переднем крае развития современных нейротехнологий стоят нейроинтерфейсы или ИМК — аппаратно-программные комплексы для функциональной взаимосвязи человека и машины, то есть для прямого соединения вычислительных или других цифровых интеллектуальных систем управления с мозгом. В отличие от традиционных устройств управления, таких как клавиатуры, мыши, джойстики и т. д., ИМК регистрирует активность мозга и преобразует эти сигналы в команды для управления внешним цифровым устройством. ИМК — одна из наиболее быстро развивающихся тем в различных областях науки и техники, включая инженерию, физику, нейронауки, медицину, высокотехнологичные отрасли, коммуникации и робототехнику [15]. Кроме того, нейроинтерфейсы представляют особый интерес для реабилитации и улучшения качества жизни людей с ограниченными возможностями [71, 76–78]. Области применения ИМК включают, в частности, [15]:

- диагностику и контроль патологической активности мозга и нейродегенеративных заболеваний;
- реабилитацию людей после повреждений мозга, например, восстановление двигательных навыков после инсульта;
- анализ и тренировку устойчивости человека к специфическим стрессовым воздействиям;
- улучшение самоконтроля и качества психофизиологического состояния;
- управление роботизированными устройствами, в том числе экзоскелетами, для расширения возможностей человека;
- обеспечение социального взаимодействия за счет того, что социальные приложения могут точно оценивать и передавать эмоции человека;
- помочь частично или полностью парализованным людям во взаимодействии с различными внешними устройствами, например, технология нейрочата, позволяющая людям с ограниченными возможностями общаться с собой и другими людьми;
- игровую индустрию.

ИМК могут включать в себя имплантированные в мозг устройства для съема активности небольших нейронных ансамблей из интересующей нас области мозга, например, моторной коры при необходимости управления манипулятором в случае парализованного пациента [79]. Такие ИМК носят название инвазивных, позволяя ценой хирургического вмешательства обеспечить очень точное представление и классификацию паттернов активности мозга. Для имплантируемых систем характерна проблема биосовместимости — с течением времени имплантированные устройства отторгаются мозгом путем «зарастания» электродов глиальными клетками, так что

регистрация активности нейронов становится невозможной. Неинвазивные ИМК предполагают регистрацию нейронной активности без нарушения целостности покровов мозга, например, используя сенсоры, размещенные над поверхностью головы, то есть они совершенно безопасны с точки зрения медицины [80]. Однако качество расшифровки паттернов активности мозга в этом случае существенно ниже, поэтому многие исследователи считают, что будущее за имплантируемыми системами, и, следовательно, надо прилагать усилия к повышению биосовместимости за счет использования новых материалов, а также повышения безопасности соответствующих хирургических операций [81, 82].

ИМК часто совмещаются с различными типами воздействия на мозг, выступая в качестве систем мониторинга и управления стимуляцией в ответ на те или иные состояния мозга. Такие целенаправленные воздействия на определенную область мозга стимулов различной природы называют нейромодуляцией. Это могут быть неинвазивные воздействия, например, популярная в последнее время транскраниальная магнитная стимуляция (ТМС), то есть прямая стимуляция нейронов коры мозга импульсами магнитного поля, вызывающая активацию или ингибирование нейронов в зависимости от параметров воздействия [83]. Более широким потенциалом применения обладают имплантируемые системы. Разработано несколько типов имплантатов, доступных для клинического применения при лечении болезни Паркинсона, которые используются для электростимуляции в парализованных участках мозга [84]. Имплантируемые системы также разрабатываются для предотвращения эпилептических приступов при фармакорезистентных формах эпилепсии [85]. Нейромодуляция может включать в себя и доставку препарата с использованием устройств, вживляемых непосредственно в субдуральное пространство (интракраниальная доставка лекарств) [86]. Новые приложения включают в себя целенаправленное внедрение генов или регуляторов генов и света (оптогенетика), и в начале 2010-х годов такие технологии были впервые продемонстрированы в животных моделях (мыши и обезьяны). Они позволяют модулировать активность популяций нейронов с помощью лазерного излучения [87].

1.2. Искусственный интеллект. Можно давать самые различные определения ИИ, но надо наиболее строго определить ИИ как область математики и ИТ, занимающуюся созданием систем, способных выполнять задачи, требующие человеческого интеллекта, такие как обучение, логическое рассуждение, распознавание образов, принятие решений и обработка естественного языка. Эти системы основаны на алгоритмах и моделях (например, машинном обучении, нейронных сетях), которые позволяют им адаптироваться к данным и улучшать свою производительность без явного программирования для каждой конкретной задачи. В настоящее время ИИ перестал быть исключительно научной областью и активно внедряется в различные сферы жизни — от медицины и финансов до беспилотного транспорта и автоматизированного производства.

Ключевым фактором развития ИИ в последние десятилетия является прогресс в области машинного обучения (ML), особенно в области глубокого обучения. Глубокое обучение, использующее многослойные нейронные сети с огромным числом оптимизируемых параметров, продемонстрировало выдающиеся результаты в таких задачах, как распознавание образов, обработка естественного языка и игра в сложные игры [88]. Создание такой архитектуры глубоких нейронных сетей, как трансформер [89], дало значительный толчок развитию моделей генеративного ИИ, способных генерировать текст, изображения и музыку [90]. Это привело к прогрессу сразу в нескольких областях автоматической интеллектуальной обработки информации.

Во-первых, прогресс в компьютерном зрении позволил ИИ воспринимать и анализировать изображения и видео с высокой точностью. ИИ используется для распознавания лиц, объектов, обнаружения аномалий, анализа медицинских изображений и управления беспилотными транспортными средствами [91–95]. Развитие сверточных нейронных сетей и других алгоритмов глубокого обучения значительно улучшило способность ИИ анализировать визуальные данные [96].

Во-вторых, современный ИИ находит применение в автономных системах, включая беспилотные автомобили, дроны и роботы [97–100]. Разработка интеллектуальных алгоритмов

планирования, навигации и распознавания объектов позволяет создавать автономные системы, способные действовать в сложных динамичных условиях. Однако обеспечение безопасности и надежности автономных систем остается важной и до сих пор не решенной задачей [101, 102].

В-третьих, развитие технологий обработки естественного языка (NLP) позволило ИИ понимать, интерпретировать и генерировать человеческий язык с большей точностью и нюансами [103]. Успехи в области NLP нашли применение в различных областях, включая машинный перевод, создание чат-ботов, анализ тональности текста и информационный поиск. Генеративные модели, основанные на архитектуре «трансформер», такие как ChatGPT, Google Gemini, DeepSeek или GigaChat, демонстрируют способность генерировать связный и контекстуально релевантный текст, что открывает новые возможности для автоматизации коммуникации и доступа к информации, автоматизировать разработку программного обеспечения, собирать информацию из различных источников, эффективно решая задачу реферирования материалов.

Будущее развитие ИИ, вероятно, будет связано с дальнейшим усовершенствованием алгоритмов машинного обучения, разработкой более эффективных архитектур нейронных сетей, исследованием новых парадигм обучения (например, обучения с подкреплением) и интеграцией ИИ в различные области человеческой деятельности. Усилия также направлены на создание более интерпретируемых и прозрачных моделей ИИ, способных объяснить свои решения, что является важным условием для доверия и широкого распространения технологий ИИ, например, в бизнесе или медицине [104–106].

1.3. Синергия и коэволюция нейротехнологий и ИИ. Нейротехнологии и ИИ становятся все более взаимосвязанными, их интеграция открывает обширные возможности создания инновационных технологий, способных расширить наше понимание мозга и улучшить качество биомедицинских технологий по лечению и профилактике различных неврологических заболеваний [1, 107, 108]. Нейротехнологии, обеспечивающие инструментарий для регистрации, стимуляции и модуляции нейронной активности, в сочетании с аналитическими и прогностическими возможностями ИИ формируют мощный синергетический эффект, который выходит за рамки возможностей каждой из этих областей по отдельности [109].

Одним из ключевых направлений, демонстрирующих эту синергию, является разработка ИМК, управляемых ИИ. ИМК могут быть интегрированы с алгоритмами ML для декодирования когнитивных состояний, двигательных намерений и эмоциональных реакций [15]. Это позволяет создавать более интуитивные и адаптивные системы управления внешними устройствами, протезами и коммуникационными системами, которые превосходят существующие аналоги по точности и эффективности. Алгоритмы ML способны обучаться на нейронных данных, выявлять паттерны и предсказывать результаты, позволяя персонализировать работу ИМК и максимально адаптировать их к потребностям конкретного пользователя с использованием специальных методов машинного обучения [15]. ИИ уже повсеместно взаимодействует с нашими нервными системами, влияя, усиливая и изменяя наше поведение и когнитивные процессы.

Другим важным аспектом синергии ИИ и нейротехнологий является использование алгоритмов ИИ для анализа нейроданных, таких как фМРТ и ЭЭГ, что позволяет исследователям выявлять связи между активностью мозга и когнитивными функциями [110–112], а также разрабатывать новые подходы к диагностике и лечению неврологических и психических заболеваний [113–115]. ИИ позволяет обнаружить ранние признаки нейродегенеративных заболеваний или предсказать эффективность различных терапевтических вмешательств на основе анализа нейроданных [113, 116, 117].

Успехи в области понимания функционирования мозга, особенно связанные с обработкой сенсорной информации и принятия решений, влияют на развитие технологий ИИ. Например, хорошо известные сверточные нейронные сети, зарекомендовавшие себя в области анализа изображений, во многом были созданы благодаря исследованиям обработки визуальной информации в зрительной коре мозга [96, 118]. В конце 2024 года исследователи из Google Research представили новый подход к обработке длинных последовательностей данных, вдохновленный работой

человеческой памяти [119]. Исследователи разработали новую архитектуру Titans с тремя типами памяти: (1) краткосрочная память (механизм внимания) — для точной обработки текущего контекста; (2) долговременная память — для хранения важной информации из прошлого; (3) постоянная память — для хранения общих знаний о задаче. Система учится запоминать важную информацию так же, как это делает человеческий мозг — фокусируясь на неожиданных и значимых событиях. При этом используется умный механизм «забывания», позволяющий освобождать память от неактуальной информации.

Взаимопроникновение нейротехнологий и ИИ влечет за собой большие этические и правовые последствия. Вызывает беспокойство отсутствие надежной нормативной основы для регулирования в этой пограничной области. Для понимания глубины проблемы достаточно привести два примера.

Во-первых, компании могут использовать данные об активности мозга, полученные с помощью нейротехнологических устройств, в маркетинговых целях. Обнаруживая биомаркеры активности мозга, связанные с нашими предпочтениями и антипатиями, эти компании могут влиять на поведение клиентов для получения максимальной прибыли. В частности, развитие языковых моделей (англ. Large Language Models, LLM) позволяет создавать цифровые двойники потребителей на базе LLM-агентов с учётом их демографических данных и доступной персональной информации, что даёт возможность достаточно точно прогнозировать поведение и предпочтения отдельных групп. Это поднимает тревожные вопросы о системах слежения, маркетинговых тактиках и политическом влиянии на наши частные мысли и эмоции, что в конечном итоге угрожает как основам общества, так и индивидуальной свободе каждого гражданина [120, 121].

Во-вторых, внедрение нейротехнологий усугубляет существующее социальное неравенство. Это особенно проявляется в двух ключевых аспектах. В социальных науках распространён так называемый WEIRD-эффект (Western, Educated, Industrialized, Rich, Democratic): порядка 80% всех исследований человеческого поведения базируются на выборке преимущественно образованных, индустриализированных, обеспеченных жителей западных демократий, что составляет всего 12% населения Земли. Информации о предпочтениях, психофизиологических особенностях и социальном опыте остальных 88% попросту не хватает, или она отсутствует вовсе. Поскольку именно эти данные ложатся в основу обучения крупных моделей искусственного интеллекта, создаётся ситуация, когда ИИ отражает исключительно мировоззрение небольшого процента людей, что приводит к системному неучастию и дискриминации большинства. Сами тренировочные данные часто содержат скрытые дискриминационные факторы. Например, алгоритм, предназначенный для показа рекламных вакансий в областях науки, технологий, инженерии и математики (STEM), изначально разрабатывался как гендерно-нейтральный, однако на практике женщины видят такие объявления реже, чем мужчины: признаки, используемые моделью, коррелируют с полом и распределены неравномерно. В результате алгоритм непреднамеренно воспроизводит гендерные стереотипы [122]. Другой пример — «редлайнинг»: при оценке заявок на кредит в качестве фактора принимается почтовый индекс, который сам по себе кажется нейтральным, но на деле коррелирует с расой из-за исторического и демографического состава районов. Это приводит к косвенной расовой дискриминации. В литературе по машинному обучению такую ситуацию называют «косвенная дискриминация». Она возникает, когда алгоритм опирается на атрибуты, которые прямо не содержат дискриминирующих признаков, но статистически связаны с ними.

Важным аспектом социальной дискриминации является тот факт, что доступ к передовым технологиям ИИ и нейротехнологиям — например, к методам когнитивной реабилитации — неизбежно будет преимущественно у состоятельных и образованных групп населения. Это способно ещё больше углубить разрыв между богатыми и бедными на международном, государственном и локальном уровнях [43, 123].

Синергия ИИ и нейротехнологий представляет собой мощную силу, способную улучшить наше понимание мозга и предоставить новые инструменты для персонализированного лечения,

реабилитации, повышения когнитивных возможностей и, как следствие, улучшения качества жизни. Однако необходимо осознавать этические и социальные последствия такого технологического прогресса и сформулировать те этические проблемы и дилеммы, которые ставит перед нами развитие таких сквозных технологий, как нейротехнологии и ИИ. Проведем в следующем разделе систематический обзор этических дилемм, которые ставит перед нами развитие этих технологий.

2. Этические проблемы и дилеммы, возникающие при коэволюции технологий

Итак, развитие нейротехнологий и ИИ представляет собой не только технологическую революцию, но и источник глубоких этических и социальных дилемм, которые требуют тщательного анализа и проработки [55]. Сложность этических проблем, связанных с этими технологиями, затрагивающими непосредственно когнитивную и интеллектуальную сторону нашей деятельности, обусловлена их многогранностью и способностью влиять на различные сферы человеческой жизни, включая принятие решений, занятость, конфиденциальность, социальные отношения, улучшение биологической природы человека и даже само понимание человеческой идентичности. Изучение этических принципов и последствий, связанных с разработкой, развертыванием и использованием нейротехнологий (и связанных с ними исследований в области нейронауки и нейроданных), обычно называют нейроэтикой, относительно зарождающейся, но растущей областью исследований, возникшей в конце 1990-х и начале 2000-х годов из медицинской и биоэтики [124]. Нейроэтика критически относится к предположениям и намерениям, лежащим в основе нейротехнологических и нейронаучных открытий. Она также обеспокоена вопросами о влиянии нейротехнологий на самопонимание человека и о влиянии изменений в этом фундаментальном понимании на нашу биологию, нашу психологию и наше общество.

2.1. Предвзятость, справедливость и доступность. Одной из ключевых этических проблем ИИ является предвзятость алгоритмов [125], которые могут воспроизводить и усиливать существующие социальные неравенства и дискриминацию [126, 127]. ИИ-системы обучаются на данных, содержащих исторические предрассудки и стереотипы, что приводит к дискриминационным практикам в таких областях, как трудоустройство, кредитование и правосудие [128–131]. Обеспечение справедливости алгоритмов требует тщательного отбора данных, разработки прозрачных методов обучения и постоянного мониторинга. Неравномерный доступ к нейротехнологиям и ИИ усугубляет социальное неравенство, создавая новые формы исключения. Этот «технологический разрыв» (англ. digital divide) способствует перераспределению ресурсов в пользу привилегированных групп, усиливая социальную несправедливость [132]. Например, нейроинтерфейсы и нейромодуляция, способные улучшать когнитивные и физические способности, могут стать инструментом создания «нейропатического» общества, где элита обладает не только экономическим, но и когнитивным превосходством. Люди без доступа к таким технологиям рискуют столкнуться с социальной изоляцией и стигматизацией и будут восприниматься как «отсталые» или «неполноценные». Использование ИИ в найме и оценке персонала также вызывает опасения. Алгоритмы, обученные на данных, отражающих предрассудки, могут дискриминировать по признакам расы, пола или возраста [127]. Нейротехнологии, применяемые для мониторинга состояния работников, создают новые формы контроля и давления, а также дискриминации в отношении тех, чьи нейрофизиологические характеристики не соответствуют «идеальным» стандартам. Еще одной проблемой является неравный доступ к цифровому здравоохранению [9]. ИИ и нейротехнологии активно внедряются в диагностику, лечение и реабилитацию, но их доступность ограничена социально-экономическими факторами, такими как низкий доход, отсутствие страховки или проживание в удаленных регионах. Это может привести к ухудшению здоровья и качества жизни для тех, кто не может воспользоваться передовыми медицинскими услугами.

2.2. Прозрачность и интерпретируемость. Стремительное развитие ИИ порождает фундаментальную этическую дилемму, связанную с балансом между эффективностью и интерпретируемостью решений ИИ. С одной стороны, сложные модели ИИ, такие как глубокие нейронные сети, демонстрируют высокую производительность в задачах распознавания образов, прогнозирования и других областях. С другой стороны, модели ИИ часто подобны «черному ящику», что затрудняет понимание и объяснение принимаемых ими решений, особенно в критически важных сферах, таких как медицина, правосудие и финансы [133–135].

Это противоречие обусловлено стремлением разработчиков к повышению точности моделей, что достигается за счет их усложнения. Однако чем сложнее модель, тем труднее выявить факторы и логику, лежащие в основе ее решений. Это создает серьезные этические и социальные проблемы, включая:

- Невозможность оспаривания решений: если решение ИИ нельзя объяснить, люди лишаются возможности оспорить его, даже если оно кажется несправедливым или ошибочным, что подрывает принципы справедливости и равенства.
- Отсутствие ответственности: если алгоритмы работают как «черные ящики», сложно определить, кто несет ответственность за ошибки или вред, причиненный их решениями.
- Потеря доверия: отсутствие прозрачности снижает доверие к технологиям, что затрудняет их широкое внедрение и принятие.

Для решения этих проблем активно развиваются методы построения объяснимого ИИ (Explainable AI, XAI), которые направлены на создание моделей, способных обосновывать свои решения и стать более прозрачными для человека. Это может быть достигнуто за счет использования более простых и интерпретируемых моделей, разработки методов визуализации и анализа сложных систем [136, 137], а также применения методов постобработки для изучения поведения ИИ как «черного ящика» для выявления важных факторов, влияющих на решения [138].

Среди современных методов XAI можно выделить несколько ключевых подходов:

- *LIME (Local Interpretable Model-agnostic Explanations)* — аппроксимирует сложную модель локально линейными интерпретируемыми моделями для объяснения отдельных предсказаний [105].
- *SHAP (SHapley Additive exPlanations)* — использует теорию игр для распределения вклада каждого признака в итоговое решение модели [139]. Эти подходы находят применение и на стыке ИИ и нейротехнологий [140].
- *Механизмы внимания* — визуализируют веса внимания в нейронных сетях, показывая, на какие части входных данных модель обращает больше внимания. Данный подход находит большое применение в анализе медицинских систем ИИ [141, 142].
- *Градиентные методы* (например, Grad-CAM) — выделяют важные области входных данных на основе градиентов модели [143].
- *Правила и деревья решений* — предоставляют интерпретируемые логические правила, лежащие в основе работы модели [144].

Эти методы позволяют не только понять логику работы сложных моделей, но и выявить потенциальные смещения в данных или неожиданные зависимости, что особенно важно в критически важных областях, таких как медицина или финансы [145, 146].

Аналогичные проблемы прозрачности и интерпретируемости возникают в нейротехнологиях, особенно при использовании нейроданных и их анализе с помощью ИИ. Отсутствие прозрачности в этой области может привести к аналогичным этическим последствиям, включая невозможность оспаривания решений, отсутствие ответственности и потерю доверия.

2.3. Конфиденциальность и безопасность данных. ИИ-системы, основанные на анализе больших данных, обрабатывают значительные объемы персональной информации, что создает угрозы для конфиденциальности и безопасности. Утечки данных, несанкционированный доступ и

злоупотребление информацией могут иметь серьезные последствия для отдельных лиц и общества [147, 148]. Для минимизации этих рисков необходимы надежные механизмы защиты данных, включая методы анонимизации и псевдонимизации, что является ключевым условием этичного использования ИИ.

Нейротехнологии, особенно в сочетании с ИИ, также сталкиваются с проблемами конфиденциальности. Данные нейровизуализации, отражающие когнитивные и эмоциональные процессы, представляют собой особо чувствительную информацию. Риски включают несанкционированный доступ, использование нейроданных для дискриминации (например, при найме или страховании), манипулирование поведением и нарушение приватности [43, 109]. Отсутствие четких нормативных рамок и механизмов защиты увеличивает вероятность злоупотреблений, что угрожает автономии и благополучию человека.

2.4. Принятие решений без участия человека и контроль за ним. Одной из ключевых этических дилемм, связанных с развитием ИИ, является конфликт между автономией систем и необходимостью сохранения человеческого контроля. По мере роста сложности ИИ-систем, способных принимать решения без прямого вмешательства человека, возникает вопрос о допустимых пределах их автономии и механизмах обеспечения ответственности [149, 150].

С одной стороны, автономные системы, такие как беспилотные автомобили, медицинские диагностические платформы или финансовые алгоритмы, способны действовать быстрее и эффективнее, чем человек, что открывает значительные преимущества. С другой стороны, потеря контроля над ИИ создает риски, включая несоответствие действий систем человеческим ценностям, злоупотребление технологиями и трудности в установлении ответственности за ошибки.

Таким образом, поиск баланса между автономией ИИ и сохранением человеческого контроля становится критически важным для предотвращения негативных последствий и защиты прав и свобод людей в условиях растущей автоматизации.

2.5. Автономия и самоопределение. Развитие ИИ и нейротехнологий создает угрозы для автономии и самоопределения человека, включая возможность манипулирования сознанием и изменения идентичности [60]. Например, технологии ИИ, такие как дипфейки (фото, видео, аудио), могут использоваться для манипуляции общественным мнением, нанесения репутационного ущерба или склонения людей к незаконным действиям [48–52]. Нейротехнологии, такие как ТМС и глубокая стимуляция мозга, способны влиять на нейронную активность, что в перспективе может затрагивать когнитивные и эмоциональные процессы, лежащие в основе принятия решений. В сочетании с ИИ, анализирующим нейроданные, эти технологии могут использоваться для скрытого воздействия на выбор и поведение людей, подрывая их свободу воли.

Риски манипуляции сознанием и изменения идентичности угрожают личной автономии и достоинству. Использование нейротехнологий и ИИ для изменения убеждений, ценностей или мотиваций без согласия человека может привести к утрате самоопределения и превращению индивида в объект внешнего контроля. Кроме того, возможность «улучшения» когнитивных способностей создает социальное давление, вынуждая людей подвергаться таким процедурам, чтобы не отставать от других, что ограничивает их свободу выбора.

В 2012 году Центр стратегического анализа при Правительстве Франции опубликовал доклад «Мозг и законодательство: анализ появления нейроправа» [151], где рассмотрены этические вопросы применения нейровизуализации для диагностики личностных особенностей. Один из авторов доклада подчеркивает [152], что различия в уровнях эмпатии, интеллекта, импульсивности и агрессии между людьми создают вызов для правовой системы, основанной на презумпции равенства. Однако утверждение о равенстве применительно к нервным системам является ложным. Достижения нейронаук дадут возможность понять поведение людей в длительном континууме, а не через упрощенные категории, которые сейчас используются. Это требует пересмотра подходов к оценке этичности нейротехнологий.

Таким образом, при обсуждении автономии и самоопределения необходимо учитывать биологические, генетические и когнитивные особенности человека. Также требуется разработка

технологий и процедур, обеспечивающих защиту нейроданных от несанкционированного доступа, изменения или уничтожения.

2.6. Потеря рабочих мест и стимулирование экономики. Влияние ИИ на занятость и экономику представляет собой этическую дилемму, связанную с сокращением рабочих мест из-за автоматизации и созданием новых возможностей за счет повышения производительности и инноваций за счет внедрения технологий ИИ [153, 154]. С одной стороны, автоматизация на основе ИИ может привести к сокращению рабочих мест, особенно в секторах с рутинными задачами, что усугубит неравенство в доходах и потребует масштабной переквалификации рабочей силы. Темпы внедрения ИИ вызывают опасения, что люди и организации не успеют адаптироваться к изменениям, что может привести к негативным социальным последствиям.

С другой стороны, ИИ способен стимулировать экономический рост за счет повышения эффективности и создания новых отраслей, связанных с разработкой и обслуживанием ИИ-систем. Это может компенсировать потери рабочих мест в традиционных секторах. Однако успешное использование ИИ зависит от адаптации образовательных систем, политик социальной защиты и способности стран эффективно внедрять эти технологии.

2.7. Благополучие и безопасность. Развитие ИИ и нейротехнологий требует оценки их влияния на благополучие и безопасность пользователей. Под благополучием понимается состояние физического и психического удовлетворения (включая здоровье, безопасность, счастье и комфорт отдельных лиц и/или сообществ), достигаемое за счет предотвращения вреда, травм или необоснованных рисков при разработке и внедрении технологий. Это включает психологическую безопасность, а также социальные и экологические аспекты, такие как сохранение культуры и предотвращение экологических катастроф.

Важно отметить, что рассматриваемые проблемы не являются взаимоисключающими и в значительной степени связаны. Например, в соответствии с современными этическими нормами, закрепленными в Хельсинской декларации Всемирной медицинской ассоциации «Рекомендации для врачей, занимающихся биомедицинскими исследованиями с участием людей», принятой 18-й Всемирной медицинской ассамблей (последний раз пересмотренной в Эдинбурге в 2000 г.), применение нейротехнологий возможно только после получения информированного согласия на сбор нейроданных, которое предполагает обеспечение психической конфиденциальности, автономии и самостоятельности человека, безопасности данных. Благополучие может быть достигнуто только при условии решения этических проблем, связанных с прозрачностью, ответственностью и защитой прав пользователей.

2.8. Экзистенциальные риски. Хотя ИИ имеет много применений, он все еще очень далек от достижения форм интеллекта, близких к людям. Однако тот факт, что эта технология в основном неизвестна широкой общественности, вызывает опасения по поводу возможности контролировать ее и согласовывать с общечеловеческими ценностями, если она достигнет более высокой формы интеллекта [155]. В табл. 1 перечислены этические проблемы и как они связаны с возможностями ИИ.

Хотя в настоящее время маловероятны, но потенциально существуют экзистенциальные риски, связанные с развитием сверхинтеллекта — ИИ, превосходящего человеческий интеллект [156, 157]. Исследователи и философы активно обсуждают, как предотвратить негативные последствия и обеспечить использование сверхинтеллекта в интересах человечества. Стивен Хокинг, один из наиболее известных исследователей, предупреждал, что создание ИИ, превосходящего человека, может привести к потере контроля: «*Такой разум возьмет инициативу на себя и станет сам себя совершенствовать со все возрастающей скоростью. Люди, ограниченные медленной биологической эволюцией, не смогут конкурировать с машинами*»².

²С. Хокинг: Искусственный интеллект может уничтожить человечество // BBC Russian : служба новостей. 2014. URL: https://www.bbc.com/russian/science/2014/12/141202_hawking_ai_danger (дата обращения: 27.01.2025).

