

ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Трикладная Деловая Динамика

2
2026



*85 лет со дня рождения
Михаила Израилевича Рабиновича
20 апреля 1941 – 31 марта 2025*

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

М. В. Сысоева, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

С. Боккалетти, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

А. М. Быков, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Н. С. Гинзбург, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

О. И. Канаков, д.ф.-м.н., ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

С. А. Каценко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

А. В. Красков, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Ж. ван Луйтелаар, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

А. Люттйоханн, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

А. Б. Нейман, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

В. И. Некоркин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

А. Н. Писарчик, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

В. В. Тучин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

Е. Я. Фрисман, чл.-корр. РАН, д.б.н., профессор, ИКАРП ДВО РАН (Биробиджан, Россия)

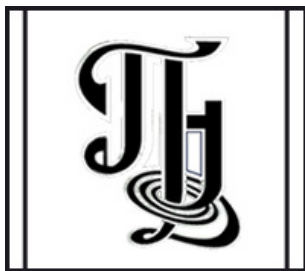
А. Е. Храмов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, РЭУ имени Г. В. Плеханова (Москва, Россия)

В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А. (Саратов, Россия)

В. А. Черепенин, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Журнал «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-77991 от 20 марта 2020 года

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписной индекс издания 73498. Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Свободная цена

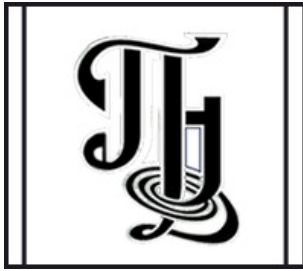
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией Д. А. Лачинова
Редакторы: А. Р. Нигметулина, А. В. Князева
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (927) 625-9020,
e-mail: andjournal@sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 12.03.2026
Вышел в свет 31.03.2026
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 19,3 (20,75)
Тираж 100 экз. Заказ № 25-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The journal "Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics" is registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Registration ПИ No ФС77-77991 of 20 March 2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

The journal subscription index is 73498. A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru). Free price

The journal is Open Access

Head of Editorial office D. A. Lachinova
Editors: A. R. Nigmatulina, A. V. Knyazeva
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (927) 625-9020,
e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 12.03.2026. Published 31.03.2026
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 19,3 (20,75)
Edition of 100 copies. Order No. 25-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail:sguprint@bk.ru

СО Д Е Р Ж А Н И Е

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС. КВАНТОВЫЙ ХАОС

Седова Н. О. Об асимптотической устойчивости по выходу для систем с запаздыванием 183

Кедров А. А., Щербинин С. А. Исследование устойчивости колебательной π -моды в возмущенной цепочке Тоды..... 206

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Ветчанин Е. В., Артемова Е. М. Управление движением кругового профиля с помощью присоединенных точечных источников и внутренних механизмов..... 223

Удалов П. П., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В., Полеткин К. В. Устойчивость движения и дрейф твердого тела в неконтактном индукционном электромагнитном подвесе..... 247

Мирсаидов М. М., Ишматов А. Н., Юлдошев Б. Ш., Салимов Ш. М., Хазраткулов И. О. Динамические характеристики пространственных осесимметричных сооружений с учетом диссипации энергии в материале..... 268

Аппалонов А. М., Масленникова Ю. С. Гибридная модель прогнозирования полного электронного содержания ионосферы на основе автокодировщиков и классических алгоритмов машинного обучения..... 286

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Такашвили Л. В., Грищенко А. А., Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Сысоев И. В. Три реализации одного нейрона: вариация режимов поведения радиофизического генератора нейроподобной активности в натурном эксперименте 299

Мальшев Ю. А., Лобов С. А., Яхно В. Г. Исследование двухпороговой модификации биоморфной системы навигации 314

Шабунин А. В. Нейронная сеть как индикатор связанности в ансамбле хаотических систем..... 331

C O N T E N T S

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.
QUANTUM CHAOS

<i>Sedova N. O.</i> On asymptotic output stability for delay differential systems	183
<i>Kedrov A. A., Shcherbinin S. A.</i> Investigation of the stability of the oscillatory zone boundary mode in the perturbed one-dimensional Toda lattice.....	206

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Vetchanin E. V., Artemova E. M.</i> Control of the motion of a circular foil using attached sources and internal mechanisms	223
<i>Udalov P. P., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V., Poletkin K. V.</i> Stability of motion and drift of a rigid body in a non-contact inductive electromagnetic suspension.....	247
<i>Mirsaidov M. M., Ishmatov A. N., Yuldoshev B. Sh., Salimov Sh. M., Khazratkulov I. O.</i> Dynamic characteristics of spatial axisymmetric structures considering energy dissipation in the material.....	268
<i>Appalov A. M., Maslennikova Y. S.</i> A hybrid total electron content forecasting model based on autoencoders and classical machine learning algorithms.....	286

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

<i>Takaishvili L. V., Grishchenko A. A., Sysoeva M. V., Ponomarenko V. I., Sysoev I. V.</i> Three realizations of one neuron: variation of behavior regimes for a electronic generator of neuron-like activity in a hardware experiment	299
<i>Malichev Y. A., Lobov S. A., Yakhno V. G.</i> Study of a two-threshold modification of a biomorphic navigation system.....	314
<i>Shabunin A. V.</i> Neural network as an indicator of connectivity in an ensemble of chaotic systems.....	331



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2)

Научная статья
УДК 517.929.7

DOI: 10.18500/0869-6632-003208
EDN: RIFMQY

Об асимптотической устойчивости по выходу для систем с запаздыванием

Н. О. Седова

Ульяновский государственный университет, Россия

E-mail: [✉sedovano@ulsu.ru](mailto:sedovano@ulsu.ru)

Поступила в редакцию 22.09.2025, принята к публикации 25.12.2025,

опубликована онлайн 27.12.2025, опубликована 31.03.2026

Аннотация. Цель настоящего исследования — получить достаточные условия асимптотической устойчивости по выходу для нелинейных неавтономных систем с запаздыванием, описываемых уравнениями с обыкновенными производными. Отдельно рассматривается равномерная и неравномерная асимптотическая устойчивость по выходу; в отличие от классической асимптотической устойчивости по Ляпунову, эти свойства в общем случае не равносильны даже для автономной системы. **Методы.** Исследуются возможности прямого метода Ляпунова для формулировки достаточных условий асимптотической устойчивости по выходу для нелинейных систем с запаздыванием. На примере наиболее хорошо изученной задачи по части переменных анализируются известные результаты об асимптотической устойчивости по выходу для систем с запаздыванием в терминах функций и функционалов Ляпунова, обсуждаются отличия требований к вспомогательным конструкциям по сравнению с достаточными условиями классической асимптотической устойчивости, а также условия, обеспечивающие равномерность сходимости. **Результаты.** Представлены новые результаты об асимптотической устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости по выходу для неавтономной системы с запаздыванием в терминах функции Ляпунова–Разумихина, от которой не требуется знакоопределенность по выходу. **Заключение.** Сформулированы новые достаточные условия асимптотической устойчивости по выходу для нелинейных неавтономных систем с запаздыванием. В терминах функций Ляпунова–Разумихина получены условия простой и равномерной асимптотической устойчивости по выходу. При этом требования к этим функциям и к правой части системы менее строгие по сравнению с известными подобными результатами, что расширяет возможности применения метода к исследованию конкретных систем.

Ключевые слова: нелинейная неавтономная динамическая система с запаздыванием, асимптотическая устойчивость по выходу, прямой метод Ляпунова, условия Разумихина.

Для цитирования: Седова Н. О. Об асимптотической устойчивости по выходу для систем с запаздыванием // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 2. С. 183–205. DOI: 10.18500/0869-6632-003208. EDN: RIFMQY

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

On asymptotic output stability for delay differential systems

N. O. Sedova

Ulyanovsk State University, Russia

E-mail: ✉sedovano@ulsu.ru

Received 22.09.2025, accepted 25.12.2025,

available online 27.12.2025, published 31.03.2026

Abstract. The purpose of this study is to obtain sufficient conditions for output asymptotic stability of nonlinear nonautonomous time-delay systems described by ordinary differential equations. Both uniform and non-uniform output asymptotic stability are considered separately — unlike classical Lyapunov asymptotic stability, these two properties are not equivalent in general, even for autonomous systems. **Methods.** This work investigates the capabilities of Lyapunov's direct method in formulating sufficient conditions for output asymptotic stability of nonlinear time-delay systems. Using the well-studied problem of partial stability as an example, known results on output asymptotic stability for time-delay systems are analyzed in terms of Lyapunov functions and Lyapunov–Krasovskii functionals. The differences in requirements for auxiliary constructions compared to sufficient conditions for classical asymptotic stability are discussed, as well as conditions ensuring uniform convergence. **Results.** New results on output asymptotic stability and uniform output asymptotic stability for nonautonomous time-delay systems are presented in terms of a Lyapunov–Razumikhin function, which is not required to be sign-definite with respect to the output. **Conclusion.** New sufficient conditions for output asymptotic stability of nonlinear nonautonomous time-delay systems are formulated. Conditions for both non-uniform and uniform output asymptotic stability are obtained in terms of Lyapunov–Razumikhin functions. The requirements imposed on these functions as well as on the right-hand side of the system are less restrictive than those in known similar results, thus expanding the applicability of the method to the analysis of specific systems.

Keywords: nonlinear nonautonomous time-delay dynamical system, output asymptotic stability, Lyapunov's direct method, Razumikhin conditions.

For citation: Sedova NO. On asymptotic output stability for delay differential systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(2):183–205. DOI: 10.18500/0869-6632-003208

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Классическое определение устойчивости по Ляпунову в последние десятилетия было дополнено рядом обобщений, отражающих важные для приложений свойства. Одним из таких обобщений является устойчивость по выходу. Задача об устойчивости по выходу (и ее частные случаи) была сформулирована и исследована изначально для конечномерных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [1], см. также ссылки в [2].

Однако, как и другие задачи анализа динамических систем, эта задача актуальна и для бесконечномерных систем, в частности, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Такие уравнения в последние десятилетия широко используются в качестве математических моделей разнообразных процессов [3–5].

В статье рассматривается задача асимптотической устойчивости по выходу для нелинейной неавтономной системы с запаздыванием. Основные предположения, используемые обозначения и определения приведены в разделе 1.

Широко известным частным случаем устойчивости по выходу является устойчивость по части переменных [6, 7]. Такая постановка особенно актуальна при проектировании систем управления и наблюдения: например, в случае адаптивного управления состояние замкнутой системы включает как состояние управляемого объекта (которое требуется привести к началу координат), так и вектор ошибок оценки параметров (который может, вообще говоря, к нулю не сходиться);

при проектировании наблюдателя, напротив, малой должна быть ошибка наблюдения, при этом к состоянию может никаких требований не предъявляться.

Известно, что для автономной системы асимптотическая устойчивость по Ляпунову является равномерной (относительно как отклонения от начала координат, так и момента этого отклонения); это справедливо как для обыкновенных, так и для функционально-дифференциальных уравнений [8]. Возникает вопрос: сохраняется ли это свойство для асимптотической устойчивости по выходу.

Ответ на этот вопрос имеет практическое значение. Неравномерность сходимости может приводить к произвольно позднему возникновению переходных процессов и перерегулирования, а также снижать робастность системы.

Для нелинейных систем этот вопрос оказался нетривиальным; например, вслед за результатами о равномерной асимптотической устойчивости по части переменных, представляющими естественное обобщение достаточных условий равномерной асимптотической устойчивости по всем переменным, появляются обсуждения и контрпримеры [9–11]. Эти и другие известные результаты, обсуждаемые в разделе 2, получены с применением прямого метода Ляпунова, который остается основным методом анализа качественных свойств решений нелинейных динамических систем.

Применение этого метода к системам с запаздыванием требует адаптации: либо используется функционал Ляпунова–Красовского [8], либо оценивается производная обычной функции Ляпунова при выполнении специального ограничения [12, 13]. В последнем случае говорят, что функция удовлетворяет так называемому условию Разумихина (этот термин используется, строго говоря, для обозначения не одного условия, а любого ограничения определенного типа; сама же вспомогательная функция при этом часто называется функцией Ляпунова–Разумихина). В англоязычной литературе довольно распространенным является альтернативный подход на основе неравенств типа Халаяна (см., например, [9]), которые позволяют не только утверждать факт сходимости решений, но и оценивать скорость этой сходимости. Отметим, что выполнение неравенства Халаяна для функции влечет за собой выполнение классического условия Разумихина (см. подробное обсуждение в [14]).

В разделе 3 предлагаются новые достаточные условия асимптотической устойчивости по выходу, сформулированные в терминах функций Ляпунова–Разумихина для изучаемой системы, в том числе обеспечивающие равномерность этой устойчивости. Обсуждение полученных результатов и иллюстративные примеры представлены в заключительном разделе.

1. Основные обозначения, определения и предположения

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (1)$$

$$y(t) = h(x_t). \quad (2)$$

Здесь и далее используем следующие стандартные обозначения: $R^+ = [0, +\infty)$, R^n – n -мерное пространство векторов $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ с нормой $|x|$, $C^n = C([-r, 0], R^n)$ – банахово пространство с нормой $\|\varphi\| = \max_{-r \leq s \leq 0} |\varphi(s)|$, $r > 0$ – величина запаздывания, $C_q^n = \{\varphi \in C^n : \|\varphi\| < q\}$, $q > 0$. Для непрерывной функции $x(t) \in C([t_0 - r, t_0 + T], R^n)$ ($t_0 \in R^+$, $T > 0$) элемент $x_t \in C^n$ определяется для любого $t \in [t_0, t_0 + T)$ формулой $x_t(s) = x(t + s)$, $-r \leq s \leq 0$, $\dot{x}(t)$ обозначает правостороннюю производную функции $x(t)$ в точке t .

Если не оговорено иное, считаем выполненными следующие предположения относительно правой части уравнения (1).

Предложение 1. Функционал f непрерывен, и $f(t, 0) = 0$ для всех $t \in R^+$.

Предложение 2. Для каждого $q > 0$ существует $l = l(q) > 0$ такое, что для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}_q^n$ и $t \in R^+$ выполняется неравенство $|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leq l \|\varphi_2 - \varphi_1\|$.

Заметим, что эти предположения гарантируют ограниченность функционала $f(t, \varphi)$ на множествах вида $R^+ \times \bar{C}_q^n$ ($q > 0$).

Предполагаем также, что функционал $h : C^n \rightarrow R^m$ ($m \leq n$) в (2) липшицев на ограниченных множествах и $h(0) = 0$. Решение с начальным значением $t_0 \in R^+$ и начальной функцией $x_0 \in C^n$ обозначим $x(t; t_0, x_0)$, а соответствующий выход — $y(t; t_0, x_0) = h(x_t(t_0, x_0))$.

Наконец, будем использовать традиционные обозначения для непрерывных функций с некоторыми дополнительными свойствами.

Определение 1.

- Функция $\alpha \in C(R^+, R^+)$ принадлежит классу \mathcal{P} , если $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(s) > 0$ для всех $s > 0$.
- Функция $\alpha \in C(R^+, R^+)$ принадлежит классу \mathcal{K} , если $\alpha \in \mathcal{P}$ и является возрастающей.
- Функция $\alpha \in C(R^+, R^+)$ принадлежит классу \mathcal{K}_∞ , если $\alpha \in \mathcal{K}$ и $\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s) = +\infty$.
- Функция $\beta \in C(R^+ \times R^+, R^+)$ принадлежит классу \mathcal{KL} , если $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}$ для каждого фиксированного $t \in R^+$ и для каждого фиксированного $s \in R^+$ функция $\beta(s, \cdot)$ не возрастает и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(s, t) = 0$.

Для систем с запаздыванием определение глобальной асимптотической устойчивости по выходу было введено (для случая правой части, не зависящей от времени) в [15].

Определение 2. Система (1)–(2) называется равномерно асимптотически устойчивой по выходу, если существуют $\rho > 0$ и функция $\beta \in \mathcal{KL}$ такие, что для всех $\varphi_0 \in C_\rho^n$, $t_0 \in R^+$ выполняется условие

$$|y(t; t_0, \varphi_0)| \leq \beta(\|\varphi_0\|, t - t_0) \quad \forall t \geq t_0. \quad (*)$$

Если при этом неравенство (*) выполняется для любого $\rho > 0$, то система называется глобально равномерно асимптотически устойчивой по выходу.

Такая устойчивость эквивалентна комбинации двух свойств.

1. Равномерная устойчивость по выходу: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой начальной точки $(t_0, \varphi_0) \in R^+ \times C^n$, удовлетворяющей неравенству $\|\varphi_0\| < \delta$, выполняется условие $|y(t; t_0, \varphi_0)| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$.

2. Равномерное притяжение по выходу: существует $\rho > 0$ такое, что для любых $\varepsilon > 0$, $\rho_1 \in (0, \rho)$ найдется значение $T = T(\varepsilon, \rho_1) > 0$, обладающее свойством: для всех $\varphi_0 \in C_{\rho_1}^n$, $t_0 \in R^+$ и $t \geq t_0 + T$ выполняется неравенство $|y(t; t_0, \varphi_0)| < \varepsilon$.

Если в определении равномерного притяжения по выходу число $\rho > 0$ может быть выбрано произвольным, то говорят о глобальном равномерном притяжении по выходу. Наконец, глобальная равномерная асимптотическая устойчивость по выходу, согласно определению 2, означает глобальное равномерное притяжение по выходу в сочетании с глобальной равномерной устойчивостью по выходу: существует функция $\gamma \in \mathcal{K}$ такая, что для всех $\varphi_0 \in C^n$, $t_0 \in R^+$ $\|y(t; t_0, \varphi_0)\| \leq \gamma(\|\varphi_0\|)$, $\forall t \geq 0$.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений понятия устойчивости по выходу были рассмотрены в [1, 16] в рамках задачи устойчивости от входа к состоянию (ISS). Похожее свойство в более общей постановке было изучено в исследованиях устойчивости по двум мерам [17, 18]. К устойчивости по выходу также можно свести задачу практической устойчивости (полагая $y(t) = \max\{|x(t)| - r, 0\}$) и задачу устойчивости компактного множества, которым также посвящены обширные исследования. Очевидно, что равномерная асимптотическая устойчивость по выходу

сводится к классической равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения в случае $h(x_t) = x(t)$.

В некоторых приложениях рассматриваемый выход зависит только от текущего значения решения, а именно $h(x_t) = h_0(x(t))$ для некоторого непрерывного отображения $h_0 : R^n \rightarrow R^p$. В более общем случае можно использовать следующее понятие, введенное в [15, Определение 3.8].

Определение 3. *Предположим, что существует непрерывное отображение $h_0 : R^n \rightarrow R^p$ такое, что $h_0(0) = 0$, и $\alpha, \bar{\alpha} \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что для всех $\varphi \in C^n$,*

$$\alpha(|h_0(\varphi(0))|) \leq \|h(\varphi)\| \leq \bar{\alpha} \left(\sup_{\tau \in [-\Delta, 0]} |h_0(\varphi(\tau))| \right).$$

Тогда $h : C^n \rightarrow R^p$ называется эквивалентным конечномерному отображению h_0 .

Заметим, что равномерная асимптотическая устойчивость по выходу является более сильным требованием по сравнению с обычной (неравномерной) асимптотической устойчивостью по выходу, которая гарантирует такие свойства (не предполагающие равномерности оценок выхода относительно начальных условий).

1. (Устойчивость по выходу) для каждого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in R^+$ найдется $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для любой начальной функции $\varphi_0 \in C^n$, удовлетворяющей неравенству $\|\varphi_0\| < \delta$, выполняется условие $|y(t; t_0, \varphi_0)| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$.
2. (Притяжение по выходу) существует $r > 0$ такое, что для любых $\varphi_0 \in \bar{C}_r^n$, $t_0 \in R^+$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t; t_0, \varphi_0) = 0.$$

По аналогии с определениями свойств устойчивости нулевого решения по Ляпунову можно также определить свойство *эквивалентной асимптотической устойчивости по выходу* как «промежуточное» между простой асимптотической устойчивостью и равномерной асимптотической устойчивостью по выходу: система устойчива по выходу (не обязательно равномерно), а сходимость выхода равномерна относительно начальных точек (но не относительно начального момента времени), то есть $T = T(t_0, \varepsilon, \rho_1)$ в определении 2 (см., например, [19]).

Для автономной системы (1) глобальная равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения эквивалентна глобальной асимптотической устойчивости. Это следует из того, что глобальная устойчивость гарантирует равномерную ограниченность решений, что влечет равномерность глобальной сходимости [15] (равномерность локальной асимптотической устойчивости для автономных систем с запаздыванием была обоснована Н. Н. Красовским [8]).

2. Асимптотическая устойчивость по части переменных: известные результаты и примеры

При формулировке различных определений устойчивости, а также ограничений на функции (или функционалы) Ляпунова, гарантирующих тот или иной вид устойчивости, удобно использовать функции из стандартных классов (см. определение 1). При этом в качестве аргументов этих функций используется та или иная норма, определяемая состоянием системы.

Основной вопрос при формулировке требований к функциям Ляпунова, достаточных для определенного вида устойчивости по выходу, связан с допустимостью оценок, зависящих от выхода, а не от полного состояния системы.

Обсуждаемые ниже результаты касаются главным образом систем с запаздыванием. Однако многие из них являются обобщениями соответствующих результатов для обыкновенных

дифференциальных уравнений; более того, рассматриваемый далее пример 1 запаздывания не содержит (хотя и приведен его авторами как опровержение справедливости утверждения для систем с запаздыванием). Поэтому следствия из приведенных далее утверждений для обыкновенных дифференциальных уравнений также могут представлять интерес.

Сначала обратимся к аналогу классической теоремы Ляпунова о равномерной асимптотической устойчивости, впервые доказанному Н. Н. Красовским [8]; в сделанных предположениях относительно системы (1) его можно сформулировать следующим образом (см. [3, 9, 19]).

Теорема 1. *Если для системы (1) существует функционал $V \in C(R^+ \times C^n, R^+)$ и функции $\underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in \mathcal{K}$ такие, что на множестве $R^+ \times C^n$ выполнены условия*

$$\begin{aligned}\underline{\alpha}(|\varphi(0)|) &\leq V(t, \varphi) \leq \bar{\alpha}(\|\varphi\|), \\ \dot{V}(t, \varphi) &\leq -\alpha(|\varphi(0)|),\end{aligned}$$

то нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

В этой теореме наличие запаздывания учитывается за счет использования вместо функции функционала, определенного в том же функциональном пространстве, что и правая часть уравнения. Здесь \dot{V} обозначает производную функционала в силу уравнения (1); на практике используемые функционалы часто являются инвариантно дифференцируемыми [20], и тогда эта производная непрерывна, в общем случае (для функционала, удовлетворяющего локальному условию Липшица по второму аргументу) используется верхняя правосторонняя производная (производная Дини) [21].

Заметим, что в теореме 1 для оценки функционала и его производной используются функции, зависящие либо от текущего значения состояния системы, либо от всей предыстории на интервале запаздывания. Это наиболее часто используемая в исследованиях формулировка, допускающая вариации в выборе норм и свойств функций, используемых в оценках. При этом получаются условия, достаточные для различных видов устойчивости (например, при дополнительном предположении $\underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in \mathcal{K}_\infty$ получаются достаточные условия глобальной равномерной асимптотической устойчивости). Подробное обсуждение возможных обобщений теоремы 1 можно найти в обзоре [19].

В аналогичной теореме о глобальной асимптотической устойчивости по выходу (для автономной системы) требования к функционалу меняются следующим образом [15].

Теорема 2. *Если для автономной системы (1) ($f(t, \varphi) \equiv f(\varphi)$) существует функционал $V \in C(C^n, R^+)$, функция $\alpha \in \mathcal{P}$ и функции $\underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что на множестве C^n выполнены условия*

1. $\underline{\alpha}(|h(\varphi)|) \leq V(\varphi) \leq \bar{\alpha}(\|\varphi\|)$,
2. $\dot{V}(\varphi) \leq -\alpha(V(\varphi))$,

то система (1)–(2) глобально равномерно асимптотически устойчива по выходу.

При этом для справедливости утверждения теоремы 2 дополнительно требуется, чтобы решения, начинающиеся в любой ограниченной области, оставались ограниченными на любом конечном интервале времени (авторы называют это свойство системы RFC (robustly forward complete)). Заметим, что это свойство гарантируется существованием функционала, удовлетворяющего условиям теоремы 1. Отметим также, что условия теоремы 2 являются не только достаточными, но и необходимыми для глобальной равномерной асимптотической устойчивости по выходу [15].

Обратим внимание на аргументы функций в условиях теоремы 2: в нижней оценке функционала стоит норма выхода, а в оценке производной — сам функционал V . Хотя из условий

теоремы 2 следует оценка $\dot{V}(\varphi) \leq -\tilde{\alpha}(|h(\varphi)|)$ с функцией $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(\underline{\alpha}(s))$, в [9] отмечено, что заменить условие 2 теоремы 2 на такую оценку в общем случае нельзя. В [22] показано, что замена возможна при дополнительном требовании, чтобы функционал $h(\varphi)$ не убывал вдоль решений системы. Однако проверка такого условия для заранее выбранного функционала h может оказаться непростой и фактически оказывается самостоятельным исследованием, не связанным с функционалом V . Более гибкий подход — использовать два функционала [22].

Теорема 3. Пусть для автономной системы (1) $(f(t, \varphi) \equiv f(\varphi))$ S — некоторое положительно инвариантное подмножество C^n и существуют функционалы $V, W \in C(S, R^+)$, ограниченные на ограниченных подмножествах S и такие, что для некоторых функций $\alpha \in \mathcal{P}$, $\underline{\alpha} \in \mathcal{K}_\infty$ на множестве S выполнены условия: $\underline{\alpha}(|h(\varphi)|) \leq W(\varphi)$, $\dot{V}(\varphi) \leq -\alpha(W(\varphi))$, $\dot{W}(\varphi) \leq 0$. Тогда система (1)–(2) равномерно асимптотически устойчива по выходу.

В той же статье [22] приводится также результат с двумя функционалами об асимптотической устойчивости по выходу (не обязательно равномерной), в котором по сравнению с теоремой 3 добавлены требования $\alpha \in \mathcal{K}$ и $\underline{\alpha}(|h(\varphi)|) \leq V(\varphi) \leq \bar{\alpha}(\|\varphi\|)$ к функционалу V , зато производная $\dot{W}(\varphi)$ не обязана быть неположительной. В работе [23] исследуется частный случай задачи устойчивости по выходу — устойчивость по части переменных, и показано, что для неавтономного уравнения (1) условия теоремы 3 гарантируют эквивалентную устойчивость по части переменных.

Устойчивость по части переменных является наиболее изученным частным случаем устойчивости по выходу с широкими практическими приложениями (задачи небесной механики; управление летательными аппаратами, биологическими процессами; балансировка загрузки компьютерных сетей и др. [24]). Анализ этого свойства с помощью прямого метода Ляпунова начался с середины прошлого века для обыкновенных дифференциальных уравнений [25, 26]. Оставшаяся часть этого раздела посвящена обсуждению известных достаточных условий по части переменных, полученных для систем с запаздыванием с использованием прямого метода Ляпунова.

Для удобства дальнейших формулировок воспользуемся традиционными обозначениями: представим вектор x в виде $x = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p)^\top = (y^\top, z^\top)^\top$, $m > 0$, $p > 0$, $m + p = n$ (здесь предполагается, что $n \geq 2$ и выбор указанного разбиения сделан заранее). В соответствии с введенным разбиением определим $\varphi = ((\varphi^{(y)})^\top, (\varphi^{(z)})^\top)^\top$ для $\varphi \in C^n$, где $\varphi^{(y)} \in C^m$, $\varphi^{(z)} \in C^p$. Норма φ выражается через $\|\varphi^{(y)}\|$ и $\|\varphi^{(z)}\|$ в соответствии с выбранной нормой в R^n ; например, если $|x| = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$, то $\|\varphi\| = \max\{\|\varphi^{(y)}\|, \|\varphi^{(z)}\|\}$, и поскольку размерность вектора однозначно определяется обозначением, нормы для простоты далее обозначаются одинаково, независимо от размерности.

Система (1) при этом представляется в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= Y(t, y_t, z_t), & Y(t, 0, 0) &\equiv 0, \\ \dot{z}(t) &= Z(t, y_t, z_t), & Z(t, 0, 0) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а в системе (2) полагаем $h(\varphi) = \varphi^{(y)}(0)$.

Рассмотрим теперь задачу об исследовании y -устойчивости нулевого решения системы (3), используя стандартные определения различных видов y -устойчивости (см., например, [19]).

При исследовании этой задачи предполагается, что решения системы (3) z -продолжимы, то есть если y -компонента решения ограничена при всех $t \geq t_0$, то решение $x(t; t_0, \varphi_0)$ определено при всех $t \geq t_0$ [24]. В отличие от обычной устойчивости, z -продолжимость не является следствием устойчивости по части переменных. Однако, например, y -устойчивость вместе с ограниченностью z -компоненты всех решений системы влечет z -продолжимость. В частности, если

функционал $Y(t, y_t, z_t)$ для каждого ограниченного множества $S \subset R^+ \times C^y$ отображает множество $S \times C^z$ в ограниченное множество, то z -продолжимость имеет место [19].

Аналоги теоремы 1 для случая асимптотической устойчивости по части переменных представлены в [7, Theorem 6.2.1].

Теорема 4. Пусть для системы (3) существует функционал $V \in C(R^+ \times C^m, R^+)$ и функции $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}, \alpha \in \mathcal{K}$ такие, что в области $R^+ \times C_h^m \times C^p$ выполнено одно из условий:

1. $\underline{\alpha}(|\varphi^{(y)}(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq \bar{\alpha}(\|\varphi^{(y)}\|), \dot{V}(t, \varphi) \leq -\alpha(|\varphi^{(y)}(0)|),$
2. $\underline{\alpha}(|\varphi^{(y)}(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq \bar{\alpha}(\|\varphi\|), \dot{V}(t, \varphi) \leq -\alpha(|\varphi^{(y)}(0)|),$ и функционал $Y(t, \varphi)$ ограничен, то нулевое решение системы (3) глобально равномерно асимптотически y -устойчиво.

Автор статьи [10] опровергает достаточность второго из этих условий, представляя контр-пример.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\text{sat}(z(t)y(t)), \\ \dot{z}(t) &= \text{sat}(y(t)^2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $x(t) = (y(t), z(t)) \in R^2$, а sat обозначает классическую функцию насыщения: $\text{sat}(s) := \min\{|s|, 1\} \cdot \text{sign}(s) \forall s \in R$.

Возьмем функцию Ляпунова в виде $V(x) = 2\sqrt{y^2 + z^2} - z$. Тогда $(\sqrt{2}-1)|x| \leq V(x) \leq 3|x|$.

Теперь предположим, что $|x_0| < 1$. Тогда, пока $|x(t)| \leq 1$, решение системы (4) совпадает с решением системы

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -z(t)y(t), \\ \dot{z}(t) &= y(t)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что функция $W(x) = |x|^2$ является первым интегралом для этой системы, и если $|x_0| < 1$, то $|x(t)| < 1$ для всех $t \geq 0$. Это, в свою очередь, гарантирует, что при $|x_0| < 1$ решения системы (4) совпадают с решениями (5), при этом $\dot{V}(x(t)) = -y(t)^2$.