Таблица 1. Основные вопросы и соответствующие им проблемы этики ИИ
 Table 1. Key questions and related problems of AI ethics

Вопросы развития ИИ	Подходы к разрешению этических противоречий
ИИ нуждается в данных ИИ является «черным ящиком» ИИ может принимать или рекомендовать решения ИИ основан на больших данных, статистике и всегда имеет некоторый процент ошибок ИИ очень распространен и динамичен Хорошее или плохое использование ИИ	Конфиденциальность данных и управление ими Объяснимость и прозрачность технологии Справедливость и согласование ценностей Защита от дискриминации со стороны ИИ Подотчетность ИИ Большие негативные последствия злоупотребления технологией ИИ Быстрая трансформация рынка труда, экономики и общества Цели устойчивого развития ООН и этические принципы развития ИИ ЮНЕСКО Автономные устройства и массовый контроль Дипфейки, создаваемые ИИ

Из рассмотренных этических дилемм вытекают риски, которые уже сегодня могут иметь серьезные последствия в различных сферах. Специалисты компании Яндекс выделяют четыре группы рисков, связанных с ИИ: социальные, юридические, этические и технологические [158]. Например, на этапе сбора и подготовки данных для обучения моделей ИИ выделяются следующие риски:

- *Юридические*: (1) использование данных из запрещенных источников; (2) нарушение авторских прав; (3) несоответствие законодательным требованиям.
- *Технологические*: (4) ограничения на использование зарубежных систем и инфраструктуры.
- *Этические*: (5) включение предвзятых данных в обучающие массивы.

Таким образом, исследователи все чаще указывают на необходимость регулирования ИИ и нейротехнологий для минимизации рисков. В следующем разделе статьи рассматриваются подходы к разработке и эксплуатации систем ИИ, основанные на этических принципах, ориентированных на человека и соблюдение его прав.

3. Разработка руководящих принципов регулирования при разработке и использовании ИИ и нейротехнологий

Проанализируем ключевые аспекты разработки и внедрения руководящих принципов для регулирования ИИ и нейротехнологий. Мы остановимся на различных подходах к определению принципов регулирования, включая этические, правовые и социально-экономические аспекты. Необходимо отметить, что правовая база, регулирующая разработку и использование ИИ и нейротехнологий, находится на стадии формирования основных принципов и подходов. Большинство нормативных актов в области ИИ используют комбинацию различных стратегий, ориентированных на уровень риска, связанного с конкретными технологиями. Однако единый подход и методология в юридической практике пока отсутствуют, а правовые документы содержат размытые формулировки, не охватывающие весь жизненный цикл разработки и применения систем ИИ и нейротехнологий.

В отношении нейротехнологий ситуация еще более критична — специальные законы или правовые акты в большинстве стран отсутствуют. Регулирование осуществляется через существующие законы о медицине, защите персональных данных, правах человека и интеллектуальной собственности. Некоторые страны разрабатывают этические рекомендации, но они редко закрепляются на законодательном уровне.

3.1. Подход, основанный на принципах. В рамках данного подхода всем заинтересованным сторонам предполагается набор фундаментальных предложений (руководящих принципов), которым соответствуют все процессы по разработке и использованию систем ИИ. Законы об ИИ и законопроекты об ИИ разных стран явно и неявно воспроизводят принципы, закрепленные в документах ЮНЕСКО. Это касается Закона Перу № 31814 от 2023 года «Закон, способствующий использованию искусственного интеллекта в интересах экономического и социального развития страны»: в перуанском законодательстве закреплены такие принципы, как «стандарты безопасности, основанные на оценке риска», «многосторонний подход», «этическая разработка для ответственного искусственного интеллекта» и «конфиденциальность». Также одним из самых ярких примеров использования данного подхода является созданная многими государствами так называемая «Белая книга», являющаяся сборником этических принципов и рекомендаций к работе ИИ (см. разделы 4.3 и 4.4).

Регулирование ИИ, основанное исключительно на принципах, не налагает конкретных обязательств или ограничений на государственные органы, частные организации или людей, и они не имеют последствий за несоблюдение.

3.2. Подход, основанный на стандартах. Подход, основанный на стандартах, делегирует (полностью или частично) регулирующие полномочия государства органам по установлению стандартов, которые могут быть государственными, частными или гибридными организациями. При таком подходе регулирование означает, что организации, устанавливающие стандарты, разрабатывают технические стандарты, которые регулируют реализацию обязательных правил. Такой подход предполагает и поощряет отраслевые организации прямо или косвенно участвовать в разработке технических стандартов, регулирующих процессы и деятельность, связанные с ИИ и нейротехнологиями.

Например, в пункте 121 Закона ЕС об ИИ — нормативного акта Европейского союза об искусственном интеллекте, принятого Европейским парламентом 13 марта 2024 года и одобренного Советом ЕС 21 мая 2024 года, — говорится, что «стандартизация должна играть ключевую роль по предоставлению технических решений поставщикам для обеспечения соблюдения настоящего Регламента в соответствии с современным уровнем техники, для продвижения инноваций, а также конкурентоспособности и роста единого рынка»³.

3.3. Гибкий и экспериментальный подход на основе нормативных «песочниц». Данный подход предполагает создание гибких схем регулирования, таких как нормативные «песочницы» и другие экспериментальные площадки, которые позволяют организациям тестировать новые бизнес-модели, методы, инфраструктуру и инструменты в условиях более гибкого регулирования при сопровождении государственных органов. Такие гибкие подходы были изначально предложены для таких областей экономики, как телекоммуникации и финансы, а также для сквозных технологий, например, защиты данных и конфиденциальности. В последнее время такой подход также изучает возможность регулирования ИИ.

Следующие пять целей, которые статья 57 (9) Закона ЕС об ИИ устанавливает для регуляторных «песочниц» ИИ: «(1) повышение правовой определенности для достижения нормативного соответствия настоящему Регламенту или, где это применимо, другому применимому

³World's first major law for artificial intelligence gets final EU green light // CNBC. 2024. URL: <https://www.cnbc.com/2024/05/21/worlds-first-major-law-for-artificial-intelligence-gets-final-eu-green-light.html> (дата обращения: 27.01.2025).

законодательству Союза и национальному законодательству; (2) поддержка обмена передовым опытом посредством сотрудничества с органами, участвующими в регуляторной «песочнице» ИИ; (3) содействие инновациям и конкурентоспособности и содействие развитию экосистемы ИИ; (4) содействие нормативному обучению на основе фактических данных; (5) содействие и ускорение доступа к рынку Союза для систем ИИ, в частности, предоставляемых малыми и средними предприятиями, включая стартапы». Согласно статье 57 Закона ЕС об ИИ, каждое государство-член Евросоюза на национальном уровне должно обеспечить создание компетентными органами нормативных «песочниц» для ИИ.

3.4. Создание среды, способствующей разработке и использованию ответственных, этичных и соответствующих правам человека систем ИИ. Регулирующие инструменты могут быть направлены на создание среды, которая поощряет разработку и использование ответственных, этичных и соответствующих правам человека систем ИИ. Законы и законопроекты об ИИ могут включать положения, направленные на содействие созданию возможности, связанные с человеческим капиталом, технологиями, инфраструктурой и институциональным контекстом.

В этом ключе, например, ЮНЕСКО разработала методологию оценки готовности (Readiness assessment methodology, RAM)⁴, которая направлена на то, чтобы помочь «странам понять, где они находятся по степени готовности внедрять ИИ этично и ответственно для всех своих граждан, делая акцент на том, какие институциональные и нормативные изменения необходимы». Предложенная методология помогает определить стране сильные стороны и пробелы по пяти направлениям: (1) юридическому, (2) социальному и культурному, (3) научно-образовательному, (4) экономическому, (5) технологическому и инфраструктурному.

3.5. Адаптация существующих законов. Данный подход предполагает внесение поправок в отраслевые правила (например, здравоохранение, финансы, образование, правосудие) и трансверсальные правила (например, уголовные кодексы, государственные закупки, законы о защите данных, трудовое законодательство) для постепенного улучшения существующей нормативно-правовой базы в соответствии с текущим уровнем развития технологий.

Некоторые юрисдикции предпочли адаптировать правила, специфичные для конкретных секторов (например, здравоохранение, финансы, образование, правосудие) и трансверсальные правила (например, уголовные кодексы, государственные закупки, данные законы о защите, трудовое законодательство) вместо создания специализированного законодательства, регулирующего развитие ИИ. Одно из потенциальных преимуществ этого подхода заключается в том, что он позволяет законодателям обсуждать и вносить постепенные улучшения в нормативную базу структуры, основанной на том, что они узнают о последствиях использования технологий ИИ.

Примером адаптации трансверсальных правил является законопроект Колумбии № 225/2024 - Сенат, который внесет изменения в Уголовный кодекс, чтобы ужесточить наказание за преступление выдачи себя за другое лицо, когда системы ИИ используются для создания глубоких подделок (deepfakes) или иного цифрового мошенничества, наносящего ущерб чести, репутации или безопасности жертв. Более того, в Аргентине законопроект предлагает внести поправки в три статьи Закона № 25467 от 2021 года («Закон о науке, технологиях и инновациях»), чтобы изложить принципы и ценности для «этичной эксплуатации» систем ИИ, установить обязательства регистрировать системы ИИ, предоставляя компетентному органу полномочия останавливать разработку систем ИИ, когда это нарушает принципы и ценности и позволяет кому-либо подвергаться угрозе или вреду от такой системы, чтобы сообщить об этом.

3.6. Подход, основанный на оценке рисков. Данный подход предполагает установление обязательства и требования в соответствии с оценкой рисков, связанных с развертыванием и

⁴Readiness assessment methodology // UNESCO : официальный сайт. URL: <https://www.unesco.org/ethics-ai/en/ram> (дата обращения: 14.01.2025).

использованием определенных инструментов ИИ в конкретные контексты. Такой подход может быть эффективно реализован в различных секторах, включая экологию, налоги, безопасность пищевых продуктов, стихийные бедствия и защиту прав потребителей. В рамках него необходимо установить приоритеты и типы рисков, а также выбрать систему вмешательств, связанных с разработкой и использованием систем ИИ, которая будет адаптивно зависеть от степени риска.

Ярким примером такого подхода к регулированию является Закон ЕС об ИИ (см. разделе 4.2), который устанавливает обязательства, основанные на различных уровнях риска: неприемлемый, высокий, системный, ограниченный и минимальный. Согласно статье 3 (1а), «риск» понимается как «совокупность вероятности возникновения вреда и серьезности этого вреда». Практики ИИ, которые относятся к категории «неприемлемый риск» подпадают под запрет. Примером такой практики является «использование систем удаленной биометрической идентификации в режиме реального времени в общедоступных местах в целях обеспечения правопорядка», если только это не является строго необходимым для достижения целей, связанных с определенными уголовными расследованиями и предотвращением конкретных, например, террористических угроз. Более того, системам ИИ, которые попадают в категорию «высокий риск», должны соответствовать конкретные обязанности, связанные с системами управления рисками, управлением данными, технической документацией, ведением учета, прозрачностью, человеческим надзором, точностью, надежностью и кибербезопасностью (глава 2 Раздела III), а поставщики систем ИИ с высоким уровнем риска также должны соблюдать ряд установленных требований.

3.7. Подход, основанный на правах. Подход, основанный на правах, ориентирован на обеспечение защиты прав и свобод человека и общества в целом при регулировании ИИ. Этот подход подчеркивает, что регулирование должно основываться не только на экономических и технологических аспектах, но и на необходимости защиты гражданских прав, достижения социальных целей, обеспечения справедливого распределения общественных благ и равного доступа к технологиям для всех категорий граждан на всех этапах жизненного цикла систем ИИ.

Ярким примером реализации подхода, основанного на правах, являются положения Европейского регламента по защите данных (General Data Protection Regulation, GDPR⁵), регулирующие автоматизированную обработку персональных данных, включая профилирование [159]. Согласно GDPR, субъект данных имеет право не подвергаться решениям, принятым исключительно на основе автоматизированной обработки, если такие решения имеют для него юридические последствия или существенно влияют на его права. Эти обязательства не зависят от уровня риска и применяются во всех случаях использования подобных систем.

Гражданские организации Евросоюза настаивали на том, чтобы законодательство в области ИИ базировалось на подходе, основанном на правах, а не на оценке рисков. Их позиция заключалась в том, что права человека являются неотъемлемыми и должны соблюдаться независимо от уровня риска, связанного с внешними факторами. Такой подход обеспечивает приоритет защиты фундаментальных свобод и достоинства личности в условиях развития технологий.

3.8. Подход, основанный на ответственности. Данный подход предполагает установление четких механизмов распределения ответственности и введения санкций в случаях, когда применение ИИ-технологий приводит к негативным последствиям. В рамках этого подхода требуется определить конкретные субъекты, которые несут ответственность за разработку, внедрение и эксплуатацию ИИ-систем. Это может включать в себя разработчиков алгоритмов, поставщиков ИИ-решений, операторов систем и в некоторых случаях конечных пользователей. Разграничение ответственности должно основываться на анализе причинно-следственных связей между действиями субъектов и возникшими негативными последствиями, такими как негативные инциденты (например, наезд беспилотного автомобиля на пешехода), нарушения прав человека (например, незаконный отказ от приема на работу), дискриминация или нанесение экономического ущерба.

⁵General Data Protection Regulation (GDPR). URL: <https://gdpr-info.eu> (дата обращения: 27.01.2025).

Санкции за проблемное использование ИИ должны быть соразмерны тяжести последствий и могут включать в себя как административные меры (штрафы, приостановление деятельности), так и гражданско-правовую ответственность (компенсация ущерба). Важно отметить, что подход к ответственности может быть не только репрессивным, но и стимулирующим: поощрять ответственное использование ИИ, в частности, внедрение этических принципов и обеспечение прозрачности алгоритмов.

4. Анализ существующей правовой базы регулирования ИИ и нейротехнологий

Правовая база, регулирующая разработку и использование ИИ и нейротехнологий, находится на стадии формирования основных принципов и подходов. Большинство нормативных актов в области ИИ используют комбинацию различных стратегий, ориентированных на уровень риска, связанного с конкретными технологиями. Однако единый подход и методология в юридической практике пока отсутствуют, а правовые документы содержат размытые формулировки, не охватывающие весь жизненный цикл разработки и применения систем ИИ и нейротехнологий.

В отношении нейротехнологий специальные законы или правовые акты в большинстве стран отсутствуют. Регулирование осуществляется через существующие законы о медицине, защите персональных данных, правах человека и интеллектуальной собственности. Некоторые страны разрабатывают этические рекомендации, но они редко закрепляются на законодательном уровне.

Остановимся кратко на мировом опыте по регулированию ИИ и нейротехнологий.

4.1. Китайская народная республика. 15 августа 2023 года в Китае вступила в силу Директива по регулированию ИИ, устанавливающая следующие правила:

- маркировка контента, созданного с помощью ИИ;
- использование только легальных данных для обучения моделей;
- создание механизмов для рассмотрения публичных жалоб на ИИ-услуги и контент.

Китай также разработал детальные требования к качеству, оценке и актуальности данных для обучения ИИ.

4.2. Европейский Союз. Закон о регулировании ИИ, вступающий в силу в 2025 году, разделяет системы ИИ на группы по уровню риска:

- Неприемлемый риск: запрещены системы, воздействующие на подсознание, системы социального рейтинга, разделяющие людей на категории по их поведению, социально-экономическому положению и прочим личным характеристикам, и распознавания в реальном времени (за исключением правоохранительных органов с разрешения суда).
- Высокий риск: системы, применяемые в лицензируемых товарах и услугах (игрушки, автомобили, медицинская аппаратура), управлении критической инфраструктурой, образовании, работе с персоналом и правоохранительных органах. Такие системы подлежат обязательной оценке и регистрации в специальной базе данных ЕС.
- Низкий риск: системы, генерирующие контент (например, ChatGPT), должны маркировать контент, предотвращать создание незаконного контента и раскрывать данные, защищенные авторским правом, на которых обучались модели. От всех прочих систем требуется лишь быть достаточно открытыми — пользователь должен знать, что имеет дело с ИИ, и иметь достаточно информации, чтобы принять обоснованное решение, пользоваться ли им дальше.

Евросоюз является одним из лидеров в области регулирования нейротехнологий. В 2020 году была опубликована Белая книга по ИИ, в которой заложены принципы этичного и безопасного развития технологий, включая нейротехнологии. Также действуют общие положения уже упомянутого в предыдущем разделе Европейского регламента по защите данных (General Data Protection Regulation) относительно защиты нейроданных.

Впервые специальный раздел законодательства, посвященный регулированию нейротехнологий, появился во Франции, в частности, было ограничено коммерческое применение технологий нейровизуализации [160]. В 2011 г. в кн. I «О лицах» Гражданского кодекса Франции была включена гл. IV, содержащая лишь одну статью — ст. 16–14 «Использование методов визуализации мозга», в которой зафиксировано, что «методы визуализации мозга могут использоваться только в медицинских или научных целях или в качестве части судебной экспертизы». В 2021 году во Франции принята новая редакция закона о биоэтике, в котором присутствует ряд положений, касающихся регулирования нейротехнологий, в частности, регулируется использование всех методов записи мозговой активности); вводится понятие нейромодуляции; а также вводится ст. L. 1151-4: «Действия, процедуры, техники, методы и оборудование, предназначенные для изменения мозговой деятельности, представляющие серьезную опасность или предполагаемую серьезную опасность для здоровья человека, могут быть запрещены указом после заключения Высшего органа здравоохранения».

4.3. Соединенные Штаты Америки. 4 октября 2022 года президент Джо Байден представил Билль о безопасном и надежном ИИ, включающий следующие направления⁶:

- создание безопасных и эффективных систем;
- защита от дискриминации со стороны алгоритмов;
- обеспечение конфиденциальности данных;
- объяснение принципов работы систем пользователям;
- возможность выбора человека в качестве альтернативы машине.

В июле 2023 года крупнейшие технологические компании (Amazon, Google, Meta, Microsoft и др.) подписали соглашение о саморегулировании, обязавшись разрабатывать системы водяных знаков для идентификации ИИ-контента, публично сообщать о возможностях и ограничениях своих систем, а также исследовать социальные риски, связанные с ИИ.

В США в 2023 году Белый дом и 7 крупнейших американских технологических компаний — Amazon, Anthropic, Google, Inflection, Meta, Microsoft и OpenAI — заключили соглашение «Обеспечение безопасного, защищенного и заслуживающего доверия ИИ», где взяли на себя обязательство о саморегулировании для управления рисками, связанными с ИИ⁷. Среди ключевых мер: разработка системы водяных знаков для идентификации контента, созданного с помощью ИИ, что является частью борьбы с дезинформацией и другими рисками, связанными с этой быстро развивающейся технологией; обязательство публично сообщать о возможностях, ограничениях и областях использования своих систем ИИ; расставлять приоритеты в исследованиях социальных рисков, связанных с ИИ, включая предвзятость, дискриминацию и проблемы с конфиденциальностью; разрабатывать системы ИИ для решения общественных проблем, начиная от профилактики рака и заканчивая изменениями климата. В конце 2023 года еще восемь IT-компаний подписались на эти добровольные обязательства.

4.4. Российская Федерация. В Российской Федерации регулирование ИИ находится на этапе формирования нормативно-правовой базы, что отражает глобальные тренды в области технологического развития и этических стандартов. В 2020 году была утверждена Национальная стратегия развития искусственного интеллекта до 2030 года, которая определяет основные направления развития ИИ, включая создание правовых и этических рамок. В рамках этой стратегии акцент делается на обеспечение безопасности, защиту персональных данных и предотвращение дискриминации при использовании ИИ-технологий. Кроме того, в 2021 году был принят Федеральный закон № 331-ФЗ, который вносит изменения в Гражданский кодекс РФ и регулирует

⁶Code civil. URL: <https://www.legifrance.gouv.fr/affichCode.do?cidTexte=LEGITEXT000006070721> (дата обращения: 27.01.2025).

⁷The White House. FACT SHEET: Biden-Harris Administration Secures Voluntary Commitments from Leading Artificial Intelligence Companies to Manage the Risks Posed by AI. 2023. URL: <https://www.whitehouse.gov> (дата обращения: 27.01.2025).

вопросы ответственности за действия автономных систем, включая ИИ. Однако на данный момент правовое регулирование остается фрагментарным и требует дальнейшей детализации, особенно в вопросах определения ответственности за решения, принимаемые ИИ. Необходимо отметить также, что в настоящее время происходит значительная работа по формированию стандартов в области использования систем ИИ, и здесь одним из лидеров является здравоохранение, где активно развивается правовое и техническое регулирование ИИ (см., подробнее [9, глава 4]).

Одним из ключевых аспектов регулирования ИИ в России является этическая составляющая. В 2021 году был разработан Кодекс этики в области ИИ, который устанавливает принципы разработки и использования ИИ, такие как прозрачность, справедливость и уважение прав человека. Этот документ, хотя и не имеет обязательной юридической силы, служит ориентиром для разработчиков и компаний, работающих в сфере ИИ. Тем не менее отсутствие четких механизмов контроля и санкций за нарушение этических норм остается проблемой.

5. Этические принципы регулирования ИИ и нейротехнологий с позиции Церкви

Из вышесказанного очевидно, что развитие ИИ и нейротехнологий ставит перед обществом сложные этические вопросы, которые не остаются без внимания религиозных институтов. Церковь на протяжении веков играла ключевую роль в формировании моральных и этических норм общества. Ее позиция по вопросам, связанным с технологиями, имеет значительный вес, так как она основывается на глубоких философских и теологических традициях, которые рассматривают человека как высшую ценность. Включение позиции Церкви в дискуссию об ИИ и нейротехнологиях позволяет учесть духовно-нравственные аспекты, которые часто упускаются в технических и научных обсуждениях. Церковь подчеркивает, что технологии не должны нарушать достоинство человека, которое рассматривается как божественный дар. Это особенно важно в контексте нейротехнологий, которые могут влиять на сознание и идентичность личности. Кроме того, обсуждение позиции Церкви в статье будет способствовать диалогу между научным и религиозным сообществами, что позволит найти баланс между инновациями и сохранением человеческих ценностей в условиях, когда современные технологии начинают затрагивать вопросы, которые традиционно находились в сфере морали и философии.

В данном разделе кратко рассмотрим позиции Русской Православной Церкви (РПЦ) и Римско-католической Церкви (РКЦ) в отношении ИИ и нейротехнологий, а также их подходы к этическому регулированию. Особое внимание уделяется документам и заявлениям, которые формируют основу для диалога между религией и технологиями.

5.1. Этические принципы Церкви в отношении ИИ и нейротехнологий. Церковь подчеркивает, что технологии должны служить человеку, а не подчинять его себе, и предлагает ряд ключевых этических принципов для регулирования ИИ и нейротехнологий. Во-первых, она настаивает на приоритете человеческого достоинства, которое рассматривается как божественный дар. Это означает, что технологии не должны использоваться для манипуляции сознанием, вмешательства в личную свободу или нарушения автономии личности. Вместо этого они должны быть направлены на улучшение качества жизни, избегая рисков дегуманизации. Во-вторых, Церковь подчеркивает ответственность разработчиков и пользователей технологий за их последствия. Особое внимание уделяется нейротехнологиям, которые могут существенно сильнее влиять на сознание и идентичность человека, чем технологии ИИ. Для предотвращения злоупотреблений Церковь призывает к созданию механизмов прозрачности и подотчетности новых технологий перед обществом.

Еще одним важным принципом является защита приватности и данных. Церковь выступает за строгое регулирование сбора и использования персональной информации, особенно в контексте

нейротехнологий, чтобы предотвратить утечки данных и их использование в манипулятивных целях. Кроме того, Церковь предупреждает об опасности дегуманизации, когда технологии заменяют человеческие отношения, эмоции и духовный опыт. Она настаивает на том, что технологии должны дополнять, а не подменять человеческую природу. Наконец, Церковь призывает к справедливости и равенству, подчеркивая, что технологии должны быть доступны всем слоям общества и не должны усугублять социальное неравенство или дискриминацию. Эти принципы формируют основу для этического регулирования технологий, направленного на сохранение человеческих ценностей в эпоху цифрового прогресса.

5.2. Позиция Патриарха Кирилла и Русской Православной Церкви. Патриарх Кирилл неоднократно высказывался о рисках, связанных с развитием ИИ и нейротехнологий. В своих обращениях он подчеркивает, что технологии не должны ставить под угрозу духовную природу человека. В частности, Патриарх предупреждает об опасности «цифрового рабства», когда человек становится зависимым от технологий, теряя свою свободу и духовную автономию. «Человеческая мысль, техническая цивилизация сегодня достигли такого уровня, когда, внедряя цифровые технологии, можно обеспечить тотальный контроль над человеческой личностью. Не просто наблюдение за человеком, но управление человеческим поведением», — сказал он в рождественском интервью телеканалу «Россия-1» в 2021 г.⁸

На XXVIII Международных Рождественских образовательных чтениях в 2020 году Патриарх Кирилл отметил, что «технологии должны служить человеку, а не превращать его в объект манипуляций»⁹. Он также подчеркнул необходимость разработки этических норм, которые бы ограничивали использование ИИ в сферах, затрагивающих человеческую свободу и достоинство. Патриарх призвал к созданию международных стандартов регулирования ИИ, которые бы учитывали не только технические, но и духовно-нравственные аспекты.

РПЦ поддерживает идею запрета на использование технологий для манипуляции сознанием и изменения идентичности человека. В своих документах Церковь подчеркивает, что технологии должны быть направлены на укрепление, а не разрушение человеческой природы.

5.3. Позиция Католической Церкви. Ватикан, как и РПЦ, активно участвует в обсуждении этических вопросов, связанных с ИИ и нейротехнологиями. Папа Франциск неоднократно подчеркивал, что технологии должны служить общему благу и не нарушать принципы человеческого достоинства. Основные принципы регулирования ИИ, которые провозглашает Ватикан, можно суммировать как:

- Человеческий контроль над технологиями: Ватикан настаивает на том, что ИИ должен оставаться под контролем человека, а решения, затрагивающие жизнь людей, не должны приниматься автономными системами.
- Защита приватности и данных: Католическая Церковь призывает к строгому регулированию сбора и использования персональных данных, особенно в контексте нейротехнологий.
- Справедливость и инклюзивность: технологии должны быть доступны всем, а их использование не должно приводить к социальному неравенству.
- Духовное измерение: Ватикан подчеркивает, что технологии не должны заменять духовный опыт и человеческие отношения. ИИ и нейротехнологии должны использоваться для укрепления, а не разрушения человеческих связей.

Особое внимание в документах Ватикана уделяется принципу «Antiqua et nova» («Древнее и новое»), который подчеркивает необходимость сочетания традиционных ценностей с новыми

⁸Патриарх Кирилл предостерег от цифрового рабства // Интерфакс : информ. агентство России : сайт. 2021. URL: <https://www.interfax.ru/russia/744269> (дата обращения: 8.02.2025).

⁹Патриарх Кирилл. Выступление на XXVIII Международных Рождественских образовательных чтениях // Отдел внешних церковных связей Московского Патриархата : официальный сайт. 2020. URL: <https://mospat.ru> (дата обращения: 8.02.2025).

технологическими достижениями. Этот принцип предполагает, что технологии должны развиваться в гармонии с человеческой природой и духовными ценностями, а не противоречить им. По инициативе Папской академии защиты жизни и фонда RenAissance в 2020 г. был разработан документ Rome Call — «Римский призыв к этике в области искусственного интеллекта»¹⁰, в котором отражены вышеуказанные принципы.