В то же время можно показать, что равномерная сходимость координаты $y(t)$ для этой системы не имеет места. На рис. 1 представлены приведенные в статье результаты численного моделирования решений системы (4). В момент $t^*(x_0)$ выполняется равенство $z(t^*, x_0) = 0$, при этом y достигает максимума: $y(t^*, x_0) = |x_0|$. Момент $t_1(x_0)$, используемый в доказательстве, выбран так, что $z(t_1, x_0) = z_0/2$. На графике видно, что чем меньше значение y_0 , тем позже $y(t)$ достигает максимума.

Заметим, что в примере 1 первое условие теоремы 4 не выполняется, поскольку предлагаемая функция не допускает верхней оценки, зависящей только от первой координаты.

Интересно, что рассматриваемая система автономна (с правой частью, не зависящей явно от времени) и не содержит запаздывания (обыкновенные дифференциальные уравнения). Таким образом, теорема 4 для системы без запаздывания, в которой вместо функционала используется функция, а вместо функциональных норм — обычные конечномерные нормы, также оказывается неверна.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений в теореме В. В. Румянцева об асимптотической y -устойчивости [25] в оценке производной и верхнем пределе функции Ляпунова используется норма вектора $(x_1, \dots, x_k)^\top$ ($p \leq k \leq n$). В. И. Воротников развивает результат В. В. Румянцева, предлагая в тех же оценках (аргументы функций $\alpha(\cdot)$ и $\bar{\alpha}(\cdot)$) использовать нормы вектора $(y^\top, \mu^\top(x))^\top$, где $\mu(x)$ — некоторая вектор-функция, для которой $\mu(0) = 0$, при этом

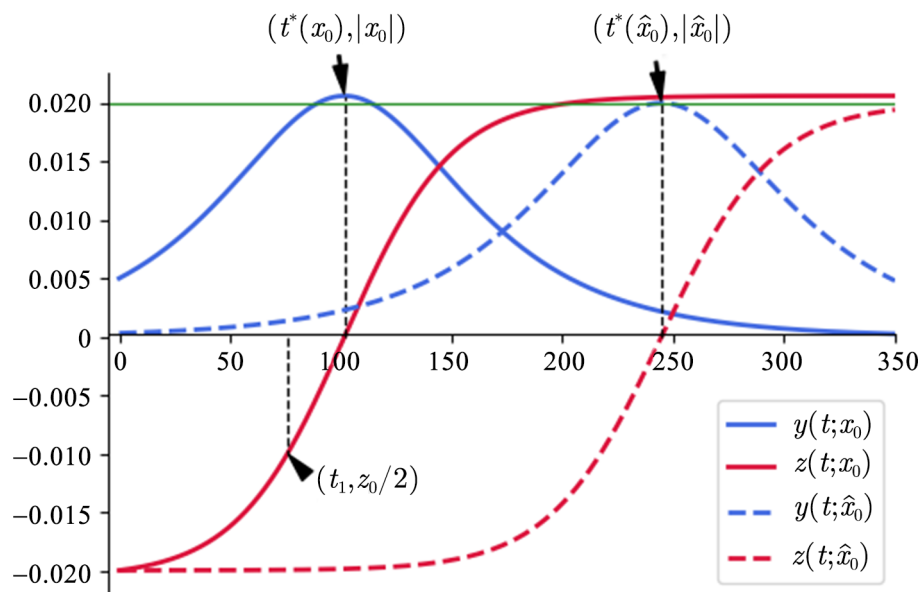


Рис. 1. Результаты численного моделирования решений системы (4) с начальными значениями $x_0 = (5 \times 10^{-3}, -2 \times 10^{-2})$ (сплошная линия) и $\hat{x}_0 = (3 \times 10^{-4}, -2 \times 10^{-2})$ (пунктирная линия) [10] (цвет онлайн)

Fig. 1. Numerically simulated solutions of (4) with initial values $x_0 = (5 \times 10^{-3}, -2 \times 10^{-2})$ (solid lines) and $\hat{x}_0 = (3 \times 10^{-4}, -2 \times 10^{-2})$ (dashed lines) [10] (color online)

утверждается уже равномерная асимптотическая y -устойчивость [7, Corollary 0.4.1.]; аналогичный результат для систем с запаздыванием в терминах функционалов представлен в [7, Corollary 6.2.1]. В примере 1 такие оценки не имеют места — используемая функция Ляпунова ограничивается сверху функцией от нормы всего состояния, а производная отрицательно определена только по y . При этом нулевое решение асимптотически y -устойчиво, но не равномерно.

А. С. Андреев [19] предлагает другие условия асимптотической y -устойчивости для системы (3) на основе функционалов Ляпунова. При этом для случая, когда правая часть системы и функционал Ляпунова зависят от времени, используются некоторые дополнительные условия, позволяющие описать структуру предельного множества решений системы относительно их y -составляющей. В частности, получены достаточные виды различных видов устойчивости по части переменных для системы (3) при следующих предположениях относительно правой части.

Предложение 3. Для каждого числа $q > 0$ существует неубывающая функция $\mu_q \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\mu_q(0) = 0$, такая, что для любой функции $u \in C([a, b], \bar{C}_q^n)$ и любых $t_1, t_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right| \leq \mu_q(|t_2 - t_1|).$$

Это предположение, в частности, выполняется, если функционал f ограничен на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times \bar{C}_q^n$.

Для сравнения условий асимптотической y -устойчивости и равномерной асимптотической y -устойчивости приведем два результата из [19], которые доказаны для неавтономной системы (3) с использованием техники предельных систем и функционалов. Отметим, что в этих утверждениях никакое условие знакоопределенности на производную функционала V не накладывается; сходимость y -координаты решений к нулю обеспечивается за счет дополнительного требования к инвариантному относительно системы множеству. Подобные условия распространены

в теоремах прямого метода, начиная с известной теоремы Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости нулевого решения обыкновенного дифференциального уравнения с правой частью, не зависящей от времени [27]. Непосредственно обобщить подобные условия на неавтономный случай не получается, поскольку положительное предельное множество решений теряет свойство инвариантности. Однако при определенных дополнительных предположениях возможно построение предельных систем; в терминах решений этих вспомогательных систем удастся сформулировать дополнительные требования к некоторому множеству (определяемому функционалом и его производной в силу системы), которые вместе с условием неположительности производной обеспечивают тот или иной вид асимптотической устойчивости [19]. При этом в случае автономной и периодической по времени правой части системы результаты, полученные с использованием предельных систем, можно переформулировать в терминах исходной системы. Во избежание дополнительных построений и определений здесь ограничимся именно следствиями для автономной системы (3), поскольку пример 1 позволяет увидеть разницу условий на функционал Ляпунова и в этом частном случае, при этом для формулировки не требуются дополнительные построения.

Теорема 5. Если для автономной системы (3) существуют функционалы $V, W \in C(C^n, R^+)$ и функция $\underline{\alpha} \in \mathcal{K}$ такие, что на множестве $C_h^m \times C^p$ выполнены условия:

- 1) для некоторого $\Delta > 0$ каждое решение системы (3), начинающееся в области C_Δ^n , ограничено по z ;
- 2) $\underline{\alpha}(|\varphi^{(y)}(0)|) \leq V(\varphi)$;
- 3) $\dot{V}(\varphi) \leq -W(\varphi) \leq 0$;
- 4) для любого $c \geq 0$ множество $\{\varphi : W(\varphi) = 0, V(\varphi) = c\}$ содержит лишь те решения системы (3), для которых $y(t) \equiv 0$,

то нулевое решение асимптотически y -устойчиво.

Теорема 6. Пусть для автономной системы (3) существуют функционалы $V, W \in C(C^n, R^+)$, функции $\underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in \mathcal{K}$ такие, что на множестве $C_h^m \times C^p$ выполнены условия:

- 1) для некоторого $\Delta > 0$ решения системы (3), начинающиеся в области C_Δ^n , равномерно ограничены по z ;
- 2) $\underline{\alpha}(|\varphi^{(y)}(0)|) \leq V(\varphi) \leq \bar{\alpha}(\|\varphi\|)$;
- 3) $\dot{V}(\varphi) \leq -W(\varphi) \leq 0$;
- 4) для любого $c > 0$ множество $\{\varphi : W(\varphi) = 0, V(\varphi) = c > 0\}$ не содержит решений системы (3).

Тогда нулевое решение равномерно асимптотически y -устойчиво.

Очевидно, в примере 1 выполняются условия теоремы 5, но не выполняются условия теоремы 6.

Отметим, что для неавтономной системы также справедлив аналогичный результат об эквивалентности y -устойчивости [19], при этом формулировку в терминах исходной системы допускает также случай почти периодической правой части. Другие достаточные условия эквивалентности y -устойчивости для неавтономных систем получены в [23].

Наряду с функционалами Ляпунова, при исследовании свойств систем с запаздыванием используют и обычные «конечномерные» функции $V(t, x) : R^+ \times R^n, R^+$, традиционно полагая $V(t, 0) = 0$ для всех $t \in R^+$. При этом конструктивные результаты основаны на использовании условий Разумихина — дополнительных ограничений, сужающих множество, на котором оценивается производная функции в силу уравнения [12]. Здесь и далее будем считать

для простоты, что функция V непрерывно дифференцируема; тогда ее производная есть функционал $V' \in C(R^+ \times C^n, R)$, определяемый соотношением

$$V'(t, \varphi) = \frac{\partial V(t, \varphi(0))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t, \varphi(0))}{\partial x_i} f_i(t, \varphi).$$

В настоящее время условия Разумихина формулируются в разной форме; здесь для оценки производной функции Ляпунова мы используем множество, которое обычно применяется для обоснования условий устойчивости:

$$\Omega_t(V) = \{\varphi \in C^n : V(t+s, \varphi(s)) \leq V(t, \varphi(0)), -r \leq s \leq 0\}.$$

Для обоснования же асимптотической устойчивости функция Ляпунова оценивается, как правило, на следующем множестве [13]:

$$\Omega_t(V, \eta) = \{\varphi \in C^n : V(t+s, \varphi(s)) \leq \eta(V(t, \varphi(0))), -r \leq s \leq 0\},$$

где функция $\eta \in \mathcal{K}$ такова, что $\eta(u) > u$ для $u > 0$.

Существующие результаты об устойчивости по части переменных для системы (3) в терминах функций немногочисленны. Они существенно опираются на существующую развитую теорию устойчивости по части переменных для обыкновенных дифференциальных уравнений, с одной стороны, и достаточные условия устойчивости по всем переменным, с другой стороны.

Одно из таких утверждений предложено в книге [7]. Для его формулировки определим область $E_h = \{(t, x) \in R^+ \times R^n : x = (y^\top, z^\top)^\top, |y| < H, |z| < \infty\}$, а также для непрерывной вектор-функции $\mu(x)$ положим $\tilde{E}_h = \{(t, x) \in R^+ \times R^n : |\tilde{x}| = |y| + |\mu(x)| < h \leq H, |z| < \infty\}$ для некоторого $h \in (0, +\infty]$.

Теорема 7. Пусть существуют непрерывная вектор-функция $\mu(x)$, $\mu(0) = 0$, функция Ляпунова $V(t, x) = V^*(t, y, \mu(x))$ и $a, b, c \in \mathcal{K}$ такие, что в области \tilde{E}_h справедливы условия:

- 1) $a(|\tilde{x}|) \leq V(t, x) \leq b(|\tilde{x}|)$;
- 2) $V'(t, x_t) \leq -c(|\tilde{x}|)$ вдоль интегральных кривых системы (3), удовлетворяющих условию $V^*(s, y(s), \mu(x(s))) \leq \eta(V^*(t, y(t), \mu(x(t))))$ для всех $s \in [t-r, t]$, $t \geq T > t_0+r$ и некоторой функции $\eta \in \mathcal{K}$ такой, что $\eta(u) > u$ для $u > 0$.

Тогда нулевое решение системы (3) равномерно асимптотически y -устойчиво.

Если в теореме 7 положить $\eta(u) = u$ и условие $V'(t, x_t) \leq -c(|\tilde{x}(t)|)$ ослабить до оценки $V'(t, x_t) \leq 0$, то получаются условия, достаточные для равномерной y -устойчивости.

Здесь при оценке производной используются те же условия, что и в классических теоремах об устойчивости и асимптотической устойчивости. В то же время, поскольку в задаче об устойчивости по части переменных поведение «неконтролируемых» переменных в принципе не интересует исследователя, ограничения на их поведение, неявно возникающие при оценке производной функции Ляпунова, представляются избыточными и вызывают стремление их ослабить. Действительно, для y -устойчивости в границах заданной окрестности должна оставаться только y -компонента каждого решения, следовательно, пока y не выходит на границу, норма $|y|$ может возрастать. На этой идее были, по-видимому, и основаны результаты об ограниченности по части переменных, представленные в работе [28], автор которой предлагает для оценки производной множество $\Omega_t^y(V) = \{\varphi \in C_H : \max_{-r \leq s \leq 0} V(t+s, \varphi^{(y)}(s), \varphi^{(z)}(0)) \leq V(t, \varphi(0))\}$, при определении которого предыстория по z -компоненте решения не учитывается. Представленный в этой статье результат об ограниченности решений основан на следующем утверждении, которое далее

используется для обоснования невозрастания функционала $\bar{V}(t, y_t, z_t)$ вдоль любого решения системы (3) при условии, что для функции $V(t, x)$ ее производная, в силу системы $V'(t, \varphi)$, неположительна на множестве $\Omega_t^y(V)$.

Теорема 8. Если для функционала $\bar{V}(t, y_t, z_t) = \max_{s \in [-r, 0]} V(t + s, y(t + s), z(t))$ выполняется равенство $\bar{V}(t, y_t, z_t) = V(t + \theta_0(t), y(t + \theta_0(t)), z(t))$, при этом $\theta_0(t) \in [-r, 0]$ и $V(t + s, y(t + s), z(t)) < V(t + \theta_0(t), y(t + \theta_0(t)), z(t))$ для $s \in (\theta_0(t), 0]$, то

$$\frac{d}{dt} \bar{V}(t, y_t, z_t) = 0. \quad (6)$$

Это свойство лежит в основе доказательства теорем В. И. Воротникова о частичной устойчивости «частичного» положения равновесия, частным случаем которой является устойчивость по части переменных [29, 30].

Теорема 9. Пусть для системы (3) существуют функция Ляпунова $V(t, x)$, непрерывно дифференцируемая в E_h , функция $\mu(t, x)$, $\mu(t, 0) = 0$ и $a \in \mathcal{K}$ такие, что:

- 1) $V(t, x) = V^{**}(t, y, \mu(t, x), z)$ и V^{**} непрерывно дифференцируема в области E_h ;
- 2) в области \tilde{E}_h справедливо неравенство $V(t, x) \geq a(|\tilde{x}|)$;
- 3) $V'(t, \varphi) \leq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in \tilde{G}_h = \{\varphi \in C^n : \|\varphi^{(y)}\| + \sup_{s \in [-r, 0]} |\mu(t, \varphi(s))| < h < H, \|\varphi^{(z)}\| < \infty\}$ таких, что $V^{**}(t + s, \varphi^{(y)}(s), \mu(t + s, \varphi(s)), \varphi^{(z)}(0)) \leq V^{**}(t, \varphi^{(y)}(0), \mu(t, \varphi(0)), \varphi^{(z)}(0))$ при $s \in [-r, 0]$.

Тогда нулевое решение системы (3) y -устойчиво.

Теорема 10. Пусть в дополнение к условиям теоремы 9 существуют непрерывно дифференцируемая в E_h функция $w(x)$ и функции $b, c, \eta \in \mathcal{K}$, $\eta(u) > u$ для $u > 0$ такие, что:

- 1) в области \tilde{E}_h справедливо неравенство $V(t, x) \leq b(|y| + |w(x)|)$, $V(t, x) \leq \tilde{V}(x)$, $\tilde{V}(0) = 0$;
- 2) $V'(t, \varphi) \leq -c(|\varphi^{(y)}(0)| + |w(\varphi(0))|)$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in \tilde{G}_h$ таких, что $V^{**}(t + s, \varphi^{(y)}(s), \mu(t + s, \varphi(s)), \varphi^{(z)}(0)) \leq \eta(V^{**}(t, \varphi^{(y)}(0), \mu(t, \varphi(0)), \varphi^{(z)}(0)))$ при $s \in [-r, 0]$.

Тогда нулевое решение системы (3) равномерно асимптотически y -устойчиво.

Заметим, что в случае $V^{**}(t, y, \mu(t, x), z) \equiv V^*(t, y, \mu(x))$ теоремы 9 и 10 совпадают с утверждениями из [7], а при $V^{**}(t, y, \mu(t, x), z) \equiv \tilde{V}^{**}(t, y, z)$ множества оценки производной в этих теоремах совпадают соответственно с $\Omega_t^y(\tilde{V}^{**})$ и $\Omega_t^y(V, \eta) = \{\varphi \in C_H : \max_{-r \leq s \leq 0} V(t + s, \varphi^{(y)}(s), \varphi^{(z)}(0)) \leq \eta(V(t, \varphi(0)))\}$.

Однако подобное ослабление условий Разумихина, к сожалению, в общем случае не обеспечивает желаемых свойств решений; в [11] приводятся примеры, показывающие, что выводы теорем 8, 9, 10 в общем случае неверны; в частности, нарушение равенства (6) в теореме 8 демонстрирует следующий простой пример.

Пример 2. Рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -5(y^2(t) - y^2(t - \pi/2))y(t) + 0.1z(t), \\ \dot{z}(t) &= -0.1y(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Производная функции $V(x, y) = y^2 + z^2$, в силу системы (7), неположительна на множестве $\Omega_t^y(V)$, и в силу теоремы 8 любое решение системы должно удовлетворять условию: $y^2(t) + z^2(t) = V(y(t), z(t)) \leq \max_{-r \leq s \leq 0} V(y(t + s), z(t)) \leq \max_{-r \leq s \leq 0} V(y(s), z(0)) = \max_{-r \leq s \leq 0} y^2(s) + z^2(0)$. Однако легко построить траектории, для которых такое ограничение нарушается [11].

Подобные примеры свидетельствуют о необходимости уточнения условий y -устойчивости, использующих множества $\Omega_t^y(V)$ и $\Omega_t^y(V, \eta)$.

Наряду с поиском возможностей сужения множеств, на которых требуется оценить производную функции Ляпунова, можно использовать расширенный класс вспомогательных функций. Например, при анализе y -устойчивости вместо знакоопределенных по y использовать знакопостоянные (в частности, знакоопределенные по части переменных y ; при этом, конечно, предполагается, что $m > 1$). Результаты такого рода представлены в работах А. С. Андреева и С. В. Павликова (см. монографии [31, 32]), где при дополнительных предположениях относительно правой части уравнения (3) и ограничениях на предельные функции (функционалы) для рассматриваемой функции (функционала) Ляпунова используется техника предельных уравнений.

Далее мы покажем, что можно обосновать достаточные условия устойчивости по выходу (и, в частности, y -устойчивости) при более слабых по сравнению с традиционными требованиями к вспомогательной функции и без использования предельных функций и функционалов; при этом результаты получаются в более общих предположениях относительно правой части уравнения (1).

3. Знакопостоянные функции в исследовании задачи устойчивости по выходу: новые результаты

В этом разделе мы изучим задачу об устойчивости по выходу для системы (1)–(2), используя функции Ляпунова–Разумихина, которые неотрицательны в области определения, однако не обязательно являются знакоопределенными по отношению к выходу системы.

Система (1)–(2) будет рассматриваться в более общих предположениях по сравнению с используемыми выше, а именно: будем далее считать, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям типа Каратеодори [33].

Предложение 4. *Функционал $f(t, \varphi)$ в области $R^+ \times C^n$ является непрерывным по φ при каждом фиксированном t , измеримым по t при фиксированном φ , и для каждого компакта $K \subset C^n$ существует локально интегрируемая по Лебегу функция $M_K(t)$ такая, что для всех $\varphi \in K$ и $t \in R^+$ справедлива оценка*

$$|f(t, \varphi)| \leq M_K(t), \quad (8)$$

где функция $M_K(t)$ удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$ такое, что если $t \in R^+$ и E — измеримое подмножество интервала $[t, t + 1]$, мера которого не больше δ , то

$$\int_E M_K(\tau) d\tau \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Предложение 5. *Для каждого компакта $K \subset C^n$ существует локально интегрируемая по Лебегу функция $L_K(t)$ такая, что для всех $\varphi, \psi \in K$ и $t \in R^+$ справедлива оценка*

$$|f(t, \varphi) - f(t, \psi)| \leq L_K(t) \|\varphi - \psi\|, \quad (10)$$

причем $L_K(t)$ удовлетворяет условию: существует $N(K) > 0$ и такое, что если $t \in R^+$, то

$$\int_t^{t+1} L_K(\tau) d\tau \leq N(K). \quad (11)$$

Введем следующее определение.

Определение 4. Система (1)–(2) называется равномерно притягивающей по выходу относительно множества $\Lambda \subset C^n$, если при некотором $\Delta > 0$ для любых $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \Delta)$ существует $T = T(\varepsilon, \delta) > 0$ такое, что для любой начальной точки $(t_0, \varphi_0) \in R^+ \times [C_\delta^n \cap \Lambda]$ решение $x(t; t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) удовлетворяет неравенству $|y(t; t_0, \varphi_0)| = |h(x_t(t_0, \varphi_0))| < \varepsilon$, как только $t > t_0 + T$. Если число Δ может быть выбрано произвольно, то система (1)–(2) называется глобально равномерно притягивающей по выходу относительно множества $\Lambda \subset C^n$.

Для каждого действительного числа c и непрерывной функции $V(t, x)$ определим также множество $V_{\max}^{-1}(\infty, c) = \{\varphi \in C^n \mid \exists \varphi_n \rightarrow \varphi, t_n \rightarrow +\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{-r \leq s \leq 0} V(t_n + s, \varphi_n(s)) = c\}$.

Наконец, назовем систему (1)–(2) ограниченной [равномерно ограниченной] от выхода к состоянию (см., например, [34]), если для любых $t_0 \in R^+$, $a > 0$ и $b > 0$ существует число $d(t_0, a, b) > 0$ [$d(a, b) > 0$] такое, что из условий $\varphi_0 \in \bar{C}_a^n$ и $h(x_t(t_0, \varphi_0)) < b$ для всех $t \geq t_0$ следует $\|x_t(t_0, \varphi_0)\| < d$ для всех $t \geq t_0$. Заметим, что в случае $h(\varphi) = \varphi^{(y)}(0)$ условие ограниченности [равномерной ограниченности] от выхода к состоянию выполняется для системы (3), если выполнено условие 1 теоремы 5 [теоремы 6].

В доказательствах последующих результатов используем локальную нумерацию формул ((t1), (t2) и т. д.) для ссылок на них внутри отдельного доказательства.

Теорема 11. Предположим, что система (1)–(2) ограничена от выхода к состоянию и существует функция Ляпунова V такая, что:

- 1) $V'(t, \varphi) \leq 0$ для всех $t \in R^+$ и $\varphi \in \Omega_t(V)$;
- 2) система (1)–(2) является глобально равномерно притягивающей по выходу относительно множества $V_{\max}^{-1}(\infty, 0)$.

Тогда система (1)–(2) устойчива по выходу.

Доказательство. Предположим, что в условиях теоремы система (1)–(2) неустойчива по выходу. Тогда при некотором $\varepsilon_0 > 0$ найдется момент $t_0 > 0$ и последовательность $\{\varphi_n \in C^n : \|\varphi_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$ такие, что для решений $x(t; t_0, \varphi_n)$ уравнения (1) имеем

$$|y(T_n + t_0; t_0, \varphi_n)| = \varepsilon_0, |y(t + t_0; t_0, \varphi_n)| < \varepsilon_0 \text{ для } t \in [0, T_n) \quad (t1)$$

при некотором $T_n > 0$. Из единственности нулевого решения и свойств функционала h следует, что $T_n \rightarrow +\infty$.

Из условия $V(t, 0) \equiv 0$ и непрерывности функции V следует, что существуют числа $\Delta_n \rightarrow 0$ такие, что для каждого n справедлива оценка $\max_{-r \leq s \leq 0} V(t_0 + s, \varphi_n(s)) \leq \Delta_n$. В силу условия 1 теоремы получаем, что

$$\max_{-r \leq s \leq 0} V(t + s, x(t + s; t_0, \varphi_n)) \leq \Delta_n \text{ при всех } t \geq t_0. \quad (t2)$$

Определим число $d = d(t_0, \Delta_1, \varepsilon_0)$ из определения ограниченности системы от выхода к состоянию.

Из условия 2 теоремы следует, что существует $T > 0$ такое, что для любых $t_0 \in R^+$, $\varphi_0 \in V_{\max}^{-1}(\infty, 0) \cap \bar{C}_d^n$ и $t \geq t_0 + T$ справедливо неравенство

$$|y(t; t_0, \varphi_0)| < \varepsilon_0/2. \quad (t3)$$

Используя условия (10), (11), а также липшицевость функционала h , получаем, что для любого компакта $K \subset \bar{C}_d^n$ имеем

$$\begin{aligned} \exists \eta > 0 : \forall \varphi, \psi \in K, \forall t_0 \in R^+, \forall t \in [t_0 + r, t_0 + T + r], \\ \|\varphi - \psi\| < \eta \implies |y(t; t_0, \varphi) - y(t; t_0, \psi)| < \varepsilon_0/2. \end{aligned} \quad (t4)$$

Так как $\|\varphi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\|\varphi_n\| < \xi$ для достаточно больших $n \geq n_0$, и из условий (t1), (t4) следует, что $T + r < T_n$ для всех $n \geq n_0$ и $\|y_{T_n - T + t_0}(t_0, \varphi_n)\| < \varepsilon_0$ для $n \geq n_0$. Рассмотрим последовательность $\{\psi_n = x_{T_n - T + t_0}(t_n, \varphi_n)\}$. Поскольку ψ_n равномерно ограничены по норме и равномерно непрерывны в силу условий (8), (9), то (возможно, для некоторой подпоследовательности) $x_{T_n - T + t_0}(t_0, \varphi_n) \rightarrow \psi \in C^n$. По построению $\psi \in V_{\max}^{-1}(\infty, 0) \cap \bar{C}_d^n$, поэтому из (t3) следует

$$\forall t_0 \in R^+ \quad |y(t_0 + T; t_0, \psi)| < \varepsilon_0/2. \quad (t5)$$

Пусть $K \subset \bar{C}_d^n$ — компакт, содержащий последовательность $\{x_{T_n - T + t_0}(t_0, \varphi_n)\}$ и $\eta > 0$ — число из условия (t4). В силу сходимости $x_{T_n - T + t_0}(t_0, \varphi_n) \rightarrow \psi$ получаем $\|x_{T_n - T + t_0}(t_0, \varphi_n) - \psi\| < \eta$ для достаточно больших N , и тогда из (t4) следует $|y(T_N + t_0; T_N - T + t_0, \psi) - y(T_N + t_0; T_N - T + t_0, x_{T_n - T + t_0}(t_0, \varphi_n))| < \varepsilon_0/2$. Последнее неравенство эквивалентно $|y(T_N + t_0; T_N - T + t_0, \psi) - y(T_N + t_0; t_0, \varphi_N)| < \varepsilon_0/2$. Отсюда, учитывая (t5) и используя неравенство треугольника, получаем $|y(T_N + t_0; t_0, \varphi_N)| < \varepsilon_0$, что противоречит предположению (t1). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

Теорема 12. *Предположим, что дополнительно к условиям теоремы 11 система (1)–(2) равномерно ограничена от выхода к состоянию и $V(t, x) \leq b(|x|)$ для некоторой функции $b \in \mathcal{K}$. Тогда система (1)–(2) равномерно устойчива по выходу.*

Доказательство. Результат доказывается аналогично предыдущему.

Предположим противное, то есть система не является равномерно устойчивой по выходу. Тогда при некотором $\varepsilon_0 > 0$ найдутся последовательности $\{t_n \geq 0\}$, $\{\varphi_n \in C^n : \|\varphi_n\| \rightarrow 0\}$ и $\{T_n > 0\}$ такие, что для решений $x(t; t_n, \varphi_n)$ уравнения (1) выполняются условия

$$|y(t_n + T_n; t_n, \varphi_n)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n. \quad (t1)$$

Из единственности нулевого решения следует, что $t_n + T_n \rightarrow +\infty$.

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 11, выберем число $T > 0$ и установим сходимость последовательности $\{\psi_n = x_{t_n + T_n - T}(t_n, \varphi_n)\}$ (или некоторой ее подпоследовательности) к функции $\psi \in \bar{C}_d^n$ для некоторого $d > 0$. В силу предположений относительно функции V справедливы неравенства $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{-r \leq s \leq 0} V(t_n + T_n - T + s, x(t_n + T_n - T + s; t_n, \varphi_n)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{-r \leq s \leq 0} V(t_n + s, \varphi_n(s)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b(\|\varphi_n\|) = 0$. Следовательно, $\psi \in V_{\max}^{-1}(\infty, 0)$. Дальнейшие выкладки (см. доказательство теоремы 11) приводят к неравенству $|y(t_n + T_n; t_n, \varphi_n)| < \varepsilon_0$ для достаточно большого N . Полученное противоречие предположению (t1) завершает доказательство теоремы. \square

Перейдем к доказательству результата об асимптотической устойчивости. Помимо множества $V_{\max}^{-1}(\infty, c)$, мы будем использовать также множество

$$U^{-1}(\infty, c) = \{\varphi \in C^n \mid \exists \varphi_n \rightarrow \varphi, t_n \rightarrow +\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} U(t_n, \varphi_n) = c\},$$

определенное для заданного функционала $U : R^+ \times C^n \rightarrow R$ и числа $c \in R$.

Теорема 13. *Предположим, что:*

- 1) *выполняются условия теоремы 12;*
- 2) *$|V'(t, \varphi)| \geq U(t, \varphi) \geq 0$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times C^n$, где $U(t, \varphi)$ — функционал, равномерно непрерывный на каждом множестве $R^+ \times K$, $K \subset C^n$ — компакт;*
- 3) *множество $U^{-1}(\infty, 0) \cap V_{\max}^{-1}(\infty, c)$ пусто при всех $c > 0$.*

Тогда система (1)–(2) равномерно асимптотически устойчива по выходу.

Доказательство. Зафиксируем число $\delta > 0$. Из теоремы 12 следует, что система (1)–(2) равномерно устойчива по выходу. Поэтому можно выбрать $\gamma > 0$ такое, что $|y(t; t_0, \varphi)| < \delta$ для всех $t_0 \in R^+$ и $\varphi \in C_\gamma^n$ и $t \geq t_0$. Положим $\Delta = d(\gamma, \delta)$ согласно свойству равномерной ограниченности от выхода к состоянию. Докажем, что C_γ^n содержится в области равномерного притяжения по выходу.