5.4. Сходство и различие в позициях регулирования ИИ и нейротехнологий Русской Православной Церкви и Римско-католической Церкви. Хотя РПЦ и Ватикан сходятся в основных принципах регулирования ИИ и нейротехнологий, их подходы имеют свои особенности, обусловленные как богословскими традициями, так и культурно-историческим контекстом. Обе Церкви подчеркивают, что технологии должны служить человеку, а не подчинять его себе, однако акценты в их позициях несколько различаются.

Патриарх Кирилл в своих выступлениях делает особый упор на духовные риски, связанные с развитием технологий. Ватикан, в свою очередь, также уделяет внимание духовным аспектам, но делает больший акцент на социальной справедливости и общем благе. Папа Франциск в своих выступлениях и документах, таких как Послание Святого отца Франциска участникам собрания «Этика ИИ за мир»¹¹, подчеркивает, что технологии должны служить всем людям, особенно наиболее уязвимым слоям общества. В документе «Antiqua et nova» Ватикан призывает к гармоничному сочетанию традиционных ценностей с новыми технологическими достижениями, чтобы избежать дегуманизации¹². Например, Папа Франциск отмечает, что ИИ должен использоваться для укрепления человеческих связей, а не для их разрушения.

РПЦ поддерживает создание международных стандартов регулирования ИИ, но с учетом культурных и религиозных особенностей разных стран. Патриарх Кирилл подчеркивает, что универсальные нормы должны быть адаптированы к местным условиям, чтобы учитывать разнообразие культурных и духовных традиций. Например, в своих выступлениях он отмечает, что западные подходы к регулированию технологий не всегда учитывают специфику православного мировоззрения, которое делает акцент на духовной свободе и ответственности перед Богом. Ватикан, напротив, выступает за универсальные этические нормы, которые бы применялись во всем мире. Папа Франциск призывает к международному сотрудничеству в области регулирования ИИ, чтобы предотвратить злоупотребления и обеспечить соблюдение этических принципов. В документе «Этика искусственного интеллекта» Ватикан предлагает создать глобальные стандарты, которые бы защищали человеческое достоинство и обеспечивали справедливость. Например, Ватикан поддерживает инициативы, направленные на запрет использования ИИ в военных целях или для массовой слежки.

В отношении нейротехнологий Патриарх Кирилл более категоричен, предупреждая об опасности манипуляции сознанием. Он считает, что технологии, способные влиять на мозговую активность, представляют угрозу для свободы воли и духовной автономии человека. В своих выступлениях Патриарх призывает к строгому регулированию нейротехнологий, чтобы предотвратить их использование в манипулятивных целях. Например, в слове Патриарха о научно-техническом прогрессе на встрече с учеными во Всероссийском научно-исследовательском институте экспериментальной физики в г. Сарове 31 июля 2019 г. он задается вопросом: «*Не приведут ли разработки нейроинтерфейса к глубинному коллапсу наших глубинных представлений о границах человеческого?*»¹³.

¹⁰The Call for AI Ethics // RenAissance : фонд : официальный сайт. Ватикан, 2020. URL: <https://www.romecall.org/the-call/> (дата обращения: 8.02.2025).

¹¹Message of the Holy Father to the participants in the «AI Ethics for Peace» gathering // The Holy See : официальный сайт. Ватикан, 2024. URL: <https://www.vatican.va/content/francesco/en/messages/pont-messages/2024/documents/20240710-messaggio-ai-ethics-forpeace.html> (дата обращения: 8.02.2025).

¹²NTIQUA ET NOVA. Note on the Relationship Between Artificial Intelligence and Human Intelligence // The Holy See : официальный сайт. Ватикан, 2025. URL: https://www.vatican.va/roman_curia/congregations/cfaith/documents/rc_ddf_doc_20250128_antiqua-et-nova_en.html (дата обращения: 8.02.2025).

¹³Слово Патриарха о научно-техническом прогрессе // Православие.ru : российский православный информационный

Ватикан, хотя и разделяет эти опасения, больше фокусируется на защите приватности и данных. В документе «Этика искусственного интеллекта» подчеркивается, что сбор и использование данных, особенно в контексте нейротехнологий, должны быть строго регламентированы. Ватикан призывает к созданию правовых рамок, которые бы защищали приватность и предотвращали использование данных в манипулятивных целях. Например, Папа Франциск поддерживает запрет на использование нейротехнологий для слежки или контроля над людьми.

Однако в своем последнем выступлении в Госдуме лидер Русской Православной Церкви говорит уже об экзистенциальной опасности, заявляя, что ИИ «опаснее, чем ядерная энергия», «и еще не известно, какой может быть роль искусственного интеллекта в приближении этой апокалиптической картины».

Таким образом, хотя РПЦ и РКЦ сходятся в основных принципах, их подходы к регулированию ИИ и нейротехнологий имеют свои особенности. РПЦ делает акцент на духовных рисках и культурной специфике, в то время как Ватикан фокусируется на социальной справедливости и универсальных нормах. Оба подхода дополняют друг друга, предлагая комплексное видение этического регулирования технологий с гуманитарных христианских позиций.

6. Согласование этических норм при коэволюции ИИ и нейротехнологий

6.1. Осознание рисков использования ИИ и нейротехнологий. Анализ этических проблем и дилемм, рассмотренных в разделе 3, позволяет сделать вывод, что ИИ и нейротехнологии ставят схожие этические вызовы, особенно в вопросах согласования ценностей и норм при их разработке и использовании. В ряде случаев решения, разработанные для ИИ, могут быть адаптированы для нейротехнологий. Однако нейротехнологии сопряжены с уникальными рисками, которые могут не охватываться существующими нормативными актами или подходами, применяемыми в ИИ.

Например, вопросы психической конфиденциальности, идентичности, автономии и самостоятельности человека становятся более сложными в контексте нейротехнологий. В отличие от ИИ, который влияет на человека косвенно, нейротехнологии могут как напрямую собирать нейроданные, так и записывать новую информацию в нервную систему, причем потенциально незаметно для пользователя [161, 162]. Большинство нейронных сигналов бессознательны и не поддаются нашему осознанию или контролю, что затрудняет точное определение типов данных, собираемых или модулируемых нейротехнологиями. Это создает сложности в понимании того, какими данными мы делимся, и повышает риски непреднамеренного предоставления нейроданных. Это справедливо и для большинства данных о нашем поведении или наших предпочтениях, привычках и т. д., к которым сегодня имеют доступ системы ИИ, но мы редко обращаем на это значительное внимание, потому что до сих пор существует презумпция приватности собственного разума, который кажется недоступным для других людей или технологий. Однако с развитием нейротехнологий это предположение может перестать быть уверенностью. Более того, тот факт, что некоторые нейротехнологии могут как напрямую изменять текущую нейронную активность и напрямую передавать данные в нервную систему в режиме реального времени, поднимает вопросы о том, как мы можем лучше защитить и обеспечить телесную/психическую автономию и способность принимать решения. Это включает в себя возможность целенаправленного изменения целостности наших психических процессов, включая наши представления об идентичности.

Нейротехнологии, способные напрямую влиять на нейронную активность, поднимают вопросы о защите телесной и психической автономии. Возможность изменения психических процессов, включая идентичность, эмоции и воспоминания, ставит сложные вопросы о свободе воли, когнитивной свободе и самосознании. Эти вызовы выходят за рамки тех, с которыми

интернет-портал. Москва, 2019. URL: <http://www.pravoslavie.ru/122890.html> (дата обращения: 8.02.2025).

сталкивается ИИ, хотя аналогичные проблемы обсуждались в биоэтике, например, в контексте трансплантации органов и фармацевтических усовершенствований.

Справедливость, являющаяся ключевым принципом этики ИИ, также актуальна для нейротехнологий. Однако прямое воздействие на мозг и доступ к скрытым данным (например, бессознательным предубеждениям и подавленным воспоминаниям) и потенциальное расширение наших когнитивных и физических способностей повышают риски неравенства и дискриминации. Определение «нормативных» нейроданных и «желательных» результатов может привести к предвзятости в отношении людей с неврологическими различиями или инвалидностью, создавая новые социальные и культурные дилеммы.

Многие из описанных проблем усугубляются при взаимодействии нейротехнологий с ИИ. Например, вопросы конфиденциальности и деидентификации данных, актуальные для ИИ, становятся более сложными в случае нейроданных, которые могут использоваться для точной идентификации личности [159, 163]. Это выходит за рамки традиционных персональных данных, используемых для идентификации личности, и требует новых подходов к защите информации.

Таким образом, этические вызовы, связанные с нейротехнологиями, представляются более острыми и многогранными, чем в случае ИИ, что требует разработки специализированных нормативных и технологических решений.

6.2. Пути решения этических проблем, связанных с совместным использованием ИИ и нейротехнологий. Для эффективного решения проблем, возникающих на стыке ИИ и нейротехнологий, требуется комплексный подход, учитывающий как их общие черты, так и специфические вызовы. В табл. 2 мы, опираясь на результаты работы [55], подвели итог сравнения этических проблем между нейротехнологиями и ИИ, которые подробно были описаны выше.

Таблица 2. Сравнение этических проблем и рисков ИИ и нейротехнологий
Table 2. Comparing the ethical issues and risks of AI and neurotechnology

Этическая проблема и/или риск	Различие между ИИ и нейротехнологиями	Обсуждение
Проблемы с данными и датасетами	Значительные	Данные нейровизуализаций обрабатываются с использованием ИИ, как и любые другие данные, но могут запросить дополнительные требования из-за своей сложности и специфичности форматов, конфиденциальности и отсутствия стандартных согласованных моделей управления и распространения
Объяснимость и доверие	Значительные	В отличие от ИИ, который воздействует на нашу когнитивную сферу опосредованно, нам меньше известно на сегодняшний день о непосредственном и отложенном воздействии нейротехнологий на нашу когнитивную сферу
Подотчетность	Небольшие	Ограниченный и специфический (в основном в области медицинской диагностики) опыт в интерпретации нейроданных, плохая повторяемость научных результатов
Справедливость и доступность	В настоящее время — небольшие. В будущем могут стать значительными.	В отличии от ИИ нейротехнологии в перспективе могут оказывать более значительное и глубокое влияние на человека. Например, воздействия на мозг, о которых мы не знаем и которые не контролируем, могут привести к дискриминации; потенциальная возможность расширения способностей за пределы того, что в настоящее время доступно человеку, может привести к усугублению неравенства.

Окончание табл. 2 на стр. 139

Профилирование и манипуляции	Небольшие	В отличие от манипуляций, которые может породить генеративный ИИ, нейротехнологии для этих целей могут расширить набор дополнительных данных личного характера (данные об особенностях нервной системы и личности), которые человек не может контролировать и скрывать
Контроль и согласование ценностей	Однаковые	—
Ментальная конфиденциальность	Значительные	ИИ имеет доступ только к внешним прокси-данным мыслей и поведения, а не к нейроданным, которые могут быть прямыми репрезентативными показателями психических явлений.
Автономия личности и агентность	В настоящее время — небольшие. В будущем могут стать значительными.	Нейротехнологии могут «внедряться» в нашу нервную систему и напрямую влиять на наш разум и способности, часто в режиме реального времени.
Человеческая идентичность	В настоящее время — небольшие. В будущем могут стать значительными.	ИИ имеет доступ только к внешним носителям идентичности — текстам, данным, особенностям поведения (не к нейроданным) — и может лишь косвенно влиять на идентичность человека, тогда как нейротехнологии способны влиять на нее напрямую и делать это способами, которые могут быть контролируемыми или легко измеримыми, а могут и нет.
Прозрачность Безопасность	Однаковые Однаковые	— В будущем могут стать значительными. Нейроданные могут иметь дело с более личной или конфиденциальной информацией; вероятно, в будущем появится возможность получить большой объем информации о личности человека на основе нейроданных
Благополучие	Значительные	Постоянная физическая и психологическая безопасность могут быть важными факторами для некоторых инвазивных нейротехнологических устройств (имплантов); кроме того, некоторые нейротехнологические возможности зависят от химических веществ, которые могут не поддаваться биологическому разложению или со временем накапливаться в организме, нанося вред здоровью.
Влияние на общество	Однаковые	В будущем могут стать значительными. При объединении ИИ и нейротехнологий появляется больше возможностей для практического применения, что может в перспективе значительно повлиять на сообщества и социум в целом

Конечно, надо иметь в виду, что данные, представленные в таблице, не являются исчерпывающими, так как по мере развития сквозных технологий могут появляться дополнительные факторы и различия.

Определив проблемы, связанные с совместным использованием ИИ и нейротехнологий, мы можем начать определение путей их решения. Как уже говорилось, некоторые проблемы при комбинировании систем ИИ и нейротехнологий потенциально могут стать значительно более сложными по сравнению только с ИИ, поэтому для их решения нам могут понадобиться модифицированные или новые стратегии снижения рисков или их предотвращения, как чисто

технические, так и социальные, политические, институциональные и экономические подходы. Однако на этом пути не нужно начинать с нуля. За последнее время было проделано много фундаментальной работы, чтобы начать решать многие вопросы этики ИИ, включая разработку методологий определения проблем, лучших практик, этических принципов и руководящих указаний, создание технических решений, образовательных программ, а также формирование рамок управления, международных стандартов и законодательных актов. Уроки, извлеченные из этих усилий, должны быть использованы для ускорения процесса решения проблем нейротехнологий. Международное сообщество нейроэтиков создало более 20 этических руководств, принципов и лучших практик, скомпилированных Институтом нейроэтики (IoNx)¹⁴, которые могут стать основной этой работы.

Первым шагом является четкое определение взаимосвязи между общими и специфическими проблемами, представленными в табл. 2, после чего вторым шагом является адаптация существующих этических рамок и мер по регулированию ИИ к более широкому кругу проблем, связанных с коэволюцией ИИ и нейротехнологий. Для полного понимания последствий нейротехнологий необходим междисциплинарный подход, включающий экспертов из нейронауки, нейроэтики, социологии, антропологии, медицины, права, бизнеса и других областей. Важно привлекать к обсуждению не только специалистов, но и представителей сообществ, которые могут быть затронуты ИИ и нейротехнологиями, включая тех, кто потенциально может пострадать от новых технологий. К последним, например, могут быть отнесены представители малых народностей, данные которых могут не попадать в датасеты, формируемые для обучения медицинского ИИ, и которые могут пострадать из-за неверного диагноза из-за проблем несбалансированности данных [164]. Их потребности должны рассматриваться как важный фактор для оценки этических последствий коэволюции ИИ и нейротехнологий и создания более совершенных и безопасных технологий.

Заключение

ИИ представляет собой одну из наиболее значимых технологий современности, активно интегрирующуюся в различные сферы человеческой жизни. В сочетании с нейротехнологиями ИИ открывает новые перспективы в области профессиональной деятельности, досуга, здравоохранения и других социально значимых направлений. Однако, как и любая технология, обладающая значительным потенциалом, ИИ требует ответственного подхода к своему развитию и применению. Коммерциализация ИИ и нейротехнологий, а также использование данных, лежащих в основе их функционирования, происходят с беспрецедентной скоростью и масштабами. В отсутствие адекватной политики и регуляторных механизмов это может привести к возникновению серьезных угроз для человечества, даже без достижения уровня «сверхинтеллекта».

Технологии, оказывающие непосредственное влияние на когнитивную сферу человека, к которым относятся как ИИ, так и нейротехнологии, должны развиваться в соответствии с темпами осмыслиения и интеграции человеческих ценностей и общественных интересов. Это необходимо для того, чтобы технологический прогресс приносил пользу не только отдельным индивидам, но и обществу в целом. Учитывая, что рассматриваемые технологии находятся на стадии активного развития и их прогресс, вероятно, продолжится в ближайшем будущем, существует возможность извлечь уроки из прошлого опыта, заранее идентифицировать потенциальные риски и разработать превентивные меры. К ним относятся технические, правовые, социальные и образовательные решения, направленные на минимизацию негативных последствий до их возникновения. Такой подход позволит обеспечить устойчивое и этически обоснованное развитие технологий, способствуя их гармоничному внедрению в общественную жизнь.

¹⁴Institute of Neuroethics (IoNx): сайт. URL: <https://instituteofneuroethics.org> (дата обращения: 4.02.2025).

Уже на текущем этапе развития становится очевидным, что ключевым принципом регулирования ИИ и нейротехнологий, включая различные методы нейровизуализации, должен стать принцип *in dubio pro homo (в сомнении — в пользу человека)*. Этот принцип предполагает:

- защиту человека от дискриминации, обусловленной алгоритмическими решениями;
- обеспечение права выбора человека в качестве альтернативы автоматизированным системам;
- приоритет личной автономии и самоопределения индивида;
- гарантии защиты персональных данных, включая нейроданные.

В контексте генеративного ИИ и нейротехнологий, связанных с воздействием на мозг (в частности, методов нейромодуляции), необходимо законодательное закрепление следующих требований:

- обязательная маркировка контента, созданного с использованием ИИ;
- запрет на создание противозаконного контента;
- запрет на разработку систем, действующих на подсознание человека и нарушающих его базовые свободы и автономию.

В данной статье мы постарались обратить внимание на коэволюцию ИИ и нейротехнологий, а также на потенциальные точки их взаимодействия, что особенно актуально для специалистов, занимающихся вопросами этики технологий. Наша цель заключается в инициировании широкой дискуссии и определении путей решения этических проблем, возникающих на стыке этих технологий.

Путем выявления ключевых этических вызовов, связанных с нейротехнологиями, их сопоставления с этическими проблемами ИИ, а также анализа областей, где существующие инициативы и инструменты в области этики ИИ могут быть достаточными или, напротив, требуют новых подходов, мы надеемся стимулировать междисциплинарное сотрудничество. Такое взаимодействие между учеными, представителями бизнеса и политическими деятелями позволит разработать своевременные и конкретные меры, направленные на минимизацию негативного воздействия новых технологий и обеспечение их ответственного использования в интересах общества.

Список литературы

1. *Hassabis D., Kumaran D., Summerfield C., Botvinick M.* Neuroscience-inspired artificial intelligence // *Neuron*. 2017. Vol. 95, no. 2. P. 245–258. DOI: 10.1016/j.neuron.2017.06.011.
2. *Karpov O. E., Pitsik E. N., Kurkin S. A., Maksimenko V. A., Gusev A. V., Shusharina N. N., Hramov A. E.* Analysis of publication activity and research trends in the field of AI medical applications: Network approach // *Int. J. Environ. Res. Public Health*. 2023. Vol. 20, no. 7. P. 5335. DOI: 10.3390/ijerph20075335.
3. *Nyholm S.* Artificial intelligence and human enhancement: Can AI technologies make us more (artificially) intelligent? // *Camb. Q. Healthc. Ethics.* 2024. Vol. 33, no. 1. P. 76–88. DOI: 10.1017/S0963180123000464.
4. *Duan Y. Q., Edwards J. S., Dwivedi Y. K.* Artificial intelligence for decision making in the era of Big Data – evolution, challenges and research agenda // *International Journal of Information Management*. 2019. Vol. 48. P. 63–71. DOI: 10.1016/j.ijinfomgt.2019.01.021.
5. *Autor D. H.* Why are there still so many jobs? The history and future of workplace automation // *Journal of Economic Perspectives*. 2015. Vol. 29, no. 3. P. 3–30. DOI: 10.1257/jep.29.3.3.
6. *Brown T., Mann B., Ryder N., Subbiah M., Kaplan J. D., Dhariwal Prafulla, Neelakantan A., Shyam P., Sastry G., Askell A., Agarwal S., Herbert-Voss A., Krueger G., Henighan T., Child R., Ramesh A., Ziegler D., Wu J., Winter C., Hesse Chris, Chen M., Sigler E., Litwin M., Gray S., Chess B., Clark J., Berner Ch., McCandlish S., Radford A., Sutskever I., Amodei D.* Language models are few-shot learners // In: *Larochelle H., Ranzato M., Hadsell R., Balcan M. F., Lin H.* (eds.) *Advances in Neural Information Processing Systems*. Vol. 33. P. 1877–1901. DOI: 10.48550/arXiv.2005.14165.

7. Wang L., Törngren M., Onori M. Current status and advancement of cyber-physical systems in manufacturing // *Journal of Manufacturing Systems*. 2015. Vol. 37. P. 517–527. DOI: 10.1016/j.jmsy.2015.04.008.
8. Topol E. J. High-performance medicine: the convergence of human and artificial intelligence // *Nature Medicine*. 2019. Vol. 25, no. 1. P. 44–56. DOI: 10.1038/s41591-018-0300-7.
9. Карпов О. Э., Храмов А. Е. Информационные технологии, вычислительные системы и искусственный интеллект в медицине. М.: ДПК Пресс, 2022. 480 с.
10. Федоров А. А., Куркин С. А., Храмова М. В., Храмов А. Е. Нейротехнологии и искусственный интеллект как ключевые факторы кастомизации жизненно-образовательного маршрута // *Информатика и образование*. 2023. Т. 38, № 3. С. 5–15. DOI: 10.32517/0234-0453-2023-38-3-5-15.
11. Holmes W., Tuomi I. State of the art and practice in AI in education // *European Journal of Education*. 2022. Vol. 57, no. 4. P. 542–570. DOI: 10.1111/ejed.12533.
12. Carleo G., Cirac I., Cranmer K., Daudet L., Schuld M., Tishby N., Vogt-Maranto L., Zdeborová L. Machine learning and the physical sciences // *Rev Mod Phys*. 2019. Vol. 91, no. 4. P. 045002. DOI: 10.1103/RevModPhys.91.045002.
13. Silver D., Hubert T., Schrittwieser J., Antonoglou I., Lai M., Guez A., Lanctot M., Sifre L., Kumaran D., Graepel T., Lillicrap T., Simonyan K., Hassabis D. A general reinforcement learning algorithm that masters chess, shogi, and Go through self-play // *Science*. 2018. Vol. 362, no. 6419. P. 1140–1144. DOI: 10.1126/science.aar6404.
14. Bandettini P. A. What's new in neuroimaging methods? // *Ann NY Acad Sci*. 2009. Vol. 1156. P. 260–293. DOI: 10.1111/j.1749-6632.2009.04420.x.
15. Hramov A. E., Maksimenko V. A., Pisarchik A. N. Physical principles of brain-computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states // *Phys Rep*. 2021. Vol. 918. P. 1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
16. Marzban H., Marateb H. R., Mansourian M. Neurofeedback: a comprehensive review on system design, methodology and clinical applications // *Basic Clin. Neurosci*. 2016. Vol. 7, no. 2. P. 143–158. DOI: 10.15412/J.BCN.03070208.
17. Mihara M., Miyai I., Hattori N., Hatakenaka M., Yagura H., Kawano T., Okibayashi M., Danjo N., Ishikawa A., Inoue Y., Kubota K. Neurofeedback using real-time near-infrared spectroscopy enhances motor imagery related cortical activation // *PLoS ONE*. 2012. Vol. 7, no. 3. P. e32234. DOI: 10.1371/journal.pone.0032234.
18. Hallett M. Transcranial magnetic stimulation: a primer // *Neuron*. 2007. Vol. 55, no. 2. P. 187–199. DOI: 10.1016/j.neuron.2007.06.026.
19. Rossi S., Hallett M., Rossini P., Pascual-Leone A., *The Safety of TMS Consensus Group*. Safety, ethical considerations, and application guidelines for the use of transcranial magnetic stimulation in clinical practice and research // *Clin Neurophysiol*. 2009. Vol. 120, no. 12. P. 2008–2039. DOI: 10.1016/j.clinph.2009.08.016.
20. Brunoni A., Nitsche M., Bolognini N., Bikson M., Wagner T., Merabet L., Edwards D., Valero-Cabré A., Rotenberg A., Pascual-Leone A., Ferrucci R., Priori A., Boggio P., Fregni F. Clinical research with transcranial direct current stimulation (tDCS): Challenges and future directions // *Brain Stimul*. 2012. Vol. 5, no. 3. P. 175–195. DOI: 10.1016/j.brs.2011.03.002.
21. Benabid A., Chabardes S., Mitrofanis J., Pollak P. Deep brain stimulation of the subthalamic nucleus for the treatment of Parkinson's disease // *Lancet Neurol*. 2009. Vol. 8, no. 1. P. 67–81. DOI: 10.1016/S1474-4422(08)70291-6.
22. Cometa A., Falasconi A., Biasizzo M., Carpaneto J., Horn A., Mazzoni A., Micera S. Clinical neuroscience and neurotechnology: An amazing symbiosis // *iScience*. 2022. Vol. 25, no. 10. P. 105124. DOI: 10.1016/j.isci.2022.105124.
23. Daly J. J., Wolpaw J. R. Brain-computer interfaces in neurological rehabilitation // *Lancet Neurol*. 2008. Vol. 7, no. 11. P. 1032–1043. DOI: 10.1016/S1474-4422(08)70223-0.