Пусть $x(t; t_0, \varphi)$ – произвольное решение, начинающееся в точке $\varphi \in C_\gamma^n$. Как и в теореме 11, получаем, что множество $\{x_t(t_0, \varphi) : t \geq t_0\}$ предкомпактно в пространстве C^n . Далее, в силу условия 1 теоремы, $\max_{-r \leq s \leq 0} V(t + s, x(t + s; t_0, \varphi))$ не возрастает и ограничен снизу нулем, поэтому существует

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \max_{-r \leq s \leq 0} V(t + s, x(t + s; t_0, \varphi)) = c \geq 0. \quad (t1)$$

Условия 2 и 3 теоремы означают, что $c = 0$ [31, теорема V.1.1]. Покажем, что сходимость в (t1) равномерна по $(t_0, \varphi) \in R^+ \times C_\gamma^n$. Действительно, предположив противное, получим, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и произвольной последовательности $T_k \rightarrow +\infty$ существует последовательность $(t_{0k}, \varphi_k) \in R^+ \times C_\gamma^n$, для которой $\max_{-r \leq s \leq 0} V(t_{0k} + T_k + s, x(t_{0k} + T_k + s, t_{0k}, \varphi_k)) \geq \varepsilon_0$, и поскольку функция $V(t, x(t))$ не возрастает вдоль решений уравнения, то

$$\max_{-r \leq s \leq 0} V(t + s, x(t + s; t_{0k}, \varphi_k)) \geq \varepsilon_0 \text{ для всех } t \in [t_{0k}, t_{0k} + T_k]. \quad (t2)$$

В силу (t2) имеем $\max_{-r \leq s \leq 0} V(t_{0k} + \frac{T_k}{2} + t + s, x(t_{0k} + \frac{T_k}{2} + t + s; t_{0k}, \varphi_k)) = \varepsilon_k(t) \geq \varepsilon_0$ для $t \in [-\frac{T_k}{2}, \frac{T_k}{2}]$. Обозначим $t_k = t_{0k} + \frac{T_k}{2}$ и рассмотрим последовательность $u_t^k = x_{t_k+t}(t_k, \varphi_k)$, которая при всех $t \in [r - T_k/2, T_k/2]$ содержится в компакте $K \subset \bar{C}_\Delta^n$, и поэтому (возможно, для некоторой подпоследовательности) $u_t^k \rightarrow u_t$ равномерно по $t \in [-T, T]$ для любого положительного T .

Рассмотрим последовательность функций $v^k(t) = V(t_k + t, u^k(t))$. По построению функции $v^k(t)$ для всех k удовлетворяют неравенствам $\varepsilon_0 \leq \|v_t^k\| \leq b(\varepsilon)$ при $t \in [-T_k/2, T_k/2]$. Предположим, что для некоторого целого $N > 0$ и некоторого $R > 1$ при всех $k \geq N$ и $t \in [0, T_k/2]$ справедливы неравенства $Rv^k(t) < \|v_t^k\|$. Тогда $v^k(r) < \frac{1}{R}\|v_r^k\| = \frac{v^k(t')}{R} < \frac{1}{R^2}\|v_{t'}^k\| \leq \frac{1}{R^2} \max_{s \in [-r, 0]} v^k(t' + s) \leq \frac{1}{R^2}\|v_0^k\|$, где $t' \in [0, r]$. Применяя аналогичные рассуждения к значениям $|v^k(2r)|, |v^k(3r)|, \dots$, получим неравенства $0 < \varepsilon_0 \leq v^k(nr) < \frac{\|v_0^k\|}{R^{n+1}} \leq \frac{b(\varepsilon)}{R^{n+1}}$, справедливые для всех натуральных $n \leq n_0(k) = \lfloor \frac{T_k}{2r} \rfloor$. Полагая $n = n_0(k)$ и переходя к пределу при $k \rightarrow +\infty$, получаем противоречие с соотношением (t2).

Следовательно, для любой последовательности $R_k > 1$ существует подпоследовательность $\{k_n\}$ (во избежание громоздкости обозначений положим ее совпадающей с самой последовательностью) такая, что для некоторого $t_k^* \in [0, T_k/2]$ выполняется $R_k v^k(t_k^*) \geq \|v_{t_k^*}^k\|$. Зафиксируем последовательность $R_k > 1, R_k \rightarrow 1$, и перейдем в последнем неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, выбирая, если необходимо, сходящуюся подпоследовательность: $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k v^k(t_k^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} v^k(t_k^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_{t_k^*}^k\|$. Очевидно, в этом случае $u_{t_k^*}^k \rightarrow \varphi^* \in V_{\max}^{-1}(\infty, c)$, при этом $c \geq \varepsilon_0 > 0$.

Найдем теперь $\lim_{k \rightarrow \infty} U(t_k + t_k^*, u_{t_k^*}^k)$ (в силу условия 2 теоремы эта последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, которую для простоты обозначений снова будем считать совпадающей с самой последовательностью). Если этот предел равен нулю, то получена функция $\varphi^* \in U^{-1}(\infty, 0) \cap V_{\max}^{-1}(\infty, c)$, при этом $c \geq \varepsilon_0 > 0$.

Предположим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} U(t_k + t_k^*, u_{t_k^*}^k) = 2\delta_1 > 0$. Тогда для достаточно больших k и некоторого $\delta_2 > 0$ при всех $t \in [-\delta_2, \delta_2]$ выполняется одно из следующих неравенств:

$\frac{d}{dt}v^k(t_k^*+t) < -\delta_1$, $\frac{d}{dt}v^k(t_k^*+t) > \delta_1$. Из первого неравенства следует $v^k(t_k^*-\delta_2) > v^k(t_k^*)+\delta_1\delta_2 > R_kv^k(t_k^*) \geq \|v_{t_k^*}^k\|$, что невозможно. Из второго неравенства получаем $v^k(t_k^*+\delta_2) > v^k(t_k^*)+\delta_1\delta_2 > R_kv^k(t_k^*) \geq \|v_{t_k^*}^k\|$, откуда $v^k(t_k^*+\delta_2) = \|v_{t_k^*+\delta_2}^k\|$. По свойству производной функции Ляпунова в силу уравнения получаем $V'(t_k+t_k^*+\delta_2, u_{t_k^*+\delta_2}^k) = 0$, и тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{t_k^*+\delta_2}^k = \varphi^* \in U^{-1}(\infty, 0) \cap V_{\max}^{-1}(\infty, c)$, при этом $c \geq \varepsilon_0 > 0$.

Итак, в любом случае получается противоречие с условием 3 теоремы, которое завершает доказательство равномерной по $(t_0, \varphi) \in R^+ \times C_\gamma^n$ сходимости к нулю в (t_1) .

Предположим теперь, что C_γ^n не содержится в области равномерного притяжения по выходу. Тогда для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ существует последовательность $\{(\tilde{t}_{0k}, \varphi_{0k})\} \in R^+ \times C_\gamma^n$ такая, что для решений $x = x(t; \tilde{t}_{0k}, \varphi_{0k})$ выполняется равенство

$$|y(\tilde{t}_{0k} + T_k; \tilde{t}_{0k}, \varphi_{0k})| \geq \varepsilon_1. \quad (t3)$$

Из свойства равномерного притяжения по выходу относительно множества $V_{\max}^{-1}(\infty, 0)$ следует, что

$$\exists T_1 = T_1(\varepsilon_1) > 0 : \forall t_0 \in R^+, \forall \varphi \in V_{\max}^{-1}(\infty, 0) \cap \bar{C}_\Delta^n \forall t \geq t_0 + T_1 |y(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon/2. \quad (t4)$$

Из условий (10), (11), а также липшицевости функционала h следует, что для любого компакта $K \subset \bar{C}_\Delta^n$ найдется $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что выполняется условие

$$\forall t_0 \in R^+, \forall \varphi, \psi \in K, \|\varphi - \psi\| < \delta_1 \implies |y(t_0 + T_1; t_0, \varphi) - y(t_0 + T_1; t_0, \psi)| < \varepsilon_1/2. \quad (t5)$$

Рассмотрим последовательность $\psi_k = x_{\tilde{t}_k}(\tilde{t}_{0k}, \varphi_{0k})$, где $\tilde{t}_k = \tilde{t}_{0k} + T_k - T_1$. Поскольку для достаточно больших k выполняется неравенство $\tilde{t}_{0k} + T_k - T_1 > \tilde{t}_{0k} + r$, то, рассуждая как в теореме 11, без ограничения общности можем считать, что $\psi_k \rightarrow \psi \in \bar{C}_\Delta^n$ при $k \rightarrow \infty$. В силу равномерной по $(t_0, \varphi_0) \in R^+ \times C_\gamma$ сходимости $V(t, x(t; t_0, \varphi_0)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ получаем $\psi \in V_{\max}^{-1}(\infty, 0) \cap \bar{C}_\Delta^n$.

Из (t5) теперь следует, что для достаточно больших k справедлива оценка $|y(\tilde{t}_{0k} + T_k; \tilde{t}_{0k}, \varphi_{0k}) - y(\tilde{t}_k + T_1; \tilde{t}_k, \psi)| = |y(\tilde{t}_k + T_1; \tilde{t}_k, \psi_k) - y(\tilde{t}_k + T_1; \tilde{t}_k, \psi)| < \varepsilon_1/2$, а поскольку $|y(\tilde{t}_k + T_1; \tilde{t}_k, \psi)| < \varepsilon/2$ в силу (t4), то $|y(\tilde{t}_{0k} + T_k; \tilde{t}_{0k}, \varphi_{0k})| < \varepsilon_1$. Полученное противоречие с равенством (t3) завершает доказательство теоремы. \square

Используя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 13, можно также доказать следующее утверждение.

Теорема 14. *Предположим, что выполняются условия теоремы 11 и условие 2 теоремы 13. Тогда:*

1. Если для любого $c \geq 0$ множество $U^{-1}(\infty, 0) \cap V_{\max}^{-1}(\infty, c)$ содержит лишь те решения системы (3), для которых $y(t) \equiv 0$, то система (1)–(2) асимптотически устойчива по выходу.
2. Если для некоторой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$ множество $S(\{t_n\}) = \{\varphi \in C^n \mid \exists \varphi_n \rightarrow \varphi : \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{-r \leq s \leq 0} V(t_n + s, \varphi_n(s)) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(t_n, \varphi_n(0)) = c, \lim_{n \rightarrow \infty} U(t_n, \varphi_n) = 0\}$ пусто при всех $c > 0$, то система (1)–(2) квазиасимптотически устойчива по выходу.

4. Обсуждение полученных результатов

Если для функции Ляпунова на множестве $\{(t, \varphi) \in R^+ \times C^n : \varphi \in \Omega_t(V)\}$ справедлива оценка $V'(t, \varphi) \leq -c(V(t, \varphi(0)))$ для некоторой функции $c \in \mathcal{K}$, то условие 3 теоремы 13 выполняется (аналогичная оценка используется в теореме 2 для функционала, а также

в [9, Theorem 35] о достаточных условиях устойчивости от входа к выходу в терминах функций Ляпунова–Разумихина).

Если h эквивалентно конечномерному отображению h_0 (см. определение 3) и для функции Ляпунова справедливы оценки $a(|h_0(x)|) \leq V(t, x)$ и $V'(t, \varphi) \leq -c(|h_0(\varphi(0))|)$ для некоторых функций $a, c \in \mathcal{K}$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и $\varphi \in \Omega_t(V)$, то условие 3 в теореме 13 выполняется; сравни с условиями теоремы 7. Если при этом из условия $y(t_0) = 0$ следует $y(t) = 0$ для всех $t \geq t_0$, то, очевидно, имеет место свойство равномерного притяжения по выходу относительно множества $V_{\max}^{-1}(\infty, 0)$.

Таким образом, доказанные результаты развивают и дополняют теоремы из [7] для случая $h(\varphi) = \varphi^{(y)}(0)$. Результаты, аналогичные теоремам 11, 12, 13, в случае $h(\varphi) = \varphi(0)$ представлены в [35]. Для иллюстрации преимуществ полученных теоретических результатов ниже приводятся модельные примеры.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -z_1^2(t-2)y_1(t) - y_1(t-0.5) + f_1(t, x_t), \\ \dot{y}_2(t) &= -y_2(t-0.5), \\ \dot{z}(t) &= f_2(t, z_t), \\ h(x_t) &= (y_1(t), y_2(t))^\top. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $x = (y_1, y_2, z_1, z_2)^\top$, $z = (z_1, z_2)^\top$, $x_t \in C^4 = C([-r, 0], \mathbb{R}^4)$, где $r \geq 2$ — максимальная величина запаздывания в системе; функционалы f_1 и f_2 удовлетворяют Предположениям 4, 5, кроме того, $f_1(t, \varphi_1, 0, \varphi_3, \varphi_4) = 0$, а функционал f_2 обеспечивает равномерную ограниченность по z решений системы (12), начинающихся в области \bar{C}_Δ^4 для некоторого $\Delta > 0$.

Рассмотрим функцию $V(x) = y_2^2$. Применяя стандартное преобразование второго уравнения системы с использованием равенства $y_2(t-0.5) = y_2(t) - \int_{-0.5}^0 \dot{y}(t+s) ds = y_2(t) - \int_{-0.5}^0 (-y_2(t+s-0.5)) ds$, получим $V'(t, \varphi) \leq -\varphi_2^2(0)$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и $\varphi \in \Omega_t(V)$, и условие 3 теоремы 13, очевидно, выполняется. Аналогично на основе первого уравнения системы устанавливается свойство глобального равномерного притяжения по выходу относительно множества $V_{\max}^{-1}(\infty, 0) = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^\top : \varphi_2 = 0\}$. Следовательно, в силу теоремы 13 система (12) равномерно асимптотически устойчива по выходу.

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования для системы (12) с функционалами

$$\begin{aligned} f_1(t, x_t) &= 10 \sin ty_1(t-1)y_2^2(t-1)z_1(t-2)z_2(t-3 \sin^2 t), \\ f_2(t, z_t) &= (-z_2(t-\pi/2), -0.5z_1(t) - z_2(t-\pi/2) \int_{t-1}^t (s-t)z_1(s) ds)^\top \end{aligned} \tag{13}$$

(принимая во внимание устойчивость нулевого решения уравнения $\dot{z}_2(t) = -z_2(t-\pi/2)$ и анализируя уравнение для $z_1(t)$, получаем, что для выбранного функционала f_2 условие равномерной ограниченности по z гарантированно выполняется при условии $\|(z_2)_0\| \leq 1$).

Отметим, что построить в приведенном примере функцию или функционал, знакоопределенные по $h(x_t)$, возможно только при дополнительных ограничениях на f_1 , так что теоремы 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 неприменимы.

Предположения 4, 5 позволяют также построить предельные уравнения для (1) [33] и использовать их свойства для получения достаточных условий устойчивости по выходу; для случая обычной устойчивости по Ляпунову подобные результаты получены в [36] (отметим, что предположения относительно правой части уравнения (1) в [35, 36] более ограничительны по сравнению с используемыми в данной работе). Использование предельных уравнений в формулировках,

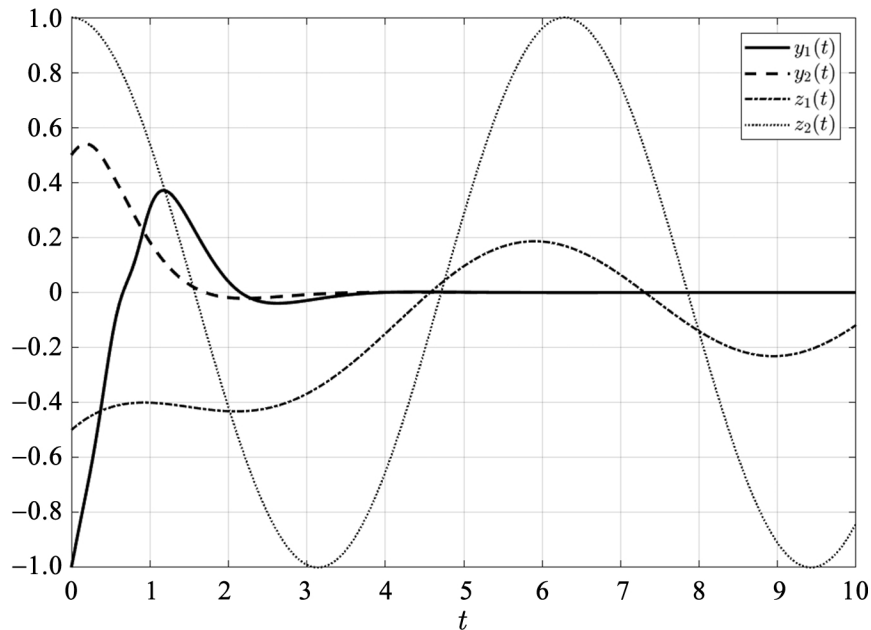


Рис. 2. Результаты численного моделирования решения системы (12), (13) с начальными условиями $y_1(s) = \sin(s) - 1$, $y_2(s) = 0.5 \cos(5s)$, $z_1(s) = 0.5(\sin(2s) - 1)$, $z_2(s) = \cos(s)$ ($s \in [-2, 0]$, $t_0 = 0$)

Fig. 2. A numerically simulated solution of (12), (13) with initial values $y_1(s) = \sin(s) - 1$, $y_2(s) = 0.5 \cos(5s)$, $z_1(s) = 0.5(\sin(2s) - 1)$, $z_2(s) = \cos(s)$ ($s \in [-2, 0]$, $t_0 = 0$)

с одной стороны, требует дополнительных вычислений, с другой стороны, позволяет уточнить требование к множеству $U^{-1}(\infty, 0) \cap V_{\max}^{-1}(\infty, c)$.

Продемонстрируем эту возможность для случая автономной системы, когда предельные уравнения совпадают с исходным и можно сформулировать утверждения без дополнительных конструкций.

Теорема 15. *Предположим, что система (1)–(2) ограничена от выхода к состоянию, $f(t, \varphi) \equiv f(\varphi)$, и существует функция Ляпунова $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что:*

- 1) $V'(\varphi) \leq 0$ для всех $\varphi \in \Omega(V)$;
- 2) система (1)–(2) является глобально равномерно притягивающей по выходу относительно множества $\{\varphi \in C^n : V(\varphi(s)) \equiv 0, s \in [-r, 0]\}$.

Тогда система (1)–(2) равномерно устойчива по выходу.

Если, кроме того, множество $\{\varphi \in C^n : V'(\varphi) = 0\}$ содержит только решения уравнения (1), для которых $y(t) \equiv 0$, то система (1)–(2) асимптотически устойчива по выходу.

Если при этом множество $\{\varphi \in C^n : \max_{-r \leq s \leq 0} V(\varphi(s)) = V(\varphi(0)) > 0, V'(\varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения (1), то система (1)–(2) равномерно асимптотически устойчива по выходу.

Аналогичный результат справедлив для периодической системы.

Пример 4. *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a(x_1(t) - 3x_2^2(t)) + f_1(x_t)x_2^2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -a(x_1(t)x_2(t) + x_3^3(t)) - f_1(x_t)x_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = f_2(x_t) - bx_3^3(t), \\ h(x_t) = (x_1(t), x_3(t))^\top, \end{cases} \quad (14)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, правая часть системы удовлетворяет Предположениям 4, 5, $a, b > 0$, $f_2(\varphi) = 0$ при $\varphi = (0, 0, \varphi_3)$. В качестве функции Ляпунова возьмем знакопостоянную функцию $V(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$. Ее производная, в силу системы (14), равна $V'(t, \varphi) = -a(\varphi_1(0) - \varphi_2^2(0))^2$.

Множество $\{\varphi \in C^n : V'(\varphi) = 0\}$ есть $\{\varphi : \varphi_1(0) = \varphi_2^2(0)\}$. Подставляя $x_1(t) = x_2^2(t)$ в систему (14), получаем $\dot{x}_2(t) = -x_2(t)\dot{x}_1(t)$. С другой стороны, $\dot{x}_1(t) = \frac{d}{dt}(x_2^2(t)) = 2x_2(t)\dot{x}_2(t)$. Поэтому $\dot{x}_2(t) = \dot{x}_1(t) = 0$. Тогда для $x_1(t) = x_2^2(t)$ из первого уравнения (14) получаем $x_2^2(t) = 0 = x_1(t)$. Таким образом, $\{\varphi \in C^n : \max_{-r \leq s \leq 0} V(\varphi(s)) = V(\varphi(0)) > 0, V'(\varphi) = 0\}$ не содержит решений системы (14). На множестве $\{\varphi \in C^n : V(\varphi(s)) \equiv 0, s \in [-r, 0]\}$ система (14) принимает вид
$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t) = 0, \\ \dot{x}_3(t) = -bx_3^3(t). \end{cases}$$
 Таким образом, выполнены все условия теоремы 15 и система (14) равномерно асимптотически устойчива по выходу.

Заметим, что, как и в примере 3, без дополнительных предположений о свойствах функционала f_2 невозможно построить знакоопределенные по $h(x_t)$ функцию или функционал, так что результаты раздела 2 не позволяют сделать вывод об (асимптотической) устойчивости по выходу; кроме того, в данном примере не выполняется условие 3 теоремы 13.

Список литературы

1. Sontag E. D., Wang Y. Notions of input to output stability // Systems and Control Letters. 1999. Vol. 38, no. 4–5. P. 235–248. DOI: 10.1016/S0167-6911(99)00070-5.
2. Kankanamalage H. G., Lin Y., Wang Y. Remarks on different notions on output stability for nonlinear delay systems // arXiv:2208.14415v1. arXiv Preprint, 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2208.14415.
3. Kolmanovskii V., Myshkis A. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht: Springer, 2013. 648 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1965-0.
4. Хейл Д. К. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
5. Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems. Cham: Birkhäuser, 2014. 362 p. DOI: 10.1007/978-3-319-09393-2.
6. Воротников В. И. К частичной устойчивости и детектируемости функционально-дифференциальных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. С. 3–17. DOI: 10.31857/S0005231020020014.
7. Vorotnikov V. I. Partial Stability and Control. Boston: Birkhäuser, 1998. 430 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-4150-8.
8. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
9. Chaillet A., Karafyllis I., Pepe P., Wang Y. The ISS framework for time-delay systems: a survey // Math. Control Signals Syst. 2023. Vol. 35, no 2. P. 237–306. DOI: 10.1007/s00498-023-00341-w.
10. Orłowski J., Chaillet A., Sigalotti M. Counterexample to a Lyapunov condition for uniform asymptotic partial stability // IEEE Control Systems Letters. 2020. Vol. 4, no 2. P. 397–401. DOI: 10.1109/LCSYS.2019.2939717.
11. Sedova N. Razumikhin conditions in partial stability problem for delay systems // In: 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE, 2016. P. 1–4. DOI: 10.1109/STAB.2016.7541220.
12. Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 4. С. 500–512.
13. Красовский Н. Н. Об асимптотической устойчивости систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 4. С. 513–518.
14. Ren W., Jungers R. M., Dimarogonas D. V. Razumikhin and Krasovskii approaches for safe stabilization // Automatica. 2022. Vol. 146. P. 110563. DOI: 10.1016/j.automatica.2022.110563.

15. *Karafyllis I., Pepe P., Jiang Z.-P.* Global output stability for systems described by retarded functional differential equations: Lyapunov characterizations // *European Journal of Control*. 2008. Vol. 14, no 6. P. 516–536. DOI: 10.3166/ejc.14.516-536.
16. *Teel A. R., Praly L.* A smooth Lyapunov function from a class- \mathcal{KL} estimate involving two positive semidefinite functions // *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*. 2000. Vol. 5. P. 313–367. DOI: 10.1051/cocv:2000113.
17. *Lakshmikantham V., Liu X.Z.* Stability Analysis in Terms of Two Measures. Singapore: World Scientific, 1993. 402 p.
18. *Мовчан А. А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // *Прикладная математика и механика*. 1960. Т. 24, № 6. С. 988–1001.
19. *Андреев А. С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // *Автоматика и телемеханика*. 2009. № 9. С. 4–55.
20. *Ким А. В., Пименов В. Г.* i -гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 256 с.
21. *Driver R.* Existence and stability of solutions of a delay-differential system // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1962. Vol. 10. P. 401–426. DOI: 10.1007/BF00281203.
22. *Karafyllis I., Chaillet A.* Lyapunov conditions for uniform asymptotic output stability and a relaxation of Barbalat’s lemma // arXiv:2012.07607. arXiv Preprint, 2020. DOI: 10.48550/arXiv.2012.07607.
23. *Ignatyev A. O.* On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2002. Vol. 268, no. 2. P. 615–628. DOI: 10.1006/jmaa.2001.7835.
24. *Воротников В. И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // *Автоматика и телемеханика*. 2005. № 4. С. 3–59.
25. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // *Вестник МГУ. Сер. Мат., Мех., Физ., Астр., Хим.* 1957. № 4. С. 9–16.
26. *Corduneanu C.* Sur la stabilite partielle // *Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees*. 1964. Vol. 9, no. 3. P. 229–236.
27. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
28. *Zhao J.* A note on Razumikhin theorems in uniform ultimate boundedness // *Miskolc Mathematical Notes*. 2014. Vol. 15, no. 1. P. 239–254. DOI: 10.18514/MMN.2014.530.
29. *Vorotnikov V.I.* On partial stability of retarded functional differential systems // *Applied Mathematics Sciences*. 2015. Vol. 9, no. 6. P. 279–284. DOI: 10.12988/ams.2015.411905.
30. *Vorotnikov V.I.* On Razumikhin approach for partial stability problem of retarded systems // *Applied Mathematics Sciences*. 2015. Vol. 9, no. 121. P. 6021–6028. DOI: 10.12988/ams.2015.58511.
31. *Андреев А. С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. 328 с.
32. *Павликов С. В.* Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости. Набережные Челны: Ин-т управления, 2006. 264 с.
33. *Седова Н. О.* К вопросу о принципе сведения для нелинейных систем с запаздыванием // *Автоматика и телемеханика*. 2011. № 9. С. 74–86.
34. *Angeli D., Ingalls B., Sontag E. D., Wang Y.* Separation principles for input-output and integral-input-to-state stability // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2004. Vol. 43, no. 1. P. 256–276. DOI: 10.1137/S0363012902419047.
35. *Седова Н. О.* Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений // *Матем. заметки*. 2005. Т. 78, № 3. С. 468–472. DOI: 10.1007/s11006-005-0141-9.
36. *Sedova N.* On employment of semidefinite functions in stability of delayed equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2003. Vol. 281, iss. 1. P. 307–319. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00101-X.

References

1. Sontag ED, Wang Y. Notions of input to output stability. *Systems and Control Letters*. 1999; 38(4-5):235–248. DOI: 10.1016/S0167-6911(99)00070-5.
2. Kankanamalage HG, Lin Y, Wang Y. Remarks on different notions on output stability for nonlinear delay systems. arXiv:2208.14415v1. arXiv Preprint; 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2208.14415.
3. Kolmanovskii V, Myshkis A. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht: Springer; 2013. 648 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1965-0.
4. Hale JK. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer; 1977. 366 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.
5. Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems. Cham: Birkhäuser, 2014. 362 p. DOI: 10.1007/978-3-319-09393-2.
6. Vorotnikov VI. On partial stability and detectability of functional differential systems with aftereffect. *Autom. Remote Control*. 2020;81(2):199–210. DOI: 10.1134/S0005117920020010.
7. Vorotnikov VI. Partial Stability and Control. Boston: Birkhäuser, 1998. 430 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-4150-8.
8. Krasovskii NN. Stability of Motion. Redwood: Stanford University Press; 1963. 188 p.
9. Chaillet A, Karafyllis I, Pepe P, Wang Y. The ISS framework for time-delay systems: a survey. *Math. Control Signals Syst*. 2023;35(2):237–306. DOI: 10.1007/s00498-023-00341-w.
10. Orłowski J, Chaillet A, Sigalotti M. Counterexample to a Lyapunov condition for uniform asymptotic partial stability. *IEEE Control Systems Letters*. 2020;4(2):397–401. DOI: 10.1109/LCSYS.2019.2939717.
11. Sedova N. Razumikhin conditions in partial stability problem for delay systems. In: 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE; 2016. P. 1–4. DOI: 10.1109/STAB.2016.7541220.
12. Razumikhin BS. On the stability of systems with delay. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1956;20(4):500–512 (in Russian).
13. Krasovskii NN. On the asymptotic stability of systems with aftereffect. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1956;20(4):513–518 (in Russian).
14. Ren W, Jungers RM, Dimarogonas DV. Razumikhin and Krasovskii approaches for safe stabilization. *Automatica*. 2022;146:110563. DOI: 10.1016/j.automatica.2022.110563.
15. Karafyllis I, Pepe P, Jiang ZP. Global output stability for systems described by retarded functional differential equations: Lyapunov characterizations. *European Journal of Control*. 2008;14(6):516–536. DOI: 10.3166/ejc.14.516-536.
16. Teel AR, Praly L. A smooth Lyapunov function from a class- \mathcal{KL} estimate involving two positive semidefinite functions. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*. 2000;5:313–367. DOI: 10.1051/cocv:2000113.
17. Lakshmikantham V, Liu XZ. Stability Analysis in Terms of Two Measures. Singapore: World Scientific; 1993. 402 p.
18. Movchan AA. Stability of processes with respect to two metrics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1960;24(6):1506–1524. DOI: 10.1016/0021-8928(60)90004-6.
19. Andreev AS. The Lyapunov functionals method in stability problems for functional differential equations. *Autom. Remote Control*. 2009;70:1438–1486. DOI: 10.1134/S0005117909090021.
20. Kim AV, Pimenov VG. i-Smooth Analysis and Numerical Methods for Solving Functional-Differential Equations. M.: Regular and Chaotic Dynamics; 2004. 256 p. (in Russian).
21. Driver R. Existence and stability of solutions of a delay-differential system. *Arch. Rational Mech. Anal*. 1962;10:401–426. DOI: 10.1007/BF00281203.
22. Karafyllis I, Chaillet A. Lyapunov conditions for uniform asymptotic output stability and a

- relaxation of Barbalat's lemma. arXiv:2012.07607. arXiv Preprint; 2020. DOI: 10.48550/arXiv.2012.07607.
23. Ignatyev AO. On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2002;268(2):615–628. DOI: 10.1006/jmaa.2001.7835.
 24. Vorotnikov VI. Partial stability and control: The state-of-the-art and development prospects. *Autom. Remote Control*. 2005;66(4):511–561. DOI: 10.1007/s10513-005-0099-9.
 25. Rumyantsev VV. On the stability of motion with respect to part of the variables. *Moscow University Bulletin. Series of Mathematics, Mechanics, Astronomy, Physics, Chemistry*. 1957;(4): 9–16 (in Russian).
 26. Corduneanu C. Sur la stabilite partielle. *Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees*. 1964;9(3): 229–236.
 27. Barbashin EA. *Lyapunov Functions*. M.: Nauka; 1970. 240 p. (in Russian).
 28. Zhao J. A note on Razumikhin theorems in uniform ultimate boundedness. *Miskolc Mathematical Notes*. 2014;15(1):239–254. DOI: 10.18514/MMN.2014.530.
 29. Vorotnikov VI. On partial stability of retarded functional differential systems. *Applied Mathematics Sciences*. 2015;9(6):279–284. DOI: 10.12988/ams.2015.411905.
 30. Vorotnikov VI. On Razumikhin approach for partial stability problem of retarded systems. *Applied Mathematics Sciences*. 2015;9(121):6021–6028. DOI: 10.12988/ams.2015.58511.
 31. Andreev AS. *Stability of Nonautonomous Functional-Differential Equations*. Ulyanovsk: Ulyanovsk State University Publishing; 2005. 328 p. (in Russian).
 32. Pavlikov SV. *The Method of Lyapunov Functionals in Stability Problems*. Naberezhnye Chelny: University of Management Publishing; 2006. 264 p. (in Russian).
 33. Sedova NO. On the principle of reduction for the nonlinear delay systems. *Autom. Remote Control*. 2011;72:1864–1875. DOI: 10.1134/S0005117911090086.
 34. Angeli D, Ingalls B, Sontag ED, Wang Y. Separation principles for input-output and integral-input-to-state stability. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2004;43(1):256–276. DOI: 10.1137/S0363012902419047.
 35. Sedova NO. Degenerate functions in the analysis of asymptotic stability of solutions of functional differential equations. *Math. Notes* 2005;78(3):427–431. DOI: 10.1007/s11006-005-0141-9.
 36. Sedova N. On employment of semidefinite functions in stability of delayed equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2003;281(1):307–319. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00101-X.



Седова Наталья Олеговна — родилась в Нижегородской области (1973). Окончила с отличием механико-математический факультет филиала Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова в г. Ульяновске по специальности «Прикладная математика» (1995). Доктор физико-математических наук (2010). Работает на кафедре информационных технологий Ульяновского государственного университета в должности профессора. Научные интересы — устойчивость и управление в непрерывных системах с запаздыванием.

Россия, 432000 Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42
 Ульяновский государственный университет
 E-mail: sedovano@ulsu.ru
 ORCID: 0000-0002-6247-6421
 AuthorID (eLibrary.Ru): 15874



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003202
EDN: NRVWDG

Исследование устойчивости колебательной π -моды в возмущенной цепочке Тоды

А. А. Кедров^{1,2}✉, С. А. Щербинин^{1,3}

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия

²Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

³Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ✉alexandrkedrov@outlook.com, stefansherbinin@gmail.com

Поступила в редакцию 18.09.2025, принята к публикации 19.11.2025,

опубликована онлайн 19.11.2025, опубликована 31.03.2026

Аннотация. Цель настоящей работы — исследовать устойчивость периодического режима, соответствующего моде с наименьшей длиной волны (так называемой π -моды) в цепочке Тоды с кубическим возмущением в потенциале межчастичного взаимодействия. **Методы.** Исследование устойчивости проводилось на основе стандартного метода Флоке. Возникающая при этом вариационная система расщепляется на независимые двумерные подсистемы, что позволяет делать выводы об устойчивости π -моды для цепочки из произвольного числа частиц. Расщепление осуществлялось как с помощью общего теоретико-группового метода, так и с помощью предложенного в настоящей работе метода, основанного на использовании дискретного преобразования Фурье. **Результаты.** Получены диаграммы устойчивости исследуемого режима, позволяющие сделать вывод о его устойчивости в зависимости от амплитуды колебаний и числа частиц цепочки. Установлено соответствие между диаграммами устойчивости возмущенной цепочки Тоды при сильном возмущении потенциала и цепочки Ферми–Паста–Улама–Цингу- α . Для классической цепочки Тоды обнаружено, что её интегралы движения оказываются функционально зависимыми в окрестности рассматриваемого режима. Это нарушает условия теоремы Пуанкаре о тождественном равенстве единице соответствующих мультипликаторов Флоке. Несмотря на это, режим оказывается устойчивым при любой длине цепочки для рассмотренного диапазона амплитуд колебаний π -моды в классической цепочке Тоды. **Заключение.** Была исследована устойчивость π -моды в цепочке Тоды с кубическим возмущением в потенциале межчастичного взаимодействия. Исследование было проведено для произвольного числа частиц в цепочке. Это стало возможным благодаря расщеплению вариационной системы на независимые двумерные подсистемы, которое осуществлялось с помощью известного общего теоретико-группового метода. Кроме того, был предложен новый аналогичный метод расщепления на основе использования дискретного преобразования Фурье. Предложенный подход может в дальнейшем быть применён для исследования устойчивости любых нелинейных режимов, обладающих временной и пространственной периодичностью.

Ключевые слова: нелинейная динамика, цепочка Тоды, модуляционная неустойчивость, π -мода, теоретико-групповые методы.

Благодарности. В данной работе представлены результаты проекта «FR-2025-75», выполненного в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2025 году.

Для цитирования: Кедров А. А., Щербинин С. А. Исследование устойчивости колебательной π -моды в возмущенной цепочке Тоды // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 2. С. 206–222. DOI: 10.18500/0869-6632-003202. EDN: NRVWDG

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Investigation of the stability of the oscillatory zone boundary mode in the perturbed one-dimensional Toda lattice

A. A. Kedrov^{1,2}✉, S. A. Shcherbinin^{1,3}

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

²Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russia

³National Research University Higher School of Economics, St. Petersburg, Russia

E-mail: ✉alexandrkedrov@outlook.com, stefansherbinin@gmail.com

Received 18.09.2025, accepted 19.11.2025, available online 19.11.2025, published 31.03.2026

Abstract. The goal of this paper is to investigate the stability of a dynamical regime corresponding to the vibrational mode with the shortest wavelength (known as the π -mode) in the Toda lattice with a cubic perturbation of the original potential. **Methods.** The study is based on the standard Floquet method. The variational system for the corresponding dynamical regime is decomposed into a set of independent two-dimensional subsystems. This allows us to determine the π -mode stability for a chain with an arbitrary number of particles. The decomposition is carried out both by a general group-theoretic approach and by a new method proposed in this work, which is based on the discrete Fourier transform. **Results.** The resulting stability diagrams provide information about the stability of the regime for various oscillation amplitudes and numbers of particles. A correspondence between the perturbed Toda lattice and the Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou model is established for large magnitude of the perturbation. For the original (unperturbed) Toda lattice, it is observed that its integrals of motion are functionally dependent in the vicinity of the considered dynamical regime. Therefore, the observed trajectory does not satisfy the conditions of Poincaré’s theorem, which states that the Floquet multipliers of fully integrable systems are equal to one. Despite this fact, the considered regime in the original Toda lattice is shown to be stable for any number of particles and any oscillational amplitude. **Conclusion.** We have investigated the stability of the zone boundary mode (π -mode) in the Toda lattice with a cubic perturbation in the interaction potential. The study has been carried out for the decomposed variational system consisting of independent two-dimensional subsystems. The independent subsystems are obtained by the general group-theoretic method. In addition, a new decomposition method is proposed based on the discrete Fourier transform. The proposed approach can be further applied to investigate the stability of any nonlinear regimes possessing temporal and spatial periodicity.

Keywords: nonlinear dynamics, Toda lattice, stability, zone boundary mode, group-theoretics methods.

Acknowledgements. The results of the project “FR-2025-75”, carried out within the framework of the Basic Research Program at HSE University in 2025, are presented in this work.

For citation: Kedrov AA, Shcherbinin SA. Investigation of the stability of the oscillatory zone boundary mode in the perturbed one-dimensional Toda lattice. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2026;34(2):206–222. DOI: 10.18500/0869-6632-003202

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Нелинейные колебательные режимы в дискретных системах различной физической природы традиционно привлекают внимание исследователей [1–10]. Среди таких режимов можно выделить два класса: локализованные и делокализованные. Локализованные режимы (дискретные бризеры) могут вносить вклад в процессы энергопереноса [6, 8, 11], влиять на макроскопические свойства кристаллов [6, 12–14], а также изменять структуру дефектов [6, 15–17]. Делокализованные режимы, помимо того, что также могут влиять на макроскопические параметры кристаллов [18, 19], тесно связаны с локализованными. Так, начальные профили дискретных бризеров можно получить из картин атомных смещений делокализованных режимов посредством наложения пространственной локализующей функции [20–22]. Кроме того, модуляционная неустойчивость делокализованных нелинейных режимов может приводить к образованию так называемых хаотических бризеров [4, 10, 23, 24]. Образование бризеров в результате модуляционной неустойчивости было впервые обнаружено [23] для π -моды, которая представляет собой самую коротковолновую моду

в моноатомной цепочке. В этом режиме смещения соседних частиц из положения равновесия в каждый момент времени имеют противоположный знак. Эта колебательная мода является в определенном смысле антиподом моды, для которой в цепочке Ферми–Пасты–Улама–Цингоу (ФПУЦ) наблюдалось знаменитое явление возврата [1], поэтому исследование временной эволюции π -моды можно назвать проблемой «анти-ФПУ» [4].

Исследованию π -моды в моноатомных цепочках типа ФПУЦ посвящено значительное число работ [4, 25–28]. С другой стороны, широко известна такая моноатомная нелинейная система, как цепочка Тоды, которая является одной из немногих известных многочастичных полностью интегрируемых в смысле Лиувилля гамильтоновых систем. Она была предложена М. Тодой [29] как пример системы, имеющей, в отличие от ФПУЦ, аналитические решения. Как следствие полной интегрируемости, цепочка Тоды является эргодичной системой, а значит, в ней не может происходить процесс термализации, то есть равномерное перераспределение энергии по модам системы с течением времени (подробнее см., например, [29]). При этом в приближении малых амплитуд динамика цепочки Тоды будет близка к динамике цепочки α -ФПУЦ.

Поэтому естественным образом возникает вопрос: каким образом на устойчивость периодических режимов, в частности π -моды, влияет полная интегрируемость системы и что происходит с устойчивостью, когда эта интегрируемость нарушается. Пролить свет на этот вопрос призвана настоящая работа, которая посвящена исследованию устойчивости π -моды в цепочке Тоды с внесенным возмущением в потенциал системы.

Поведение такой возмущенной цепочки Тоды численно исследовалось в работе [30], где потенциал взаимодействия между частицами задавался в форме

$$V = V_T(\varepsilon) + \theta_n \varepsilon^n, \quad n \geq 3. \quad (1)$$

Здесь ε — безразмерное отклонение расстояния между соседними частицами от равновесного положения, V_T — потенциал взаимодействия в классической цепочке Тоды, определяемый

$$V_T = \exp(-\varepsilon) + \varepsilon - 1.$$

Авторами работы [30] было показано, что в возмущенной цепочке Тоды происходит термализация энергии, причем без явления возврата, наблюдаемого в решетках ФПУЦ [1].

В настоящей работе мы вносили возмущение вида (1) при $n = 3$, сила которого регулировалась величиной коэффициента θ_3 . Это позволило проследить, как меняется устойчивость исследуемого режима в широком диапазоне амплитуд в зависимости от величины вносимого возмущения.

Для исследования устойчивости периодических режимов существует универсальный метод Флоке, однако при использовании этого метода для цепочки из N частиц требуется построение матрицы монодромии размером $2N \times 2N$. Ясно, что для $N \gg 1$ исследование устойчивости периодического режима данным методом оказывается предельно затруднительным.

С другой стороны, в работах [3, 31] был предложен универсальный метод на основе теории представлений групп симметрии, позволяющий исследовать устойчивость периодических режимов путем вычисления матрицы монодромии конечного размера, независимого от числа частиц в системе N . Данный метод был использован для исследования устойчивости периодических режимов в цепочках ФПУЦ [3] и так называемой LC-цепочке [32, 33].

Этот метод был использован и в настоящей работе для исследования устойчивости π -моды в классической и возмущенной цепочке Тоды. Кроме того, был предложен аналогичный подход на основе дискретного преобразования Фурье.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 описан аналитический вид решения, соответствующий π -моды в рассматриваемой системе. В разделе 2 описан метод исследования устойчивости. В разделе 3 представлены результаты исследования устойчивости классической цепочки Тоды, а в разделе 4 — возмущенной. В **Заключении** подведены итоги настоящей работы.

1. Колебательная π -мода в возмущённой цепочке Тоды

Рассматривается нелинейная однородная цепочка попарно взаимодействующих частиц, описываемая следующими динамическими уравнениями:

$$\ddot{u}_n(\tau) = \exp(u_{n-1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n+1}) + \alpha \left((u_{n+1} - u_n)^2 - (u_{n-1} - u_n)^2 \right). \quad (2)$$

Здесь u_n — безразмерное смещение частицы под номером n из её положения равновесия, τ — безразмерное время, точкой обозначается производная по времени, α — коэффициент, позволяющий контролировать кубическую компоненту потенциала взаимодействия между частицами, $n \in \{1 \dots N\}$ и N — количество частиц в цепочке. При α , равном нулю, система (2) принимает вид, соответствующий классической цепочке Тоды. Далее систему с ненулевым коэффициентом α будем называть возмущенной цепочкой Тоды. Граничные условия полагаются периодическими, то есть $u_{N+i} = u_i$.

В настоящей работе исследуется устойчивость колебательной π -моды, которая имеет вид

$$u_n(\tau) = (-1)^n U(\tau). \quad (3)$$

Подстановка (3) в (2) сводит систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка к одному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $U(\tau)$:

$$\ddot{U} = -2 \sinh(2U). \quad (4)$$

Для этого уравнения можно найти точное решение следующего вида:

$$U(\tau) = \operatorname{arctanh} \left(\frac{\operatorname{sn} \left(\tau \sqrt{v_0^2 + 4} \middle| \frac{1}{1+4/v_0^2} \right)}{\sqrt{1 + 4/v_0^2}} \right), \quad U(0) = 0, \quad \dot{U} = v_0. \quad (5)$$

Здесь $\operatorname{arctanh}$ — гиперболический арктангенс, а sn — эллиптический синус Якоби. Решение (5) является периодическим:

$$U(\tau + T) = U(\tau), \quad T = \frac{4K \left(\frac{v_0^2}{4+v_0^2} \right)}{\sqrt{4 + v_0^2}}, \quad (6)$$

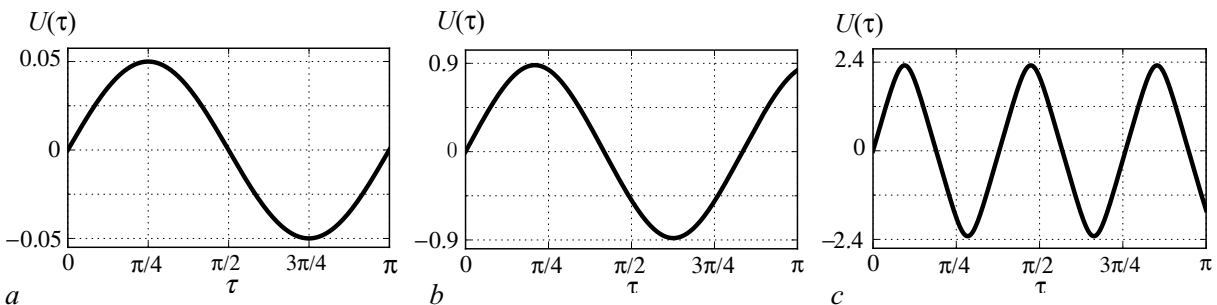


Рис. 1. Графики решений (5) для различных значений v_0 : $v_0 = 0.1$ (a); $v_0 = 2$ (b); $v_0 = 10$ (c)

Fig. 1. Plot of the solutions (5) for various values of v_0 : $v_0 = 0.1$ (a); $v_0 = 2$ (b); $v_0 = 10$ (c)

где K — полный эллиптический интеграл 1-го рода. Вывод решения (5) описан в *Приложении*. Отметим, что после подстановки анзаца (3) в (2) результирующее уравнение (4) и его решение (5) не зависят от коэффициента α . Таким образом, внесение кубической добавки в потенциал цепочки Тоды не влияет на вид решения, соответствующего колебательной π -моды. Однако, как будет показано далее, величина α влияет на устойчивость этого периодического режима.

2. Исследование устойчивости колебательной π -моды

2.1. Вариационная система и мультипликаторы Флоке. Классический метод для определения устойчивости нелинейного периодического режима заключается в исследовании устойчивости нулевого решения соответствующей вариационной системы линейных уравнений, получающейся в результате линеаризации исходной системы в окрестности рассматриваемого колебательного режима. Если u_n^0 , $n \in \{1 \dots N\}$ является решением системы $\ddot{u}_n = F_n(u_1, u_2 \dots u_N)$, $n \in \{1 \dots N\}$, то соответствующая вариационная система уравнений, линеаризованных вблизи этого режима, будет определяться следующими уравнениями:

$$u_n = u_n^0 + \varepsilon_n, \quad A_{nm}(\tau) = \left. \frac{\partial}{\partial u_m} F_n(u_1, u_2 \dots u_N) \right|_{u_i = u_i^0(\tau), i=1 \dots N},$$

$$\ddot{\varepsilon}_n = \sum_m A_{nm}(\tau) \varepsilon_m, \quad n \in \{1 \dots N\},$$
(7)

где $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\tau)$ представляют собой малые по сравнению с u_n^0 величины, зависящие от времени.

Устойчивость нулевого решения такой вариационной системы определяется с помощью вычисления мультипликаторов Флоке μ — собственных значений матрицы монодромии [34] этой системы. Для устойчивости решения u_n^0 необходимо, чтобы все мультипликаторы Флоке были по модулю не больше единицы: $|\mu| \leq 1$ (для автономных гамильтоновых систем в случае устойчивости возможно только $|\mu| = 1$). Более подробную информацию о матрице монодромии и мультипликаторах Флоке можно найти в [34, 35].

2.2. Вариационная система для возмущенной цепочки Тоды. Вариационная система, полученная линеаризацией (2) вблизи решения 3, имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon}_{2n} = c\varepsilon_{2n-1} - (c + c^{-1})\varepsilon_{2n} + c^{-1}\varepsilon_{2n+1} + 4ab(\varepsilon_{2n-1} - \varepsilon_{2n+1}), \\ \ddot{\varepsilon}_{2n+1} = c^{-1}\varepsilon_{2n} - (c + c^{-1})\varepsilon_{2n+1} + c\varepsilon_{2n+2} - 4ab(\varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n+2}), \end{cases}$$

$$c = \exp(2U(\tau)), \quad b = U(\tau), \quad n \in \{1 \dots N\}.$$
(8)

Отметим, что правая часть полученной системы (8) содержит, кроме неизвестных ε_{2n} и ε_{2n+1} , еще и слагаемые, пропорциональные ε_{2n-1} и ε_{2n+2} , то есть это система связанных дифференциальных уравнений. Для определения устойчивости π -моды в цепочке из N частиц требуется построение матрицы монодромии $2N \times 2N$. Ясно, что для цепочек с большим количеством частиц применение данного метода оказывается затруднительным.

Рассмотрим способ приведения вариационной системы (8) к такому виду, чтобы исследование устойчивости ее нулевого решения было возможно для любого, сколь угодно большого числа частиц N . Пусть

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N]^T, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix},$$
(9)

где A_{nm} — коэффициенты линейной системы, определяемые (7). В настоящей работе используются такие унитарные преобразования $\tilde{\epsilon} = \mathbf{S}\epsilon$, которые приводят матрицу $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^H$ рассматриваемой системы к блочно-диагональному виду. Тогда преобразованная вариационная система

$$\ddot{\tilde{\epsilon}}_n = \sum_m \tilde{A}_{nm}(\tau)\epsilon_m \quad (10)$$

состоит из независимых подсистем, устойчивость нулевого решения каждой из которых может быть исследована отдельно от других.

2.3. Расщепление вариационной системы с помощью общего теоретико-группового метода. Один из способов получения требуемого унитарного преобразования основан на использовании аппарата неприводимых представлений групп симметрии. Этот метод был предложен в работе Г. М. Чечина и К. Г. Жукова [31]. Для использования этого метода необходимо знание пространственной группы G симметрии исследуемого режима, то есть такой группы пространственных преобразований, что для любого элемента $a \in G$ справедливо

$$au_n^0 = u_n^0, \quad n = 1 \dots N, \quad \forall a \in G. \quad (11)$$

Иными словами, действие всех элементов G переводит рассматриваемый режим сам в себя.

В работе [31] доказано, что вариационную систему, соответствующую некоторому периодическому режиму, можно расщепить на независимые подсистемы конечного размера с помощью унитарного преобразования, матрица \mathbf{S} которого составлена из базисных векторов неприводимых представлений пространственной группы симметрии G этого режима.

В настоящей работе в качестве группы симметрии π -моды использовалась группа $G = \langle as \rangle$, состоящая из всех возможных степеней оператора as , где действие операторов a и s определено следующим образом:

$$au_n = u_{n+1}, \quad su_n = -u_n. \quad (12)$$

В работах [3, 31, 33] подробно описана процедура нахождения базисных векторов неприводимых представлений и построения матрицы \mathbf{S} . В том числе в работе [33] эта процедура описана для той же группы симметрии, которая использована в настоящей работе. На основе этой процедуры можно получить следующую расщепленную вариационную систему:

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{\epsilon}}_{2q} = -2 \left(c + \frac{1}{c} \right) \sin^2 k \cdot \tilde{\epsilon}_{2n} + i \left(c - \frac{1}{c} - 8ab \right) \sin 2k \cdot \tilde{\epsilon}_{2n+1}, \\ \ddot{\tilde{\epsilon}}_{2q+1} = -i \left(c - \frac{1}{c} - 8ab \right) \sin 2k \cdot \tilde{\epsilon}_{2n} - 2 \left(c + \frac{1}{c} \right) \cos^2 k \cdot \tilde{\epsilon}_{2n+1}, \end{cases} \quad (13)$$

где $k = \frac{2\pi q}{N/2}$, q — индекс, принимающий значения $q \in \{1 \dots N/2\}$. Отметим, что для каждого значения индекса q выражение (13) представляет замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно переменных $\tilde{\epsilon}_{2q}$ и $\tilde{\epsilon}_{2q+1}$. Устойчивость системы (13) для различных значений параметров k , v_0 и α будет исследована в разделах 3 и 4 путем анализа вычисленных значений мультипликаторов Флоке (см. 2.1).

2.4. Расщепление вариационной системы с помощью дискретного преобразования Фурье. Другой способ приведения вариационной системы (8) к блочно-диагональному виду основан на использовании дискретного преобразования Фурье. Переобозначим переменные следующим образом:

$$\psi_n = \epsilon_{2n}, \quad \phi_n = \epsilon_{2n+1}. \quad (14)$$

Тогда система уравнений (8) принимает вид

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_n = c\phi_{n-1} - (c + c^{-1})\psi_n + c^{-1}\phi_n + 4ab(\phi_{n-1} - \phi_n), \\ \ddot{\phi}_n = c\psi_{n+1} - (c + c^{-1})\phi_n + c^{-1}\psi_n - 4ab(\psi_n - \psi_{n+1}). \end{cases} \quad (15)$$

Выполним дискретное преобразование Фурье для переменных ψ_n , ϕ_n независимо друг от друга:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N/2} \exp(-ikn)\psi_n, \\ \hat{\phi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N/2} \exp(-ikn)\phi_n, \end{aligned} \quad (16)$$

где $k = \frac{2\pi q}{N/2}$, $q \in \{1 \dots N/2\}$. Отметим, что преобразование переменных (16) является линейным и унитарным. Вариационная система после преобразования Фурье примет вид

$$\begin{cases} \ddot{\hat{\psi}} = -(c + c^{-1})\hat{\psi} + (4ab(1 - \exp(-ik)) + c \exp(-ik) + c^{-1})\hat{\phi}, \\ \ddot{\hat{\phi}} = (4ab(1 - \exp(ik)) + c \exp(ik) + c^{-1})\hat{\psi} - (c + c^{-1})\hat{\phi}. \end{cases} \quad (17)$$

Система (17) является замкнутой относительно переменных $\hat{\psi}$ и $\hat{\phi}$. Как и для системы (13), ее нулевое решение несложно исследовать на устойчивость при любом значении q с помощью стандартного метода Флоке.

2.5. Метод численного исследования. Мультипликаторы Флоке для вариационных систем (13) и (17) находились численно. Для конкретных значений параметров α , v_0 и k процедура вычисления производилась в 2 этапа.

1. Численное построение матрицы монодромии. Для вариационных систем (13) и (17) матрица монодромии имеет размер 4×4 , где каждый столбец составлен из решения задачи Коши x_n в момент времени T (см. формулу (6)) с начальными условиями $x_n(0) = \delta_{nm}$, где x_n — переменная состояния рассматриваемой вариационной системы $n \in \{1 \dots 4\}$, m — номер столбца матрицы монодромии, а δ_{nm} — символ Кронекера. Задача Коши решалась численным методом с адаптивным шагом интегрирования Dormand–Prince [36]. Размер относительной ошибки составлял не более 10^{-10} (то есть точность до 10 значащих знаков).
2. Вычисление мультипликаторов Флоке, то есть собственных значений матрицы монодромии, полученной на предыдущем шаге, производилось численно с использованием библиотеки LAPACK [37].

Нулевое решение вариационной системы для конкретных значений α , v_0 и k считалось устойчивым, если каждый из 4-х вычисленных мультипликаторов Флоке отклонялся от единичной окружности не более чем на 10^{-7} :

$$||\mu_i| - 1| < 10^{-7}. \quad (18)$$

Исследуемая π -мода считалась устойчивой при каких-то конкретных α и v_0 , если нулевое решение соответствующей вариационной системы оказывалось устойчивым при любом значении $k = \frac{2\pi q}{N/2}$, где $q \in \{1 \dots N/2\}$. В расчётах использовалось значение $N = 2000$.

В процессе исследования устойчивости было установлено, что расщеплённые вариационные системы (13) и (17) приводят к одинаковым результатам для одинаковых значений α и v_0 .

3. Устойчивость π -моды в классической цепочке Тоды

Известно, что невозмущенная цепочка Тоды (то есть при $\alpha = 0$) является полностью интегрируемой гамильтоновой системой (см. например, [29]). В работе Пуанкаре [38] (см. также [39]) установлена взаимосвязь между количеством интегралов движения и значениями мультипликаторов Флоке. В доказанной в [38] теореме утверждается, что если вблизи траектории периодического режима существует M функционально независимых интегралов движения $F(q_1, p_1 \dots q_N, p_N) = \text{const}$, то как минимум $2M$ мультипликаторов Флоке для данного периодического режима будут тождественно равны единице:

$$\mu_i = 1, \quad i \in \{1 \dots 2M\}. \quad (19)$$

Отметим, что полная интегрируемость подразумевает существование N интегралов движения, значит, в соответствии с теоремой, все мультипликаторы Флоке для некоторого периодического режима должны быть равны единице в случае, если эти интегралы окажутся функционально независимыми в окрестности такого периодического режима. Это утверждение сильнее, чем необходимое условие неасимптотической устойчивости периодического режима $|\mu_i| = 1$.

В ходе настоящего исследования было обнаружено, что в невозмущенной цепочке Тоды для числа частиц $N \geq 4$ интегралы движения системы (явные выражения для которых приведены в работе [40]) являются функционально зависимыми вблизи рассматриваемого периодического режима (5). В частности, для $N = 4$ только 2 интеграла движения из 4 оказываются функционально независимыми (это можно проверить путём определения ранга матрицы Якобиана, составленного из интегралов движения), что подтверждается вычисленными значениями мультипликаторов Флоке μ_i :

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 &\approx 1, \\ \mu_5 = \mu_6 = \mu_7^* = \mu_8^* &\approx 0.47 + 0.88i. \end{aligned} \quad (20)$$

А именно в соответствии с теоремой Пуанкаре при 2 функционально независимых интегралах движения гарантируется существование только 4 мультипликаторов Флоке, равных единице $\mu_i = 1$, что соответствует полученным результатам (20).

Отметим, что при увеличении числа частиц N число функционально независимых интегралов движения, по-видимому, остается равным 2. Это было проверено прямым расчётом мультипликаторов Флоке для матрицы монодромии полной системы вариационной системы при $N = 10, 100, 500$. При всех этих значениях N только четыре мультипликатора Флоке оказывались равными единице.

Таким образом, несмотря на полную интегрируемость невозмущенной цепочки Тоды, устойчивость π -моды в ней не следует из упомянутой выше теоремы Пуанкаре. Однако эту устойчивость можно определить с помощью вычисления мультипликаторов Флоке для систем (13) и (17), что и было сделано в настоящей работе.

Исследование устойчивости π -моды в невозмущенной цепочке Тоды проводилось для всех значений k из диапазона $k = \frac{2\pi q}{N/2}$ ($q \in \{1 \dots N/2\}$, $N = 2000$) и значений $v_0 \in [0, 20]$. Шаг между различными значениями v_0 составлял 0.02. Максимальное расстояние от единичной окружности среди всех мультипликаторов Флоке составило 2.6×10^{-9} , что соответствует численной точности интегрирования уравнений (13). Итого, можно заключить, что π -мода в классической цепочке Тоды (то есть при $\alpha = 0$) является устойчивой, по-видимому, для любых значений v_0 .

4. Устойчивость π -моды в возмущенной цепочке Тоды

В данном разделе представлены результаты исследования устойчивости π -моды в возмущенной цепочке Тоды (то есть при $\alpha \neq 0$). Вообще говоря, при различных значениях коэффициента α мультипликаторы Флоке для каждой пары значений v_0 и k различны. По этой причине интерес представляет как исследование устойчивости для различных значений v_0 и k при фиксированном значении α , так и исследование устойчивости системы для пар значений v_0 и α при произвольном значении k . Критерии и методика определения устойчивости описаны в подразделе 2.5.