24. *Plass-Oude Bos D., Reuderink B., van de Laar B., Gürkök H., Mühl C., Poel M., Nijholt A., Heylen D.* Brain-Computer Interfacing and Games // In: Tan D., Nijholt A. (eds) Brain-Computer Interfaces. Human-Computer Interaction Series. London: Springer, 2010. P. 149–178. DOI: 10.1007/978-1-84996-272-8_10.
25. *Marshall D., Coyle D., Wilson S., Callaghan M.* Games, gameplay, and BCI: The state of the art // IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games. 2013. Vol. 5, no. 2. P. 164–176. DOI: 10.1109/tciaig.2013.2263555.
26. *Campbell M., Hoane A. J., Hsu Fh.* Deep Blue // Artificial Intelligence. 2002. Vol. 134, no. 1–2. P. 57–83. DOI: 10.1016/S0004-3702(01)00129-1.
27. *Hsu F. H., Anantharaman T., Campbell M., Nowatzyk A.* A grandmaster chess machine // Scientific American. 1990. Vol. 263, no. 4. P. 44–51. <https://www.jstor.org/stable/24997060>.
28. *He K., Zhang X., Ren S., Sun J.* Delving deep into rectifiers: Surpassing human-level performance on imagenet classification // In: Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). 2015. p. 1026–1034. DOI: 10.1109/ICCV.2015.123.
29. *Silver D., Schrittwieser J., Simonyan K., Antonoglou I., Huang A., Guez A., Hubert T., Baker L., Lai M., Bolton A., Chen Y., Lillicrap T., Hui F., Sifre L., van den Driessche G., Graepel Th., Hassabis D.* Mastering the game of go without human knowledge // Nature. 2017. Vol. 550, no. 7676. P. 354–359. DOI: 10.1038/nature24270.
30. *Logothetis N. K.* What we can do and what we cannot do with fMRI // Nature. 2008. Vol. 453, no. 7197. P. 869–878. DOI: 10.1038/nature06976.
31. *Luck S. J.* An Introduction to the Event-Related Potential Technique. Massachusetts: MIT Press, 2014. 388 p.
32. *Hämäläinen M., Hari R., Ilmoniemi R. J., Knuutila J., Lounasmaa O. V.* Magnetoencephalography-theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain // Rev. Mod. Phys. 1993. Vol. 65, no. 2. P. 413–497. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.413.
33. *Ferrari M., Quaresima V.* A brief review on the history of human functional near-infrared spectroscopy (fNIRS) development and fields of application // NeuroImage. 2012. Vol. 63, no. 2. P. 921–935. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2012.03.049.
34. *Grau C., Ginhoux R., Riera A., Nguyen T. L., Chauvat H., Berg M., Amengual J. L., Pascual-Leone A., Ruffini G.* Conscious brain-to-brain communication in humans using non-invasive technologies // PLoS ONE. 2014. Vol. 9, no. 8. P. e105225. DOI: 10.1371/journal.pone.0105225.
35. *Nam C. S., Traylor Z., Chen M., Jiang X., Feng W., Chhatbar P. Y.* Direct communication between brains: A systematic PRISMA review of brain-to-brain interface // Front Neurorobot. 2021. Vol. 15. P. 656943. DOI: 10.3389/fnbot.2021.656943.
36. *Maksimenko V. A., Hramov A. E., Frolov N. S., Lüttjohann A., Nedaivozov V. O., Grubov V. V., Runnova A. E., Makarov V. V., Kurths J., Pisarchik A. N.* Increasing human performance by sharing cognitive load using brain-to-brain interface // Front Neurosci. 2018. Vol. 12. P. 949. DOI: 10.3389/fnins.2018.00949.
37. *Kurkin S., Gordleeva S., Savosenkov A., Grigorev N., Smirnov N., Grubov V. V., Udaratina A., Maksimenko V., Kazantsev V., Hramov A. E.* Transcranial Magnetic Stimulation of the Dorsolateral Prefrontal Cortex Increases Posterior Theta Rhythm and Reduces Latency of Motor Imagery // Sensors. 2023. Vol. 23, no. 10. P. 4661. DOI: 10.3390/s23104661.
38. *Musk E.* An integrated brain-machine interface platform with thousands of channels // J. Med. Internet Res. 2019. Vol. 21, no. 10. P. e16194. DOI: 10.2196/16194.
39. *Pisarchik A. N., Maksimenko V. A., Hramov A. E.* From novel technology to novel applications: Comment on “An Integrated Brain-Machine Interface Platform With Thousands of Channels” by Elon Musk and Neuralink // J. Med. Internet. Res. 2019. Vol. 21, no. 10. P. e16356. DOI: 10.2196/16356.
40. *Opie N. L., John S. E., Rind G. S., Ronayne S. M., Wong Y. T., Gerboni G., Yoo P. E., Lovell T., Scordas T., Wilson S. L., Dornom A., Vale T., O'Brien T. J., Grayden D. B., May C. N., Oxley Th. J.*

- Focal stimulation of the sheep motor cortex with a chronically implanted minimally invasive electrode array mounted on an endovascular stent // *Nat. Biomed. Eng.* 2018. Vol. 2, no. 12. P. 907–914. DOI: 10.1038/s41551-018-0321-z.
41. *Филипова И. А.* Нейротехнологии: развитие, применение на практике и правовое регулирование // *Вестник СПбГУ. Право.* 2021. Т. 12, № 3. С. 502–521. DOI: 10.21638/spbu14.2021.302.
 42. *Lecomte P.* Umwelt as the foundation of an ethics of smart environments // *Humanit Soc Sci Commun.* 2023. Vol. 10. P. 925. DOI: 10.1057/s41599-023-02356-9.
 43. *Ienca M., Andorno R.* Towards new human rights in the age of neuroscience and neurotechnology // *Life Sci Soc Policy.* 2017. Vol. 13, no. 1. P. 5. DOI: 10.1186/s40504-017-0050-1.
 44. *Kellmeyer P.* Big brain data: On the responsible use of brain data from clinical and consumer-directed neurotechnological devices // *Neuroethics.* 2018. Vol. 14. P. 83–98. DOI: 10.1007/s12152-018-9371-x.
 45. *Mittelstadt B. D., Allo P., Taddeo M., Wachter S., Floridi L.* The ethics of algorithms: Mapping the debate // *Big Data and Society.* 2016. Vol. 3, no. 2. P. 2053951716679679. DOI: 10.1177/2053951716679679.
 46. *Floridi L., Cowls J., Beltrametti M., Chatila R., Chazerand P., Dignum V., Luetge C., Madelin R., Pagallo U., Rossi F., Schafer B., Valcke P., Vayena E.* AI4People—An ethical framework for a good AI society: Opportunities, risks, principles, and recommendations // *Minds Mach.* 2018. Vol. 28, no. 4. P. 689–707. DOI: 10.1007/s11023-018-9482-5.
 47. *Calo R.* Artificial Intelligence Policy: A Primer and Roadmap // *UCD L Rev.* 2017. Vol. 51. P. 399.
 48. *Battista D.* Political communication in the age of artificial intelligence: an overview of deepfakes and their implications // *Society Register.* 2024. Vol. 8, no. 2. P. 7–24. DOI: 10.14746/sr.2024.8.2.01.
 49. *Gambín A. F., Yazidi A., Vasilakos A., Haugerud H., Djenouri Y.* Deepfakes: current and future trends // *Artif Intell Rev.* 2024. Vol. 57, no. 3. P. 64. DOI: 10.1007/s10462-023-10679-x.
 50. *Chesney R., Citron D.* Deepfakes and the new disinformation war: The coming age of post-truth geopolitics // *Foreign Affairs.* 2019. Vol. 98, no. 1. P. 147–155.
 51. *Maras M. H., Alexandrou A.* Determining authenticity of video evidence in the age of artificial intelligence and in the wake of Deepfake videos // *The International Journal of Evidence and Proof.* 2019. Vol. 23, no. 3. P. 255–262. DOI: 10.1177/1365712718807226.
 52. *Citron D. K., Chesney R.* Deep fakes: A looming challenge for privacy, democracy, and national security // *California Law Review.* 2019. Vol. 107, no. 6. P. 1753–1819.
 53. *Memarian B., Doleck T.* ChatGPT in education: Methods, potentials and limitations // *Computers in Human Behavior: Artificial Humans.* 2023. Vol. 1, no. 6. P. 100022. DOI: 10.1016/j.chbah.2023.100022.
 54. *Adeshola I., Adepoju A. P.* The opportunities and challenges of ChatGPT in education // *Interactive Learning Environments.* 2024. Vol. 32, no. 10. P. 6159–6172. DOI: 10.1080/10494820.2023.2253858.
 55. *Berger S., Rossi F.* AI and neurotechnology: learning from AI ethics to address an expanded ethics landscape // *Communications of the ACM.* 2023. Vol. 66, no. 3. P. 58–68. DOI: 10.1145/3529088.
 56. *Huang C., Zhang Z., Mao B., Yao X.* An overview of artificial intelligence ethics // *IEEE Transactions on Artificial Intelligence.* 2022. Vol. 4, no. 4. P. 799–819. DOI: 10.1109/TAI.2022.3194503.
 57. *Bostrom N.* Ethical issues in advanced artificial intelligence // In: *Machine Ethics and Robot Ethics.* London: Routledge, 2020. P. 69–75. DOI: 10.4324/9781003074991-7.
 58. *Mittelstadt B.* Principles alone cannot guarantee ethical AI // *Nat Mach Intell.* 2019. Vol. 1, no. 11. P. 501–507. DOI: 10.1038/s42256-019-0114-4.
 59. *Ruiz S., Valera L., Ramos P., Sitaram R.* Neurorights in the Constitution: from neurotechnology to ethics and politics // *Philosophical Transactions B.* 2024. Vol. 379, no. 1915. P. 20230098. DOI: 10.1098/rstb.2023.0098.

60. *Robinson J. T., Rommelfanger K. S., Anikeeva P. O., Etienne A., French J., Gelinas J., Grover P., Picard R.* Building a culture of responsible neurotech: Neuroethics as socio-technical challenges // *Neuron*. 2022. Vol. 110, no. 13. P. 2057–2062. DOI: 10.1016/j.neuron.2022.05.005.
61. *Illes J.* Neuroethics: Anticipating the Future. NY: Oxford University Press, 2017.
62. *Sample M., Racine E.* Pragmatism for a digital society: The (in)significance of artificial intelligence and neural technology // In: Friedrich O., Wolkenstein A., Bublitz C., Jox R. J., Racine E., editors. Clinical Neurotechnology meets Artificial Intelligence. Advances in Neuroethics. Cham: Springer, 2021. p. 81–100. DOI: 10.1007/978-3-030-64590-8_7.
63. *Savage N.* How AI and neuroscience drive each other forwards // *Nature*. 2019. Vol. 571, no. 7766. P. S15–S17. DOI: 10.1038/d41586-019-02212-4.
64. *Raichle M. E.* A brief history of human brain mapping // *Trends Neurosci*. 2009. Vol. 32, no. 2. P. 118–126. DOI: 10.1016/j.tins.2008.11.001.
65. *Friston K. J.* Modalities, modes, and models in functional neuroimaging // *Science*. 2009. Vol. 326, no. 5951. P. 399–403. DOI: 10.1126/science.1174521.
66. *Lefaucheur J. P., Aleman A., Baeken C., Benninger D. H., Brunelin J., Di Lazzaro V., Filipović S. R., Grefkes C., Hasan A., Hummel F. C., Jääskeläinen S. K., Langguth B., Leocani L., Londero A., Nardone R., Nguyen J.-P., Nyffeler Th., Oliveira-Maia A. J., Oliviero A., Padberg F., Palm U., Paulus W., Poulet E., Quartarone A., Rachid F., Rektorová I., Rossi S., Sahlsten H., Schecklmann M., Szekely D., Ziemann U.* Evidence-based guidelines on the therapeutic use of repetitive transcranial magnetic stimulation (rTMS): An update (2014–2018) // *Clin Neurophysiol*. 2020. Vol. 131, no. 5. P. 474–528. DOI: 10.1016/j.clinph.2019.11.002.
67. *Benabid A. L., Chabardes S., Mitrofanis J., Pollak P.* Deep brain stimulation of the subthalamic nucleus for the treatment of Parkinson's disease // *Lancet Neurol*. 2009. Vol. 8, no. 1. P. 67–81. DOI: 10.1016/S1474-4422(08)70291-6.
68. *Fisher R., Salanova V., Witt T., Worth R., Henry T., Gross R., Oommen K., Osorio I., Nazzaro J., Labar D., Kaplitt M., Sperling M., Sandok E., Neal J., Handforth A., Stern J., DeSalles A., Chung S., Shetter A., Bergen D., Bakay R., Henderson J., French J., Baltuch G., Rosenfeld W., Youkilis A., Marks W., Garcia P., Barbaro N., Fountain N., Bazil C., Goodman R., McKhann G., Krishnamurthy K. B., Papavassiliou S., Epstein Ch., Pollard J., Tonder L., Grebin J., Coffey R., Graves N., the SANTE Study Group.* Electrical stimulation of the anterior nucleus of thalamus for treatment of refractory epilepsy // *Epilepsia*. 2010. Vol. 51, no. 5. P. 899–908. DOI: 10.1111/j.1528-1167.2010.02536.x.
69. *Bonomo R., Elia A. E., Bonomo G., Romito L. M., Mariotti C., Devigili G., Cilia R., Giossi R., Eleopra R.* Deep brain stimulation in Huntington's disease: a literature review // *Neurological Sciences*. 2021. Vol. 42, no. 11. P. 4447–4457. DOI: 10.1007/s10072-021-05527-1.
70. *Ramachandran V. S., Rogers-Ramachandran D.* Phantom limbs and neural plasticity // *Arch. Neurol*. 2000. Vol. 57, no. 3. P. 317–320. DOI: 10.1001/archneur.57.3.317.
71. *Khorev V., Kurkin S., Badarin A., Antipov V., Pitsik E., Andreev A., Grubov V., Drapkina O., Kiselev A., Hramov A.* Review on the use of brain computer interface rehabilitation methods for treating mental and neurological conditions // *J. Integr. Neurosci*. 2024. Vol. 23, no. 7. P. 125. DOI: 10.31083/j.jin2307125.
72. *Kuo M. F., Nitsche M. A.* Effects of transcranial electrical stimulation on cognition // *Clin. EEG Neurosci*. 2012. Vol. 43, no. 3. P. 192–199. DOI: 10.1177/1550059412444975.
73. *Anguera J. A., Boccanfuso J., Rintoul J. L., Al-Hashimi O., Faraji F., Janowich J., Kong E., Larraburo Y., Rolle C., Johnston E., Gazzaley A.* Video game training enhances cognitive control in older adults // *Nature*. 2013. Vol. 501, no. 7465. P. 97–101. DOI: 10.1038/nature12486.
74. *Grubov V. V., Khramova M. V., Goman S., Badarin A. A., Kurkin S. A., Andrikov D. A., Pitsik E., Antipov V., Petushok E., Brusinskii N., Bukina T., Fedorov A. A., Hramov A. E.* Open-loop neuroadaptive system for enhancing student's cognitive abilities in learning // *IEEE Access*. 2024. Vol. 12. P. 49034–49049. DOI: 10.1109/access.2024.3383847.
75. *Букина Т. В., Храмова М. В., Куркин С. А., Андриков Д. А., Гоман С. С., Дедков А. Е., Храповерюк-Жидков А. В., Максименко В. А., Храмов А. Е.*

- мов А. Е. Нейрообразовательный программный рекомендательный сервис как инструмент персонализации образовательного процесса // Информатика и образование. 2024. Т. 39, № 5. С. 50–62. DOI: 10.32517/0234-0453-2024-39-5-50-62.
76. *Donati A. R., Shokur S., Morya E., Campos D. S., Moioli R. C., Gitti C. M., Augusto P. B., Tripodi S., Pires C. G., Pereira G. A., Brasil F. L., Gallo S., Lin A. A., Takigami A. K., Aratanha M. A., Joshi S., Bleuler H., Cheng G., Rudolph A., Nicolelis M. A. L.* Long-term training with a brain-machine interface-based gait protocol induces partial neurological recovery in paraplegic patients // *Sci. Rep.* 2016. Vol. 6. P. 30383. DOI: 10.1038/srep30383.
 77. *Poppe C., Elger B. S.* Brain-computer interfaces, completely locked-in state in neurodegenerative diseases, and end-of-life decisions // *Journal of Bioethical Inquiry*. 2024. Vol. 21, no. 1. P. 19–27. DOI: 10.1007/s11673-023-10256-5.
 78. *Kübler A., Neumann N.* Brain-computer interfaces—the key for the conscious brain locked into a paralyzed body // *Prog. Brain Res.* 2005. Vol. 150. P. 513–525. DOI: 10.1016/S0079-6123(05)50035-9.
 79. *Lebedev M. A., Nicolelis M. A.* Brain-machine interfaces: past, present and future // *Trends Neurosci.* 2006. Vol. 29, no. 9. P. 536–546. DOI: 10.1016/j.tins.2006.07.004.
 80. *Veena N., Anitha N.* A review of non-invasive BCI devices. *Int J Biomed Eng Technol.* 2020. Vol. 34, no. 3. P. 205–233. DOI: 10.1504/IJBET.2020.111471.
 81. *Grill W. M., Norman S. E., Bellamkonda R. V.* Implanted neural interfaces: biochallenges and engineered solutions // *Annu Rev Biomed Eng.* 2009. Vol. 11. P. 1–24. DOI: 10.1146/annurev-bioeng-061008-124927.
 82. *Salatino J. W., Ludwig K. A., Kozai T. D. Y., Purcell E. K.* Glial responses to implanted electrodes in the brain // *Nat. Biomed. Eng.* 2017. Vol. 1, no. 11. P. 862–877. DOI: 10.1038/s41551-017-0154-1.
 83. *Rossi S., Hallett M., Rossini P. M., Pascual-Leone A., The Safety of TMS Consensus Group.* Safety, ethical considerations, and application guidelines for the use of transcranial magnetic stimulation in clinical practice and research // *Clin. Neurophysiol.* 2009. Vol. 120, no. 12. P. 2008–2039. DOI: 10.1016/j.clinph.2009.08.016.
 84. *Kringelbach M. L., Jenkinson N., Owen S. L., Aziz T. Z.* Translational principles of deep brain stimulation // *Nature Reviews Neuroscience*. 2007. Vol. 8, no. 8. P. 623–635. DOI: 10.1038/nrn2196.
 85. *Bergey G. K., Morrell M. J., Mizrahi E. M., Goldman A., King-Stephens D., Nair D., Srinivasan S., Jobst B., Gross R. E., Shields D. C., Barkley G., Salanova V., Olejniczak P., Cole A., Cash S. S., Noe K., Wharen R., Worrell G., Murro A. M., Edwards J., Duchowny M., Spencer D., Smith M., Geller E., Gwinn R., Skidmore Ch., Eisenschenk S., Berg M., Heck Ch., Van Ness P., Fountain N., Rutecki P., Massey A., O'Donovan C., Labar D., Duckrow R. B., Hirsch L. J., Courtney T., Sun F. T., Seale C. G.* Long-term treatment with responsive brain stimulation in adults with refractory partial seizures // *Neurology*. 2015. Vol. 84, no. 8. P. 810–817. DOI: 10.1212/WNL.0000000000001280.
 86. *Deer T. R., Pope J. E., Hayek S. M., Bux A., Buchser E., Eldabe S., De Andrés J. A., Erdek M., Patin D., Grider J. S., Doleys D. M., Jacobs M. S., Yaksh T. L., Poree L., Wallace M. S., Prager J., Rauck R., DeLeon O., Diwan S., Falowski S. M., Gazelka H. M., Kim Ph., Leong M., Levy R. M., McDowell G., McRoberts P., Naidu R., Narouze S., Perruchoud Ch., Rosen S. M., Rosenberg W. S., Saulino M., Staats P., Stearns L. J., Willis D., Krames E., Huntoon M., Mekhail N.* The Polyanalgesic Consensus Conference (PACC): Recommendations on Intrathecal Drug Infusion Systems Best Practices and Guidelines // *Neuromodulation*. 2017. Vol. 20, no. 2. P. 96–132. DOI: 10.1111/ner.12538.
 87. *Deisseroth K.* Optogenetics: 10 years of microbial opsins in neuroscience // *Nat. Neurosci.* 2015. Vol. 18, no. 9. P. 1213–1225. DOI: 10.1038/nn.4091.
 88. *LeCun Y., Bengio Y., Hinton G.* Deep learning // *Nature*. 2015. Vol. 521, no. 7553. P. 436–444. DOI: 10.1038/nature14539.
 89. *Vaswani A., Shazeer N., Parmar N., Uszkoreit J., Jones L., Gomez A. N., Kaiser L., Polosukhin I.* Attention is all you need // In: Guyon I., Luxburg U. V., Bengio S., Wallach H., Fergus R., Vishwanathan S., Garnett R., editors. *Advances in Neural Information Processing Systems*. vol. 30. Curran Associates, Inc., 2017. P. 5998–6008.

90. *Goodfellow I. J., Pouget-Abadie J., Mirza M., Xu B., Warde-Farley D., Ozair S., Courville A., Bengio Y.* Generative adversarial nets // In: Proceedings of the 28th International Conference on Neural Information Processing Systems - Volume 2. NIPS'14. Cambridge: MIT Press, 2014. P. 2672–2680.
91. *Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G. E.* ImageNet classification with deep convolutional neural networks // In: Proceedings of the 26th International Conference on Neural Information Processing Systems - Volume 1. NIPS'12. Red Hook, NY, USA: Curran Associates Inc., 2012. P. 1097–1105.
92. *He K., Zhang X., Ren S., Sun J.* Deep Residual Learning for Image Recognition // In: 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2016. P. 770–778. DOI: 10.1109/CVPR.2016.90.
93. *Qi C. R., Su H., Mo K., Guibas L. J.* PointNet: Deep learning on point sets for 3D classification and segmentation // In: 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2017. P. 77–85. DOI: 10.1109/CVPR.2017.16.
94. *Girshick R., Donahue J., Darrell T., Malik J.* Rich feature hierarchies for accurate object detection and semantic segmentation // In: 2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2014. P. 580–587. DOI: 10.1109/CVPR.2014.81.
95. *Esteva A., Kuprel B., Novoa R. A., Ko J., Swetter S. M., Blau H. M., Thrun S.* Dermatologist-level classification of skin cancer with deep neural networks // Nature. 2017. Vol. 542, no. 7639. P. 115–118. DOI: 10.1038/nature21056.
96. *LeCun Y., Bottou L., Bengio Y., Haffner P.* Gradient-based learning applied to document recognition // Proceedings of the IEEE. 1998. Vol. 86, no. 11. P. 2278–2324. DOI: 10.1109/5.726791.
97. *Chen C., Seff A., Kornhauser A., Xiao J.* DeepDriving: Learning affordance for direct perception in autonomous driving // In: 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), 2015. p. 2722–2730. DOI: 10.1109/ICCV.2015.312.
98. *Loquercio A., Maqueda A. I., del Blanco C. R., Scaramuzza D.* DroNet: Learning to fly by driving // IEEE Robotics and Automation Letters. 2018. Vol. 3, no. 2. P. 1088–1095. DOI: 10.1109/LRA.2018.2795643.
99. *Pinto L., Gupta A.* Supersizing self-supervision: Learning to grasp from 50K tries and 700 robot hours // In: 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2016. p. 3406–3413. DOI: 10.1109/ICRA.2016.7487517.
100. *Kober J., Bagnell J. A., Peters J.* Reinforcement learning in robotics: A survey // The International Journal of Robotics Research. 2013. Vol. 32, no. 11. P. 1238–1274. DOI: 10.1177/0278364913495721.
101. *Koopman P., Wagner M.* Autonomous vehicle safety: An interdisciplinary challenge // IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine. 2017. Vol. 9, no. 1. P. 90–96. DOI: 10.1109/MITS.2016.2583491.
102. *Leveson N. G.* Engineering a Safer World: Systems Thinking Applied to Safety. Cambridge: MIT Press, 2011. 560 p. DOI: 10.7551/mitpress/8179.001.0001.
103. *Jurafsky D., Martin J. H.* Speech and Language Processing. Harlow: Pearson Education, 2020.
104. *Goodman B., Flaxman S.* European Union regulations on algorithmic decision-making and a “right to explanation” // AI Magazine. 2017. Vol. 38, no. 3. P. 50–57.
105. *Ribeiro M. T., Singh S., Guestrin C.* “Why Should I Trust You?”: Explaining the predictions of any classifier // In: Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. KDD '16. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2016. p. 1135–1144. DOI: 10.1145/2939672.2939778.
106. *Caruana R., Lou Y., Gehrke J., Koch P., Sturm M., Elhadad N.* Intelligible models for healthcare: Predicting pneumonia risk and hospital 30-day readmission // In: Proceedings of the 21th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. KDD '15. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2015. p. 1721–1730. DOI: 10.1145/2783258.2788613.
107. *Bassett D. S., Khambhati A. N.* A network engineering perspective on probing and perturbing

- cognition with neurofeedback // Ann. NY Acad. Sci. 2017. Vol. 1396, no. 1. P. 126–143. DOI: 10.1111/nyas.13338.
108. *Jiang F., Jiang Y., Zhi H., Dong Y., Li H., Ma S., Wang Y.* Artificial intelligence in healthcare: past, present and future // Stroke Vasc Neurol. 2017. Vol. 2, no. 4. P. 230–243. DOI: 10.1136/svn-2017-000101.
 109. *Yuste R., Goering S., Arcas B. A. Y., Bi G., Carmena J. M., Carter A., Fins J. J., Friesen P., Gallant J., Huggins J. E., Illes J., Kellmeyer P., Klein E., Marblestone A., Mitchell C., Parens E., Pham M., Rubel A., Sadato N., Sullivan L. S., Teicher M., Wasserman D., Wexler A., Whittaker M., Wolpaw J.* Four ethical priorities for neurotechnologies and AI // Nature. 2017. Vol. 551, no. 7679. P. 159–163. DOI: 10.1038/551159a.
 110. *Plis S. M., Hjelm D. R., Salakhutdinov R., Allen E. A., Bockholt H. J., Long J. D., Johnson H. J., Paulsen J. S., Turner J. A., Calhoun V. D.* Deep learning for neuroimaging: a validation study // Front. Neurosci. 2014. Vol. 8. P. 229. DOI: 10.3389/fnins.2014.00229.
 111. *Pisarchik A. N., Maksimenko V. A., Andreev A. V., Frolov N. S., Makarov V. V., Zhuravlev M. O., Runnova A. E., Hramov A. E.* Coherent resonance in the distributed cortical network during sensory information processing // Sci. Rep. 2019. Vol. 9, no. 1. P. 18325. DOI: 10.1038/s41598-019-54577-1.
 112. Дедков А. Е., Андриков Д. А., Храмов А. Е. Обзор способов измерения когнитивной нагрузки мозга и методов машинного обучения для их идентификации на основе данных ЭЭГ // Врач и информационные технологии. 2024. № 3. С. 20–31. DOI: 10.25881/18110193_2024_3_20.
 113. *Shatte A. B. R., Hutchinson D. M., Teague S. J.* Machine learning in mental health: A scoping review of methods and applications // Psychol. Med. 2019. Vol. 49, no. 9. P. 1426–1448. DOI: 10.1017/S0033291719000151.
 114. *Grubov V. V., Nazarikov S. I., Kurkin S. A., Utyashev N. P., Andrikov D. A., Karpov O. E., Hramov A. E.* Two-stage approach with combination of outlier detection method and deep learning enhances automatic epileptic seizure detection // IEEE Access. 2024. Vol. 12. P. 122168–122182. DOI: 10.1109/access.2024.3453039.
 115. *Pitsik E. N., Maximenko V. A., Kurkin S. A., Sergeev A. P., Stoyanov D., Paunova R., Kandilarova S., Simeonova D., Hramov A. E.* The topology of fMRI-based networks defines the performance of a graph neural network for the classification of patients with major depressive disorder // Chaos, Solitons and Fractals. 2023. Vol. 167. P. 113041. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.113041.
 116. *Zhang S., Zhao H., Wang W., Wang Z., Luo X., Hramov A., Kurths J.* Edge-centric effective connection network based on multi-modal MRI for the diagnosis of Alzheimer's disease // Neurocomputing. 2023. Vol. 552. P. 126512. DOI: 10.1016/j.neucom.2023.126512.
 117. *Park K. H., Sun S., Lim Y. H., Park H. R., Lee J. M., Park K., Jeon B., Park H.-P., Kim H. Ch., Paek S. H.* Clinical outcome prediction from analysis of microelectrode recordings using deep learning in subthalamic deep brain stimulation for Parkinson's disease // PLoS ONE. 2021. Vol. 16, no. 1. P. e0244133. DOI: 10.1371/journal.pone.0244133.
 118. *Hubel D. H., Wiesel T. N.* Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex // J. Physiol. 1962. Vol. 160, no. 1. P. 106–154. DOI: 10.1113/jphysiol.1962.sp006837.
 119. *Behrouz A., Zhong P., Mirrokni V.* Titans: Learning to Memorize at Test Time. arXiv:250100663 arXiv Preprint. 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2501.00663.
 120. *Stanton S. J., Sinnott-Armstrong W., Huettel S. A.* Neuromarketing: Ethical implications of its use and potential misuse // J. Bus. Ethics. 2017. Vol. 144. P. 799–811. DOI: 10.1007/s10551-016-3059-0.
 121. *Luna-Nevarez C.* Neuromarketing, ethics, and regulation: An exploratory analysis of consumer opinions and sentiment on blogs and social media // J. Consum. Policy. 2021. Vol. 44, no. 4. P. 559–583. DOI: 10.1007/s10603-021-09496-y.
 122. *Maron D. F.* Science career ads are disproportionately seen by men. Scientific American [Electronic

- resource] Available from: <https://wwwscientificamerican.com/article/science-career-ads-are-disproportionately-seen-by-men>. 2018.
123. *Goering S., Yuste R.* On the necessity of ethical guidelines for novel neurotechnologies // *Cell*. 2016. Vol. 167, no. 4. P. 882–885. DOI: 10.1016/j.cell.2016.10.029.
 124. *Leefmann J., Levallois C., Hildt E.* Neuroethics 1995–2012. A bibliometric analysis of the guiding themes of an emerging research field // *Front. Hum. Neurosci*. 2016. Vol. 10. P. 336. DOI: 10.3389/fnhum.2016.00336.
 125. *Mehrabi N., Morstatter F., Saxena N., Lerman K., Galstyan A.* A survey on bias and fairness in machine learning // *ACM Computing Surveys*. 2021. Vol. 54, no. 6. P. 1–35. DOI: 10.1145/3457607.
 126. *Barocas S., Selbst A. D.* Big Data’s Disparate Impact // *California Law Review*. 2016. Vol. 104, no. 3. P. 671–732. DOI: 10.2139/ssrn.2477899.
 127. *O’Neil C.* Weapons of Math Destruction: How Big Data Increases Inequality and Threatens Democracy. New York: Crown Publishing Group, 2016.
 128. *Caliskan A., Bryson J. J., Narayanan A.* Semantics derived automatically from language corpora contain human-like biases // *Science*. 2017. Vol. 356, no. 6334. P. 183–186. DOI: 10.1126/science. aal4230.
 129. *Raghavan M., Barocas S., Kleinberg J., Levy K.* Mitigating bias in algorithmic hiring: evaluating claims and practices // In: Proceedings of the 2020 Conference on Fairness, Accountability, and Transparency. FAT* ’20. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2020. p. 469–481. DOI: 10.1145/3351095.3372828.
 130. *Bartlett R., Morse A., Stanton R., Wallace N.* Consumer-lending discrimination in the FinTech era // *Journal of Financial Economics*. 2022. Vol. 143. P. 30–56. DOI: 10.1016/j.jfineco.2021.05.047.
 131. *Angwin J., Larson J., Mattu S., Kirchner L.* Machine bias: There’s software used across the country to predict future criminals. And it’s biased against blacks. ProPublica [Electronic resource] Available from: <https://www.propublica.org/article/machine-bias-risk-assessments-in-criminal-sentencing>. 2016.
 132. *Van Deursen A.J. A. M., Van Dijk J. P. M.* The digital divide shifts to differences in usage // *New Media & Society*. 2014. Vol. 16, no. 3. P. 507–526. DOI: 10.1177/1461444813487959.
 133. *Yadav B. R.* The Ethics of Understanding: Exploring Moral Implications of Explainable AI // *International Journal of Science and Research (IJSR)*. 2024. Vol. 13, no. 6. P. 1–7. DOI: 10.21275/SR24529122811.
 134. *Kundu S.* AI in medicine must be explainable // *Nat. Med.* 2021. Vol. 27, no. 8. P. 1328. DOI: 10.1038/s41591-021-01461-z.
 135. *McDermid J. A., Jia Y., Porter Z., Habli I.* Artificial intelligence explainability: the technical and ethical dimensions // *Philos. Trans. A. Math. Phys. Eng. Sci.* 2021. Vol. 379, no. 2207. P. 20200363. DOI: 10.1098/rsta.2020.0363.
 136. *Angelov P. P., Soares E. A., Jiang R., Arnold N. I., Atkinson P. M.* Explainable artificial intelligence: an analytical review // *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*. 2021. Vol. 11, no. 5. P. e1424. DOI: 10.1002/widm.1424.
 137. *Dwivedi R., Dave D., Naik H., Singhal S., Omer R., Patel P., Qian B., Wen Z., Shah T., Morgan G., Ranjan R.* Explainable AI (XAI): Core ideas, techniques, and solutions // *ACM Computing Surveys*. 2023. Vol. 55, no. 9. P. 835. DOI: 10.1145/3561048.
 138. *Minh D., Wang H. X., Li Y. F., Nguyen T. N.* Explainable artificial intelligence: a comprehensive review // *Artif. Intell. Rev.* 2022. Vol. 55. P. 3503–3568. DOI: 10.1007/s10462-021-10088-y.
 139. *Ponce-Bobadilla A. V., Schmitt V., Maier C. S., Mensing S., Stodtmann S.* Practical guide to SHAP analysis: Explaining supervised machine learning model predictions in drug development // *Clin. Transl. Sci.* 2024. Vol. 17, no. 11. P. e70056. DOI: 10.1111/cts.70056.
 140. *Islam R., Andreev A. V., Shusharina N. N., Hramov A. E.* Explainable machine learning methods for classification of brain states during visual perception // *Mathematics*. 2022. Vol. 10, no. 15. P. 2819. DOI: 10.3390/math10152819.