Результаты исследования устойчивости π -моды для разных значений k , v_0 и α представлены на рис. 2. На этом рисунке приведены диаграммы устойчивости, на которых белому цвету соответствует устойчивость нулевого решения соответствующих систем (13) и (17), а черному — неустойчивость. На каждой из диаграмм приведены результаты расчётов для всех значений k

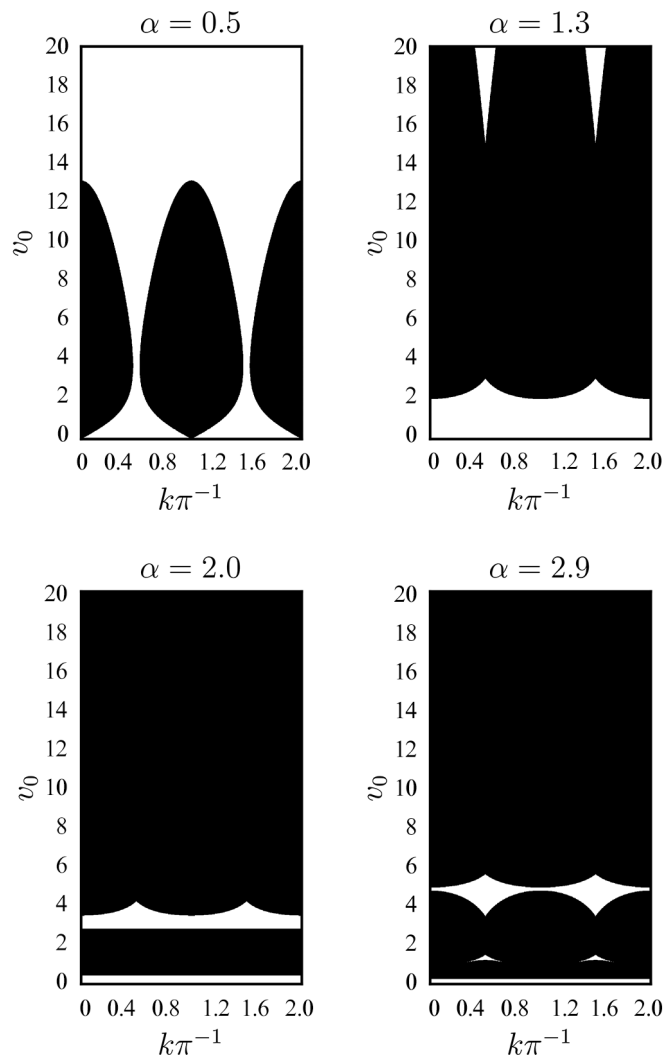


Рис. 2. Диаграммы устойчивости π -моды для разных значений k , v_0 и α . Белому цвету соответствуют значения параметров, при которых исследуемая нелинейная мода устойчива, черному — неустойчива

Fig. 2. The stability diagram of the zone boundary mode for various values of k , v_0 and α . White and black colors correspond to the stable and unstable periodic regimes of the investigated mode respectively

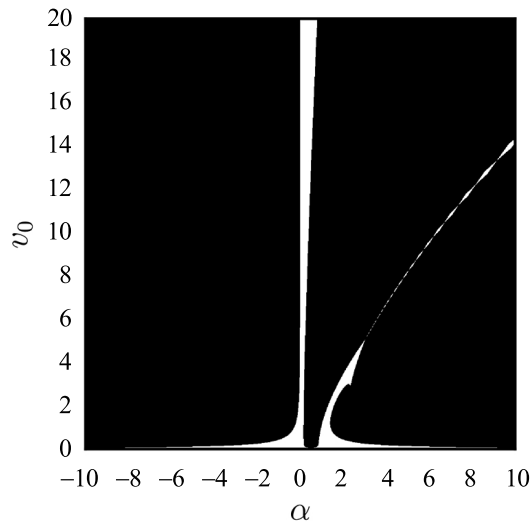


Рис. 3. Диаграмма устойчивости π -моды для разных значений коэффициента α и начальной скорости v_0 . Белому цвету соответствуют значения параметров, при которых исследуемая нелинейная мода устойчива для любого значения k , черному — неустойчива хотя бы для одного значения k

Fig. 3. The stability diagram of the zone boundary mode for various values of α and the initial velocity v_0 . White corresponds to the pair of values for which the regime is stable for all values of k . Black corresponds to the pair of values for which the regime is unstable for at least one value of k

из диапазона $k = \frac{2\pi q}{N/2}$, где $q \in \{1 \dots N/2\}$ и $N = 2000$, и значений $v_0 \in [0, 20]$, взятых с шагом 0.02. Отметим, что при $\alpha = 2.9$ на диаграмме устойчивости цепочки Тоды можно видеть область значений k и v_0 , которая по форме совпадает с диаграммой устойчивости π -моды в цепочке ФПУЦ- α , полученной в работе [3].

Результаты исследования устойчивости π -моды для различных значений параметра α и начальных значений v_0 приведены на рис. 3. Как уже отмечалось в подразделе 2.5, исследуемый режим считался устойчивым при каких-то конкретных α и v_0 , если нулевое решение соответствующей вариационной системы оказывалось устойчивым при любом значении k . Как и на предыдущем рисунке, белый цвет соответствует устойчивости, а черный — неустойчивости. Из рисунка видно, что даже при больших значениях амплитуды колебаний и при больших положительных значениях α в исследуемой цепочке возможны устойчивые колебания, соответствующие π -моды. Для отрицательных же значений α исследуемая нелинейная мода сохраняет устойчивость лишь при достаточно малых значениях амплитуды колебаний.

Заключение

В настоящей работе исследована устойчивость π -моды в цепочке Тоды и её возмущённой версии с добавкой кубического слагаемого к потенциалу. Исследование проводилось посредством расщепления исходной вариационной системы произвольной размерности на подсистемы из двух уравнений. Расщепление осуществлялось как с использованием общего теоретико-группового метода, основанного на аппарате неприводимых представлений групп симметрии, так и предложенного альтернативного подхода с использованием дискретного преобразования Фурье. Предложенный подход может быть применен для исследования модуляционной неустойчивости других нелинейных мод.

В являющейся полностью интегрируемой классической цепочке Тоды π -мода оказалась устойчива при всех рассмотренных амплитудах для любого числа частиц в системе. При внесении

же кубического возмущения в потенциал устойчивость исследуемой нелинейной моды, вообще говоря, нарушается: появляются интервалы неустойчивости, зависящие от амплитуды и величины коэффициента возмущения. Однако даже для возмущённой цепочки Тоды есть такие значения амплитуд, при которых π -мода устойчива для любого числа частиц в цепочке.

Приложение

П1. Получение точного решения, соответствующего π -моды. В данном приложении изложен способ решения уравнения (4). Замена переменных $V = \dot{U}$ позволяет представить \ddot{y} в следующей форме:

$$\ddot{U} = \frac{d}{d\tau} V = \frac{dU}{d\tau} \frac{dV}{dy} = V \frac{dV}{dy}. \quad (21)$$

Тогда уравнение (4) становится разделяемым относительно переменных V и U :

$$\begin{aligned} V dV &= -2 \sinh(2U) dU, \\ \int V dV &= -2 \int \sinh(2U) dU, \\ V^2 &= C - 2 \cosh(2U), \\ V &= \pm \sqrt{C - 2 \cosh(2U)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь C – константа интегрирования. Из вида полученного выражения следует, что для начальных условий $\dot{U}(0) = V(0) = v_0$:

$$C = v_0^2 + 2. \quad (23)$$

Делая обратную замену $\dot{U} = V$, получаем итоговое выражение:

$$\begin{aligned} d\tau &= \text{sign}(v_0) \frac{dU}{\sqrt{v_0^2 + 2 - 2 \cosh(2U)}}, \\ \tau &= D + \text{sign}(v_0) \int_0^U \frac{dU}{\sqrt{v_0^2 - 4 \sinh^2(U)}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для начального условия $U(0) = 0$ очевидно $D = 0$, тогда полученное выражение можно свести к эллиптическим функциям:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{v_0} \int_0^U \frac{dU}{\sqrt{1 + \frac{4}{v_0^2} \sin^2(iU)}}, \\ i\tau v_0 &= \int_0^{iU} \frac{d(iU)}{\sqrt{1 + \frac{4}{v_0^2} \sin^2(iU)}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Последнее выражение может быть записано через функцию амплитуды Якоби $\text{am}(u|m)$ [41, п. 16.1.3-4]:

$$iU = \text{am} \left(i\tau v_0 \left| -\frac{4}{v_0^2} \right. \right). \quad (26)$$

П2. Численное представление решения. Решение (26) зависит от комплексных аргументов, а значение параметра m отрицательно. Большинство программных пакетов позволяют вычислять эллиптические функции только для вещественных аргументов и параметра $m \in [0, 1]$. По этой причине полученное решение приводится к форме без комплексных аргументов и $m \in [0, 1]$.

Перепишем (5) в следующем виде:

$$U = -i \arctan \left(\frac{\operatorname{sn}(iw| - k)}{\operatorname{cn}(iw| - k)} \right), \quad w = i\tau v_0, \quad k = \frac{4}{v_0^2}, \quad (27)$$

где sn , cn – функции эллиптического синуса и косинуса, определяемые следующими выражениями:

$$\operatorname{sn}(u|m) = \sin(\operatorname{am}(u|m)), \quad \operatorname{cn}(u|m) = \cos(\operatorname{am}(u|m)). \quad (28)$$

Сначала перейдем от отрицательного параметра $m = -k$ к $\mu = \frac{k}{1+k}$, $\mu \in [0, 1]$ [41, п. 16.10]:

$$\operatorname{sn}(u| - k) = \mu_1^{\frac{1}{2}} \operatorname{sd} \left(u\mu_1^{-\frac{1}{2}} \middle| \mu \right), \quad \operatorname{cn}(u| - k) = \operatorname{cd} \left(u\mu_1^{-\frac{1}{2}} \middle| \mu \right), \quad (29)$$

где $\mu_1 = \frac{1}{1+k}$. Также из определения функций sd , cd (см. [41, п. 16.3]) следует, что

$$\frac{\operatorname{sd}(u|m)}{\operatorname{cd}(u|m)} = \frac{\operatorname{sn}(u|m)}{\operatorname{cn}(u|m)}. \quad (30)$$

Подставляя (29), (30) в (27), получаем следующее выражение:

$$U = -i \arctan \left(\mu_1^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sn} \left(iw\mu_1^{-\frac{1}{2}} \middle| \mu \right)}{\operatorname{cn} \left(iw\mu_1^{-\frac{1}{2}} \middle| \mu \right)} \right). \quad (31)$$

Переход от мнимого аргумента осуществляется следующим преобразованием [41, п. 16.20]:

$$\operatorname{sn}(iw|\mu) = i \frac{\operatorname{sn}(w|m_1)}{\operatorname{cn}(w|\mu_1)}, \quad \operatorname{cn}(iw|\mu) = \frac{1}{\operatorname{cn}(w|\mu_1)}, \quad (32)$$

где $\mu_1 = \sqrt{1 - \mu^2}$. Итого:

$$U = \operatorname{arctanh} \left(\mu_1^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn} \left(w\mu_1^{-\frac{1}{2}} \middle| \mu \right) \right). \quad (33)$$

Переходя к исходным переменным τ , v_0 , получим

$$U = \operatorname{arctanh} \left(\frac{\operatorname{sn} \left(\tau \sqrt{v_0^2 + 4} \middle| \frac{1}{1+4/v_0^2} \right)}{\sqrt{1 + 4/v_0^2}} \right). \quad (34)$$

Именно выражение (34) использовалось в работе для вычисления значений U .

Список литературы

1. *Fermi E., Pasta P., Ulam S., Tsingou M.* Studies of Nonlinear Problems // Report LA-1940. New Mexico: Los Alamos Scientific Laboratory, 1955. 22 p. DOI: 10.2172/4376203.
2. *Chechin G. M., Novikova N. V., Abramenko A. A.* Bushes of vibrational modes for Fermi–Pasta–Ulam chains // *Physica D.* 2002. Vol. 166, no. 3–4. P. 208–238. DOI: 10.1016/S0167-2789(02)00430-X.
3. *Chechin G. M., Ryabov D. S., Zhukov K. G.* Stability of low-dimensional bushes of vibrational modes in the Fermi–Pasta–Ulam chains // *Physica D.* 2005. Vol. 203, no. 3–4. P. 121–166. DOI: 10.1016/j.physd.2005.03.009.
4. *Dauxois Th., Khomeriki R., Piazza F., Ruffo S.* The anti-FPU problem // *Chaos.* 2005. Vol. 15, no. 1. P. 015110. DOI: 10.1063/1.1854273.
5. *Flach S., Gorbach A. V.* Discrete breathers – advances in theory and applications // *Physics Reports.* 2008. Vol. 467, no. 1–3. P. 1–116. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.05.002.
6. *Дмитриев С. В., Корзникова Е. А., Баимова Ю. А., Веларде М. Г.* Дискретные бризеры в кристаллах // *УФН.* 2016. Т. 186, № 5. С. 471–488. DOI: 10.3367/UFNr.2016.02.037729.
7. *Gómez-Rojas A., Halevi P.* Discrete breathers in an electric lattice with an impurity: Birth, interaction, and death // *Phys. Rev. E.* 2018. Vol. 97, iss. 2. P. 022225. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022225.
8. *Saadatmand D., Xiong D., Kuzkin V. A., Krivtsov A. M., Savin A. V., Dmitriev S. V.* Discrete breathers assist energy transfer to ac-driven nonlinear chains // *Phys. Rev. E.* 2018. Vol. 97, iss. 2. P. 022217. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022217.
9. *Kolesnikov I. D., Shcherbinin S. A., Bebikhov Yu. V., Korznikova E. A., Shepelev I. A., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V.* Chaotic discrete breathers in bcc lattice // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2024. Vol. 178. P. 114339. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.114339.
10. *Bachurin D. V., Murzaev R. T., Abdullina D. U., Semenova M. N., Bebikhov Yu. V., Dmitriev S. V.* Chaotic discrete breathers in bcc lattice: Effect of the first- and second-neighbor interactions // *Physica D.* 2024. Vol. 470. P. 134344. DOI: 10.1016/j.physd.2024.134344.
11. *Xiong D., Zhang J.* Discrete breathers: possible effects on heat transport // *Lett. Mater.* 2016. Vol. 6, no. 1. P. 27–30. DOI: 10.22226/2410-3535-2016-1-27-30.
12. *Manley M. E.* Impact of intrinsic localized modes of atomic motion on materials properties // *Acta Materialia.* 2010. Vol. 58, no. 8. P. 2926–2935. DOI: 10.1016/j.actamat.2010.01.021.
13. *Singh M., Morkina A. Y., Korznikova E. A., Dubinko V. I., Terentiev D. A., Xiong D., Naimark O. B., Gani V. A., Dmitriev S. V.* Effect of discrete breathers on the specific heat of a nonlinear chain // *J. Nonlinear Sci.* 2021. Vol. 31. P. 12. DOI: 10.1007/s00332-020-09663-4.
14. *Korzniikova E. A., Morkina A. Y., Singh M., Krivtsov A. M., Kuzkin V. A., Gani V. A., Bebikhov Yu. V., Dmitriev S. V.* Effect of discrete breathers on macroscopic properties of the Fermi-Pasta-Ulam chain // *Eur. Phys. J. B.* 2020. Vol. 93, no. 7. P. 123. DOI: 10.1140/epjb/e2020-10173-7.
15. *Archilla J. F. R., Coelho S. M. M., Auret F. D., Dubinko V. I., Hizhnyakov V.* Long range annealing of defects in germanium by low energy plasma ions // *Physica D.* 2015. Vol. 297. P. 56–61. DOI: 10.1016/j.physd.2015.01.001.
16. *Dubinko V. I., Dubinko A. V.* Modification of reaction rates under irradiation of crystalline solids: Contribution from intrinsic localized modes // *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B.* 2013. Vol. 303. P. 133–135. DOI: 10.1016/j.nimb.2012.10.014.
17. *Terentyev D. A., Dubinko A. V., Dubinko V. I., Dmitriev S. V., Zhurkin E. E., Sorokin M. V.* Interaction of discrete breathers with primary lattice defects in bcc Fe // *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 2015. Vol. 23, no. 8. P. 085007. DOI: 10.1088/0965-0393/23/8/085007.
18. *Korzniikova E. A., Shcherbinin S. A., Ryabov D. S., Chechin G. M., Ekomasov E. G., Barani E., Zhou K., Dmitriev S. V.* Delocalized nonlinear vibrational modes in graphene: Second harmonic

- generation and negative pressure // *Physica Status Solidi (B): Basic Solid State Physics*. 2019. Vol. 256, no. 1. P. 1800061. DOI: 10.1002/pssb.201800061.
19. *Bachurina O. V., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V., Bachurin D. V.* Impact of delocalized nonlinear vibrational modes on the properties of NiTi // *Phys. Lett. A*. 2025. Vol. 555. P. 130769. DOI: 10.1016/j.physleta.2025.130769.
 20. *Корзникова Е. А., Фомин С. Ю., Соболева Э. Г., Дмитриев С. В.* Высокосимметричный дискретный бризер в двумерном кристалле Морзе // *Письма в ЖЭТФ*. 2016. Т. 103, № 4. С. 303–308.
 21. *Shcherbinin S. A., Kazakov A. M., Bebikhov Yu. V., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V.* Delocalized nonlinear vibrational modes and discrete breathers in β -FPUT simple cubic lattice // *Phys. Rev. E*. 2024. Vol. 109, iss. 1. P. 014215. DOI: 10.1103/PhysRevE.109.014215.
 22. *Abdullina D. U., Kosarev I. V., Evarestov R. A., Kudreyko A. A., Dmitriev S. V.* Phonon spectrum and gap quasi-breathers in B2 (CsCl) structure // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2025. Vol. 199. P. 116724. DOI: 10.1016/j.chaos.2025.116724.
 23. *Burlakov V. M., Kiselev S. A., Rupasov V. I.* Localized vibrations of homogeneous anharmonic chains // *Phys. Lett. A*. 1990. Vol. 147, no. 2–3. P. 130–134. DOI: 10.1016/0375-9601(90)90880-W.
 24. *Korzniikova E. A., Bachurin D. V., Fomin S. Yu., Chetverikov A. P., Dmitriev S. V.* Instability of vibrational modes in hexagonal lattice // *Eur. Phys. J. B*. 2017. Vol. 90. P. 23. DOI: 10.1140/epjb/e2016-70595-2.
 25. *Poggi P., Ruffo S.* Exact solutions in the FPU oscillator chain // *Physica D*. 1997. Vol. 103, no. 1–4. P. 251–272. DOI: 10.1016/S0167-2789(96)00262-X.
 26. *Yoshimura K.* Modulational instability of zone boundary mode in nonlinear lattices: Rigorous results // *Phys. Rev. E*. 2004. Vol. 70, no. 1. P. 016611. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.016611.
 27. *Kosevich Yu. A., Lepri S.* Modulational instability and energy localization in anharmonic lattices at finite energy density // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 61, iss. 1. P. 299–307. DOI: 10.1103/PhysRevB.61.299.
 28. *Chechin G. M., Ryabov D. S.* Stability of nonlinear normal modes in the Fermi-Pasta-Ulam β chain in the thermodynamic limit // *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 85, no. 5. P. 056601. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.056601.
 29. *Toda M.* Studies of a non-linear lattice // *Physics Reports*. 1975. Vol. 18, no. 1. P. 1–123. DOI: 10.1016/0370-1573(75)90018-6.
 30. *Fu W., Zhang Y., Zhao H.* Universal law of thermalization for one-dimensional perturbed Toda lattices // *New J. Phys.* 2019. Vol. 21. P. 043009. DOI: 10.1088/1367-2630/ab115a.
 31. *Chechin G. M., Zhukov K. G.* Stability analysis of dynamical regimes in nonlinear systems with discrete symmetries // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73, no. 3. P. 036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.036216.
 32. *Chechin G. M., Shcherbinin S. A.* Delocalized periodic vibrations in nonlinear LC and LCR electrical chains // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015. Vol. 22, no. 1–3. P. 244–262. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.09.028.
 33. *Щербинин С. А., Гончаров П. П., Чечин Г. М.* Исследование устойчивости нелинейных нормальных мод в электрических цепях // *Известия вузов. ПНД*. 2013. Т. 21, № 2. С. 34–51. DOI: 10.18500/0869-6632-2013-21-2-34-51.
 34. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
 35. *Perko L.* *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer, 2001. 557 p. DOI: 10.1007/978-1-4613-0003-8.
 36. *Dormand J. R., Prince P. J.* A family of embedded Runge-Kutta formulae // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1980. Vol. 6, no. 1. P. 19–26. DOI: 10.1016/0771-050X(80)90013-3.

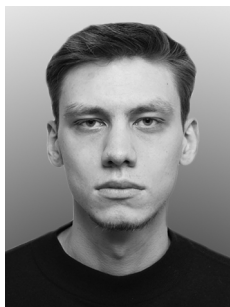
37. *Anderson E., Bai Z., Bischof C., Blackford S., Demmel J., Dongarra J., Du Croz J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., Sorensen D.* LAPACK Users' Guide. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. 407 p. DOI: 10.1137/1.9780898719604.
38. *Poincaré H.* Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Vol. I. Paris: Gauthier-Villars, 1892. 408 p.
39. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Неёштодт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // В кн.: Динамические системы – 3, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5–290.
40. *Hénon M.* Integrals of the Toda lattice // *Phys. Rev. B.* 1974. Vol. 9, no. 4. P. 1921–1923. DOI: 10.1103/PhysRevB.9.1921.
41. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover, 1964. 1046 p.

References

1. Fermi E, Pasta P, Ulam S, Tsingou M. Studies of Nonlinear Problems. Report LA-1940. New Mexico: Los Alamos Scientific Laboratory; 1955. 22 p. DOI: 10.2172/4376203.
2. Chechin GM, Novikova NV, Abramenko AA. Bushes of vibrational modes for Fermi–Pasta–Ulam chains. *Physica D.* 2002;166(3–4):208–238. DOI: 10.1016/S0167-2789(02)00430-X.
3. Chechin GM, Ryabov DS, Zhukov KG. Stability of low-dimensional bushes of vibrational modes in the Fermi–Pasta–Ulam chains. *Physica D.* 2005;203(3–4):121–166. DOI: 10.1016/j.physd.2005.03.009.
4. Dauxois Th, Khomeriki R, Piazza F, Ruffo S. The anti-FPU problem. *Chaos.* 2005;15(1):015110. DOI: 10.1063/1.1854273.
5. Flach S, Gorbach AV. Discrete breathers – advances in theory and applications. *Physics Reports.* 2008;467(1–3):1–116. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.05.002.
6. Dmitriev SV, Korznikova EA, Baimova YuA, Velarde MG. Discrete breathers in crystals. *Phys. Usp.* 2016;59(5):446–461. DOI: 10.3367/UFNe.2016.02.037729.
7. Gómez-Rojas A, Halevi P. Discrete breathers in an electric lattice with an impurity: Birth, interaction, and death. *Phys. Rev. E.* 2018;97(2):022225. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022225.
8. Saadatmand D, Xiong D, Kuzkin VA, Krivtsov AM, Savin AV, Dmitriev SV. Discrete breathers assist energy transfer to ac-driven nonlinear chains. *Phys. Rev. E.* 2018;97(2):022217. DOI:10.1103/PhysRevE.97.022217.
9. Kolesnikov ID, Shcherbinin SA, Bebikhov YuV, Korznikova EA, Shepelev IA, Kudreyko AA, Dmitriev SV. Chaotic discrete breathers in bcc lattice. *Chaos, Solitons and Fractals.* 2024;178:114339. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.114339.
10. Bachurin DV, Murzaev RT, Abdullina DU, Semenova MN, Bebikhov YuV, Dmitriev SV. Chaotic discrete breathers in bcc lattice: Effect of the first- and second-neighbor interactions. *Physica D.* 2024;470:134344. DOI: 10.1016/j.physd.2024.134344.
11. Xiong D, Zhang J. Discrete breathers: possible effects on heat transport. *Lett. Mater.* 2016;6(1):27–30. DOI: 10.22226/2410-3535-2016-1-27-30.
12. Manley ME. Impact of intrinsic localized modes of atomic motion on materials properties. *Acta Materialia.* 2010;58(8):2926–2935. DOI: 10.1016/j.actamat.2010.01.021.
13. Singh M, Morkina AY, Korznikova EA, Dubinko VI, Terentiev DA, Xiong D, Naimark OB, Gani VA, Dmitriev SV. Effect of discrete breathers on the specific heat of a nonlinear chain. *J. Nonlinear Sci.* 2021;31:12. DOI: 10.1007/s00332-020-09663-4.
14. Korznikova EA, Morkina AY, Singh M, Krivtsov AM, Kuzkin VA, Gani VA, Bebikhov YuV, Dmitriev SV. Effect of discrete breathers on macroscopic properties of the Fermi-Pasta-Ulam chain. *Eur. Phys. J. B.* 2020;93(7):123. DOI: 10.1140/epjb/e2020-10173-7.

15. Archilla JFR, Coelho SMM, Auret FD, Dubinko VI, Hizhnyakov V. Long range annealing of defects in germanium by low energy plasma ions. *Physica D*. 2015;297:56–61. DOI: 10.1016/j.physd.2015.01.001.
16. Dubinko VI, Dubinko AV. Modification of reaction rates under irradiation of crystalline solids: Contribution from intrinsic localized modes. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B*. 2013;303:133–135. DOI: 10.1016/j.nimb.2012.10.014.
17. Terentyev DA, Dubinko AV, Dubinko VI, Dmitriev SV, Zhurkin EE, Sorokin MV. Interaction of discrete breathers with primary lattice defects in bcc Fe. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 2015;23(8):085007. DOI: 10.1088/0965-0393/23/8/085007.
18. Korznikova EA, Shcherbinin SA, Ryabov DS, Chechin GM, Ekomasov EG, Barani E, Zhou K, Dmitriev SV. Delocalized nonlinear vibrational modes in graphene: Second harmonic generation and negative pressure. *Physica Status Solidi (B)*. 2019;256(1):1800061. DOI: 10.1002/pssb.201800061.
19. Bachurina OV, Kudreyko AA, Dmitriev SV, Bachurin DV. Impact of delocalized nonlinear vibrational modes on the properties of NiTi. *Phys. Lett. A*. 2025;555:130769. DOI: 10.1016/j.physleta.2025.130769.
20. Korznikova EA, Fomin SYu, Soboleva EG, Dmitriev SV. Highly symmetric discrete breather in a two-dimensional Morse crystal. *JETP Lett.* 2016;103(4):277–281. DOI: 10.1134/S0021364016040081.
21. Shcherbinin SA, Kazakov AM, Bebikhov YuV, Kudreyko AA, Dmitriev SV. Delocalized nonlinear vibrational modes and discrete breathers in β -FPUT simple cubic lattice. *Phys. Rev. E*. 2024;109(1):014215. DOI: 10.1103/PhysRevE.109.014215.
22. Abdullina DU, Kosarev IV, Evarestov RA, Kudreyko AA, Dmitriev SV. Phonon spectrum and gap quasi-breathers in B2 (CsCl) structure. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2025;199:116724. DOI: 10.1016/j.chaos.2025.116724.
23. Burlakov VM, Kiselev SA, Rupasov VI. Localized vibrations of homogeneous anharmonic chains. *Phys. Lett. A*. 1990;147(2–3):130–134. DOI: 10.1016/0375-9601(90)90880-W.
24. Korznikova EA, Bachurin DV, Fomin SYu, Chetverikov AP, Dmitriev SV. Instability of vibrational modes in hexagonal lattice. *Eur. Phys. J. B*. 2017;90(2):23. DOI: 10.1140/epjb/e2016-70595-2.
25. Poggi P, Ruffo S. Exact solutions in the FPU oscillator chain. *Physica D*. 1997;103(1–4):251–272. DOI: 10.1016/S0167-2789(96)00262-X.
26. Yoshimura K. Modulational instability of zone boundary mode in nonlinear lattices: Rigorous results. *Phys. Rev. E*. 2004;70(1):016611. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.016611.
27. Kosevich YuA, Lepri S. Modulational instability and energy localization in anharmonic lattices at finite energy density. *Phys. Rev. B*. 2000;61:299–307. DOI: 10.1103/PhysRevB.61.299.
28. Chechin GM, Ryabov DS. Stability of nonlinear normal modes in the Fermi-Pasta-Ulam β chain in the thermodynamic limit. *Phys. Rev. E*. 2012;85(5):056601. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.056601.
29. Toda M. Studies of a non-linear lattice. *Physics Reports*. 1975;18(1):1–123. DOI: 10.1016/0370-1573(75)90018-6.
30. Fu W, Zhang Y, Zhao H. Universal law of thermalization for one-dimensional perturbed Toda lattices. *New J. Phys.* 2019;21:043009. DOI: 10.1088/1367-2630/ab115a.
31. Chechin GM, Zhukov KG. Stability analysis of dynamical regimes in nonlinear systems with discrete symmetries. *Phys. Rev. E*. 2006;73(3):036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.036216.
32. Chechin GM, Shcherbinin SA. Delocalized periodic vibrations in nonlinear LC and LCR electrical chains. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015;22(1–3):244–262. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.09.028.
33. Shcherbinin SA, Goncharov PP, Chechin GM. Investigation of the stability of nonlinear normal

- modes in electrical circuits. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2013;21(2):34–51 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2013-21-2-34-51
34. Yakubovich VA, Starzhinskii VM. *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications*. M.: Nauka; 1972. 718 p. (in Russian).
 35. Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer; 2001. 557 p. DOI: 10.1007/978-1-4613-0003-8.
 36. Dormand JR, Prince PJ. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1980;6(1):19–26. DOI: 10.1016/0771-050X(80)90013-3.
 37. Anderson E, Bai Z, Bischof C, Blackford S, Demmel J, Dongarra J, Du Croz J, Greenbaum A, Hammarling S, McKenney A, Sorensen D. *LAPACK Users' Guide*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 1999. 407 p. DOI: 10.1137/1.9780898719604.
 38. Poincaré H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Vol. I. Paris: Gauthier-Villars; 1892. 408 p.
 39. Arnold VI, Kozlov VV, Neishtadt AI. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*. In: *Advances in Science and Technology. Contemporary Problems of Mathematics. Fundamental Directions*. Moscow: VINITI; 1985. P. 5–290.
 40. Hénon M. Integrals of the Toda lattice. *Phys. Rev. B*. 1974;9(4):1921–1923. DOI: 10.1103/PhysRevB.9.1921.
 41. Abramowitz M, Stegun IA. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover; 1964. 1046 p.



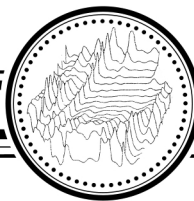
Кедров Александр Алексеевич — родился в Санкт-Петербурге (2001). Окончил Физико-механический институт Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (СПбПУ). Работает в Высшей школе теоретической механики и математической физики СПбПУ и в Институте проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН). Научные интересы: динамика кристаллических решеток, нелинейная динамика.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
 Россия, 199178 Санкт-Петербург, Большой пр. ВО, дом 61
 Институт проблем машиноведения РАН
 E-mail: alexandrkedrov@outlook.com
 ORCID: 0009-0003-4738-5972
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1317628



Щербинин Степан Александрович — родился в Ростове-на-Дону (1986). Окончил физический факультет Южного федерального университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (Институт проблем сверхпластичности металлов, Уфа) по направлению «Физика конденсированного состояния». Работает в Высшей школе теоретической механики и математической физики СПбПУ в должности доцента. Область научных интересов: нелинейная динамика, теоретическая механика.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
 E-mail: stefanshcherbinin@gmail.com
 ORCID: 0000-0001-7124-6647
 AuthorID (eLibrary.Ru): 829615




Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2)

Научная статья
УДК 532.5.011

DOI: 10.18500/0869-6632-003205
EDN: PJFTEP

Управление движением кругового профиля с помощью присоединенных точечных источников и внутренних механизмов

Е. В. Ветчанин , Е. М. Артемова

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
E-mail: eugene186@mail.ru, liz-artemova2014@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.08.2025, принята к публикации 17.11.2025,
опубликована онлайн 9.12.2025, опубликована 31.03.2026

Аннотация. Целью работы является исследование задачи управления плоскопараллельным движением кругового профиля в идеальной жидкости за счет изменения интенсивности присоединенных источников и вращения внутреннего ротора. **Методы.** Для построения математической модели используется описание движения жидкости на основе комплексного потенциала, который позволяет вычислить силовое воздействие жидкости на движущееся тело. Для решения задачи управления используется допущение о кусочно-постоянной форме управляющих воздействий, что позволяет выполнить явное интегрирование уравнений движения аналитическими методами. **Результаты.** Построены уравнения плоскопараллельного движения кругового профиля (в общем случае неуравновешенного) с произвольным количеством присоединенных источников. Движение источников относительно профиля и их интенсивности задаются явными функциями времени. Выполнено явное интегрирование уравнений движения в случае уравновешенного профиля с одним присоединенным источником для кусочно-постоянных управлений. **Заключение.** Явные решения уравнений движения были использованы для построения маневров поворота на месте и продвижения. Сформулирован алгоритм перемещения профиля в окрестности заданной траектории на основе попеременного использования элементарных маневров. Предложенный алгоритм траекторного управления является конструктивным доказательством управляемости рассмотренной системы. Построенное таким образом решение задачи управления может использоваться в качестве основы для решения этой же задачи в случае гладких управлений.

Ключевые слова: управление движением, идеальная жидкость, круговой профиль, присоединенный источник.

Благодарности. Работа Ветчанина Е. В. выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (FEWS-2024-0007). Работа Артемовой Е. М. выполнена в Уральском математическом центре (соглашение № 075-02-2025-1609). Авторы выражают благодарность Килину А. А. и Полехину И. Ю. за обсуждение результатов, а также анонимным рецензентам за внимательное прочтение работы и ценные замечания.

Для цитирования: Ветчанин Е. В., Артемова Е. М. Управление движением кругового профиля с помощью присоединенных точечных источников и внутренних механизмов // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 2. С. 223–246. DOI: 10.18500/0869-6632-003205. EDN: PJFTEP

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Control of the motion of a circular foil using attached sources and internal mechanisms

E. V. Vetchanin[✉], *E. M. Artemova*

Udmurt State University, Izhevsk, Russia
E-mail: ✉eugene186@mail.ru, liz-artemova2014@yandex.ru

Received 30.08.2025, accepted 17.11.2025, available online 9.12.2025, published 31.03.2026

Abstract. The purpose of this paper is to analyze the problem of controlling the plane-parallel motion of a circular foil in an ideal fluid by changing the intensity of attached sources and rotation of the internal rotor. *Methods.* To develop the mathematical model, use is made of the description of fluid motion based on a complex potential, which allows calculation of the fluid forces acting on the moving body. To solve the control problem, the assumption of the piecewise constant form of control actions is made, which allows the equations of motion to be explicitly integrated by analytical methods. *Results.* Equations of the plane-parallel motion of a circular (generally unbalanced) foil with an arbitrary number of attached sources are derived. The motion of the sources relative to the foil and their intensities are given by explicit functions of time. An explicit integration of the equations of motion is performed for the case of a balanced foil with one attached source for piecewise constant controls. *Conclusion.* Explicit solutions to the equations of motion are used to design gaits for in-place turning and forward movement. An algorithm for moving the foil in the neighborhood of a prescribed trajectory by alternately using elementary gaits is formulated. The proposed algorithm of trajectory control is a constructive proof of the controllability of the system considered. The solution to the control problem obtained in this way can be used as a basis for solving the same problem in the case of smooth controls.

Keywords: the motion control, ideal fluid, circular foil, attached source.

Acknowledgements. The work of E. V. Vetchanin was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of Russia (FEWS-2024-0007). The work of E. M. Artemova was performed at the Ural Mathematical Center (Agreement No. 075-02-2025-1609). The authors thank A. A. Kilin and I. Y. Polekhin for discussion of results, and anonymous reviewers for careful reading of the work and valuable comments.

For citation: Vetchanin EV, Artemova EM. Control of the motion of a circular foil using attached sources and internal mechanisms. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(2):223–246. DOI: 10.18500/0869-6632-003205

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Для описания движения твердого тела в жидкости используются различные математические модели. Наиболее полное описание строится на основе совместного численного решения уравнений Ньютона–Эйлера и уравнений Навье–Стокса. Данный подход является трудоемким для проведения исчерпывающего анализа динамики системы, однако позволяет получить некоторые полезные результаты относительно корректировки простых математических моделей [1] или идентификации их параметров [2]. Отметим также, что при некоторых допущениях относительно движения твердого тела и его геометрии оказывается возможным полуаналитическое исследование на основе асимптотических методов [3].

Достаточно большой класс моделей, описывающих плоскопараллельное движение твердого тела, может быть получен на основе модели идеальной жидкости. В частности, это модель совместного движения кругового цилиндра и точечных вихрей [4, 5]. В недавних работах рассматривалась задача взаимодействия кругового цилиндра с неподвижной точечной особенностью, в частности, с источником [6–8]. В работе [8] было показано, что при наличии собственной циркуляции у цилиндра динамика системы качественно зависит от типа неподвижной точечной особенности. Качественные отличия возникают и в случае тела эллиптической формы [9].

В работах [6–9] положение точечной особенности предполагалось фиксированным в некоторой неподвижной системе координат. Представляет интерес иная постановка задачи, когда точечная особенность движется вместе с телом на некотором фиксированном расстоянии от него. Такая постановка задачи возникла в недавней работе [10], где рассматривалось движение уравновешенного эллиптического тела с присоединенным вихрем.

В данной работе мы рассматриваем задачу о плоскопараллельном движении кругового профиля с ротором и прикрепленными источниками. Такая система может интерпретироваться как модель реактивного водоструйного движителя. В первую очередь нас будут интересовать частные решения уравнений движения, реализующие элементарные маневры (поворота и продвижения), комбинация которых позволит реализовать произвольное перемещение профиля.

1. Математическая модель

Основные обозначения и допущения. Рассмотрим плоскопараллельное движение неуравновешенного кругового профиля с ротором в присутствии N точечных источников в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Будем считать, что жидкость совершает потенциальное движение и покоится на бесконечности, а ее движение вокруг профиля является бесциркуляционным.

Для построения математической модели введем следующие обозначения для параметров системы:

- m_c — масса профиля, кг/м;
- I_c — центральный момент инерции профиля, кг · м;
- R — радиус профиля, м;
- σ — расстояние между геометрическим центром профиля и центром масс системы «профиль + ротор», м;
- m_r — масса ротора, кг/м;
- I_r — центральный момент инерции ротора, кг · м;
- Ω — угловая скорость вращения ротора, являющаяся заданной функцией времени, с^{-1} ;
- q_n — интенсивность n -го источника, в общем случае являющаяся заданной функцией времени, $n = 1, \dots, N$, $\text{м}^2/\text{с}$.

Поскольку мы рассматриваем плоскопараллельное движение, то величины m_c , m_r , I_c , I_r считаются отнесенными к единице длины профиля.

Для описания движения рассматриваемой системы введем две системы координат: неподвижную (инерциальную) OXY и подвижную Cxy , жестко связанную с профилем (см. рис. 1). Будем считать, что начало подвижной системы координат C совпадает с геометрическим центром профиля, а центр масс системы лежит на оси Cx .

Положение профиля относительно неподвижной системы координат будем задавать радиус-вектором его геометрического центра $\mathbf{R}_c = (X_c, Y_c)$, а ориентацию профиля — углом ϑ между положительными направлениями осей OX и Cx . Положение n -го источника относительно профиля будем задавать

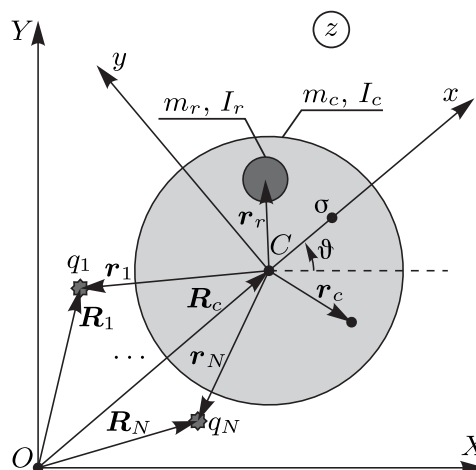


Рис. 1. Схематическое изображение неуравновешенного кругового профиля и точечных источников

Fig. 1. A schematic representation of an unbalanced circular foil and the point sources

радиус-вектором $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n)$, записанным в проекциях на оси подвижной системы координат. Величины, задающие конфигурацию системы, показаны на рис. 1.

Замечание 1. Радиус-вектор $\mathbf{R}_n = (X_n, Y_n)$, задающий положение n -го источника относительно неподвижной системы координат, может быть вычислен следующим образом:

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_c + \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \mathbf{r}_n.$$

Движение жидкости и ее силовое воздействие. Движение профиля определяется распределением давления по его границе. В свою очередь, в рамках модели потенциального течения идеальной жидкости поле давления связано с распределением скорости и потенциалом течения посредством интеграла Коши–Лагранжа [11]. Для описания движения жидкости каждой точке плоскости Cxy поставим в соответствие комплексное число $z = x + iy$, тогда комплексный потенциал течения может быть записан в виде [11, 12]:

$$W = -\frac{R^2 u}{z} + \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{2\pi} \ln(z - z_n) + \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{2\pi} \ln\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_n\right), \quad (1)$$

где $z_n = x_n + iy_n$ – комплекснозначная функция времени, задающая положение n -го источника в подвижной системе координат Cxy . Выражение (1) содержит комплексную величину $u = u_x + iu_y$, составленную из проекций скорости геометрического центра профиля на оси системы координат Cxy .

Главный вектор сил давления (f_x, f_y) , действующих на профиль, в проекциях на подвижные оси может быть вычислен в комплексной форме с помощью метода, предложенного в [13]:

$$f_x + if_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz + \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{dSz^*}{dt} + \rho Su + i\rho \oint z \frac{dW}{dz} dz \right). \quad (2)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, кг/м³, $S = \pi R^2$ – площадь профиля, произведение Sz^* имеет смысл статического момента площади S и для рассматриваемого профиля равно нулю, интегрирование выполняется вдоль его границы, (\cdot) – комплексное сопряжение, а оператор дифференцирования по времени определен следующим образом:

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \left[\frac{\delta}{\delta t} + i\omega \right] (\cdot),$$

где символ $\frac{\delta}{\delta t}$ обозначает дифференцирование по времени относительно подвижной системы координат, вращающейся с угловой скоростью ω .

Подставив комплексный потенциал (1) в формулу (2) и вычислив интегралы, получим явное представление главного вектора сил давления

$$f_x + if_y = \hat{f}_x + i\hat{f}_y - \rho\pi R^2 \dot{u} - i\rho\pi R^2 \omega u, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_x + i\hat{f}_y = & -\frac{\rho}{2\pi} \left(\left(\sum_{j=1}^N q_j \right) \sum_{n=1}^N \frac{q_n z_n}{|z_n|^2} - \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_n q_j z_j}{\bar{z}_n z_j - R^2} \right) + \rho R^2 \sum_{n=1}^N q_n \frac{\bar{u} z_n^2}{|z_n|^4} + \\ & + \rho R^2 \sum_{n=1}^N q_n \frac{\dot{\bar{z}}_n z_n^2}{|z_n|^4} - \rho R^2 \sum_{n=1}^N \dot{q}_n \frac{z_n}{|z_n|^2} - i\rho R^2 \omega \sum_{n=1}^N \frac{q_n z_n}{|z_n|^2}. \quad (4) \end{aligned}$$

Вычисленные таким образом компоненты f_x, f_y отнесены к единице длины цилиндра и имеют размерность Н/м. Последние два слагаемых в выражении (3) определяют реакцию жидкости на ускоренное движение тела, описывают эффект присоединенных масс [14].

Замечание 2. Вычисление главного вектора сил давления может быть выполнено также в вещественной форме

$$f_x = - \oint p dy, \quad f_y = \oint p dx,$$

где давление p определяется с помощью интеграла Коши–Лагранжа. Однако на практике оказываются проще вычисления в комплексной форме с использованием формулы (2), построенной на основе интеграла Коши–Лагранжа.

Отметим, что для кругового профиля момент сил, действующих со стороны жидкости, вычисленный относительно его геометрического центра, равен нулю. С одной стороны, это связано с тем, что в модели идеальной жидкости отсутствуют касательные напряжения. С другой стороны, линии действия сил давления для кругового профиля проходят через его геометрический центр.

Уравнения движения. Следуя известному из динамики твердого тела подходу [15], для построения уравнений движения определим проекции p_x, p_y импульса системы «профиль + ротор + жидкость» на подвижные оси и момент импульса p_θ относительно геометрического центра профиля как

$$p_x = m u_x, \quad p_y = m u_y + (m_c + m_r) \sigma \omega, \quad p_\theta = (m_c + m_r) \sigma u_y + I \omega + k(t), \quad (5)$$

$$m = m_c + m_r + \rho \pi R^2, \quad I = I_c + m_c (x_c^2 + y_c^2) + I_r + m_r (x_r^2 + y_r^2),$$

где $k(t) = I_r \Omega(t)$ – момент импульса ротора, x_c и y_c – компоненты радиус-вектора r_c положения центра масс профиля, x_r и y_r – компоненты радиус-вектора r_r положения центра масс ротора. Отметим, что эффект присоединенных масс учитывается как дополнительный импульс, при этом сама присоединенная масса включается в эффективную массу m в виде третьего слагаемого.

С учетом введенных обозначений и выбора систем координат уравнения движения профиля можно представить в форме уравнений Ньютона–Эйлера:

$$\dot{p}_x = p_y \omega + \hat{f}_x, \quad \dot{p}_y = -p_x \omega + \hat{f}_y, \quad \dot{p}_\theta = p_x u_y - p_y u_x, \quad (6)$$

$$u_x = \frac{p_x}{m}, \quad u_y = \frac{I p_y - (m_c + m_r) \sigma (p_\theta - k(t))}{m I - (m_c + m_r)^2 \sigma^2}, \quad \omega = \frac{-(m_c + m_r) \sigma p_y + m (p_\theta - k(t))}{m I - (m_c + m_r)^2 \sigma^2}.$$

Поскольку выражения для \hat{f}_x и \hat{f}_y зависят от скоростей u_x, u_y, ω , а положения и интенсивности источников считаются заданными функциями времени, то уравнения (6) образуют замкнутую систему уравнений.

Дополним (6) кинематическими соотношениями

$$\dot{Z}_c = u e^{i\theta}, \quad \dot{\theta} = \omega \quad (7)$$

для восстановления траектории движения профиля в абсолютном пространстве. Здесь $Z_c = X_c + i Y_c$ – комплексная координата геометрического центра профиля в неподвижной системе координат.

Далее для описанной системы рассмотрим следующую задачу управления:

переместить профиль из начальной точки в конечную вблизи заданной траектории за счет изменения интенсивностей q_n присоединенных источников (в частности, одного источника) и момента импульса ротора $k(t)$. В начальный и конечный момент движения потребуем, чтобы система находилась в состоянии покоя ($u_x = u_y = 0, \omega = 0, k = 0, q_n = 0, n = 1, \dots, N$).

Отметим, что присоединенный источник можно рассматривать как упрощенную модель водоструйного реактивного двигателя. Положительная интенсивность соответствует выбросу жидкости двигателем, отрицательная — втягиванию жидкости, а нулевая — выключенному двигателю.

2. Точные решения уравнений движения уравновешенного профиля с одним источником

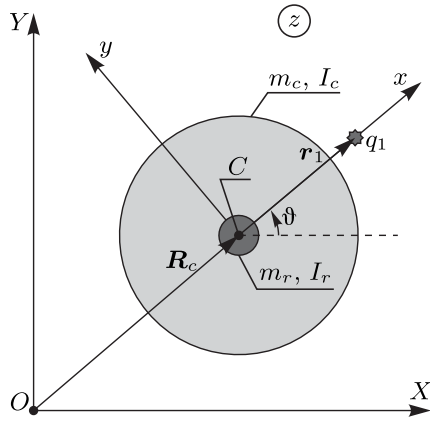


Рис. 2. Схематическое изображение уравновешенного кругового профиля и присоединенного точечного источника

Fig. 2. A schematic representation of a balanced circular foil and an attached point source

Наиболее простым для аналитического исследования и дальнейшего построения алгоритма управления является случай уравновешенного профиля ($\sigma = 0$), в частности, с одним присоединенным источником, расположенным на положительной части оси Cx , то есть $z_1 = r > R$, где r — расстояние между геометрическим центром профиля и источником (см. рис. 2). Для более компактной записи уравнений движения выполним перенормировку

$$\frac{\rho R^2 q_1}{m r^2} \mapsto q_1, \quad (8)$$

тогда уравнения (6) и кинематические соотношения (7) примут вид

$$\dot{p}_x = q_1 p_x + \omega p_y + \beta q_1^2 - m r \dot{q}_1, \quad \dot{p}_y = -\omega p_x - q_1 p_y - m r q_1 \omega, \quad \dot{p}_\vartheta = 0, \quad (9)$$

$$\dot{Z}_c = m^{-1} (p_x + i p_y) e^{i\vartheta}, \quad (10)$$

$$\dot{\vartheta} = \omega. \quad (11)$$

Здесь $\omega = I^{-1} (p_\vartheta - k(t))$, $\beta = \frac{m^2 r^3}{2\pi \rho R^2 (r^2 - R^2)}$.

Из третьего уравнения (9) мы видим, что p_ϑ является первым интегралом:

$$p_\vartheta = f = \text{const}, \quad (12)$$

причем его нулевой уровень соответствует движению из состояния покоя ($\omega = 0$, $k = 0$). Наличие первого интеграла (12) позволяет вместо $k(t)$ рассматривать угловую скорость $\omega(t)$ в качестве нового управления.

Далее рассмотрим кусочно-постоянные управления, которые в общем случае можно записать в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \omega \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^M \begin{pmatrix} Q_j \\ \Omega_j \end{pmatrix} (\Theta(t - \tau_j) - \Theta(t - \tau_{j+1})), \quad Q_j = \text{const}, \quad \Omega_j = \text{const}, \quad (13)$$

где $\Theta(t)$ — функция Хевисайда, Q_j , Ω_j — величины управляющих воздействий (интенсивность источника и угловая скорость тела соответственно) на промежутке времени $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = 1, \dots, M$.

Тогда, во-первых, интегрирование первого уравнения (9) на промежутках $t \in [\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ показывает, что импульс p_x в моменты времени τ_j будет изменяться скачком:

$$p_x(\tau_j + 0) = p_x(\tau_j - 0) - mr(Q_j - Q_{j-1}). \quad (14)$$

Во-вторых, на промежутках времени $(\tau_j, \tau_{j+1}]$ уравнение (11) эволюции угла ϑ интегрируется тривиально:

$$\vartheta(t) = \vartheta(\tau_j) + \Omega_j(t - \tau_j), \quad t \in (\tau_j, \tau_{j+1}]. \quad (15)$$

В-третьих, на промежутках времени $(\tau_j, \tau_{j+1}]$ система (9) становится линейной неоднородной системой ОДУ с постоянными коэффициентами, матричная форма записи которой имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{J}\mathbf{p} + \mathbf{b}, \quad t \in (\tau_j, \tau_{j+1}], \quad (16) \\ \mathbf{p} &= \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} Q_j & \Omega_j \\ -\Omega_j & -Q_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta Q_j^2 \\ -mrQ_j\Omega_j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Явное решение уравнений (16) в совокупности с (15) позволяет проинтегрировать уравнение движения геометрического центра профиля (10) и найти его движение в абсолютном пространстве.

Вид решения уравнений (16) определяется собственными числами матрицы \mathbf{J} (здесь и далее для краткости у величин Q и Ω опущен индекс j):

$$\lambda^2 = \alpha = Q^2 - \Omega^2 = -\det \mathbf{J}. \quad (17)$$

При этом возможны три качественно различных случая: *гиперболический* $\alpha > 0$, *эллиптический* $\alpha < 0$ и *вырожденный* $\alpha = 0$. Укажем неподвижные точки уравнений (16), их явные решения, а также траектории движения геометрического центра профиля, соответствующие данным решениям.

Неподвижные точки системы. При $\alpha \neq 0$ матрица \mathbf{J} невырождена и у системы (16) всегда существует неподвижная точка

$$\mathbf{p}^* = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{b} = -\frac{mrQ}{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha - C^*Q^2 \\ C^*\Omega Q \end{pmatrix}, \quad C^* = 1 - \frac{\beta}{mr} = 1 - \frac{mr^2}{2\rho R^2(r^2 - R^2)}, \quad (18)$$

являющаяся седловой при $\alpha > 0$ и точкой типа центр при $\alpha < 0$.

При $\alpha \rightarrow 0$ в общем случае неподвижная точка (18) уходит на бесконечность. Однако если параметры системы таковы, что $C^* = 0$ (например, при $m = \rho R^2$ и $r = \sqrt{2}R$), то координаты неподвижной точки будут конечными:

$$\mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} -mrQ \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

В гиперболическом случае (при $\alpha > 0$) собственные числа матрицы \mathbf{J} являются действительными. Решение уравнений (16) и (10) может быть записано в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}^* + C_1 \begin{pmatrix} Q + s\sqrt{\alpha} \\ -\Omega \end{pmatrix} e^{s\sqrt{\alpha}(t-\tau)} + C_2 \begin{pmatrix} \Omega \\ -Q - s\sqrt{\alpha} \end{pmatrix} e^{-s\sqrt{\alpha}(t-\tau)}, \quad (20) \\ \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2(\alpha + sQ\sqrt{\alpha})} \begin{pmatrix} -Q - s\sqrt{\alpha} & -\Omega \\ \Omega & Q + s\sqrt{\alpha} \end{pmatrix} (\mathbf{p}(\tau) - \mathbf{p}^*), \quad s = \text{sign } Q, \end{aligned}$$

$$Z(t) = Z(\tau) + e^{i\theta(\tau)} \left(Z^* + \frac{C_1(Q + s\sqrt{\alpha} - i\Omega)}{m(s\sqrt{\alpha} + i\Omega)} \left(e^{(s\sqrt{\alpha} + i\Omega)(t-\tau)} - 1 \right) + \frac{C_2(\Omega - i(Q + s\sqrt{\alpha}))}{m(-s\sqrt{\alpha} + i\Omega)} \left(e^{(-s\sqrt{\alpha} + i\Omega)(t-\tau)} - 1 \right) \right), \quad (21)$$

где

$$Z^* = \frac{p_x^* + ip_y^*}{m} \begin{cases} \frac{e^{i\Omega(t-\tau)} - 1}{i\Omega}, & \Omega \neq 0, \\ t - \tau, & \Omega = 0. \end{cases}$$

Данный случай будет подробно рассмотрен в разделе 3.

В **эллиптическом случае** (при $\alpha < 0$) собственные числа матрицы \mathbf{J} являются чисто мнимыми. Решение уравнений (16) и (10) может быть записано в следующей форме:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^* + \begin{pmatrix} C_1\Omega \\ -C_1Q + C_2\sqrt{|\alpha|} \end{pmatrix} \cos \sqrt{|\alpha|}(t - \tau) + \begin{pmatrix} C_2\Omega \\ -C_2Q - C_1\sqrt{|\alpha|} \end{pmatrix} \sin \sqrt{|\alpha|}(t - \tau), \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Omega\sqrt{|\alpha|}} \begin{pmatrix} \sqrt{|\alpha|} & 0 \\ Q & \Omega \end{pmatrix} (\mathbf{p}(\tau) - \mathbf{p}^*).$$

$$Z(t) = Z(\tau) + e^{i\theta(\tau)} \left(\frac{p_x^* + ip_y^*}{i\Omega m} \left(e^{i\Omega(t-\tau)} - 1 \right) + \frac{C_1 - iC_2}{2} \cdot \frac{\Omega - \sqrt{|\alpha|} - iQ}{m} \cdot \frac{e^{i(\Omega + \sqrt{|\alpha|})(t-\tau)} - 1}{i(\Omega + \sqrt{|\alpha|})} + \frac{C_1 + iC_2}{2} \cdot \frac{\Omega + \sqrt{|\alpha|} - iQ}{m} \cdot \frac{e^{i(\Omega - \sqrt{|\alpha|})(t-\tau)} - 1}{i(\Omega - \sqrt{|\alpha|})} \right). \quad (23)$$

Данный случай будет подробно изучен в разделе 4.

В **вырожденном случае** (при $\alpha = 0$) матрица \mathbf{J} имеет двукратное нулевое собственное число. Решение уравнений (16) и (10) может быть записано в следующей форме:

$$\mathbf{p}(t) = \left(\frac{\Omega(b_1 + sb_2)t^2}{2} + \Omega C_1 t - C_2 \right) \begin{pmatrix} s \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{b}t + \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \text{sign } \Omega Q, \quad (24)$$

$$C_1 = p_x(0) + sp_y(0), \quad C_2 = p_y(0).$$

$$Z(t) = Z(0) + e^{i\theta(\tau)} \left(\frac{\Omega(b_1 + sb_2)}{2} \cdot \frac{s - i}{m} \left(\left(\frac{(t - \tau)^2}{i\Omega} + \frac{2(t - \tau)}{\Omega^2} - \frac{2}{i\Omega^3} \right) e^{i\Omega(t-\tau)} + \frac{2}{i\Omega^3} \right) + \frac{\Omega C_1(s - i) + b_1 + ib_2}{m} \left(\left(\frac{(t - \tau)}{i\Omega} + \frac{1}{\Omega^2} \right) e^{i\Omega(t-\tau)} - \frac{1}{\Omega^2} \right) + \frac{-C_2(s - i) + C_1}{m} \left(\frac{1}{i\Omega} e^{i\Omega(t-\tau)} - \frac{1}{i\Omega} \right) \right). \quad (25)$$

Решение (24), (25) приведено для полноты картины и в дальнейшем рассматриваться не будет.

3. Анализ гиперболического случая

3.1. Основные свойства решения. В гиперболическом случае одна из компонент импульса профиля $p = (p_x, p_y)$ испытывает экспоненциальный рост, а само решение (20) является неустойчивым к малым возмущениям. Кроме того, все траектории (21) движения геометрического центра профиля являются некомпактными, следовательно, невозможно реализовать поворот профиля на месте без смещения его геометрического центра.

Отдельно рассмотрим случай

$$Q < 0, \quad \Omega = 0, \quad p_y = 0, \quad (26)$$

когда вектор импульса эволюционирует вдоль устойчивой сепаратрисы седловой неподвижной точки (18). При этом реализуется прямолинейное движение без неограниченного роста скорости, то есть возможно реализовать *маневр продвижения*, который будет обсуждаться в следующем подразделе.

3.2. Маневр продвижения. Несмотря на неустойчивость (относительно малых возмущений p_y) движения по сепаратрисе $p_y = 0$, укажем условия, выполнение которых позволяет применять его в качестве *маневра продвижения*.

На инвариантном многообразии $p_y = 0$ (при $\omega = 0$) уравнение эволюции p_x примет вид

$$\dot{p}_x = q_1 p_x + \beta q_1^2 - mr \dot{q}_1. \quad (27)$$

Будем считать, что профиль движется в течение промежутка времени $t \in [0, T]$ под действием некоторого управления $q_1(t)$, в частности, кусочно-постоянного. В начальный и конечный моменты времени должны выполняться условия

$$p_x(+0) = -mr q_1(+0), \quad p_x(T-0) = mr q_1(T-0), \quad (28)$$

то есть до начала действия управления профиль покоится, а при выключении управления (его мгновенном обнулении) профиль приводится в состояние покоя.

Оказывается, что второе из условий (28) невозможно удовлетворить при любом законе управления $q_1(t)$. Чтобы это показать, выполним следующие замены:

$$P = p_x + mr q_1, \quad q_1 = \dot{G}, \quad (29)$$

тогда уравнение (27) и условия (28) примут вид

$$\dot{P} = \dot{G}P + (\beta - mr)\dot{G}^2, \quad (30)$$

$$P(0) = P(T) = 0. \quad (31)$$

Здесь G — любая первообразная функции q_1 . Напомним, что $\beta = \frac{m^2 r^3}{2\pi \rho R^2 (r^2 - R^2)}$.

Решение уравнения (30) представляется следующей квадратурой:

$$P = (\beta - mr) \int_0^t \dot{G}^2(\tau) e^{G(t)-G(\tau)} d\tau \quad (32)$$

Начальное условие $P(0) = 0$ выполняется автоматически. Но поскольку подинтегральная функция в (32) неотрицательная, то $P(t) \neq 0$ при любых $t > 0$ и $\beta - mr \neq 0$.

Таким образом, использование движения на инвариантном многообразии $p_y = 0$ (при $\omega = 0$) в качестве *маневра продвижения* возможно, только если параметры системы удовлетворяют соотношению

$$\beta - mr = 0. \quad (33)$$

Отметим, что условие (33) эквивалентно обнулению величины C^* , определенной в (18), и, как было указано выше, реализуется, например, при $m = \rho \pi R^2$ и $r = \sqrt{2}R$.

4. Анализ эллиптического случая

4.1. Основные свойства решения (22), (23). Рассмотрим решение (22), описывающее изменение импульсов p_x и p_y , при условии, что движение осуществляется из состояния покоя ($p_x(-0) = p_y(-0) = 0$) под действием управления

$$q_1 = Q\Theta(t), \quad \omega = \Omega\Theta(t), \quad Q = \text{const}, \quad \Omega = \text{const}, \quad (34)$$

то есть в выражении (13) положено $M = 1$, $Q_1 = Q$, $\Omega_1 = \Omega$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 \rightarrow +\infty$.

Для указанных выше условий при $t > 0$ выражение (22), в зависимости от знаков Q и Ω , задает четыре периодических функции времени с периодом $T = 2\pi/\sqrt{|\alpha|}$, симметричных относительно осей $p_x = 0$, $p_y = 0$ (см. рис. 3). Данные решения для краткости в некоторых случаях будем называть *циклами*. Моменту $t = +0$ в силу (14) соответствует точка

$$p_x = -mrQ, \quad p_y = 0. \quad (35)$$

Для описанных циклов геометрический центр профиля движется либо по квазипериодической, либо по периодической траектории (см. рис. 4). Периодические движения реализуются, если в выражении (23) частоты Ω , $\Omega + \sqrt{|\alpha|}$ и $\Omega - \sqrt{|\alpha|}$ соизмеримы. Это возникает, если параметры Q и Ω управления (34) связаны соотношением:

$$Q^2 = \left(1 - \frac{j^2}{n^2}\right) \Omega^2, \quad j, n \in \mathbb{N}, \quad j < n. \quad (36)$$

При этом период обращения по траектории равен $T_Z = \frac{2\pi n}{\Omega} = \frac{2\pi(n \pm j)}{\Omega \pm \sqrt{|\alpha|}}$.