141. *Bhati D., Neha F., Amiruzzaman M.* A survey on explainable artificial intelligence (xai) techniques for visualizing deep learning models in medical imaging // *Journal of Imaging*. 2024. Vol. 10, no. 10. P. 239. DOI: 10.3390/jimaging10100239.
142. *Lai T.* Interpretable medical imagery diagnosis with self-attentive transformers: a review of explainable AI for health care // *BioMedInformatics*. 2024. Vol. 4, no. 1. P. 113–126. DOI: 10.3390/biomedinformatics4010008.
143. *Catherine S. B. A.* *Unlocking the Black Box: Exploring the Future of Explainable AI in Real-World Applications* // In: *Multidisciplinary Research in Arts, Science & Commerce*. Vol. 25. The Hill Publication, 2025. P. 37–38.
144. *Hassija V., Chamola V., Mahapatra A., Singal A., Goel D., Huang K., Scardapane S., Spinelli I., Mahmud M., Hussain A.* Interpreting black-box models: a review on explainable artificial intelligence // *Cogn. Comput.* 2024. Vol. 16. P. 45–74. DOI: 10.1007/s12559-023-10179-8.
145. *Карпов О. Е., Андриков Д. А., Максименко В. А., Храмов А. Е.* Прозрачный искусственный интеллект для медицины // *Врач и информационные технологии*. 2022. № 2. С. 4–11. DOI: 10.25881/18110193_2022_2_4.
146. *Černevičienė J., Kabašinskas A.* Explainable artificial intelligence (XAI) in finance: a systematic literature review // *Artif. Intell. Rev.* 2024. Vol. 57. P. 216. DOI: 10.1007/s10462-024-10854-8.
147. *Craig T.* Privacy and Big Data: The Players, Regulators, and Stakeholders. Sebastopol: O'Reilly Media, Inc., 2011. 91 p.
148. *Curzon J., Kosa T. A., Akalu R., El-Khatib K.* Privacy and artificial intelligence // *IEEE Transactions on Artificial Intelligence*. 2021. Vol. 2, no. 2. P. 96–108. DOI: 10.1109/TAI.2021.3088084.
149. *Chesterman S.* Artificial intelligence and the problem of autonomy // *Notre Dame Journal on Emerging Technologies*. 2020. Vol. 1. P. 210–250.
150. *Novelli C., Taddeo M., Floridi L.* Accountability in artificial intelligence: what it is and how it works // *AI and Soc.* 2024. Vol. 39. P. 1871–1882. DOI: 10.1007/s00146-023-01635-y.
151. Le cerveau et la loi: analyse de l'émergence du neurodroit / Oullier O., editor. Paris: Centre d'analyse stratégique, 2012. Available from: http://archives.strategie.gouv.fr/cas/system/files/cas-dqs_dt-neurodroit_11septembreredit_0.pdf.
152. *Eagleman D. M.* Pourquoi les sciences du cerveau peuvent éclairer le droit // In: Oullier O., editor. Le cerveau et la loi: analyse de l'émergence du neurodroit. Paris: Centre d'analyse stratégique, 2012. P. 33–52.
153. *Ernst E., Merola R., Samaan D.* Economics of artificial intelligence: Implications for the future of work // *IZA Journal of Labor Policy*. 2019. Vol. 9, no. 1. P. 4. DOI: 10.2478/izajolp-2019-0004.
154. *McGaughey E.* Will robots automate your job away? Full employment, basic income and economic democracy // *Industrial Law Journal*. 2022. Vol. 51, no. 3. P. 511–559. DOI: 10.1093/indlaw/dwab010.
155. *Russell S.* Human Compatible: Artificial Intelligence and the Problem of Control. New York: Viking, 2019. 352 p.
156. *Torres P.* Superintelligence and the future of governance: On prioritizing the control problem at the end of history // In: *Artificial Intelligence Safety and Security*. Chapman and Hall/CRC, 2018. P. 357–374. DOI: 10.1201/9781351251389-24.
157. *Totschnig W.* The problem of superintelligence: Political, not technological // *AI and Soc.* 2019. Vol. 34. P. 907–920. DOI: 10.1007/s00146-017-0753-0.
158. Яндекс: Подход к оценке рисков : электронный документ. Режим доступа : для зарегистрированных пользователей.
159. *da Silva Castanheira J., Orozco Perez H. D., Misic B., Baillet S.* Brief segments of neurophysiological activity enable individual differentiation // *Nat. Commun.* 2021. Vol. 12. P. 5713. DOI: 10.1038/s41467-021-25895-8.
160. *Шваб К.* Технологии четвертой промышленной революции. М.: Эксмо, 2018. 317 с.
161. *Ienca M.* On artificial intelligence and manipulation // *Topoi*. 2023. Vol. 42, no. 3. P. 833–842. DOI: 10.1007/s11245-023-09940-3.

162. *Lemsieh H., Abarar I.* Artificial intelligence: A technological tool to manipulate the psychology and behavior of consumers: Theoretical research // International Journal of Accounting, Finance, Auditing, Management and Economics. 2024. Vol. 5, no. 6. P. 432–449. DOI: 10.5281/zenodo.12186136.
163. Патент № 2653239 С1 Российская Федерация, МПК G06K 9/66, A61B 5/0476, H04L 9/32. Способ идентификации человека по ЭЭГ-отклику на неоднозначные изображения: № 2017115459: заявл. 02.05.2017: опубл. 07.05.2018 / А. Н. Писарчик, В. Ю. Мусатов, А. Е. Руннова [и др.]; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.» (СГТУ имени Гагарина Ю. А.).
164. *Panch T., Mattie H., Celi L. A.* The “inconvenient truth” about AI in healthcare // NPJ Digit Med. 2019, no. 2. P. 77. DOI: 10.1038/s41746-019-0155-4.

References

1. Hassabis D, Kumaran D, Summerfield C, Botvinick M. Neuroscience-inspired artificial intelligence. *Neuron*. 2017;95(2):245–258. DOI: 10.1016/j.neuron.2017.06.011.
2. Karpov OE, Pitsik EN, Kurkin SA, Maksimenko VA, Gusev AV, Shusharina NN, Hramov AE. Analysis of publication activity and research trends in the field of AI medical applications: Network approach. *Int. J. Environ. Res. Public Health*. 2023;20(7):5335. DOI: 10.3390/ijerph20075335.
3. Nyholm S. Artificial intelligence and human enhancement: Can AI technologies make us more (artificially) intelligent? *Camb Q Healthc Ethics*. 2024;33(1):76–88. DOI: 10.1017/S0963180123000464.
4. Duan YQ, Edwards JS, Dwivedi YK. Artificial intelligence for decision making in the era of Big Data – evolution, challenges and research agenda. *International Journal of Information Management*. 2019;48:63–71. DOI: 10.1016/j.ijinfomgt.2019.01.021.
5. Autor DH. Why are there still so many jobs? The history and future of workplace automation. *Journal of Economic Perspectives*. 2015;29(3):3–30. DOI: 10.1257/jep.29.3.3.
6. Brown T, Mann B, Ryder N, Subbiah M, Kaplan JD, Dhariwal Prafulla, Neelakantan A, Shyam P, Sastry G, Askell A, Agarwal S, Herbert-Voss A, Krueger G, Henighan T, Child R, Ramesh A, Ziegler D, Wu J, Winter C, Hesse Chris, Chen Mark, Sigler E, Litwin M, Gray S, Chess B, Clark J, Berner Ch, McCandlish S, Radford A, Sutskever Ilya, Amodei D. Language models are few-shot learners. In: Larochelle H, Ranzato M, Hadsell R, Balcan MF, Lin H, editors. *Advances in Neural Information Processing Systems*. Vol. 33. 2020. P. 1877–1901.
7. Wang L, Törngren M, Onori M. Current status and advancement of cyber-physical systems in manufacturing. *Journal of Manufacturing Systems*. 2015;37:517–527. DOI: 10.1016/j.jmsy.2015.04.008.
8. Topol EJ. High-performance medicine: the convergence of human and artificial intelligence. *Nature Medicine*. 2019;25(1):44–56. DOI: 10.1038/s41591-018-0300-7.
9. Karpov OE, Hramov AE. *Information Technology, Computing Systems and Artificial Intelligence in Medicine*. M.: DPK Press; 2022. 480 p. (in Russian).
10. Fedorov AA, Kurkin SA, Hramova MV, Hramov AE. Neurotechnology and artificial intelligence as key factors in the customization of the lifelong learning route. *Informatics and Education*. 2023;38(3):5–15. DOI: 10.32517/0234-0453-2023-38-3-5-15.
11. Holmes W, Tuomi I. State of the art and practice in AI in education. *European Journal of Education*. 2022;57(4):542–570. DOI: 10.1111/ejed.12533.
12. Carleo G, Cirac I, Cranmer K, Daudet L, Schuld M, Tishby N, Vogt-Maranto L, Zdeborová L. Machine learning and the physical sciences. *Rev Mod Phys*. 2019;91(4):045002. DOI: 10.1103/RevModPhys.91.045002.
13. Silver D, Hubert T, Schrittwieser J, Antonoglou I, Lai M, Guez A, Lanctot M, Sifre L, Kumaran D, Graepel T, Lillicrap T, Simonyan K, Hassabis D. A general reinforcement learning

- algorithm that masters chess, shogi, and Go through self-play. *Science*. 2018;362(6419):1140–1144. DOI: 10.1126/science.aar6404.
14. Bandettini PA. What's new in neuroimaging methods? *Ann NY Acad Sci*. 2009;1156:260–293. DOI: 10.1111/j.1749-6632.2009.04420.x.
 15. Hramov AE, Maksimenko VA, Pisarchik AN. Physical principles of brain-computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states. *Phys Rep*. 2021;918:1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
 16. Marzbani H, Marateb HR, Mansourian M. Neurofeedback: a comprehensive review on system design, methodology and clinical applications. *Basic Clin Neurosci*. 2016;7(2):143–158. DOI: 10.15412/J.BCN.03070208.
 17. Mihara M, Miyai I, Hattori N, Hatakenaka M, Yagura H, Kawano T, Okabayashi M, Danjo N, Ishikawa A, Inoue Y, Kubota K. Neurofeedback using real-time near-infrared spectroscopy enhances motor imagery related cortical activation. *PLoS ONE*. 2012;7(3):e32234. DOI: 10.1371/journal.pone.0032234.
 18. Hallett M. Transcranial magnetic stimulation: a primer. *Neuron*. 2007;55(2):187–199. DOI: 10.1016/j.neuron.2007.06.026.
 19. Rossi S, Hallett M, Rossini P, Pascual-Leone A, The Safety of TMS Consensus Group. Safety, ethical considerations, and application guidelines for the use of transcranial magnetic stimulation in clinical practice and research. *Clin Neurophysiol*. 2009;120(12):2008–2039. DOI: 10.1016/j.clinph.2009.08.016.
 20. Brunoni A, Nitsche M, Bolognini N, Bikson M, Wagner T, Merabet L, Edwards D, Valero-Cabré A, Rotenberg A, Pascual-Leone A, Ferrucci R, Priori A, Boggio P, Fregni F. Clinical research with transcranial direct current stimulation (tDCS): Challenges and future directions. *Brain Stimul*. 2012;5(3):175–195. DOI: 10.1016/j.brs.2011.03.002.
 21. Benabid A, Chabardes S, Mitrofanis J, Pollak P. Deep brain stimulation of the subthalamic nucleus for the treatment of Parkinson's disease. *Lancet Neurol*. 2009;8(1):67–81. DOI: 10.1016/S1474-4422(08)70291-6.
 22. Cometa A, Falasconi A, Biasizzo M, Carpaneto J, Horn A, Mazzoni A, Micera S. Clinical neuroscience and neurotechnology: An amazing symbiosis. *iScience*. 2022;25(10):105124. DOI: 10.1016/j.isci.2022.105124.
 23. Daly JJ, Wolpaw JR. Brain-computer interfaces in neurological rehabilitation. *Lancet Neurol*. 2008;7(11):1032–1043. DOI: 10.1016/S1474-4422(08)70223-0.
 24. Plass-Oude Bos D, Reuderink B, van de Laar B, Gürkük H, Mühl C, Poel M, Nijholt A, Heylen D. Brain-Computer Interfacing and Games. In: Tan D, Nijholt A (eds) *Brain-Computer Interfaces*. Human-Computer Interaction Series. London: Springer; 2010. P. 149–178. DOI: 10.1007/978-1-84996-272-8_10.
 25. Marshall D, Coyle D, Wilson S, Callaghan M. Games, gameplay, and BCI: The State of the Art. *IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games*. 2013;5(2):164–176. DOI: 10.1109/tciaig.2013.2263555.
 26. Campbell M, Hoane AJ, Hsu FH. Deep Blue. *Artificial Intelligence*. 2002;134(1–2):57–83. DOI: 10.1016/S0004-3702(01)00129-1.
 27. Hsu FH, Anantharaman T, Campbell M, Nowatzky A. A grandmaster chess machine. *Scientific American*. 1990;263(4):44–51. <https://www.jstor.org/stable/24997060>.
 28. He K, Zhang X, Ren S, Sun J. Delving deep into rectifiers: Surpassing human-level performance on imagenet classification. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*; 2015. p. 1026–1034. DOI: 10.1109/ICCV.2015.123.
 29. Silver D, Schrittwieser J, Simonyan K, Antonoglou I, Huang A, Guez A, Hubert T, Baker L, Lai M, Bolton A, Chen Y, Lillicrap T, Hui F, Sifre L, van den Driessche G, Graepel Th, Hassabis D. Mastering the game of go without human knowledge. *Nature*. 2017;550(7676):354–359. DOI: 10.1038/nature24270.

30. Logothetis NK. What we can do and what we cannot do with fMRI. *Nature*. 2008;453(7197):869–878. DOI: 10.1038/nature06976.
31. Luck SJ. An Introduction to the Event-Related Potential Technique. Massachusetts: MIT Press; 2014. 388 p.
32. Hämäläinen M, Hari R, Ilmoniemi RJ, Knuutila J, Lounasmaa OV. Magnetoencephalography—theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. *Rev. Mod. Phys.* 1993;65(2):413–497. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.413.
33. Ferrari M, Quaresima V. A brief review on the history of human functional near-infrared spectroscopy (fNIRS) development and fields of application. *NeuroImage*. 2012;63(2):921–935. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2012.03.049.
34. Grau C, Ginhoux R, Riera A, Nguyen TL, Chauvat H, Berg M, Amengual JL, Pascual-Leone A, Ruffini G. Conscious brain-to-brain communication in humans using non-invasive technologies. *PLoS ONE*. 2014;9(8):e105225. DOI: 10.1371/journal.pone.0105225.
35. Nam CS, Traylor Z, Chen M, Jiang X, Feng W, Chhatbar PY. Direct communication between brains: A systematic PRISMA review of brain-to-brain interface. *Front Neurorobot*. 2021;15:656943. DOI: 10.3389/fnbot.2021.656943.
36. Maksimenko VA, Hramov AE, Frolov NS, Lüttjohann A, Nedaivozov VO, Grubov VV, Runnova AE, Makarov VV, Kurths J, Pisarchik AN. Increasing human performance by sharing cognitive load using brain-to-brain interface. *Front Neurosci*. 2018;12:949. DOI: 10.3389/fnins.2018.00949.
37. Kurkin S, Gordleeva S, Savosenkov A, Grigorev N, Smirnov N, Grubov VV, Udaratina A, Maksimenko V, Kazantsev V, Hramov AE. Transcranial Magnetic Stimulation of the Dorsolateral Prefrontal Cortex Increases Posterior Theta Rhythm and Reduces Latency of Motor Imagery. *Sensors*. 2023;23(10):4661. DOI: 10.3390/s23104661.
38. Musk E. An integrated brain-machine interface platform with thousands of channels. *J Med Internet Res*. 2019;21(10):e16194. DOI: 10.2196/16194.
39. Pisarchik AN, Maksimenko VA, Hramov AE. From novel technology to novel applications: Comment on “An Integrated Brain-Machine Interface Platform With Thousands of Channels” by Elon Musk and Neuralink. *J. Med. Internet. Res.* 2019;21(10):e16356. DOI: 10.2196/16356.
40. Opie NL, John SE, Rind GS, Ronayne SM, Wong YT, Gerboni G, Yoo PE, Lovell T, Scordas T, Wilson SL, Dornom A, Vale T, O’Brien TJ, Grayden DB, May CN, Oxley ThJ. Focal stimulation of the sheep motor cortex with a chronically implanted minimally invasive electrode array mounted on an endovascular stent. *Nat Biomed Eng*. 2018;2(12):907–914. DOI: 10.1038/s41551-018-0321-z.
41. Filipova IA. Neurotechnologies: development, practical application and regulation. *Bulletin of St Petersburg State University Law*. 2021;12(3):502–521. DOI: 10.21638/spbu14.2021.302.
42. Lecomte P. Umwelt as the foundation of an ethics of smart environments. *Humanit Soc Sci Commun*. 2023;10:925. DOI: 10.1057/s41599-023-02356-9.
43. Ienca M, Andorno R. Towards new human rights in the age of neuroscience and neurotechnology. *Life Sci Soc Policy*. 2017;13(5):1–27. DOI: 10.1186/s40504-017-0050-1.
44. Kellmeyer P. Big brain data: On the responsible use of brain data from clinical and consumer-directed neurotechnological devices. *Neuroethics*. 2018;14:83–98. DOI: 10.1007/s12152-018-9371-x.
45. Mittelstadt BD, Allo P, Taddeo M, Wachter S, Floridi L. The ethics of algorithms: Mapping the debate. *Big Data and Society*. 2016;3(2):2053951716679679. DOI: 10.1177/2053951716679679.
46. Floridi L, Cowls J, Beltrametti M, Chatila R, Chazerand P, Dignum V, Luetge C, Madelin R, Pagallo U, Rossi F, Schafer B, Valcke P, Vayena E. AI4People—An ethical framework for a good AI society: Opportunities, risks, principles, and recommendations. *Minds Mach*. 2018;28(4):689–707. DOI: 10.1007/s11023-018-9482-5.
47. Calo R. Artificial Intelligence Policy: A Primer and Roadmap. *UCD L Rev*. 2017;51:399.
48. Battista D. Political communication in the age of artificial intelligence: an overview of deepfakes and their implications. *Society Register*. 2024;8(2):7–24. DOI: 10.14746/sr.2024.8.2.01.

49. Gambín AF, Yazidi A, Vasilakos A, Haugerud H, Djenouri Y. Deepfakes: current and future trends. *Artif Intell Rev.* 2024;57(3):64. DOI: 10.1007/s10462-023-10679-x.
50. Chesney R, Citron D. Deepfakes and the new disinformation war: The coming age of post-truth geopolitics. *Foreign Affairs.* 2019;98(1):147–155.
51. Maras MH, Alexandrou A. Determining authenticity of video evidence in the age of artificial intelligence and in the wake of Deepfake videos. *The International Journal of Evidence and Proof.* 2019;23(3):255–262. DOI: 10.1177/1365712718807226.
52. Citron DK, Chesney R. Deep fakes: A looming challenge for privacy, democracy, and national security. *California Law Review.* 2019;107(6):1753–1819.
53. Memarian B, Doleck T. ChatGPT in education: Methods, potentials and limitations. *Computers in Human Behavior: Artificial Humans.* 2023;1(6):100022. DOI: 10.1016/j.chbah.2023.100022.
54. Adeshola I, Adepoju AP. The opportunities and challenges of ChatGPT in education. *Interactive Learning Environments.* 2024;32(10):6159–6172. DOI: 10.1080/10494820.2023.2253858.
55. Berger S, Rossi F. AI and neurotechnology: learning from AI ethics to address an expanded ethics landscape. *Communications of the ACM.* 2023;66(3):58–68. DOI: 10.1145/3529088.
56. Huang C, Zhang Z, Mao B, Yao X. An overview of artificial intelligence ethics. *IEEE Transactions on Artificial Intelligence.* 2022;4(4):799–819. DOI: 10.1109/TAI.2022.3194503.
57. Bostrom N. Ethical issues in advanced artificial intelligence. In: *Machine Ethics and Robot Ethics.* London: Routledge; 2020. P. 69–75. DOI: 10.4324/9781003074991-7.
58. Mittelstadt B. Principles alone cannot guarantee ethical AI. *Nat Mach Intell.* 2019;1(11):501–507. DOI: doi.org/10.1038/s42256-019-0114-4.
59. Ruiz S, Valera L, Ramos P, Sitaram R. Neurorights in the Constitution: from neurotechnology to ethics and politics. *Philosophical Transactions B.* 2024;379(1915):20230098. DOI: 10.1098/rstb.2023.0098.
60. Robinson JT, Rommelfanger KS, Anikeeva PO, Etienne A, French J, Gelinas J, Grover P, Picard R. Building a culture of responsible neurotech: Neuroethics as socio-technical challenges. *Neuron.* 2022;110(13):2057–2062. DOI: 10.1016/j.neuron.2022.05.005.
61. Illes J. *Neuroethics: Anticipating the Future.* NY: Oxford University Press; 2017.
62. Sample M., Racine E. Pragmatism for a digital society: The (in)significance of artificial intelligence and neural technology. In: Friedrich O., Wolkenstein A., Bublitz C., Jox R. J., Racine E., editors. *Clinical Neurotechnology meets Artificial Intelligence. Advances in Neuroethics.* Cham: Springer; 2021. P. 81–100. DOI: 10.1007/978-3-030-64590-8_7.
63. Savage N. How AI and neuroscience drive each other forwards. *Nature.* 2019;571(7766):S15–S17. DOI: 10.1038/d41586-019-02212-4.
64. Raichle ME. A brief history of human brain mapping. *Trends Neurosci.* 2009;32(2):118–126. DOI: 10.1016/j.tins.2008.11.001.
65. Friston KJ. Modalities, modes, and models in functional neuroimaging. *Science.* 2009;326(5951):399–403. DOI: 10.1126/science.1174521.
66. Lefaucheur JP, Aleman A, Baeken C, Benninger DH, Brunelin J, Di Lazzaro V, Filipović SR, Grefkes C, Hasan A, Hummel FC, Jääskeläinen SK, Langguth B, Leocani L, Londero A, Nardone R, NguyenJ-P, Nyffeler Th, Oliveira-Maia AJ, Oliviero A, Padberg F, Palm U, Paulus W, Poulet E, Quartarone A, Rachid F, Rektorová I, Rossi S, Sahlsten H, Schecklmann M, Szekely D, Ziemann U. Evidence-based guidelines on the therapeutic use of repetitive transcranial magnetic stimulation (rTMS): An update (2014–2018). *Clin Neurophysiol.* 2020;131(5):474–528. DOI: 10.1016/j.clinph.2019.11.002.
67. Benabid AL, Chabardes S, Mitrofanis J, Pollak P. Deep brain stimulation of the subthalamic nucleus for the treatment of Parkinson’s disease. *Lancet Neurol.* 2009;8(1):67–81. DOI: 10.1016/S1474-4422(08)70291-6.
68. Fisher R, Salanova V, Witt T, Worth R, Henry T, Gross R, Oommen K, Osorio I, Nazzaro J, Labar D, Kaplitt M, Sperling M, Sandok E, Neal J, Handforth A, Stern J, DeSalles A, Chung S,

- Shetter A, Bergen D, Bakay R, Henderson J, French J, Baltuch G, Rosenfeld W, Youkilis A, Marks W, Garcia P, Barbaro N, Fountain N, Bazil C, Goodman R, McKhann G, Krishnamurthy KB, Papavassiliou S, Epstein Ch, Pollard J, Tonder L, Grebin J, Coffey R, Graves N, the SANTE Study Group. Electrical stimulation of the anterior nucleus of thalamus for treatment of refractory epilepsy. *Epilepsia*. 2010;51(5):899–908. DOI: 10.1111/j.1528-1167.2010.02536.x.
69. Bonomo R, Elia AE, Bonomo G, Romito LM, Mariotti C, Devigili G, Cilia R, Giassi R, Eleopra R. Deep brain stimulation in Huntington's disease: a literature review. *Neurological Sciences*. 2021;42(11):4447–4457. DOI: 10.1007/s10072-021-05527-1.
70. Ramachandran VS, Rogers-Ramachandran D. Phantom limbs and neural plasticity. *Arch Neurol*. 2000;57(3):317–320. DOI: 10.1001/archneur.57.3.317.
71. Khorev V, Kurkin S, Badarin A, Antipov V, Pitsik E, Andreev A, Grubov V, Drapkina O, Kiselev A, Hramov A. Review on the use of brain computer interface rehabilitation methods for treating mental and neurological conditions. *J Integr Neurosci*. 2024;23(7):125. DOI: 10.31083/j.jin2307125.
72. Kuo MF, Nitsche MA. Effects of transcranial electrical stimulation on cognition. *Clin EEG Neurosci*. 2012;43(3):192–199. DOI: 10.1177/1550059412444975.
73. Anguera JA, Boccanfuso J, Rintoul JL, Al-Hashimi O, Faraji F, Janowich J, Kong E, Larraburo Y, Rolle C, Johnston E, Gazzaley A. Video game training enhances cognitive control in older adults. *Nature*. 2013;501(7465):97–101. DOI: 10.1038/nature12486.
74. Grubov VV, Khramova MV, Goman S, Badarin AA, Kurkin SA, Andrikov DA, Pitsik E, Antipov V, Petushok E, Brusinskii N, Bukina T, Fedorov AA, Hramov AE. Open-loop neuroadaptive system for enhancing student's cognitive abilities in learning. *IEEE Access*. 2024;12:49034–49049. DOI: 10.1109/access.2024.3383847.
75. Bukina TV, Khramova MV, Kurkin SA, Andrikov DA, Goman SS, Dedkov AE, Hramov AE. Neuroeducational software recommendational service as a tool for personalizing the educational process. *Informatics and Education*. 2024;39(5):50–62. DOI: 10.32517/0234-0453-2024-39-5-50-62.
76. Donati AR, Shokur S, Morya E, Campos DS, Moioli RC, Gitti CM, Augusto PB, Tripodi S, Pires CG, Pereira GA, Brasil FL, Gallo S, Lin AA, Takigami AK, Aratanha MA, Joshi S, Bleuler H, Cheng G, Rudolph A, Nicolelis MAL. Long-term training with a brain-machine interface-based gait protocol induces partial neurological recovery in paraplegic patients. *Sci Rep*. 2016;6:30383. DOI: 10.1038/srep30383.
77. Poppe C, Elger BS. Brain–computer interfaces, completely locked-in state in neurodegenerative diseases, and end-of-life decisions. *Journal of Bioethical Inquiry*. 2024;21(1):19–27. DOI: 10.1007/s11673-023-10256-5.
78. Kübler A, Neumann N. Brain-computer interfaces—the key for the conscious brain locked into a paralyzed body. *Prog Brain Res*. 2005;150:513–525. DOI: 10.1016/S0079-6123(05)50035-9.
79. Lebedev MA, Nicolelis MA. Brain-machine interfaces: past, present and future. *Trends Neurosci*. 2006;29(9):536–546. DOI: 10.1016/j.tins.2006.07.004.
80. Veena N, Anitha N. A review of non-invasive BCI devices. *Int J Biomed Eng Technol*. 2020;34(3):205–233. DOI: 10.1504/IJBET.2020.111471.
81. Grill WM, Norman SE, Bellamkonda RV. Implanted neural interfaces: biochallenges and engineered solutions. *Annu Rev Biomed Eng*. 2009;11:1–24. DOI: 10.1146/annurev-bioeng-061008-124927.
82. Salatino JW, Ludwig KA, Kozai TDY, Purcell EK. Glial responses to implanted electrodes in the brain. *Nat Biomed Eng*. 2017;1(11):862–877. DOI: 10.1038/s41551-017-0154-1.
83. Rossi S, Hallett M, Rossini PM, Pascual-Leone A, The Safety of TMS Consensus Group. Safety, ethical considerations, and application guidelines for the use of transcranial magnetic stimulation in clinical practice and research. *Clin Neurophysiol*. 2009;120(12):2008–2039. DOI: 10.1016/j.clinph.2009.08.016.
84. Krings ML, Jenkinson N, Owen SL, Aziz TZ. Translational principles of deep brain stimulation. *Nature Reviews Neuroscience*. 2007;8(8):623–635. DOI: 10.1038/nrn2196.

85. Bergey GK, Morrell MJ, Mizrahi EM, Goldman A, King-Stephens D, Nair D, Srinivasan S, Jobst B, Gross RE, Shields DC, Barkley G, Salanova V, Olejniczak P, Cole A, Cash SS, Noe K, Wharen R, Worrell G, Murro AM, Edwards J, Duchowny M, Spencer D, Smith M, Geller E, Gwinn R, Skidmore Ch, Eisenschenk S, Berg M, Heck Ch, Van Ness P, Fountain N, Rutecki P, Massey A, O'Donovan C, Labar D, Duckrow RB, Hirsch LJ, Courtney T, Sun FT, Seale CG. Long-term treatment with responsive brain stimulation in adults with refractory partial seizures. *Neurology*. 2015;84(8):810–817. DOI: 10.1212/WNL.0000000000001280.
86. Deer TR, Pope JE, Hayek SM, Bux A, Buchser E, Eldabe S, De Andrés JA, Erdek M, Patin D, Grider JS, Doleys DM, Jacobs MS, Yaksh TL, Poree L, Wallace MS, Prager J, Rauck R, DeLeon O, Diwan S, Falowski SM, Gazelka HM, Kim P, Leong M, Levy RM, McDowell G II, McRoberts P, Naidu R, Narouze S, Perruchoud C, Rosen SM, Rosenberg WS, Saulino M, Staats P, Stearns LJ, Willis D, Krames E, Huntoon M, Mekhail N. The Polyanalgesic Consensus Conference (PACC): Recommendations on Intrathecal Drug Infusion Systems Best Practices and Guidelines. *Neuromodulation*. 2017;20(2):96–132. DOI: 10.1111/ner.12538.
87. Deisseroth K. Optogenetics: 10 years of microbial opsins in neuroscience. *Nat Neurosci*. 2015; 18(9):1213–1225. DOI: 10.1038/nn.4091.
88. LeCun Y, Bengio Y, Hinton G. Deep learning. *Nature*. 2015;521(7553):436–444. DOI: 10.1038/nature14539.
89. Vaswani A, Shazeer N, Parmar N, Uszkoreit J, Jones L, Gomez AN, Kaiser L, Polosukhin I. Attention is all you need. In: Guyon I, Luxburg UV, Bengio S, Wallach H, Fergus R, Vishwanathan S, Garnett R, editors. *Advances in Neural Information Processing Systems*. vol. 30. Curran Associates, Inc.; 2017. p. 5998–6008.
90. Goodfellow IJ, Pouget-Abadie J, Mirza M, Xu B, Warde-Farley D, Ozair S, Courville A, Bengio Y. Generative adversarial nets. In: *Proceedings of the 28th International Conference on Neural Information Processing Systems - Volume 2. NIPS'14*. Cambridge: MIT Press; 2014. p. 2672–2680.
91. Krizhevsky A, Sutskever I, Hinton GE. ImageNet classification with deep convolutional neural networks. In: *Proceedings of the 26th International Conference on Neural Information Processing Systems - Volume 1. NIPS'12*. Red Hook, NY, USA: Curran Associates Inc.; 2012. p. 1097–1105.
92. He K, Zhang X, Ren S, Sun J. Deep Residual Learning for Image Recognition. In: *2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*; 2016. P. 770–778. DOI: 10.1109/CVPR.2016.90.
93. Qi CR, Su H, Mo K, Guibas LJ. PointNet: Deep learning on point sets for 3D classification and segmentation. In: *2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*; 2017. p. 77–85. DOI: 10.1109/CVPR.2017.16.
94. Girshick R, Donahue J, Darrell T, Malik J. Rich feature hierarchies for accurate object detection and semantic segmentation. In: *2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*; 2014. p. 580–587. DOI: 10.1109/CVPR.2014.81.
95. Esteva A, Kuprel B, Novoa RA, Ko J, Swetter SM, Blau HM, Thrun S. Dermatologist-level classification of skin cancer with deep neural networks. *Nature*. 2017;542(7639):115–118. DOI: 10.1038/nature21056.
96. LeCun Y, Bottou L, Bengio Y, Haffner P. Gradient-based learning applied to document recognition. *Proceedings of the IEEE*. 1998;86(11):2278–2324. DOI: 10.1109/5.726791.
97. Chen C, Seff A, Kornhauser A, Xiao J. DeepDriving: Learning affordance for direct perception in autonomous driving. In: *2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*; 2015. p. 2722–2730. DOI: 10.1109/ICCV.2015.312.
98. Loquercio A, Maqueda AI, del Blanco CR, Scaramuzza D. DroNet: Learning to fly by driving. *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2018;3(2):1088–1095. DOI: 10.1109/LRA.2018.2795643.
99. Pinto L, Gupta A. Supersizing self-supervision: Learning to grasp from 50K tries and 700 robot hours. In: *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*; 2016. p. 3406–3413. DOI: 10.1109/ICRA.2016.7487517.

100. Kober J, Bagnell JA, Peters J. Reinforcement learning in robotics: A survey. *The International Journal of Robotics Research*. 2013;32(11):1238–1274. DOI: 10.1177/0278364913495721.
101. Koopman P, Wagner M. Autonomous vehicle safety: An interdisciplinary challenge. *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine*. 2017;9(1):90–96. DOI: 10.1109/MITS.2016.2583491.
102. Leveson NG. *Engineering a Safer World: Systems Thinking Applied to Safety*. Cambridge: MIT Press; 2011. DOI: 10.7551/mitpress/8179.001.0001.
103. Jurafsky D, Martin JH. *Speech and Language Processing*. Harlow: Pearson Education; 2020.
104. Goodman B, Flaxman S. European Union regulations on algorithmic decision-making and a “right to explanation”. *AI Magazine*. 2017;38(3):50–57.
105. Ribeiro MT, Singh S, Guestrin C. “Why Should I Trust You?”: Explaining the predictions of any classifier. In: *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. KDD ’16. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery; 2016. p. 1135–1144. DOI: 10.1145/2939672.2939778.
106. Caruana R, Lou Y, Gehrke J, Koch P, Sturm M, Elhadad N. Intelligible models for healthcare: Predicting pneumonia risk and hospital 30-day readmission. In: *Proceedings of the 21th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. KDD ’15. NY: Association for Computing Machinery; 2015. P. 1721–1730. DOI: 10.1145/2783258.2788613.
107. Bassett DS, Khambhati AN. A network engineering perspective on probing and perturbing cognition with neurofeedback. *Ann. NY Acad. Sci.* 2017;1396(1):126–143. DOI: 10.1111/nyas.13338.
108. Jiang F, Jiang Y, Zhi H, Dong Y, Li H, Ma S, Wang Y. Artificial intelligence in healthcare: past, present and future. *Stroke Vasc Neurol*. 2017;2(4):230–243. DOI: 10.1136/svn-2017-000101.
109. Yuste R, Goering S, Arcas BAY, Bi G, Carmena JM, Carter A, Fins JJ, Friesen P, Gallant J, Huggins JE, Illes J, Kellmeyer P, Klein E, Marblestone A, Mitchell C, Parens E, Pham M, Rubel A, Sadato N, Sullivan LS, Teicher M, Wasserman D, Wexler A, Whittaker M, Wolpaw J. Four ethical priorities for neurotechnologies and AI. *Nature*. 2017;551(7679):159–163. DOI: 10.1038/551159a.
110. Plis SM, Hjelm DR, Salakhutdinov R, Allen EA, Bockholt HJ, Long JD, Johnson HJ, Paulsen JS, Turner JA, Calhoun VD. Deep learning for neuroimaging: a validation study. *Front Neurosci*. 2014;8:229. DOI: 10.3389/fnins.2014.00229.
111. Pisarchik AN, Maksimenko VA, Andreev AV, Frolov NS, Makarov VV, Zhuravlev MO, Runnova AE, Hramov AE. Coherent resonance in the distributed cortical network during sensory information processing. *Sci Rep*. 2019;9(1):18325. DOI: 10.1038/s41598-019-54577-1.
112. Dedkov AE, Andrikov DA, Hramov AE. A review of ways to measure brain cognitive load and machine learning methods for their identification from EEG data. *Medical Doctor and Information Technologies*. 2024(3):20–31. DOI: 10.25881/18110193_2024_3_20.
113. Shatte ABR, Hutchinson DM, Teague SJ. Machine learning in mental health: A scoping review of methods and applications. *Psychol Med*. 2019;49(9):1426–1448. DOI: 10.1017/S0033291719000151.
114. Grubov VV, Nazarikov SI, Kurkin SA, Utyashev NP, Andrikov DA, Karпов OE, Hramov AE. Two-stage approach with combination of outlier detection method and deep learning enhances automatic epileptic seizure detection. *IEEE Access*. 2024;12:122168–122182. DOI: 10.1109/access.2024.3453039.
115. Pitsik EN, Maximenko VA, Kurkin SA, Sergeev AP, Stoyanov D, Paunova R, Kandilarova S, Simeonova D, Hramov AE. The topology of fMRI-based networks defines the performance of a graph neural network for the classification of patients with major depressive disorder. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2023;167:113041. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.113041.
116. Zhang S, Zhao H, Wang W, Wang Z, Luo X, Hramov A, Kurths J. Edge-centric effective connection network based on multi-modal MRI for the diagnosis of Alzheimer’s disease. *Neurocomputing*. 2023;552:126512. DOI: 10.1016/j.neucom.2023.126512.
117. Park KH, Sun S, Lim YH, Park HR, Lee JM, Park K, Jeon B, Park H-P, Kim HCh, Paek SH. Clinical outcome prediction from analysis of microelectrode recordings using deep learning in

- subthalamic deep brain stimulation for Parkinson's disease. *PLoS ONE*. 2021;16(1):e0244133. DOI: 10.1371/journal.pone.0244133.
118. Hubel DH, Wiesel TN. Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex. *J Physiol*. 1962;160(1):106–154. DOI: 10.1113/jphysiol.1962.sp006837.
 119. Behrouz A, Zhong P, Mirrokni V. Titans: Learning to Memorize at Test Time. *arXiv:250100663 arXiv Preprint*. 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2501.00663.
 120. Stanton SJ, Sinnott-Armstrong W, Huettel SA. Neuromarketing: Ethical implications of its use and potential misuse. *J Bus Ethics*. 2017;144:799–811. DOI: 10.1007/s10551-016-3059-0.
 121. Luna-Nevarez C. Neuromarketing, ethics, and regulation: An exploratory analysis of consumer opinions and sentiment on blogs and social media. *J Consum Policy*. 2021;44(4):559–583. DOI: 10.1007/s10603-021-09496-y.
 122. Maron DF. Science career ads are disproportionately seen by men. *Scientific American* [Electronic resource] Available from: <https://www.scientificamerican.com/article/science-career-ads-are-disproportionately-seen-by-men>. 2018.
 123. Goering S, Yuste R. On the necessity of ethical guidelines for novel neurotechnologies. *Cell*. 2016;167(4):882–885. DOI: 10.1016/j.cell.2016.10.029.
 124. Leefmann J, Levallois C, Hildt E. Neuroethics 1995–2012. A bibliometric analysis of the guiding themes of an emerging research field. *Front Hum Neurosci*. 2016;10:336. DOI: 10.3389/fnhum.2016.00336.
 125. Mehrabi N, Morstatter F, Saxena N, Lerman K, Galstyan A. A survey on bias and fairness in machine learning. *ACM Computing Surveys*. 2021;54(6):1–35. DOI: 10.1145/3457607.
 126. Barocas S, Selbst AD. Big Data's Disparate Impact. *California Law Review*. 2016;104(3):671–732. DOI: 10.2139/ssrn.2477899.
 127. O'Neil C. *Weapons of Math Destruction: How Big Data Increases Inequality and Threatens Democracy*. New York: Crown Publishing Group; 2016. 259 p.
 128. Caliskan A, Bryson JJ, Narayanan A. Semantics derived automatically from language corpora contain human-like biases. *Science*. 2017;356(6334):183–186. DOI: 10.1126/science.aal4230.
 129. Raghavan M, Barocas S, Kleinberg J, Levy K. Mitigating bias in algorithmic hiring: evaluating claims and practices. In: *Proceedings of the 2020 Conference on Fairness, Accountability, and Transparency*. FAT* '20. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery; 2020. P. 469–481. DOI: 10.1145/3351095.3372828.
 130. Bartlett R, Morse A, Stanton R, Wallace N. Consumer-lending discrimination in the FinTech era. *Journal of Financial Economics*. 2022;143:30–56. DOI: 10.1016/j.jfineco.2021.05.047.
 131. Angwin J, Larson J, Mattu S, Kirchner L. Machine bias: There's software used across the country to predict future criminals. And it's biased against blacks. *ProPublica* [Electronic resource]. URL: <https://www.propublica.org/article/machine-bias-risk-assessments-in-criminal-sentencing>. 2016.
 132. Van Deursen AJAM, Van Dijk JPM. The digital divide shifts to differences in usage. *New Media & Society*. 2014;16(3):507–526. DOI: 10.1177/1461444813487959.
 133. Yadav BR. The Ethics of Understanding: Exploring Moral Implications of Explainable AI. *International Journal of Science and Research (IJSR)*. 2024;13(6):1–7. DOI: 10.21275/SR24529122811.
 134. Kundu S. AI in medicine must be explainable. *Nat Med*. 2021;27(8):1328. DOI: 10.1038/s41591-021-01461-z.
 135. McDermid JA, Jia Y, Porter Z, Habli I. Artificial intelligence explainability: the technical and ethical dimensions. *Philos Trans A Math Phys Eng Sci*. 2021;379(2207):20200363. DOI: 10.1098/rsta.2020.0363.
 136. Angelov PP, Soares EA, Jiang R, Arnold NI, Atkinson PM. Explainable artificial intelligence: an analytical review. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*. 2021;11(5):e1424. DOI: 10.1002/widm.1424.
 137. Dwivedi R, Dave D, Naik H, Singhal S, Omer R, Patel P, Qian B, Wen Z, Shah T, Morgan G, Ranjan R. Explainable AI (XAI): Core ideas, techniques, and solutions. *ACM Computing Surveys*. 2023;55(9):835. DOI: 10.1145/3561048.

138. Minh D, Wang HX, Li YF, Nguyen TN. Explainable artificial intelligence: a comprehensive review. *Artif Intell Rev.* 2022;55:3503–3568. DOI: 10.1007/s10462-021-10088-y.
139. Ponce-Bobadilla AV, Schmitt V, Maier CS, Mensing S, Stodtmann S. Practical guide to SHAP analysis: Explaining supervised machine learning model predictions in drug development. *Clin Transl Sci.* 2024;17(11):e70056. DOI: 10.1111/cts.70056.
140. Islam R, Andreev AV, Shusharina NN, Hramov AE. Explainable machine learning methods for classification of brain states during visual perception. *Mathematics.* 2022;10(15):2819. DOI: 10.3390/math10152819.
141. Bhati D, Neha F, Amiruzzaman M. A survey on explainable artificial intelligence (xai) techniques for visualizing deep learning models in medical imaging. *Journal of Imaging.* 2024;10(10):239. DOI: 10.3390/jimaging10100239.
142. Lai T. Interpretable medical imagery diagnosis with self-attentive transformers: a review of explainable AI for health care. *BioMedInformatics.* 2024;4(1):113–126. DOI: 10.3390/biomedinformatics4010008.
143. Catherine S. B. A. *Unlocking the Black Box: Exploring the Future of Explainable AI in Real-World Applications.* In: *Multidisciplinary Research in Arts, Science & Commerce.* Vol. 25. The Hill Publication; 2025. P. 37–38.
144. Hassija V, Chamola V, Mahapatra A, Singal A, Goel D, Huang K, Scardapane S, Spinelli I, Mahmud M, Hussain A. Interpreting black-box models: a review on explainable artificial intelligence. *Cogn Comput.* 2024;16:45–74. DOI: 10.1007/s12559-023-10179-8.
145. Karpov OE, Andrikov DA, Maksimenko VA, Hramov AE. Explainable artificial intelligence for medicine. *Medical Doctor and Information Technologies.* 2022;(2):4–11. DOI: 10.25881/18110193_2022_2_4.
146. Černevičienė J, Kabašinskas A. Explainable artificial intelligence (XAI) in finance: a systematic literature review. *Artif Intell Rev.* 2024;57:216. DOI: 10.1007/s10462-024-10854-8.
147. Craig T. *Privacy and Big Data: The Players, Regulators, and Stakeholders.* Sebastopol: O'Reilly Media, Inc.; 2011. 91 p.
148. Curzon J, Kosa TA, Akalu R, El-Khatib K. Privacy and artificial intelligence. *IEEE Transactions on Artificial Intelligence.* 2021;2(2):96–108. DOI: 10.1109/TAI.2021.3088084.
149. Chesterman S. Artificial intelligence and the problem of autonomy. *Notre Dame Journal on Emerging Technologies.* 2020;1:210–250.
150. Novelli C, Taddeo M, Floridi L. Accountability in artificial intelligence: what it is and how it works. *AI and Soc.* 2024;39:1871–1882. DOI: 10.1007/s00146-023-01635-y.
151. Oullier O, editor. *Le cerveau et la loi: analyse de l'émergence du neurodroit.* Paris: Centre d'analyse stratégique; 2012. Available from: http://archives.strategie.gouv.fr/cas/system/files/cas-dqs_dt-neurodroit_11septembrerduit_0.pdf.
152. Eagleman DM. Pourquoi les sciences du cerveau peuvent éclairer le droit. In: Oullier O, editor. *Le cerveau et la loi: analyse de l'émergence du neurodroit.* Paris: Centre d'analyse stratégique; 2012. P. 33–52.
153. Ernst E, Merola R, Samaan D. Economics of artificial intelligence: Implications for the future of work. *IZA Journal of Labor Policy.* 2019;9(1):4. DOI: 10.2478/izajolp-2019-0004.
154. McGaughey E. Will robots automate your job away? Full employment, basic income and economic democracy. *Industrial Law Journal.* 2022;51(3):511–559. DOI: 10.1093/indlaw/dwab010.
155. Russell S. *Human Compatible: Artificial Intelligence and the Problem of Control.* New York: Viking; 2019.
156. Torres P. Superintelligence and the future of governance: On prioritizing the control problem at the end of history. In: *Artificial Intelligence Safety and Security.* Chapman and Hall/CRC; 2018. p. 357–374. DOI: 10.1201/9781351251389-24.
157. Totschnig W. The problem of superintelligence: Political, not technological. *AI and Soc.* 2019;34: 907–920. DOI: 10.1007/s00146-017-0753-0.
158. Yandex: Risk Assessment Approach : electronic document. Available from: <https://yandex.ru/>.

159. da Silva Castanheira J, Orozco Perez HD, Misic B, Baillet S. Brief segments of neurophysiological activity enable individual differentiation. *Nat Commun.* 2021;12:5713. DOI: 10.1038/s41467-021-25895-8.
160. Shvab K. Technologies of the Fourth Industrial Revolution. M.: Eksmo; 2018. 317 p.
161. Ienca M. On artificial intelligence and manipulation. *Topoi.* 2023;42(3):833–842. DOI: 10.1007/s11245-023-09940-3.
162. Lemsieh H, Abarar I. Artificial intelligence: A technological tool to manipulate the psychology and behavior of consumers: Theoretical research. *International Journal of Accounting, Finance, Auditing, Management and Economics.* 2024;5(6):432–449. DOI: 10.5281/zenodo.12186136.
163. Pisarchik AN, Musatov VYu, Runnova AE, Pchelintseva CV, Hramov AE. Method of person identification by eeg-response to ambiguous images. Patent No. 2653239 C1 Russian Federation, IPC G06K 9/66, A61B 5/0476, H04L 9/32: appl. 02.05.2017: publ. 07.05.2018. Assignee: Yuri Gagarin Saratov State Technical University (in Russian).
164. Panch T., Mattie H, Celi LA. The “inconvenient truth” about AI in healthcare. *NPJ Digit Med.* 2019;2:77. DOI: 10.1038/s41746-019-0155-4.



Шендерюк-Жидков Александр Владимирович – родился в Калининграде (1982). Окончил с отличием экономический факультет Калининградского государственного университета по специальности «Финансы и кредит» (2004). Сенатор, член Совета Федерации Федерального Собрания Российской Федерации от Калининградской области, первый зампред Комитета по бюджету и финансовым рынкам Совета Федерации, доктор h. c. БФУ им. И. Канта.

Россия, 103426 Москва, ул. Б. Дмитровка, 26
Совет Федерации Федерального Собрания Российской Федерации
E-mail: a.shenderuk@yandex.ru
ORCID: 0009-0006-3206-8124
AuthorID (eLibrary.Ru): 1210392



Максименко Владимир Александрович – родился в Саратове (1987). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2012). Доктор физико-математических наук (2020, СГТУ). Лауреат Премии Президента Российской Федерации в области науки и инноваций для молодых учёных (2020). Ведущий научный сотрудник Национального университета Сингапура и ведущий научный сотрудник АНО «Неймарк» (Нижний Новгород).

Россия, 603104 Нижний Новгород, ул. Нартова, д. 6, пом. П1а
Автономная некоммерческая организация «Неймарк»
E-mail: maximenkovl@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4632-6896
AuthorID (eLibrary.Ru): 742773



Храмов Александр Евгеньевич – родился в Саратове (1974). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика и электроника» (1996). Доктор физико-математических наук (2005, СГУ), профессор (2008), член-корреспондент РАН (2025). Главный научный сотрудник ФГАУ «Цифровые индустриальные технологии» (Москва). С 2025 года – директор Научно-исследовательского института прикладного искусственного интеллекта и цифровых решений Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова

Россия, 115054 Москва, Стремянный переулок, 36
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
Россия, 127018 Москва, ул. Сущёвский Вал, 18
ФГАУ «Цифровые индустриальные технологии»
E-mail: hramov.ae@rea.ru
ORCID: 0000-0003-2787-2530
AuthorID (eLibrary.Ru): 34834



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1)

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003201

When integers embrace the beauty of complex numbers

P.-M. Alcover-Garau¹✉, E. Nepomuceno²

¹Polytechnic University of Cartagena, Spain

²National University of Ireland Maynooth, Irish

E-mail: ✉pedro.alcover@upct.es, erivelton.nepomuceno@mu.ie

Received 12.06.2025, accepted 30.09.2025, available online 16.11.2025, published 30.01.2026

Abstract. Purpose. This article investigates how fixed-point arithmetic and discrete recursive models can reveal structured behaviours in systems traditionally considered chaotic. Methods. Departing from the assumption of continuous space and infinitesimal precision, we simulate two well-known dynamical systems — the logistic map and the Mandelbrot set — using integer-based arithmetic. Results. Our findings show that when recursion unfolds over finite discrete sets, unexpected geometric regularities and modular symmetries emerge. In particular, we identify moiré-type interference patterns and a form of emergent scalar symmetry that are intrinsic to the arithmetic structure and not artifacts of rounding error. Conclusion. These results suggest the need to reconsider the foundations of mathematical modelling in physics and point toward the development of a discrete formalism that captures aspects of reality concealed by continuous formulations.