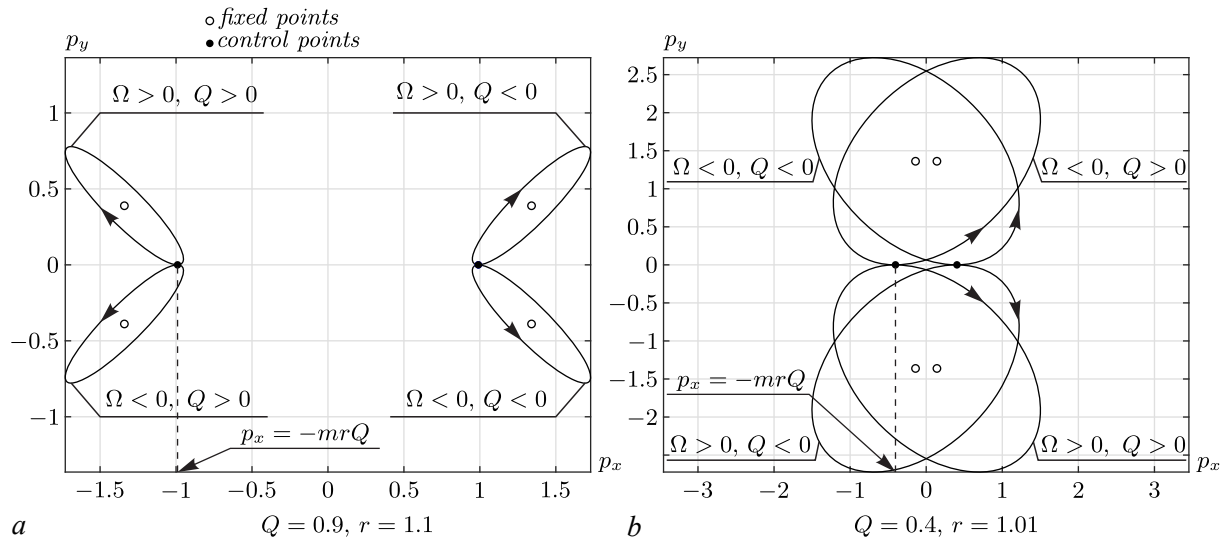


Рис. 3. Примеры симметричных друг другу периодических решений, задаваемых (22), для закона управления (34). Значения параметров $\rho = 1$, $m = 1$, $R = 1$

Fig. 3. Examples of symmetric periodic solutions given by (22), under the control (34). Parameter values: $\rho = 1$, $m = 1$, $R = 1$

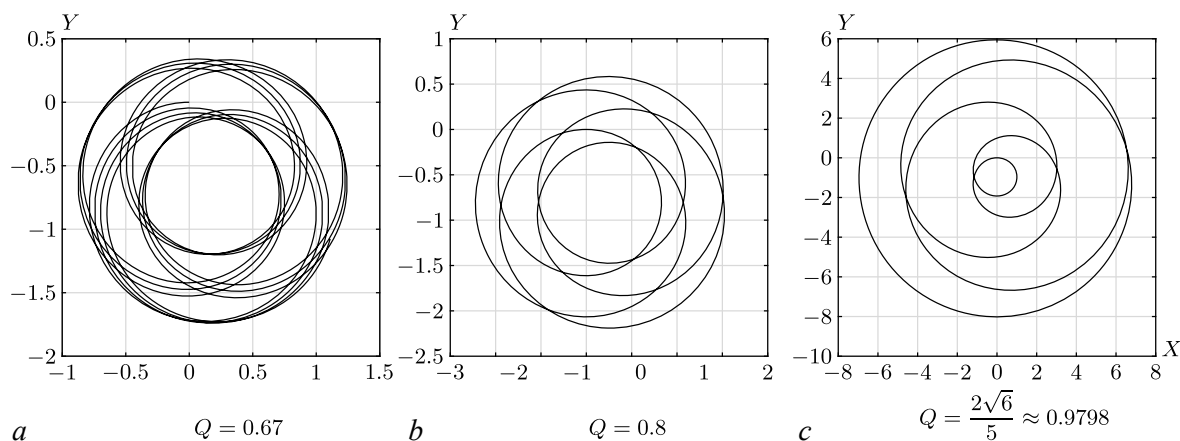


Рис. 4. Примеры траекторий движения при $\Omega = 1$ и различных значениях Q . Значения параметров: $m = 1, I = 0.5, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

Fig. 4. Examples of trajectories for $\Omega = 1$ and different values of Q . Parameter values: $m = 1, I = 0.5, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

4.2. Маневр поворота на месте. Выше было указано, что в общем случае траектории движения геометрического центра профиля являются компактными (см. примеры на рис. 4). Отдельно выделяется случай $Q = 0$, когда одна из частот $\Omega \pm \sqrt{|\alpha|}$, входящих в выражение для траектории (23), обнуляется.

При $Q = 0$ решение (22), (23) примет вид

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega(t - \tau) & \sin \omega(t - \tau) \\ -\sin \omega(t - \tau) & \cos \omega(t - \tau) \end{pmatrix} \mathbf{p}(\tau), \quad (37)$$

$$Z(t) = Z(\tau) + e^{i\vartheta(\tau)} \frac{p_x(\tau) + ip_y(\tau)}{m} (t - \tau), \quad (38)$$

$$\vartheta(t) = \vartheta(\tau) + \omega(t - \tau), \quad (39)$$

что соответствует равномерному вращению профиля вокруг его геометрического центра, движущегося прямолинейно с постоянной скоростью. Здесь τ — некоторый начальный момент времени.

В частном случае при $\mathbf{p}(\tau) = 0$ профиль будет равномерно вращаться вокруг неподвижного геометрического центра. Данный режим движения может быть использован в качестве *маневра для изменения ориентации профиля*. Физически данный маневр выполняется только за счет вращения ротора и основан на законе сохранения момента импульса системы (12). Благодаря соотношению (12) может быть найден момент импульса ротора k (и, соответственно, его угловая скорость Ω), обеспечивающий вращение профиля с требуемой угловой скоростью ω .

Замечание 3. Отметим, что в эллиптическом случае некомпактные траектории возможны только при нулевой интенсивности источника. Запишем условие возникновения резонанса, то есть обращения в ноль частот $\Omega \pm \sqrt{|\alpha|}$, входящих в (23):

$$\Omega \pm \sqrt{|\alpha|} = \Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - Q^2} = \frac{Q^2}{\Omega \mp \sqrt{\Omega^2 - Q^2}} = 0.$$

Полученное выражение обращается в ноль только при $Q = 0$.

4.3. Маневры продвижения. Периодичность изменения импульсов (22), а также симметрия данного решения относительно смены знаков Q и Ω позволяют реализовать несколько маневров продвижения. Начнем обсуждение с наиболее простого.

1. Рассмотрим управление вида¹

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \omega \end{pmatrix} = (\Theta(t) - \Theta(t - T)) \begin{pmatrix} Q \\ \Omega \end{pmatrix}, \quad Q = \text{const}, \quad \Omega = \text{const}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{|\alpha|}}, \quad (40)$$

время действия которого совпадает с периодом T изменения импульсов p_x и p_y . Для определенности будем считать, что $Q > 0$ и $\Omega > 0$.

Если до момента включения управления профиль покоится, то в силу (14) при $t = 0$ импульс испытает скачок и примет значение

$$\mathbf{p}(+0) = (-mrQ, 0). \quad (41)$$

Далее в течение времени действия управления вектор \mathbf{p} опишет эллиптическую кривую и вернется к значению (41). При $t = T$ происходит обнуление управляющих воздействий (40), а первая компонента вектора импульса испытает скачок на величину

$$\mathbf{p}(T + 0) = \mathbf{p}(T - 0) + (mrQ, 0), \quad (42)$$

что приведет профиль в состояние покоя. Все описанные этапы изменения вектора импульса проиллюстрированы на рис. 5.

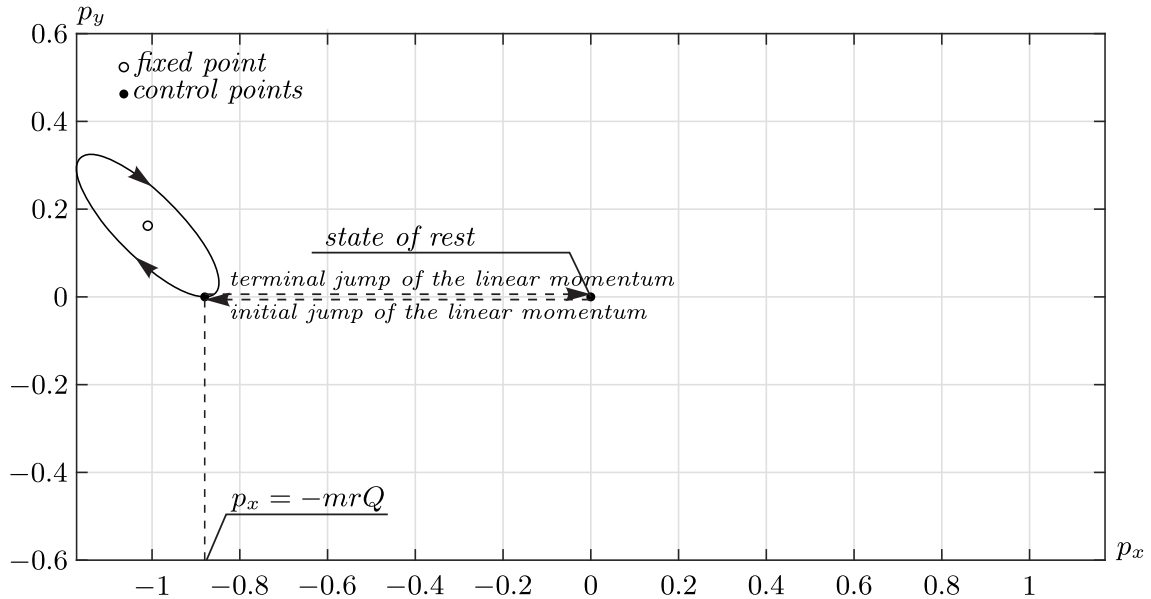


Рис. 5. Изменение вектора импульса под действием управления (40). Значения параметров: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

Fig. 5. Changes in the linear momentum vector under the control (40). Parameter values: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

¹Данный закон управления получается, если в (13) положить $M = 1$, $Q_1 = Q$, $\Omega_1 = \Omega$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = T$.

Далее, используя (23), вычислим смещение геометрического центра профиля под действием управления (40). Оказывается, данная величина может быть записана как функция от соотношения $g = Q/\Omega$:

$$\Delta Z = Z(T) - Z(0) = 2\sigma \exp \left(i \left(\vartheta(0) + \frac{\pi}{\sqrt{1-g^2}} + \frac{\pi}{2} \right) \right) \sin \frac{\pi}{\sqrt{1-g^2}}, \quad (43)$$

$$\sigma = r \left(\frac{2mr^2 - 4\rho R^2(r^2 - R^2)}{2\rho R^2(r^2 - R^2)} + i \frac{mr^2 g}{2\rho R^2(r^2 - R^2)} \right).$$

На рис. 6 представлена зависимость $|\Delta Z|$ от g , а также примеры траекторий движения геометрического центра профиля для некоторых значений g . Величина $|\Delta Z|$ обращается в ноль при

$$g = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (44)$$

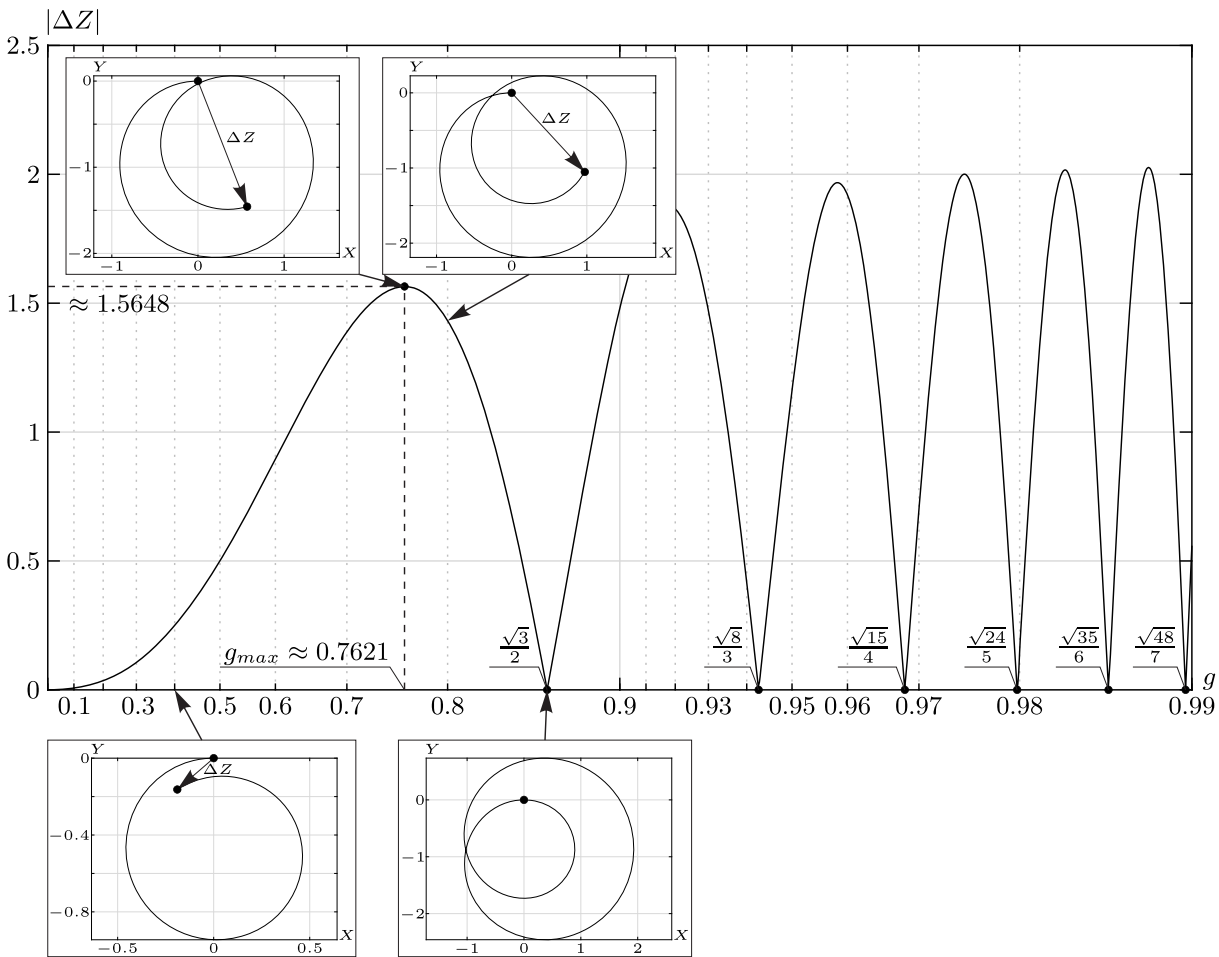


Рис. 6. Зависимость $|\Delta Z|$ от g и примеры траекторий движения геометрического центра профиля для управления (40). Значения параметров: $m = 1, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

Fig. 6. Dependence of $|\Delta Z|$ on g and examples of trajectories of the geometric center of the foil for the control (40). Parameter values: $m = 1, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

что соответствует соотношению (36) при $j = 1$ и $n > 1$. Значение $n = 1$ соответствует маневру поворота на месте. Приведенная зависимость имеет счетное количество максимумов. Положение первого максимума обозначим g_{\max} , а соответствующую ему величину продвижения — S_{\max} .

Мы видим, что за счет выбора значений Q и Ω можно переместить геометрический центр профиля в заданном направлении на заданное расстояние, не превосходящее некоторой предельной величины. В частности, в примерах, представленных в разделе 5, мы будем рассматривать только ситуацию, когда $g \in [0, g_{\max}]$. Также из выражения (43) видно, что направление перемещения может быть задано за счет выбора начальной ориентации профиля $\vartheta(0)$.

Таким образом, описанное движение, возникающее под действием управления (40), может использоваться в качестве *маневра продвижения*.

2. Для построения еще одного маневра продвижения обратимся к симметрии решения (22) относительно смены знака Q . Для определенности будем считать $\Omega > 0$. Переход между циклами, изображенными в верхней полуплоскости рис. 3, *a* или нижней полуплоскости рис. 3, *b*, возможен за счет смены знака Q (для определенности с положительного на отрицательный) при использовании кусочно-постоянного управления вида²:

$$\begin{aligned} q_1 &= Q (\Theta(t) - \Theta(t - t_s)) - Q (\Theta(t - t_s) - \Theta(t - 2t_s)), \\ \omega &= \Omega (\Theta(t) - \Theta(t - 2t_s)). \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь момент переключения t_s находится из условия $p_x(t_s) \Big|_{Q>0, \Omega>0} = -mrQ$ и задается выражением

$$t_s = \frac{2}{\sqrt{|\alpha|}} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{|\alpha|}}{Q} \right). \quad (46)$$

В начальный момент при включении управления (45) профиль приобретает импульс

$$\mathbf{p} = (-mrQ, 0), \quad (47)$$

который в течение промежутка времени $t \in (0, t_s)$ изменяется непрерывно по закону (22). В момент времени $t = t_s$ компонента импульса p_x принимает свое начальное значение, но при смене знака q_1 получает приращение

$$p_x(t_s + 0) = p_x(t_s - 0) + 2mrQ = mrQ \quad (48)$$

и меняет знак на противоположный. Здесь происходит переход на симметричный к предыдущему цикл, при движении по которому в течение промежутка времени $t \in (t_s, 2t_s)$ импульс приходит к значению

$$\mathbf{p} = (mrQ, 0). \quad (49)$$

В момент времени $t = 2t_s$ происходит обнуление управляющих воздействий, вследствие чего составляющая импульса p_x претерпевает скачок

$$p_x(2t_s + 0) = p_x(2t_s - 0) - mrQ = 0 \quad (50)$$

и профиль переходит в состояние покоя. Описанные этапы изменения импульсов проиллюстрированы на рис. 7.

²Данный закон управления получается, если в (13) положить $M = 2$, $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = t_s$, $\tau_3 = 2t_s$.

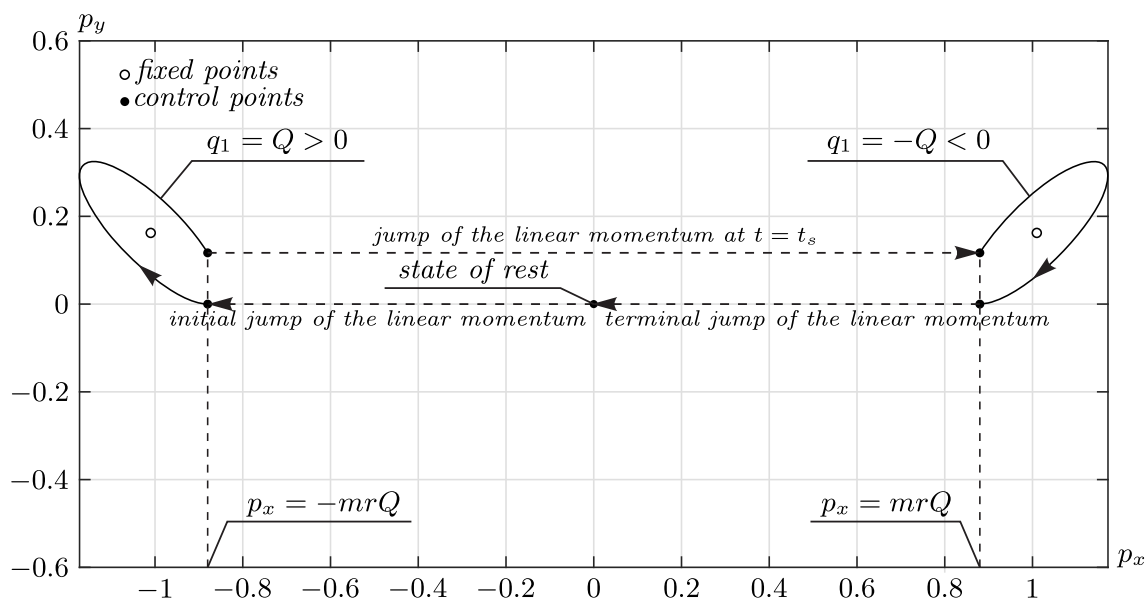


Рис. 7. Изменение вектора импульса под действием управления (45). Значения параметров: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

Fig. 7. Changes in the linear momentum vector under the control (45). Parameter values: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

Траектория движения геометрического центра профиля для управления (45) вследствие скачка p_x будет иметь точку возврата (cusp). Аналитическое выражение для зависимости перемещения ΔZ от g будет иметь более громоздкий вид и здесь не приводится. На рис. 8 приведен вид зависимости $|\Delta Z|$ от g . По сравнению с предыдущим вариантом управления данная зависимость имеет более сложный вид. Нули $|\Delta Z|$ соответствуют периодическим движениям геометрического центра профиля. Также на рис. 8 приведены примеры траекторий, реализующиеся при некоторых значениях g .

Как видно из рис. 8, управление (45) позволяет выполнить перемещение профиля на заданное расстояние при подходящем выборе значений Q и Ω . Требуемое направление перемещения обеспечивается выбором угла $\vartheta(0)$.

Замечание 4. При изменении в управлениях (45) знака угловой скорости на противоположный

$$\begin{aligned} q_1 &= Q (\Theta(t) - \Theta(t - t_s)) - Q (\Theta(t - t_s) - \Theta(t - 2t_s)), \quad Q > 0, \\ \omega &= -\Omega (\Theta(t) - \Theta(t - 2t_s)), \quad \Omega > 0 \end{aligned} \quad (51)$$

получается маневр, схожий с описанным.

3. При обращении в управлении (45) знака q_1 , то есть³

$$\begin{aligned} q_1 &= -Q (\Theta(t) - \Theta(t - t_s)) + Q (\Theta(t - t_s) - \Theta(t - 2t_s)), \quad Q > 0, \\ \omega &= \Omega (\Theta(t) - \Theta(t - 2t_s)), \quad \Omega > 0 \end{aligned} \quad (52)$$

³ Данный закон управления получается, если в (13) положить $M = 2$, $Q_1 = -Q$, $Q_2 = Q$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = t_s$, $\tau_3 = 2t_s$.

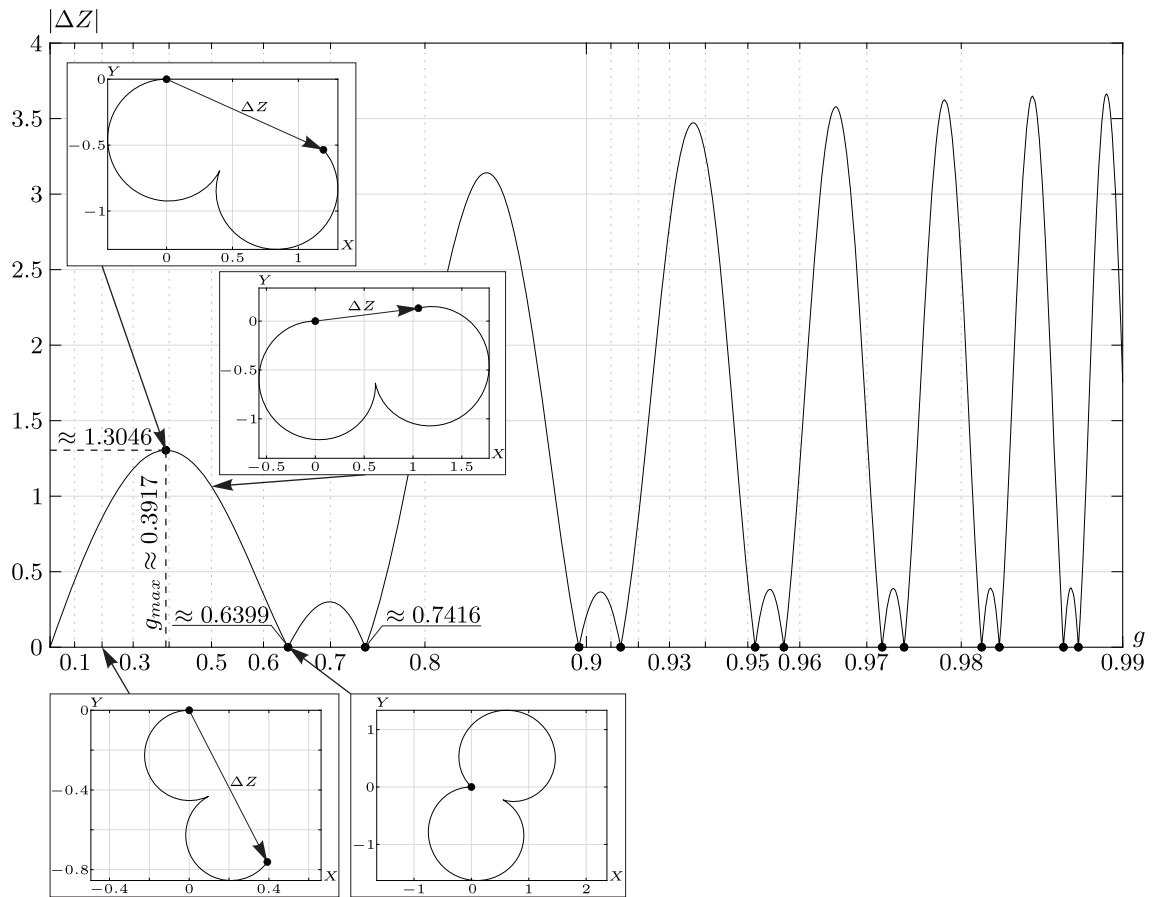


Рис. 8. Зависимость $|\Delta Z|$ от g и примеры траекторий движения геометрического центра профиля для управления (45). Значения параметров: $m = 1, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

Fig. 8. Dependence of $|\Delta Z|$ on g and examples of trajectories of the geometric center of the foil for the control (45). Parameter values: $m = 1, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

возникает еще один маневр продвижения. Здесь момент переключения t_s находится из условия $p_x(t_s) \Big|_{Q < 0, \Omega > 0} = -mrQ$ и задается выражением

$$t_s = \frac{2}{\sqrt{|\alpha|}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{|\alpha|}}{Q}. \quad (53)$$

Для управления (52) импульсы p_x и p_y изменяются, как показано на рис. 9.

Зависимость величины перемещения $|\Delta Z|$ геометрического центра профиля для закона управления (52) от параметра g будет качественно отличаться от приведенных выше. Данная зависимость является монотонной (см. рис. 10), однако траектории движения профиля будут качественно схожи с траекториями для предыдущего маневра с законом управления (45) и имеют точку возврата, соответствующую скачку импульса.

Замечание 5. При изменении в управлениях (52) знака угловой скорости на противоположный

$$\begin{aligned} q_1 &= -Q(\Theta(t) - \Theta(t - t_s)) + Q(\Theta(t - t_s) - \Theta(t - 2t_s)), \quad Q > 0, \\ \omega &= -\Omega(\Theta(t) - \Theta(t - 2t_s)), \quad \Omega > 0 \end{aligned} \quad (54)$$

получается маневр, схожий с описанным.

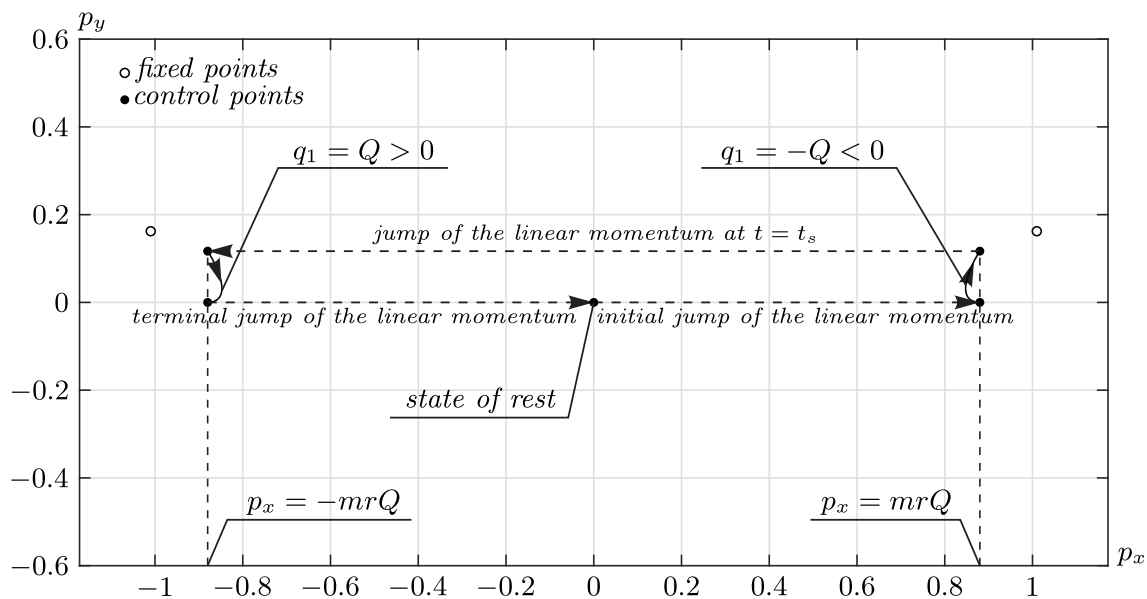


Рис. 9. Изменение вектора импульса под действием управления (52). Значения параметров: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

Fig. 9. Changes in the linear momentum vector under the control (52). Parameter values: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

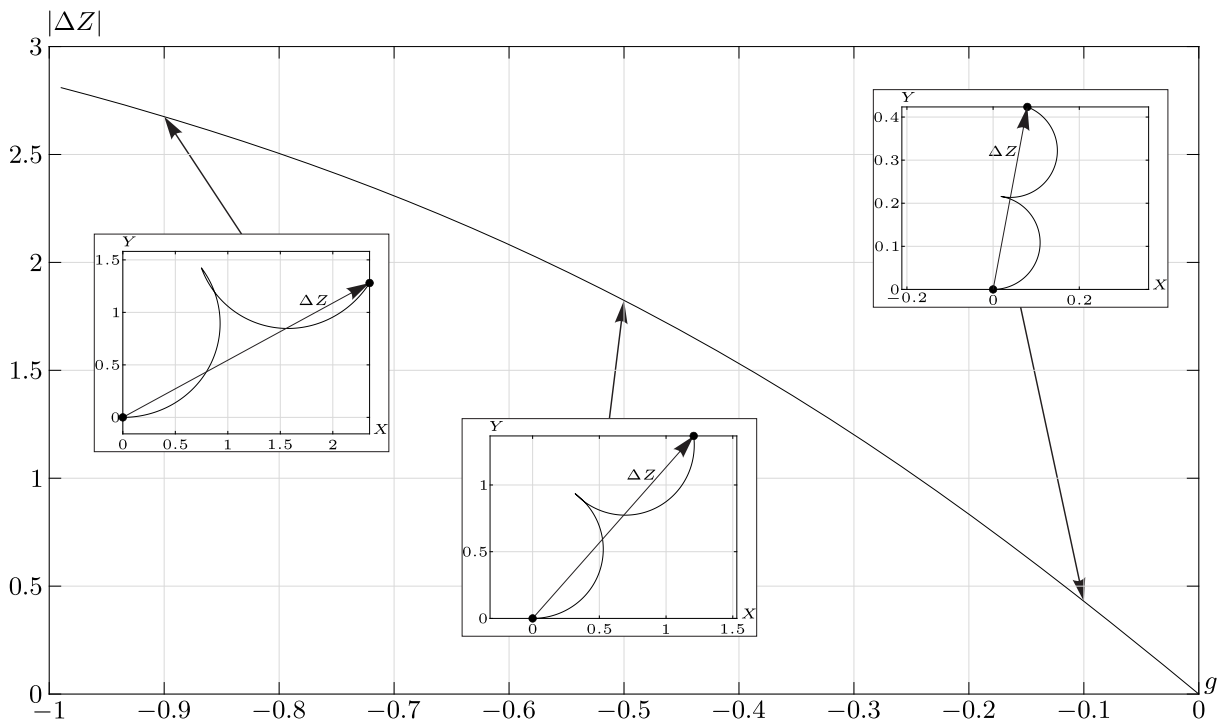


Рис. 10. Зависимость $|\Delta Z|$ от g и примеры траекторий движения геометрического центра профиля для управления (52). Значения параметров: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $\vartheta(0) = 0$

Fig. 10. Dependence of $|\Delta Z|$ on g and examples of trajectories of the geometric center of the foil for the control (52). Parameter values: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $\vartheta(0) = 0$

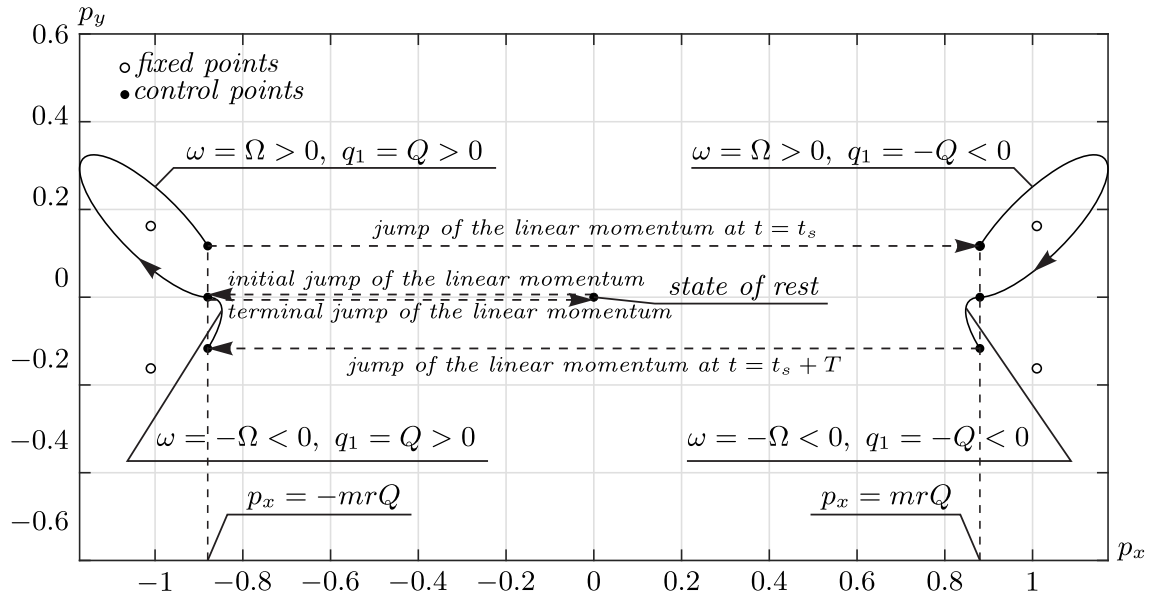


Рис. 11. Изменение вектора импульса под действием управления (55). Значения параметров: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

Fig. 11. Changes in the linear momentum vector under the control (55). Parameter values: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$, $Q = 0.8$, $\Omega = 1$

4. Последний из маневров продвижения, который будет приведен в данном разделе, возникает под действием управления⁴

$$\begin{aligned}
 q_1 &= Q(\Theta(t) - \Theta(t-t_s)) - Q(\Theta(t-t_s) - \Theta(t-t_s-T)) + Q(\Theta(t-t_s-T) - \Theta(t-2T)), \\
 \omega &= \Omega(\Theta(t) - \Theta(t-2t_s)) - \Omega(\Theta(t-2t_s) - \Theta(t-2T)).
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

Здесь время t_s находится по формуле (46).