Keywords: fixed-point arithmetic, emergent moiré patterns, discrete dynamical systems, scalar symmetry, computer arithmetic.

For citation: Alcover-Garau P-M, Nepomuceno E. When integers embrace the beauty of complex numbers. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1):161–175. DOI: 10.18500/0869-6632-003201

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Когда целые числа обретают красоту комплексных чисел

P.-M. Alcover-Garau¹ , E. Nepomuceno²

¹ Политехнический университет Картахены, Испания

² Мейнутский университет, Ирландия

E-mail:  pedro.alcover@upct.es, erivelton.nepomuceno@mu.ie

Поступила в редакцию 12.06.2025, принята к публикации 30.09.2025,
опубликована онлайн 16.11.2025, опубликована 30.01.2026

Аннотация. Цель статьи — исследовать, как вычисления с фиксированной запятой и дискретные рекурсивные модели могут выявлять структурированное поведение в системах, традиционно считающихся хаотичными. **Методы.** Исходя из предположения о непрерывном пространстве и бесконечно малой погрешности, мы моделируем с использованием целочисленной арифметики две хорошо известные динамические системы: логистическое отображение и множество Мандельброта. **Результаты** исследования показывают, что при рекурсии на конечных дискретных множествах возникают неожиданные геометрические закономерности и модульные симметрии. В частности, мы выявляем интерференционные картины муарового типа и форму возникающей скалярной симметрии, которые присущи арифметической структуре, а не являются результатом ошибок округления. **Заключение.** Полученные результаты указывают на необходимость пересмотра основ математического моделирования в физике и указывают на развитие дискретного формализма, который отражает аспекты реальности, скрытые за непрерывными формулами.

Ключевые слова: вычисления с фиксированной запятой, развивающиеся муаровские структуры, дискретные динамические системы, скалярная симметрия, компьютерная арифметика.

Для цитирования: Alcover-Garau P.-M., Nepomuceno E. When integers embrace the beauty of complex numbers [Когда целые числа обретают красоту комплексных чисел] // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 161–175. DOI: 10.18500/0869-6632-003201. EDN: MZZJHG

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Introduction

Exploring the nature of reality requires addressing the challenge of precision. What happens if we abandon the illusion of the infinitesimal and consider a fundamentally discrete reality? This article explores that possibility, where computational mathematics provides clues about the underlying structure of the world. Within the discrete domain, a defined and elegant geometry emerges, revealing ordered patterns that defy conventional interpretations based on noise and numerical error.

Traditionally, physics and mathematics have relied on the assumption that reality is continuous, allowing for infinitely small divisions in space, time, and other magnitudes. The continuous conception of physical reality has yielded many results. The discipline of mathematical analysis, originating in the 17th century with Fermat, Newton, and Leibniz [1, §6.1], has enabled the attainment of valuable predictive models. However, not all scholars accept the continuity of all magnitudes. Finitistic mathematicians argue that the continuum is a mathematical fiction with no representation in the real world [2, Chapter 3]. Contemporary physics has begun to explore the possibility that nature may be fundamentally discrete, with space and time having a minimal granular structure. Quantum theory points to the existence of a minimum distance in the universe, below which no measurement is possible [3–5]; string theory posits a lower limit marked by the Planck length [6]. The real number set is an infinitely dense structure that cannot be represented in any finite computational system [7, 8]. If instead reality is discrete and finite, this challenges the validity of continuous models and suggests that our knowledge may be shaped as much by the tools we use as by the phenomena themselves.

Precision plays a crucial role in understanding the physical world. Measurement errors in nonlinear systems can lead to significant issues, as inaccuracies grow exponentially with truncation and rounding [9, 10]. If reality is indeed discrete and finite, determining its granularity could enable an exact representation of its properties, eliminating certain types of errors intrinsic to continuous models. Furthermore, the predictability of dynamical systems depends on the precision with which their initial conditions are known; even infinitesimal inaccuracies can lead to divergent outcomes over time [11]. In quantum mechanics, due to Heisenberg's uncertainty principle [12], this limitation in measurement is ontological rather than merely epistemological. The precision of measurement may therefore be constrained not only by technology, but also by the discrete nature of reality itself.

Mathematics serves both as a tool and as a candidate for the fundamental language of reality. The assumption that continuous mathematics is the best framework for describing the universe has guided modern physics, from Newtonian mechanics to quantum field theory. However, if reality is fundamentally discrete, a new mathematical approach may be necessary: one that replaces continuous functions with recursive, finite arithmetic models more faithfully aligned with the universe's actual structure [13]. In such a discrete framework, emergent behaviours can arise from simple rules, revealing symmetries and regularities that would otherwise remain hidden [14]. The presence of these emergent structures suggests that continuity may be an illusion, a large-scale effect emerging from fundamentally discrete interactions.

One of the most fascinating consequences of a discrete approach is the emergence of patterns and structures that are not apparent in continuous models. To illustrate these ideas, this article presents two case studies: one on the logistic map and another on the Mandelbrot set. These examples show how fixed-point arithmetic reveals hidden patterns and symmetries that remain obscured under traditional floating-point simulations. The findings suggest that discrete mathematics may provide a more faithful and structured representation of complex systems, potentially leading to a paradigm shift in how we model physical reality.

The remainder of this paper is organized as follows. Section 1 introduces the fixed-point data type used in our computations. The first part of the study includes Sections 2 and 3, which present the case studies on the logistic map and the Mandelbrot set, highlighting the emergent patterns observed through discrete arithmetic. The second part, comprising Sections 4 and 5, discusses the broader implications of these findings, including the possible need for a new mathematical framework based on discrete principles. Finally, the [Conclusions](#) section offers concluding remarks on the potential impact of this perspective for future research in physics and computational modelling.

Objectives of the Study. This article aims to explore the consequences of abandoning the traditional assumption of continuity in favor of a fundamentally discrete view of physical reality. The main objectives of this work are:

- To argue that discrete, finite mathematical structures can reveal emergent patterns that are often overlooked by continuous models.
- To present two case studies — the logistic map and the Mandelbrot set — demonstrating that discrete arithmetic introduces structured behavior, not merely numerical error.
- To propose a new modelling framework based on integer-valued computations that avoids rounding and bias, potentially redefining how precision is handled in physical systems.
- To introduce and analyze the concepts of *symmetric points* and *emergent scalar symmetry* as manifestations of moiré-type interference in discrete dynamical systems.

Contributions and Novelty. This paper makes the following original contributions:

- It introduces the concept of moiré interference patterns as emergent structures resulting from the interaction between discrete measurement grids and the underlying arithmetic of recursive systems.

- It constructs a fixed-point data type and applies it to well-known chaotic systems, showing that discrete arithmetic can reveal ordered behavior that remains hidden in continuous formulations.
- This highlights the need to develop a mathematics based on new paradigms. Two examples have demonstrated how working with recursive and discrete models reveals novel behaviors, which are overshadowed by continuous and linear mathematics.

Compared to previous works [15–17], which focused on the visual and empirical properties of these patterns, this article expands the analysis by formalizing the computational structures, symmetry classes, and theoretical implications within a broader philosophical and physical context.

1. Fixed-point data type

When using a computer, whether working with floating-point arithmetic (e.g., IEEE754 [18]) or with the fixed-point data type presented here, results are never exact. By ‘exactness’ we refer to the symbolic precision of mathematical expressions. Saying π is not the same as saying $3.141592\dots$: no matter how many digits we compute, we cannot fully represent its value, if such exactness even exists.

This limitation is well known and widely studied. So much so that listing references, even from the last year alone, would be impractical.

The aim of this article is not to analyze rounding or bias errors, but to highlight a deeper issue: what if these errors arise not from computational limits, but from the mismatch between continuity-based models and a fundamentally discrete reality? If reality is recursive and discrete, then determining its granularity becomes crucial. In such a context, accuracy would no longer concern numerical approximations of \mathbb{R} , but the finite set of actual values that constitute the fabric of physical reality. Without real-number approximations, bias and rounding errors disappear. What then emerges? The case studies below aim to offer partial answers.

All simulations presented here were implemented in C# using a custom fixed-point data type, which is briefly introduced in this section.

Each value is defined by:

- `raw` — a 64-bit signed integer (`Int64`),
- `precision` — a 16-bit unsigned integer (`UInt16`) specifying how many least-significant bits are interpreted as fractional.

Each fixed-point value is interpreted as $(p: \text{precision}) x = \text{raw}/2^p$.

This allows representing rational numbers with denominators of the form 2^p , ranging from -2^{63-p} to $+2^{63-p} - 1$. Between any two integers, the representation includes 2^p evenly spaced values. For example, with `raw = 0x4`, we obtain 4.0, 2.0, 1.0, 0.5, … down to 0.03125 depending on `precision` in $\{0, \dots, 7\}$. Conversely, the value 0.5 can be encoded by `raw = 0x01, 0x02, \dots` up to `0x80` depending on `precision` from 1 to 8.

Increasing precision by 1 doubles the number of representable values between integers. For instance, between $k/2^p$ and $(k+1)/2^p$, the midpoint $(2k+1)/2^{p+1}$ is introduced.

Although rationals such as $1/3$ are not exactly representable, high-precision approximations are possible: with `precision = 15`, $1/3 \approx 0.33325\dots$ encoded as `0x2AAA`; with `precision = 60`, the representation is `0x55\dots55`, encoding $0.333\dots330442\dots$

We omit implementation details here. Overflow and rounding are implementation dependent, though the phenomena discussed in this article appear regardless of the chosen representation, whether fixed-point or IEEE754 [16, §3]. Implementation specifics can be found in [17, §3.2].

Importantly, in all simulations presented here — with `precision` up to 32 bits — overflow never occurred. The fixed-point arithmetic remains closed, deterministic, and free of floating-point artifacts.

Additional details on the arithmetic logic, including bit-level implementation and recursive behavior, are provided in [Appendix](#).

2. Case study on the logistic map

As a first case study, we analyze the behavior of the logistic map and its bifurcation diagram under discrete arithmetic. The expected occurs: when periods and bifurcations are calculated using a fixed-point data type, the results differ from those predicted by analytical methods. And the unexpected also occurs: the hypothetical “errors” introduced by finite and discrete encodings exhibit a surprising degree of structure and harmony. Perhaps it is precisely this structure —information that emerges when reality is treated as both recurrent and discrete— that deserves attention.

Definition 1. *The logistic map is a discrete-time dynamical system. It models iterative processes like population dynamics with limited resources.*

$$F_\lambda(x) = \lambda x (1.0 - x) \quad (1)$$

In this equation, x represents a normalized population size (typically $x \in [0, 1]$), and λ is a positive parameter ($\lambda \in [0, 4]$) controlling the growth rate.

Iterating the map $-x_{i+1} = \lambda x_i (1.0 - x_i)$ —demonstrates various long-term behaviors depending on the value of λ : from stable fixed points and periodic cycles to highly sensitive dependence on initial conditions, characteristic of deterministic chaos. As such, it serves as a foundational model in chaos theory and for exploring phenomena like bifurcation cascades and the emergence of complexity in population dynamics and other fields.

2.1. Background Concepts. The definitions included in this subsection are well-known in the study of dynamical systems. They are provided here to support readers less familiar with the context.

Definition 2. (cfr. [19, Definition 3.1.])

*Given a discrete process, defined by the successive iteration of a function $f(x)$ initiated at the value x_0 , the sequence of points $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \dots$ is called the **orbit** of x_0 .*

Example 1. For $\lambda = 2.1$ and $x_0 = 0.25$, the iterative sequence evolves as follows: $x_1 = 0.393750$, $x_2 = 0.501293$, $x_3 = 0.524996$, $x_4 = 0.523688$, $x_5 = 0.523822$, $x_6 = 0.523808$, $x_7 = 0.523810$, $x_8 = 0.523810$, $x_9 = 0.523810$, and so on.

*This sequence exemplifies the convergence of the iterative process towards a **fixed point**, observed here at approximately $x \approx 0.523810$.*

Definition 3. (cfr. [19, Definition 3.2.])

*A point x is a **fixed point** if $f(x) = x$; it is a **periodic point** of period n if $f^n(x) = x$.*

A fixed point represents an equilibrium state where, if the population (or any modeled variable) reaches that value, it will remain constant. A periodic point indicates that the population does not stabilize at a single value but oscillates cyclically among a set of n distinct values.

Example 2. For $\lambda = 2.0$, $x_0 = 0.5$ is a fixed point: $x_1 = 2.0 \times 0.25 = 0.5$.

The logistic map $F_\lambda(x) = \lambda x (1.0 - x)$ has two fixed points: $p_1 = 0$ and $p_2 = (\lambda - 1) / \lambda$.

The stability of a fixed (or periodic) point determines whether an orbit starting nearby tends to approach or move away from that point. To classify this stability, we use the magnitude of the function’s derivative at the fixed point (or the n -th iterate of the function for periodic points).

Definition 4. (cfr. [19, Definitions 4.1, 4.5, and 4.7])

*A periodic point x of period n is called an **attracting point** (or **attractor**) if $|(f^n)'(x)| < 1$, and a **repelling point** (or **repellor**) if $|(f^n)'(x)| > 1$.*

- An **attractor** is a stable equilibrium point: if the population deviates slightly from it, the function's iterations will guide it back towards this point. The orbit converges to the attractor.
- A **repeller** is an unstable equilibrium point: if the population deviates slightly from it, the iterations will push it further away from that point. The orbit diverges from the repeller.

The derivative of the logistic map $F_\lambda(x)$ is $F'_\lambda(x) = \lambda(1 - 2x)$.

Example 3. At the fixed point $p_1 = 0$, the derivative is $F'_\lambda(p_1) = \lambda$. Therefore, $|F'_\lambda(p_1)| = \lambda$

- If $\lambda < 1$: $p_1 = 0$ is an attractor. This implies that, with a very low growth rate, the population will tend to extinction.
- If $\lambda > 1$: $p_1 = 0$ is a repeller. In this case, if the population is minimally greater than zero, it will not go extinct but will start to grow.

Example 4. For the fixed point $p_2 = (\lambda - 1)/\lambda$, the derivative is $F'_\lambda(p_2) = 2 - \lambda$. Thus, $|F'_\lambda(p_2)| = |2 - \lambda|$

- If $1 < \lambda < 3$: p_2 is an attractor (since $|2 - \lambda| < 1$). Within this range of λ , the population tends to stabilize at a positive, non-zero value, as observed in Example 1. This is supported by [19, Proposition 5.3] and [20].
- If $\lambda > 3$: p_2 is a repeller (since $|2 - \lambda| > 1$). When λ exceeds 3, this equilibrium point loses its stability, triggering more complex dynamic behaviors including higher-period cycles and, eventually, chaos.

A particularly interesting scenario occurs when the absolute value of the derivative is exactly 1, i.e., $|f'(x)| = 1$. In these situations, the first derivative criterion alone is inconclusive, and the fixed point is considered marginally stable or neutral. These are the critical values of the parameter λ where the dynamic system undergoes bifurcations: qualitative changes in its behavior as λ varies.

- When $\lambda = 1$: The two fixed points, $p_1 = 0$ and $p_2 = (\lambda - 1)/\lambda$, merge at $x = 0$. At this point, $F'_\lambda(0) = 1$. While $x = 0$ remains an attractor, its attraction is “weak” or “neutral” and the system undergoes a transcritical bifurcation. This means that as λ crosses 1, the fixed point $x = 0$ changes from being an attractor (for $\lambda < 1$) to a repeller (for $\lambda > 1$), yielding its role as an attractor to p_2 .
- When $\lambda = 3$: The fixed point $p_2 = 2/3$ has $|F'_\lambda(p_2)| = 1$. At this point, the stability of the fixed point p_2 is lost, and the system experiences a period-doubling bifurcation (or “flip bifurcation”). The population no longer converges to a single fixed point but begins to oscillate between two distinct values, forming a period-2 cycle. This is the first step in a cascade of period-doublings that, as λ increases, will lead to the chaotic behavior of the logistic map.

Thus, the function F_λ exhibits rich dynamics:

- p_1 is an attractor when $\lambda < 1$.
- p_2 is an attractor when $1 < \lambda < 3$.
- For $\lambda \geq 3$, the fixed points lose their stability, leading to higher-order periodic cycles and, finally, to chaos.

Definition 5. (cfr. [19, §2.10], [21])

Sarkovskii Ordering

$$\begin{aligned}
 & 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright \\
 & 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright \\
 & 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright \\
 & 2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright 2^3 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright \\
 & \dots \dots \\
 & 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2^1 \triangleright 2^0
 \end{aligned}$$

Given a continuous function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Sarkovskii's Theorem states that if f has a periodic point of prime period k , and $k > l$ in the above order, then f also has a periodic point of period l [19, Theorem 10.2].

From Sarkovskii's ordering and theorem, we can draw two significant conclusions (cf. [19, §1.10]):

1. If a system has a periodic point whose period is not a power of two, then it necessarily has infinitely many periodic points. Conversely, if all periodic points are finite in number, their periods must be powers of two.
2. If a function has a point of period 3 (the highest element in the ordering), then it also has points of every other period. This is the essence of the famous result “period three implies chaos” by Tien-Yien Li and James Yorke [22].

The evolution of periods as λ increases can be visualized using a **bifurcation diagram**, as shown in Figure 1, where the horizontal axis represents λ values, and the vertical axis shows the final values of orbits under F_λ . The logistic map's bifurcation diagram graphically plots the attracting period (fixed point or periodic orbit) where any given orbit eventually settles for each value of the parameter λ . It thus illustrates the universal transition from stable states to period-doubling and deterministic chaos, independent of the initial x_0 .

Equation 1 has been used to illustrate many foundational concepts in chaos theory. Robert May [20] was among the first to observe that, starting from $\lambda = 3$, the period of orbits begins to double with increasing λ , following the initial entries of Sarkovskii's ordering specifically, the powers of 2. Both May and Yorke noted this period-doubling behavior and how it occurs over progressively smaller intervals of λ . Mitchell Feigenbaum [23, Appendix A4] calculated the constant that bears his name, defined as the limiting ratio of successive bifurcation intervals:

$$\delta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \approx 4.66920160910299067 \quad (2)$$

(value taken from [24, 25]).

The **Feigenbaum constant** (δ) is a universal mathematical constant central to chaos theory. It quantifies the rate at which successive **period-doubling bifurcations** occur as a non-linear dynamical system transitions from stable to chaotic behavior. In Eq. 2, λ_n denotes the parameter value at which the n -th period-doubling bifurcation occurs. This constant highlights a remarkable **universality**: it is found

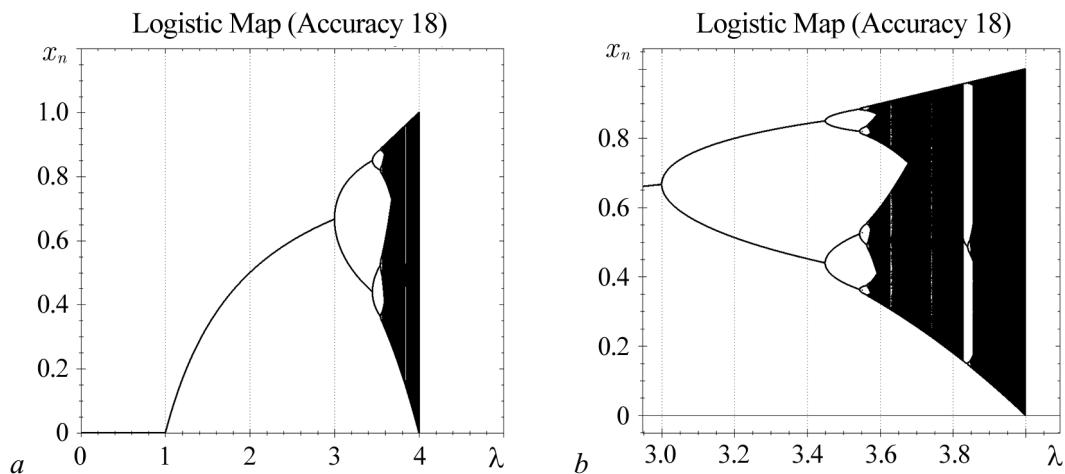


Fig. 1. Bifurcation diagram of the logistic map computed with precision = 18. a — Global view; b — zoomed-in view for λ between 3 and 4

in any one-dimensional, unimodal map exhibiting this route to chaos, signifying a profound quantitative regularity in the emergence of complex dynamics across diverse systems.

2.2. Period variation under discrete encoding. The behavior of orbits under the logistic map depends both on the initial condition x_0 and on the level of precision used in the arithmetic. With fixed-point arithmetic, these factors can significantly affect the final orbit, its period, and even the apparent dynamics of the system.

As a first example, consider `precision = 3`, which allows eight values between consecutive integers. For a fixed value of λ , different initial values x_0 can lead to different attractors. For instance, with $\lambda = 4$ (0x20), initial values such as $1/8$, $3/8$, $5/8$, and $7/8$ all converge to a period-2 cycle; while others, such as $1/4$ or $3/4$, reach fixed points.

Precision itself also plays a decisive role. For example, with $x_0 = 1/8$ and $\lambda = 3 + 3/8$, we observe:

- `precision = 3`: the orbit enters a period-2 cycle;
- `precision = 4`: the orbit converges to a fixed point;
- `precision = 5 - 6`: longer-period cycles appear.

As λ increases, the diversity of observed periods becomes more pronounced. The bifurcation structure, classically tied to the continuous limit, now reveals strong sensitivity to encoding.

2.3. Emergence and distribution of period 3. A particularly significant moment in the logistic map is the first appearance of an orbit of period 3, which — by Sarkovskii's Theorem — implies the presence of all other periods. In fixed-point arithmetic, the first appearances of period-3 orbits vary depending on both precision and the value of x_0 .

For example, with `precision = 4` and $x_0 = 1/4$, period-3 cycles are detected at $\lambda = 3 + 3/4$, $3 + 13/16$, $3 + 7/8$, etc. As precision increases, the number of λ values yielding period-3 orbits also increases rapidly (Table).

This dependency is not random. It reflects the interplay between arithmetic precision and the discretization of both x_0 and λ . The presence or absence of chaos in this context cannot be treated as a sharp boundary (as in the continuous case), but rather as a property distributed across the arithmetic space.

Table. Observed period 3 orbits for different values of λ and fixed point precision. Working with fixed point and low precisions, the behavior of the logistic map differs depending on the initial value x_0 . The logistic map plot has been calculated for all possible initial values x_0 at each precision: the table shows at which values of x_0 (encoded in hexadecimal) the period three has appeared, and how many times. There are values of x_0 for which period three does not appear at all. Columns (1): precision; (2): # λ with period 3; (3): λ values

(1)	(2)	(3)	
4	5	$3 + 3/4: 0x3C$ (twice)	$3 + 13/16: 0x3D$ (3 times)
		$3 + 7/8: 0x3E$ (3 times)	$3 + 15/16: 0x3F$ (5 times)
		$4 : 0x40$ (6 times)	—
5	0		—
6	6	$3 + 53/64: 0xF5$ (3 times)	$3 + 27/32: 0xF6$ (6 times)
		$3 + 55/64: 0xF7$ (8 times)	$3 + 7/8: 0xF8$ (22 times)
		$3 + 57/64: 0xF9$ (7 times)	$3 + 29/32: 0xFA$ (8 times)
7	6	$3 + 55/64: 0x1EE$	$3 + 111/128: 0x1EF$
		$3 + 7/8: 0x1F0$	$3 + 113/128: 0x1F1$
		$3 + 57/64: 0x1F2$	$3 + 115/128: 0x1F3$
8	5	(not listed in detail)	
9	9	(not listed in detail)	
10	12	(not listed in detail)	
11	21	(not listed in detail)	
16	576	(not listed in detail)	

2.4. Highlights and implications. The logistic map's classical bifurcation diagram predicts the first period-doubling at $\lambda = 3$. However, under finite fixed-point encoding, this bifurcation occurs at lower values, and the system exhibits a period-2 orbit long before $\lambda = 3$.

Figure 2 shows how this behavior unfolds with $\text{precision} = 14$. A total of 16384 rational values are encoded between any two integers. The first bifurcation (period doubling) occurs at $\lambda = 1 + 10267/16384 = 1.626647\dots$ (0x681B). A zoom near $\lambda = 3.0$ shows that period-2 cycles persist for a wide range of λ values, forming a stable, ordered structure.

These diagrams diverge from classical predictions not due to computational errors, but because we are not working with real numbers: the system operates over a finite, uniformly distributed subset of rationals. Within this discrete space, dynamical behavior is not chaotic in the traditional sense, but highly structured.

The emergence of period-3 orbits at lower than expected values of λ — and the sensitivity to both x_0 and precision — suggest a new paradigm for interpreting complexity. The classical bifurcation framework may need reinterpretation when arithmetic itself becomes part of the system's ontology.

Future work may include studying the evolution of Feigenbaum constants under varying precisions, the behavior of Lyapunov exponents in discrete spaces [26, 27], and discrete analogs of Sharkovskii's ordering.

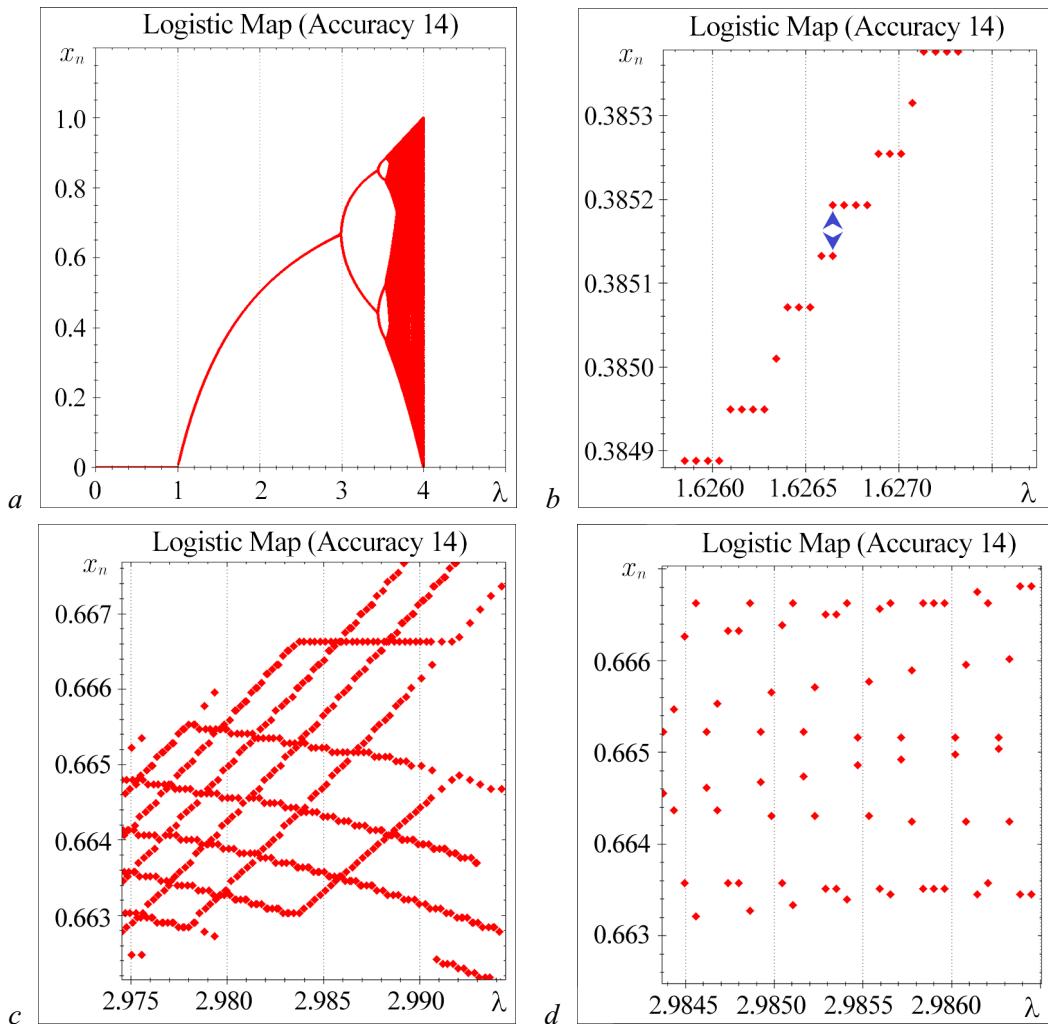


Fig. 2. Views of the bifurcation diagram of the logistic map, computed with $\text{precision} = 14$

3. Case Study on the Mandelbrot Set

The Mandelbrot set (henceforth *M-set*) is a paradigmatic object in the study of complex dynamics. Each point $c \in \mathbb{C}$ defines an orbit through the iterative process $z_{n+1} = z_n^2 + c$, with $z_0 = 0$. A point c belongs to the M-set if this orbit remains bounded under iteration.