Под действием управления (55) импульсы p_x и p_y изменяются, как показано на рис. 11. По сути, рассматриваемый маневр является комбинацией маневров двух предыдущих типов.

На рис. 12 приведена зависимость величины перемещения $|\Delta Z|$ от g . Мы видим, что приведенная зависимость не имеет нулей при $g > 0$, то есть под действием управления (55) не возникает периодических траекторий. Отметим, для управления (55) траектории будут иметь точку перегиба (см. примеры на рис. 12). Данная точка соответствует смене знака угловой скорости.

Предложенные выше маневры продвижения выполняются за счет использования обоих управляющих воздействий (одновременного вращения ротора и работы источника/стока, реализующего либо выброс жидкости, либо ее втягивание). Некоторые из предложенных маневров продвижения предполагают изменение знака интенсивности источника, что физически соответствует переключению с выбрасывания жидкости на втягивание и обратно. В последнем из предложенных маневров используется также изменение угловой скорости на противоположное, что подразумевает смену направления вращения ротора.

⁴Данный закон управления получается, если в (13) положить $M = 4$, $Q_1 = Q_4 = Q$, $Q_2 = Q_3 = -Q$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $\Omega_3 = \Omega_4 = -\Omega$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = t_s$, $\tau_3 = 2t_s$, $\tau_4 = t_s + T$, $\tau_5 = 2T$.

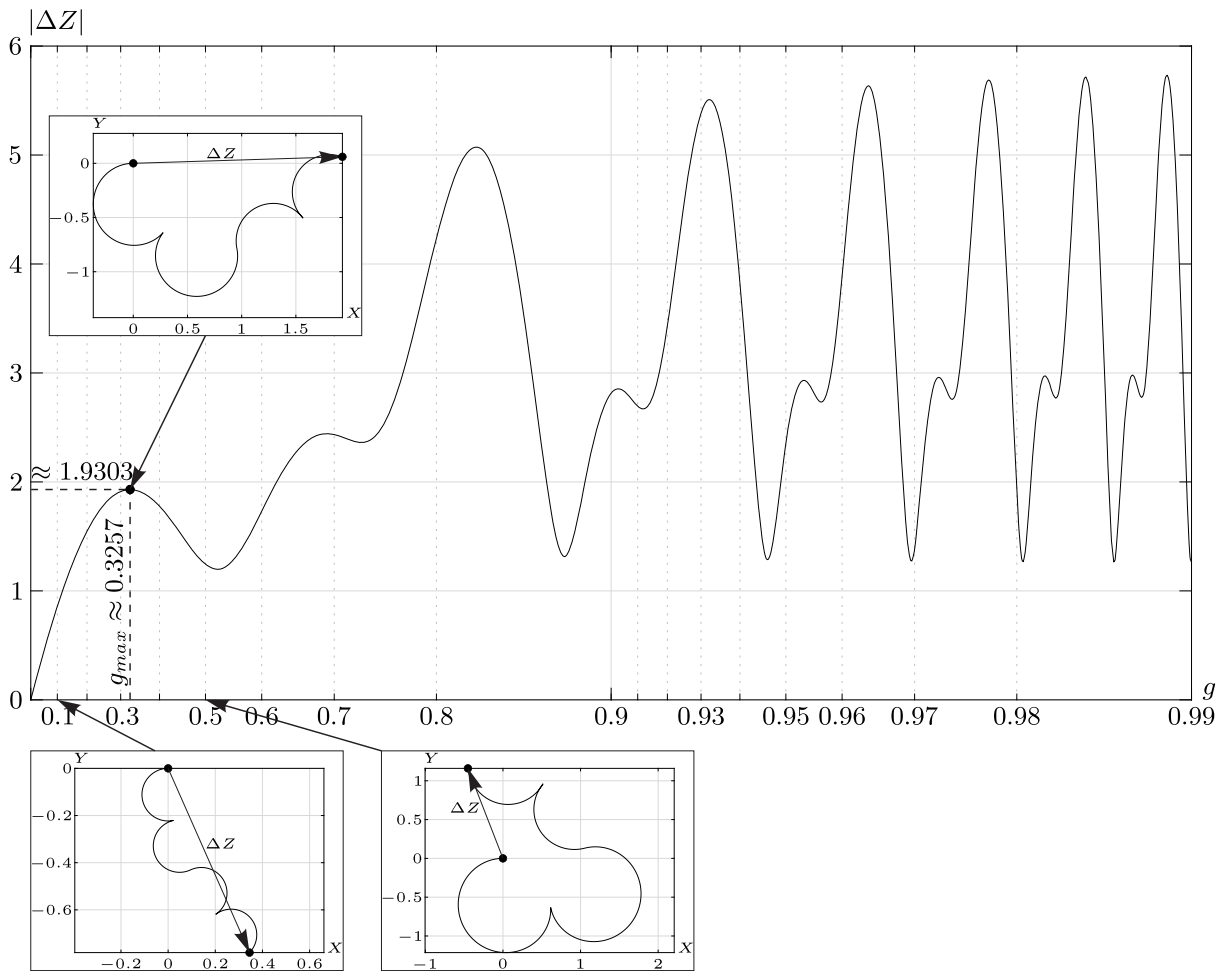


Рис. 12. Зависимость $|\Delta Z|$ от g и примеры траекторий движения геометрического центра профиля для управления (55). Значения параметров: $m = 1, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

Fig. 12. Dependence of $|\Delta Z|$ on g and examples of trajectories of the geometric center of the foil for the control (55). Parameter values: $m = 1, \rho = 1, R = 1, r = 1.1, \vartheta(0) = 0$

5. Алгоритм управления

Рассмотренные в разделах 4.2 и 4.3 маневры поворота и продвижения позволяют построить алгоритм управления движением профиля в окрестности заданной траектории, что решает задачу, сформулированную в разделе 1. Напомним, что в гиперболическом случае (см. раздел 3) не удастся реализовать маневр поворота на месте. Кроме того, маневр продвижения возможен только при ограничении (33) на значения параметров системы. Поэтому гиперболический случай далее не будет использоваться при построении алгоритма управления.

Пусть задана траектория $\gamma: (X(s), Y(s))$, где s — параметр кривой, в окрестности которой необходимо переместить профиль из начальной точки в конечную. Выберем на кривой γ некоторым образом точки $X_j = X(s_j), Y_j = Y(s_j)$. Перемещение между соседними точками может быть выполнено с помощью любого из описанных выше маневров продвижения, то есть управлений вида (40), (45), (52) или (55). Однако расстояние между этими точками не должно превосходить некоторой предельной величины, определяемой выбранным маневром и параметрами системы. В частности, мы будем рассматривать только значения $g \leq g_{\max}$.

Для определения параметров управлений Q и Ω необходимо решить нелинейное уравнение

$$|\Delta Z(g_j)| = \sqrt{(X_{j+1} - X_j)^2 + (Y_{j+1} - Y_j)^2} \quad (56)$$

относительно g_j . Поскольку $|\Delta Z|$ зависит от соотношения $g = Q/\Omega$, то для выполнения маневра продвижения значение угловой скорости $\Omega = \Omega_j$ может быть выбрано произвольно, тогда интенсивности $Q_j = g_j \Omega_j$.

После определения параметров управления Q_j и Ω_j необходимо переориентировать профиль для продвижения в нужном направлении. Для нахождения начальной ориентации ϑ_j профиля необходимо решить уравнение

$$\arg \Delta Z(\vartheta_j) \Big|_{g=g_j} = \arg ((X_{k+1} - X_k) + i(Y_{k+1} - Y_k)). \quad (57)$$

Доворот профиля до необходимого положения может быть выполнен с помощью маневра поворота, описанного в разделе 4.2.

В качестве одного из примеров зададим следующую траекторию движения:

$$X = a \cos s, \quad Y = b \sin s, \quad s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad s \Big|_{t=0} = 0, \quad (58)$$

которую разобьем на четыре части. На рис. 13 приведены траектории движения профиля, реализованные с помощью различных маневров продвижения.

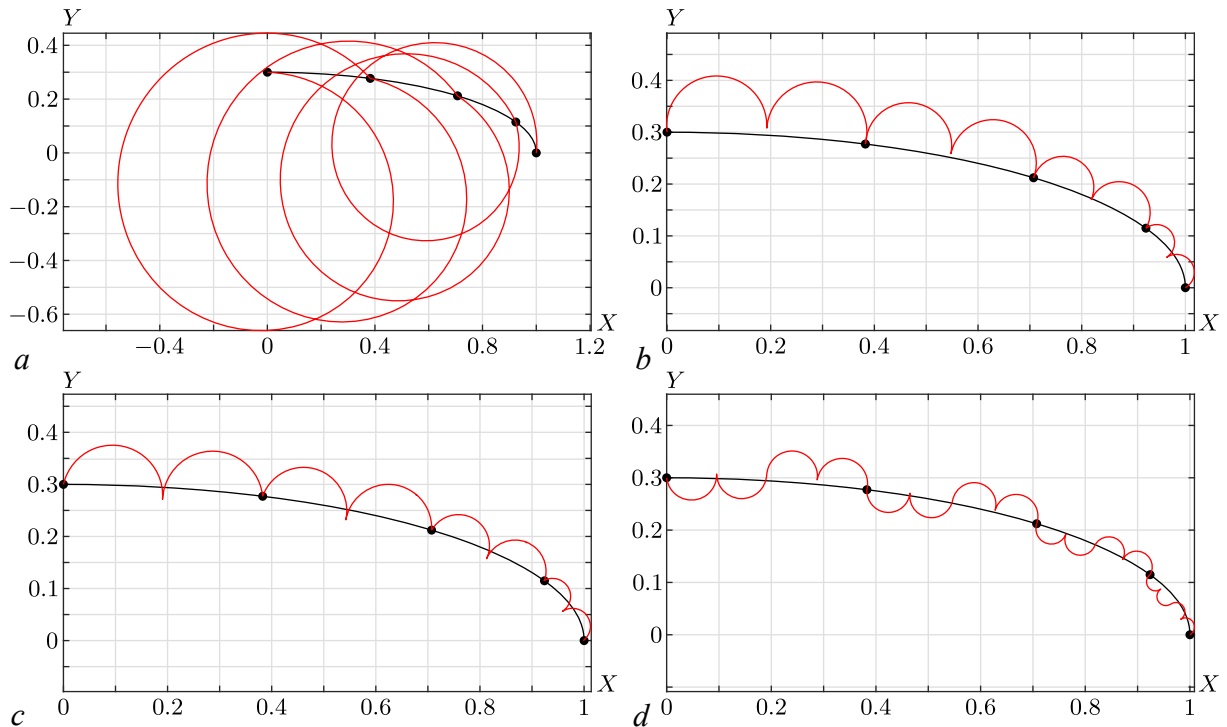


Рис. 13. Траектории, реализованные с помощью управления (40) (a), управления (45) (b), управления (52) (c), управления (55) (d), в окрестности кривой (58). Значения параметров: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$

Fig. 13. Trajectories generated by control (40) (a), control (45) (b), control (52) (c), control (55) (d) in a neighborhood of the curve (58). Parameter values: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$

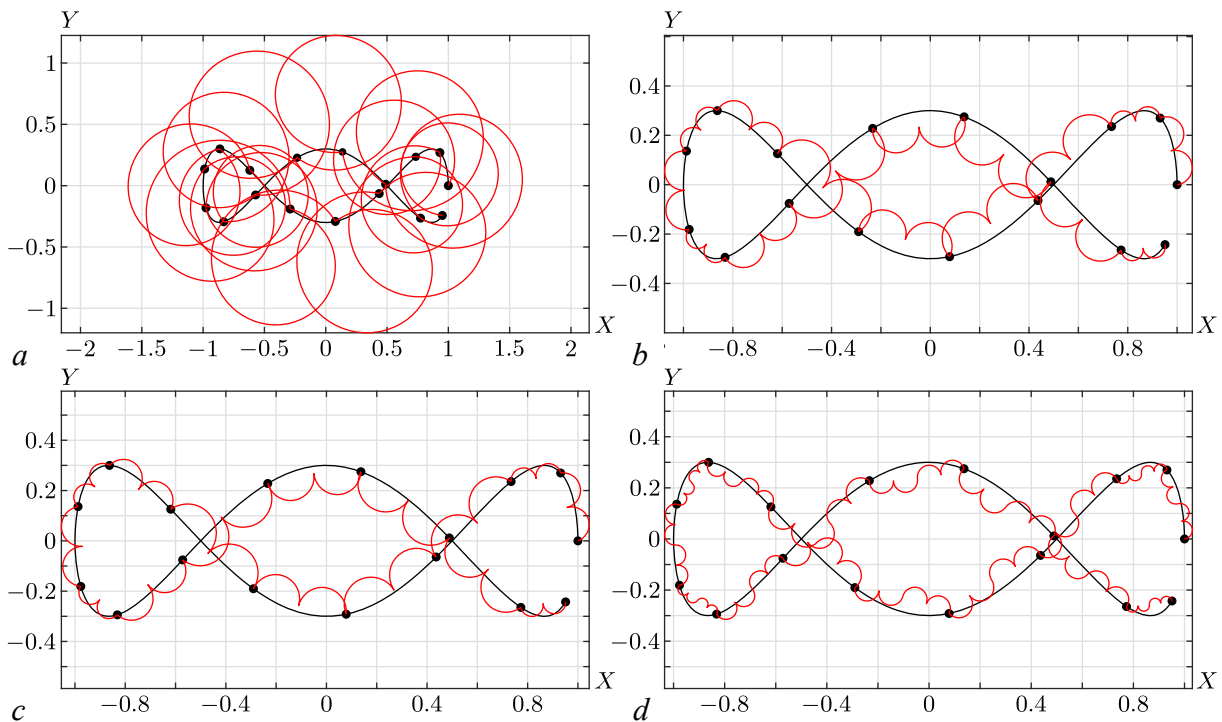


Рис. 14. Траектории, реализованные с помощью управления (40) (a), управления (45) (b), управления (52) (c), управления (55) (d), в окрестности кривой (59). Значения параметров: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$

Fig. 14. Trajectories generated by control (40) (a), control (45) (b), control (52) (c), control (55) (d) in a neighborhood of the curve (59). Parameter values: $m = 1$, $\rho = 1$, $R = 1$, $r = 1.1$

Использование управления (40) для реализации маневра продвижения приводит к возникновению спиралевидной траектории. При этом профиль удаляется от заданной траектории на величину, соизмеримую с ее длиной. Наиболее близкая к заданной траектория реализуется при использовании управления (55).

В качестве еще одного примера зададим следующую траекторию:

$$X = a \cos s, \quad Y = b \sin 3s, \quad s \in [0, 1.9\pi], \quad s|_{t=0} = 0. \quad (59)$$

На рис. 14 приведены траектории движения профиля, реализованные с помощью различных маневров продвижения.

Из рис. 14 видно, что предложенный подход с применением управлений (45), (52), (55) для продвижения обеспечивает движение профиля в окрестности траекторий даже сложной формы.

Заключение

Предложенный в данной работе алгоритм управления перемещением уравновешенного кругового профиля в окрестности заданной траектории основан на кусочно-постоянном изменении интенсивности присоединенного источника и угловой скорости. Несмотря на простоту, использование управлений такого вида позволило свести решение рассмотренной задачи к анализу явных решений уравнений движения.

Проведенный в работе анализ может быть легко обобщен и на случай нескольких присоединенных источников, который также приводит к интегрированию системы линейных дифференци-

альных уравнений с постоянными коэффициентами относительно скоростей и явным квадратурам для траектории движения.

Дальнейшее развитие представленного исследования может быть осуществлено в следующих направлениях:

1. Изучение управляемости уравновешенного кругового профиля в случае кусочно-гладких управлений.

Эта задача будет сводиться к анализу неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решение которой может быть построено в виде квадратур или численно. Первый этап анализа будет заключаться в установлении ограничений на параметры управлений, обеспечивающих остановку при их отключении, и построении зависимости ΔZ от этих параметров. Дальнейшее решение задачи траекторного управления и конструктивное доказательство управляемости можно выполнить по аналогии с данной работой.

Отметим, что гладкие управления могут быть построены по-разному, например, в виде кусочных полиномов в классе функций C^1 и более высокой гладкости, на основе тригонометрических функций, а также в форме схожей с (13):

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \omega \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^M \begin{pmatrix} Q_j \\ \Omega_j \end{pmatrix} \frac{\tanh(k(t - \tau_j)) - \tanh(k(t - \tau_{j+1}))}{2}, \quad Q_j = \text{const}, \quad \Omega_j = \text{const}.$$

Здесь параметр k регулирует плавность переключения интенсивностей управляющих воздействий. Ожидается, что при $k \gg 1$ результаты будут близки к полученным в данной статье.

2. Исследование управляемости неуравновешенного кругового профиля и профилей некруговой формы, например, эллиптической.

Решение данных задач приводит к анализу системы нелинейных дифференциальных уравнений, явный вид которых для кругового профиля приведен в разделе 1. Для построения уравнений движения некруговых профилей необходимо будет вычислить комплексный потенциал движения жидкости, найти силу и момент сил давления, действующих на тело. Анализ управляемости для данных задач (независимо от выбора формы управляющих воздействий) будет также сводиться к решению проблемы остановки при отключении управлений, поиску элементарных маневров и построению зависимости ΔZ от параметров управления.

3. Исследование эффективности предложенного алгоритма управления согласно какому-либо критерию качества (быстродействие или энергоэффективность) при возможных ограничениях на интенсивности. Отметим, что при решении данной задачи может быть использован подход, рассмотренный в [16].

4. Учет диссипативных и инерционных свойств среды в математической модели.

Математическая модель данной задачи может быть основана на включении в уравнения движения линейных или квадратичных по скоростям слагаемых [17].

Список литературы

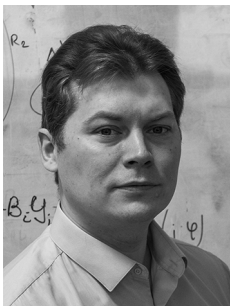
1. *Vetchanin E. V., Valieva A. R.* Analysis of the force and torque arising during the oscillatory motion of a Joukowski foil in a fluid // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2024. Vol. 20, no. 1. P. 79–93. DOI: 10.20537/nd231210.
2. *Борисов А. В., Кузнецов С. П., Мамаев И. С., Тененев В. А.* Описание движения тела эллиптического сечения в вязкой несжимаемой жидкости с помощью модельных уравнений, реконструированных на основе обработки данных // *Письма в ЖТФ.* 2016. Т. 42, № 17. С. 9–19.

3. *Анисимов В. Д., Егоров А. Г., Нуриев А. Н., Зайцева О. Н.* Пропульсивное движение цилиндрического виброробота в вязкой жидкости // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2024. Т. 166, № 3. С. 277–296. DOI: 10.26907/2541-7746.2024.3.277-296.
4. *Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M.* Motion of a circular cylinder and n point vortices in a perfect fluid // Regul. Chaotic Dyn. 2003. Vol. 8, no. 4. P. 449–462. DOI: 10.1070/RD2003v008n04ABEH000257.
5. *Mamaev I. S., Bizyaev I. A.* Dynamics of an unbalanced circular foil and point vortices in an ideal fluid // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33. P. 087119. DOI: 10.1063/5.0058536.
6. *Артемова Е. М., Ветчанин Е. В.* Управление движением кругового цилиндра в идеальной жидкости с помощью источника // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, № 4. С. 604–617. DOI: 10.35634/vm200405.
7. *Artemova E. M., Vetchanin E. V.* The motion of an unbalanced circular disk in the field of a point source // Regul. Chaotic Dyn. 2022. Vol. 27, no. 1. P. 24–42. DOI: 10.1134/S1560354722010051.
8. *Artemova E. M., Vetchanin E. V.* The motion of a circular foil in the field of a fixed point singularity: Integrability and asymptotic behavior // Physics of Fluids. 2024. Vol. 36. P. 027139. DOI: 10.1063/5.0185865.
9. *Artemova E. M., Lagunov D. A., Vetchanin E. V.* The motion of an elliptic foil in the field of a fixed vortex source // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2025. Vol. 21, no. 2. P. 135–155. DOI: 10.20537/nd241203.
10. *Kilin A. A., Gavrilova A. M., Artemova E. M.* Dynamics of an elliptic foil with an attached vortex in an ideal fluid: The integrable case // Regul. Chaotic Dyn. 2025. Vol. 30. P. 931–951. DOI: 10.1134/S1560354724590015.
11. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
12. *Milne-Thomson L. M.* Theoretical Hydrodynamics. London: Macmillan, 1962. 660 p.
13. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Гостехиздат, 1950. 444 с.
14. *Короткин А. И.* Присоединенные массы судостроительных конструкций. Санкт-Петербург: Мор Вест, 2007. 576 с.
15. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
16. *Ardentov A. A.* Extremals in the Markov-Dubins problem with control on a triangle // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2024. Vol. 20, no. 1. P. 27–42. DOI: 10.20537/nd231207.
17. *Kuznetsov S. P.* Motion of a falling card in a fluid: Finite-dimensional models, complex phenomena, and nonlinear dynamics // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2015. Vol. 11, no. 1. P. 3–49. DOI: 10.20537/nd1501001.

References

1. *Vetchanin EV, Valieva AR.* Analysis of the force and torque arising during the oscillatory motion of a Joukowski foil in a fluid. Rus. J. Nonlin. Dyn. 2024;20(1):79–93. DOI: 10.20537/nd231210.
2. *Borisov AV, Kuznetsov SP, Mamaev IS, Tenenev VA.* Describing the motion of a body with an elliptical cross section in a viscous incompressible fluid by model equations reconstructed from data processing. Tech. Phys. Lett. 2016;42:886–890. DOI: 10.1134/S1063785016090042.
3. *Anisimov VD, Egorov AG, Nuriev AN, Zaitseva ON.* Propulsive motion of cylindrical vibration-driven robot in a viscous fluid. Scientific Notes of Kazan University. Series of Physical and Mathematical Sciences. 2024;166(3):277–296. DOI: 10.26907/2541-7746.2024.3.277-296.
4. *Borisov AV, Mamaev IS, Ramodanov SM.* Motion of a circular cylinder and n point vortices in a perfect fluid. Regul. Chaotic Dyn. 2003;8(4):449–462. DOI: 10.1070/RD2003v008n04ABEH000257.
5. *Mamaev IS, Bizyaev IA.* Dynamics of an unbalanced circular foil and point vortices in an ideal fluid. Physics of Fluids. 2021;33:087119. DOI: 10.1063/5.0058536.

6. Artemova EM, Vetchanin EV. Control of the motion of a circular cylinder in an ideal fluid using a source. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science.* 2020;30(4):604–617. DOI: 10.35634/vm200405.
7. Artemova EM, Vetchanin EV. The motion of an unbalanced circular disk in the field of a point source. *Regul. Chaotic Dyn.* 2022;27(1):24–42. DOI: 10.1134/S1560354722010051.
8. Artemova EM, Vetchanin EV. The motion of a circular foil in the field of a fixed point singularity: Integrability and asymptotic behavior // *Physics of Fluids.* 2024. Vol. 36. P. 027139. DOI: 10.1063/5.0185865.
9. Artemova EM, Lagunov DA, Vetchanin EV. The motion of an elliptic foil in the field of a fixed vortex source. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2025;21(2):135–155. DOI: 10.20537/nd241203.
10. Kilin AA, Gavrilova AM, Artemova EM. Dynamics of an elliptic foil with an attached vortex in an ideal fluid: The integrable case // *Regul. Chaotic Dyn.* 2025. Vol. 30. P. 931–951. DOI: 10.1134/S1560354724590015.
11. Kochin, NE, Kibel IA, Roze NV. *Theoretical Hydrodynamics.* New York: Wiley; 1964. 577 p.
12. Milne-Thomson LM. *Theoretical Hydrodynamics.* London: Macmillan, 1962. 660 p.
13. Sedov LI. *Two-Dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics.* New York: Wiley; 1965. 427 p.
14. Korotkin AI. *Added Masses of Ship Structures.* Dordrecht: Springer; 2009. 392 p. DOI: 10.1007/978-1-4020-9432-3.
15. Borisov AV, Mamaev IS. *Rigid Body Dynamics.* Berlin: De Gruyter; 2019. 526 p. DOI: 10.1515/9783110544442.
16. Ardentov AA. Extremals in the Markov-Dubins problem with control on a triangle. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2024;20(1):27–42. DOI: 10.20537/nd231207.
17. Kuznetsov SP. Motion of a falling card in a fluid: Finite-dimensional models, complex phenomena, and nonlinear dynamics. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2015;11(1):3–49. DOI: 10.20537/nd1501001.



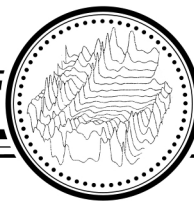
Ветчанин Евгений Владимирович — родился в Устинове (1986). Окончил с отличием факультет прикладной математики Ижевского государственного технического университета по специальности «Прикладная математика» (2008). Кандидат физико-математических наук (2012, ИМ УрО РАН). Доктор физико-математических наук (2022, МАИ). С 2022 года работает заведующим кафедрой теоретической и экспериментальной физики Удмуртского государственного университета. Научные интересы — математическое моделирование, качественный анализ динамических систем, вычислительная гидродинамика.

Россия, 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1
 Удмуртский государственный университет
 E-mail: eugene@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-2617-7512
 AuthorID (eLibrary.Ru): 665751



Артемова Елизавета Марковна — родилась в Ижевске (1997). Окончила с отличием бакалавриат (специальность «Физика», 2019) и магистратуру (специальность «Математическая кибернетика», 2021) Института математики, информационных технологий и физики Удмуртского государственного университета. Кандидат физико-математических наук (2024, МАИ). С 2018 года работает в научно-учебной лаборатории «Нелинейный анализ и конструирование новых средств передвижения» Удмуртского государственного университета, в настоящее время — в должности младшего научного сотрудника. Научные интересы — динамические системы, теоретическая гидродинамика, неголономные системы.

Россия, 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1, корпус 4,
 Удмуртский государственный университет
 E-mail: artemova@rcd.ru
 ORCID: 0000-0001-7637-2757
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1179989



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2)

Научная статья
УДК 531.37

DOI: 10.18500/0869-6632-003203
EDN: OEJBDW

Устойчивость движения и дрейф твердого тела в неконтактном индукционном электромагнитном подвесе

П. П. Удалов¹✉, А. В. Лукин¹, И. А. Попов¹, Л. В. Штукин¹, К. В. Полеткин²

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия

²Технологический университет Хэфэя, Китай

E-mail: ✉udalov_pp@spbstu.ru, lukin_av@spbstu.ru, popov_ia@spbstu.ru,
shtukin_lv@spbstu.ru, 022810003@hfut.edu.cn

Поступила в редакцию 4.06.2025, принята к публикации 27.11.2025,
опубликована онлайн 27.11.2025, опубликована 31.03.2026

Аннотация. Цель настоящей работы — исследование нелинейной динамики и устойчивости движения проводящего тонкого кольца в электромагнитном поле двух круговых катушек индуктивности. *Методы.* Анализ выполняется с применением асимптотических методов нелинейной механики. С помощью численных методов теории бифуркаций исследуется среднее по периоду быстро осциллирующего поля положение левитирующего тела в пространстве ключевых параметров подвеса. *Результаты.* В предположении о медленной эволюции среднего положения левитирующего тела определены условия возникновения и параметры дрейфа. В уточненной асимптотической постановке исследована устойчивость режима левитации. *Заключение.* Показано, что учет возможности медленной эволюции среднего положения левитирующего тела приводит к формулировке условия устойчивости, связанного с соотношением между диссипацией механической и электрической природы.

Ключевые слова: индукционный подвес, электромагнитный подвес, электромагнитная индукция, левитация, нелинейная динамика, устойчивость колебаний, метод многих масштабов.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-21-00402, <https://rscf.ru/project/25-21-00402/>

Для цитирования: Удалов П. П., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В., Полеткин К. В. Устойчивость движения и дрейф твердого тела в неконтактном индукционном электромагнитном подвесе // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 2. С. 247–267. DOI: 10.18500/0869-6632-003203. EDN: OEJBDW

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Stability of motion and drift of a rigid body in a non-contact inductive electromagnetic suspension

*P. P. Udalov*¹✉, *A. V. Lukin*¹, *I. A. Popov*¹, *L. V. Shtukin*¹, *K. V. Poletkin*²

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

²Hefei University of Technology, China

E-mail: ✉udalov_pp@spbstu.ru, lukin_av@spbstu.ru, popov_ia@spbstu.ru,
shtukin_lv@spbstu.ru, 022810003@hfut.edu.cn

Received 