In this study, we examine the discrete *period map* of the M-set, computed using fixed-point arithmetic at various levels of precision. Unlike the continuous case, which produces uniform colorings across hyperbolic components (each corresponding to a single orbit period), our discrete simulations reveal highly structured and reproducible interference patterns. These are not numerical artifacts, but emergent features arising from the interaction between the sampling grid and the arithmetic structure of the iteration.

This behavior is analyzed in detail in [17], where it is shown that discrete sampling interacts with the modular structure of the recurrence, giving rise to *moiré interference patterns*. These patterns are organized around specific locations in the complex plane — referred to as *symmetric points* — which act as centers of discrete periodic organization.

Around each symmetric point, a finite set of distinct geometric arrangements — called *configurations* — emerge. These are governed by a characteristic parameter C , known as the *class divisor*. For a fixed C , the configurations are grouped into *classes* defined by the residue $\text{IncR} \bmod C$, where IncR is the increment used to sample the complex plane. Transitions between configurations follow modular arithmetic laws.

Rather than reproducing the full classification introduced in [17], this article focuses on its implications: the emergence of order, invariance, and symmetry from a purely discrete computational system; a phenomenon that is obscured in continuous formulations.

Figure 3 shows four representative configurations near symmetric points, for different values of C and IncR . Each image was computed using fixed-point arithmetic at consistent resolution. The regularity of each configuration is determined entirely by the congruence class $\text{IncR} \bmod C$, illustrating the central role of modularity.

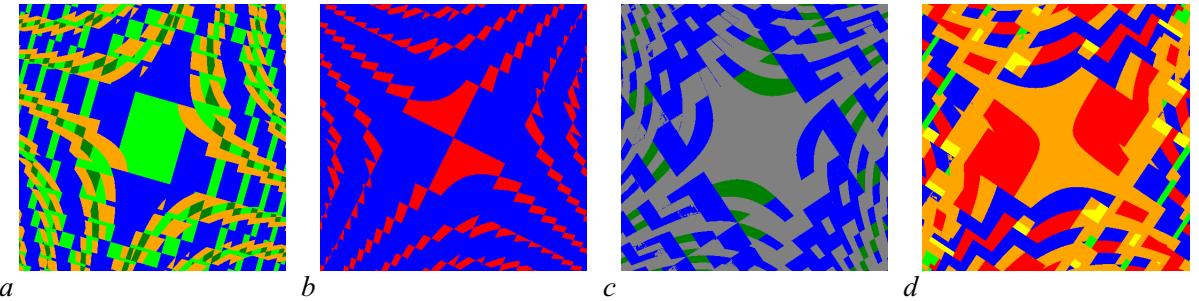


Fig. 3. Representative configurations around symmetric points in the Mandelbrot Set, computed with fixed-point arithmetic. *a* — Configuration 4.4 ($C = 52$, $\text{IncR} = 0xD4$); *b* — 6.6 ($C = 6$, $\text{IncR} = 0xF0$); *c* — 13.13 ($C = 13$, $\text{IncR} = 0xB6$); *d* — 2.2 ($C = 6$, $\text{IncR} = 0xD0$). Each configuration is uniquely determined by the congruence class $\text{IncR} \bmod C$, and exhibits modular symmetries and regularities that reflect the arithmetic structure of the sampling (color online)

3.1. Scalar Symmetry under Emergence. A remarkable property of these configurations is their behavior under resampling. When IncR is a multiple of the class divisor C , and the sampling grid is downsampled by a factor F , the same configuration reappears. This phenomenon — termed *emergent scalar symmetry* — shows that a structure can manifest at multiple scales with identical geometry, governed by modular arithmetic alone.

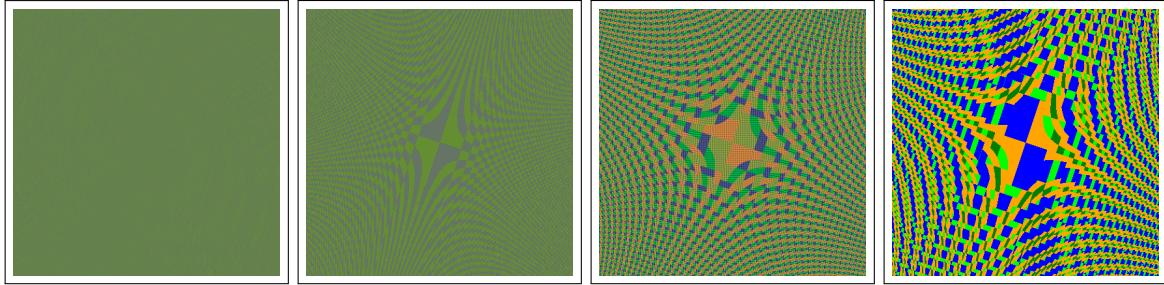


Fig. 4. Example of **emergent scalar symmetry** in configuration 20.20. From left to right: original image ($F = 1$), and emergent images obtained by selecting one row and column out of every $F = 2, 5$, and 10 , respectively. The structural invariance across scales arises from the arithmetic condition $\text{IncR} \equiv 0 \pmod{C}$ (color online)

Figure 4 illustrates this effect for configuration 20.20. The leftmost panel shows the original image ($F = 1$), and the subsequent panels show the same configuration re-emerging under grid downsampling with $F = 2, 5$, and 10 . Despite the reduction in resolution, the structure is preserved exactly, confirming the symmetry induced by discrete modular rules.

4. Implementation and Finite-Precision Effects

The numerical simulations of the logistic map were performed using a custom-developed class that implements 64-bit fixed-point arithmetic. This approach was chosen to explicitly control the effects of finite precision. A key feature of our implementation is the ability to set a variable parameter that controls the number of bits allocated to the fractional part of the number, allowing us to precisely define the simulation's precision within a range of 5 to 32 bits.

The core iterative equation for the logistic map was implemented as follows:

```
% Pseudocode of the logistic map iteration
for i from 0 to N:
    x[i + 1] = lambda * x[i] * (1 - x[i])
```

While mathematically equivalent in a continuous domain, different formulations of the logistic map equation are not identical under finite precision. An alternative implementation, for example, could be:

```
% Pseudocode of the alternative implementation
for i from 0 to N:
    x[i + 1] = lambda * x[i] - lambda * x[i] * x[i]
```

The first variant, $x_{\text{next}} = \lambda x_{\text{current}} (1 - x_{\text{current}})$, involves one subtraction and two multiplications. The second variant, $x_{\text{next}} = \lambda x_{\text{current}} - \lambda x_{\text{current}}^2$, performs two multiplications and one subtraction. The accumulation of rounding errors after each operation can lead to subtle variations in the resulting trajectory, which could manifest as different visual patterns or attractors in the simulations.

The analysis of such finite word length effects is a well-known problem in digital signal processing and control systems. The delta operator, for instance, has been proposed as a substitute for the conventional shift operator to improve filter performance and reduce sensitivity to finite precision [28, 29]. Our findings are consistent with this body of work, as they demonstrate that the specific implementation and the underlying arithmetic structure directly influence the emergent dynamics of the system. Therefore, the choice of a specific arithmetic and algorithm formulation is not a secondary detail but an integral part of the system's behavior.

5. What if precision is the essence?

The results presented in Sections 2 and 3 suggest that the use of discrete-variable mathematics and finite arithmetic can reveal an emergent order that is not the result of randomness but of the intrinsic structure of integer-based representations. These patterns highlight properties concealed within traditional continuous models.

5.1. Emergence in Discrete Systems. In this study, emergence is a descriptive framework for the structured behaviors observed in our simulations, where discrete recursion gives rise to patterns not evident in continuous models. These emergent properties are not mere artifacts but reveal a new layer of structure.

5.2. The Emergence of Moiré Patterns: A Window into a Structured Reality. The moiré patterns we observe are often dismissed as a simple interference artifact from the superposition of two periodic processes—the internal dynamics of the system and the external grid imposed by computation. However, in our simulations, these patterns are not a trivial subproduct. They are a direct visual manifestation of the **intrinsic arithmetic structure** of the computation itself.

We propose that these patterns arise from the interaction between an underlying “reality grid” of the finite arithmetic domain and our “observational grid” imposed by the simulation. While the configuration of the underlying grid remains hidden, the resulting moiré pattern is an emergent structure generated by this interaction. This emergent geometry reveals properties and symmetries that are absent in both continuous and trivial discrete models, providing a structured view of the system’s dynamics that would otherwise remain inaccessible.

This interpretation aligns with the visual configurations observed in the discrete Mandelbrot period map (Section 3) and the logistic map, where moiré-like patterns and modular symmetry emerge as reproducible features of the arithmetic structure. Our findings suggest that the finite nature of numbers and the operations of truncation are not just sources of error, but constructive elements of the system, offering a new perspective on the organization of chaotic systems.

Conclusions

This article has suggested that fixed-point arithmetic, when applied to discrete recursive systems, can reveal an emergent order that is concealed within continuous-variable models. Through the simulation of the logistic map and the Mandelbrot set, we have observed that geometric regularities and modular symmetries are not merely artifacts of rounding errors but appear to be intrinsic features of the underlying arithmetic structure.

Our findings support the notion that finite-precision effects are not exclusively a source of error or a limitation of digital simulation. Instead, they may serve as a powerful tool for discovering new layers of structure in nonlinear systems. The emergent moiré-type patterns, in particular, provide a compelling visual example of how the interaction between the system’s dynamics and a discrete computational framework can reveal a structured reality.

Furthermore, we have shown that the specific implementation of the iterative algorithm, though mathematically equivalent in the continuous domain, can significantly influence the resulting dynamics. This highlights the importance of analyzing not only the theoretical models but also their concrete computational realizations.

In conclusion, our work supports a paradigm shift from a continuous to a discrete perspective in the analysis of nonlinear dynamics. By embracing the finite nature of numbers, we can uncover a new set of properties and behaviors that would otherwise remain hidden, opening new avenues for research in fields ranging from computational physics to structured system design.

Future Research Directions and Applications. Based on the findings presented in this article, several promising avenues for future research emerge. First, further investigation is needed to explore the implications of finite-precision arithmetic in a broader range of nonlinear dynamical systems, including those with higher dimensionality. This could lead to the discovery of new emergent behaviors and symmetries.

Second, the structured moiré patterns observed in our visualizations present a unique opportunity for inverse problem research. It would be valuable to develop a mathematical framework to deduce the properties of a hidden arithmetic substrate from the analysis of the emergent interference patterns.

Finally, we plan to conduct a systematic comparison of different algorithmic implementations, including those based on both fixed-point and floating-point arithmetic. The goal is to quantify the impact of each on the long-term dynamics of a system and to establish a set of best practices for computational modeling of chaotic phenomena.

Appendix A

Implementation Details

A.1. Fixed-Point Data Type. All simulations in this paper were performed using a fixed-point representation implemented in C#. The fixed-point type consists of two components:

- `raw`: a signed 64-bit integer (`Int64`) that encodes the numerical value.
- `precision`: an unsigned 16-bit integer (`UInt16`) that determines how many of the lower bits in `raw` are interpreted as the fractional part.

Each value is interpreted as:

$$x = \frac{\text{raw}}{2^{\text{precision}}}$$

Only rational numbers whose denominator is a power of two can be represented exactly. Increasing the value of `precision` refines the granularity between two consecutive integers.

A.2. Arithmetic Operations. The arithmetic follows exact integer operations:

- Addition and subtraction are performed directly on the `raw` values, assuming the same `precision`.
- Multiplication involves scaling correction: the product of two `raw` values is right-shifted by `precision` bits.
- Division reverses the process, with a left shift before performing integer division.

No rounding, truncation, or floating-point computations are used. Overflow behavior is deterministic within 64-bit limits and no bias correction is applied.

A.3. Orbit Computation Procedure. For both the logistic map and the Mandelbrot set:

- Initial values (x_0 , λ , or c) are encoded as fixed-point values at a selected `precision`.
- Iterative formulas are applied using only integer arithmetic:

$$x_{i+1} = \lambda \cdot x_i \cdot (1 - x_i) \quad \text{or} \quad z_{n+1} = z_n^2 + c$$

- Period detection is done by storing previous orbit points and comparing them at each iteration.

A.4. Grid Exploration and Increment Parameter. To explore the period space:

- Values of λ (for the logistic map) or c (for the Mandelbrot set) are swept across a range using a uniform grid.
- The grid increment is determined by a fixed `raw` increment and the current `precision`.

- The behavior of symmetric points and their configurations depends on the class divisor C and on the value of $\text{raw} \bmod C$.
- For a given symmetric point, the resulting image configuration is independent of precision and determined only by the raw encoding of the increment.

Figures were generated using a range of precision values from 14 to 32, and increment steps carefully selected to isolate distinct configurations.

References

1. Penrose R. *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Random House; 2016. 1094 p.
2. Hagar A. *Discrete or Continuous?: The Quest for Fundamental Length in Modern Physics*. Cambridge: Cambridge University Press; 2014. 267 p. DOI: 10.1017/CBO9781107477346.
3. Rovelli C. *Reality is not What it Seems: the Journey to Quantum Gravity*. NY: Riverhead Books; 2017. 280 p.
4. Rovelli C. *Seven Brief Lessons on Physics*. NY: Riverhead Books; 2016. 96 p.
5. Rovelli C. *What if time didn't exist?* Herder Editorial; 2015. 156 p.
6. Greene B. *The Elegant Universe*. Random House; 2011. 512 p.
7. Greene B. *The Fabric of the Cosmos: Space, Time, and the Texture of Reality*. Knopf Doubleday Publishing Group; 2007. 592 p.
8. Kaku M. *Hyperspace: A Scientific Odyssey Through Parallel Universes, Time Warps, and the Tenth Dimension*. Oxford: Oxford University Press; 2018. 384 p.
9. Dirac PAM. The relation between mathematics and physics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*. 1940;59:122–129. DOI: 10.1017/S0370164600012207.
10. Wigner EP. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 1960;13(1):1–14. DOI: 10.1002/cpa.3160130102.
11. Born M. Statistical interpretation of quantum mechanics. *Science*. 1955;122(3172):675–679. DOI: 10.1126/science.122.3172.675.
12. Feynman RP. Simulating physics with computers. *Int. J. Theor. Phys.* 1982;21:467–488. DOI: 10.1007/BF02650179.
13. Tegmark M. *Our Mathematical Universe: My Quest for the Ultimate Nature of Reality*. NY: Knopf; 2012. 432 p.
14. Lederman LM, Teresi D. *The God Particle: If the Universe is the Answer, What is the Question?* Houghton Mifflin; 2006. 434 p.
15. Alcover-Garau P-M. Moiré interferences in the map of orbits of the Mandelbrot Set. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017;42:545–559. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.06.016.
16. Alcover-Garau P-M. Cause and origin of moiré interferences in recursive processes and with fixed-point and floating-point data types. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2020;80:104995. DOI: 10.1016/j.cnsns.2019.104995.
17. Alcover-Garau P-M. Emergent scalar symmetry in discrete dynamical systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*. 2024;29(1):37–67. DOI: 10.3934/dcdsb.2023085.
18. IEEE Standard for floating-point arithmetic. IEEE Std 754-2019 (Revision of IEEE 754-2008). NY: IEEE; 2019. 84 p.
19. Devaney RL. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Avalon Publishing; 2003. 362 p.
20. May RM. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*. 1976;261: 459–167.
21. Sharkovskii O. Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself. *Int. J. Bifurc. Chaos*. 1995;5(5):1263–1273. DOI: 10.1142/S0218127495000934.

22. Li T-Y, Yorke JA. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*. 1975;82(10): 985–992.
23. Feigenbaum MJ. The universal metric properties of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*. 1979;21(6):669–706. DOI: 10.1007/BF01107909.
24. Křížek M, Luca F, Somer L. *17 Lectures on Fermat Numbers. From Number Theory to Geometry*. NY: Springer; 2013.
25. Zwillinger D. *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*. NY: CRC Press; 2018. 872 p.
26. Sprott JC. *Strange Attractors: Creating Patterns in Chaos*. NY: M and T Books; 1993. 426 p.
27. Mendes, Eduardo MAM, Nepomuceno EG. A very simple method to calculate the (positive) largest Lyapunov exponent using interval extensions. *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2016;26(13):1650226. DOI: 10.1142/S0218127416502266.
28. Middleton R, Goodwin G. Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1986;31(11):1015–1021. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104162.
29. Butusov DN, Karimov TI, Kaplun DI, Karimov AI, Huang Y, Li SC. The choice between delta and shift operators for low-precision data representation. In: 2017 20th Conference of Open Innovations Association (FRUCT); 2017. P. 46–52. DOI: 10.23919/FRUCT.2017.8071291.



Алковер-Гарау Педро-Мария — родился в Пальма-де-Майорке, Испания (1964). Окончил физический факультет Университета Валенсии (1987). PhD по компьютерным наукам (Университет Мурсии, 2003). С 1999 года преподает на кафедре информационных и коммуникационных технологий Политехнического университета Картахены. Научные интересы: нелинейные системы, хаос и фракталы, численное представление, криптография, компьютерное зрение. Опубликовал более 20 научных статей по указанным направлениям.

Plaza del Cronista Isidoro Valverde, s/n Edificio «La Milagrosa», 30202, Cartagena, Spain
 Политехнический университет Картахены
 E-mail: pedro.alcover@upct.es
 ORCID: 0000-0002-2278-1448



Непомучено Эривелтон Джеральдо — окончил бакалавриат Федерального университета Сан-Жуан-дель-Рей (UFSJ, 2001). PhD в области электротехники (UFMG, 2005). Доцент Центра исследований энергии океана и кафедры электронной инженерии Университета Мейнут. Работал в качестве приглашенного научного сотрудника в Технологическом институте аэронавтики (Бразилия, 2005), Имперском колледже Лондона (2013/14), Санкт-Петербургском электротехническом университете (Россия, 2019) и Лондонском городском университете (2020/21). Высокопоставленный член IEEE и избранный председатель Технического комитета IEEE по нелинейным схемам и системам. Заместитель координатора Технического комитета по идентификации систем и анализу данных Бразильской ассоциации автоматического управления.

Maynooth University, Maynooth, County Kildare, Ireland
 Мейнутский университет
 E-mail: erivelton.nepomuceno@mu.ie
 ORCID: 0000-0002-5841-2193



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1)

Персоналии

DOI: 10.18500/0869-6632-003209
EDN: TAGZOS

**Памяти Юрия Павловича Шараевского
(3 октября 1942 – 1 января 2026)**

C. B. Гришин

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: sergrsh@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.01.2026, опубликована 30.01.2026

Для цитирования: Гришин С. В. Памяти Юрия Павловича Шараевского // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 1. С. 176–178. DOI: 10.18500/0869-6632-003209. EDN: TAGZOS

For citation: Grishin SV. To the memory of Yurii P. Sharaevskii. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(1): 176–178. DOI: 10.18500/0869-6632-003209

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

После продолжительной болезни на 84 году ушёл из жизни доктор физико-математических наук, профессор Саратовского государственного университета Юрий Павлович Шараевский.

Юрий Павлович родился 3 октября 1942 года в городе Николаевске-на-Амуре Хабаровского края в семье военнослужащего. В 1959 году окончил с золотой медалью среднюю школу в городе Саратове и поступил на физический факультет СГУ. После окончания университета с 1965 по 1967 год он работал инженером в Научно-исследовательском электротехническом институте Саратова. В 1967 году поступил в очную аспирантуру на кафедру электроники СГУ к Дмитрию Ивановичу Трубецкову, и с тех пор вся его трудовая деятельность была неразрывно связана с университетом. Юрий Павлович был первым аспирантом Дмитрия Ивановича, чем очень гордился.





Ю.И. Лёвин, Д.И. Трубецков и Ю.П. Шараевский на торжественном мероприятии по случаю 25-летия факультета нелинейных процессов: актовый зал X корпуса СГУ, 5 октября 2019 года (фото: www.sgu.ru)

С 1970 года вместе с Д.И. Трубецковым и Ю.И. Левиным (еще один аспирант и ученик Дмитрия Ивановича) Ю.П. Шараевский принимал активное участие в подготовке и проведении зимних школ по электронике сверхвысоких частот и радиофизике для молодых инженеров и научных работников. Эти школы, известные как «Школы Трубецкова», сделали Саратов центром электроники СВЧ в бывшем СССР и в РФ. После окончания учебы в аспирантуре, с 1970 по 1981 год, он работал в Научно-исследовательском институте механики и физики (НИИМФ) СГУ сначала в должности старшего научного сотрудника, а с 1973 года — заведующим лабораторией. В 1972 году под руководством Д.И. Трубецкова защитил кандидатскую диссертацию на тему «Исследование некоторых особенностей взаимодействия электронных потоков в скрещенных полях с электромагнитными волнами в режиме больших сигналов», а в 1975 году получил ученое звание старшего научного сотрудника.

В начале 1980-х годов Юрий Павлович перешёл работать из НИИМФ СГУ на кафедру общей физики, возглавляемую д.ф.-м.н., профессором Всеволодом Семеновичем Стальмаховым, где начал заниматься новым для себя научным направлением «спин-волновая электроника». С 1981 по 1995 год Юрий Павлович работал на кафедре общей физики: вначале в должности доцента, а затем — профессора. Он принимал участие в разработке и создании функциональных устройств сверхвысокочастотного диапазона на магнитостатических волнах, обладающих уникальными нелинейными характеристиками и широкими функциональными возможностями для использования в радиолокации, связи, телевидении. Результаты этих научных исследований были внедрены им в учебный процесс в виде спецкурсов «Колебания и волны в твердых телах» и «Магнитоэлектроника сверхвысоких частот». При непосредственном участии Юрия Павловича на кафедре общей физики был создан новый спецпрактикум, организован филиал кафедры общей физики в Производственном объединении «Тантал» и отраслевая лаборатория «Магнитоэлектроника» в СГУ. В эти годы в соавторстве с А.В. Вашковским и В.С. Стальмаховым им была издана монография «Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот» с грифом ГК РФ

по высшему образованию, которая стала настольной книгой для многих студентов и специалистов в области спин-волновой электроники. В 1995 году Юрий Павлович защитил докторскую диссертацию на тему «Нелинейные, многоволновые и шумовые явления в распределенных линиях передачи с гиротропными средами: ферромагнитный слой, поток носителей заряда в скрещенных электрическом и магнитном полях».

С 1995 по 2000 год Юрий Павлович работал в должности профессора в Высшем колледже прикладных наук СГУ, который затем был переименован в факультет нелинейных процессов (ФНП). Юрий Павлович, вместе с Д. И. Трубецковым и Ю. И. Лёвиным (будущий декан ФНП), стоял у истоков создания этого факультета. Входил в директорат научно-образовательного центра «Нелинейная динамика и биофизика», созданного в 2000 году в Саратовском университете в рамках совместной российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование», где руководил образовательной компонентой. Был также одним из со-зателей научно-образовательного института «Открытые системы». С 2000 по 2002 год был заместителем проректора по научной работе СГУ, а с 2000 по 2014 год являлся заведующим кафедрой нелинейной физики на ФНП. Юрий Павлович был научным руководителем лаборатории «Физика магнитных явлений» в отделении физики нелинейных систем НИИ естественных наук СГУ, в которую входили преподаватели, научные сотрудники, аспиранты и студенты. Он подготовил и прочитал много общих и специальных курсов студентам физического, геологического, химического, исторического и механико-математического факультетов и факультета нелинейных процессов, среди которых курсы по общей физике, курсы «Концепции современного естествознания», «Электродинамика», «Колебания и волны в активных средах», «Современные проблемы нелинейной физики» и др. Под его руководством на ФНП был создан новый практикум «Методика, технология и информационное обеспечение физического эксперимента», состоящий из трех учебно-научных лабораторий для студентов первого и второго курсов. Он являлся одним из организаторов Международных школ «Хаотические автоколебания и образование структур – ХАОС», а также ежегодных Всероссийских школ-конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых», проводимых для молодых ученых, аспирантов, студентов и школьников.

С 2010 по 2020 год руководил научным направлением «Магнонные кристаллы» в лаборатории «Метаматериалы» НИИМФ СГУ, созданной на тот момент член-корр. РАН С. А. Никитовым в рамках Программы Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования «Метаматериалы на основе фотонных, фононных и магнонных кристаллов и их применение для СВЧ-радиоэлектроники и фотоники» (мегагрант). Ю. П. Шараевский три раза удостаивался звания «Соросовский доцент» (1997, 1998, 1999), награжден нагрудными знаками «Победитель соцсоревнования» (1975) и «Изобретатель СССР» (1987), а также медалями «Ветеран труда» (1989) и «За особые заслуги перед СГУ» (2009). Был членом диссертационного совета Д 212.243.01 при СГУ, с 2000 по 2004 гг. – членом экспертного совета по физике программы «Университеты России», а в период с 2000 по 2003 гг. – членом экспертного совета по радиофизике Российского фонда фундаментальных исследований.

Ю. П. Шараевский – крупный российский ученый в области спин-волновой электроники, автор более 200 научных публикаций, 3 монографий и большого числа учебных пособий. Под его руководством были защищены 4 кандидатских и 1 докторская диссертации.

Юрий Павлович Шараевский останется в нашей памяти как образец классического университетского профессора, прекрасного лектора, педагога и Учителя, преданно служившего родному университету.

Гришин С. В.

Известия вузов. ПНД, 2026, т. 34, № 1

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. N. Chumachenko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

MANAGING EDITOR

M. V. Sysoeva, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

S. Boccaletti, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

A. M. Bykov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

N. S. Ginzburg, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

O. I. Kanakov, Ph.D., Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

A. V. Kraskov, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

N. V. Kuznetsov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

G. van Luijtelaar, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

A. Lütjohann, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

G. G. Malinetskiy, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

A. B. Neiman, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

V. I. Nekorkin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

V. V. Tuchin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

E. Ya. Frisman, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute for Complex Analysis of Regional Problems of the RAS (Birobidzhan, Russia)

A. E. Hramov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Plekhanov Russian University of Economics (Moscow, Russia)

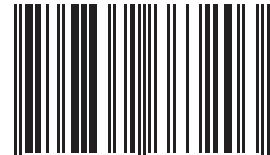
V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

V. A. Cherepenin, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >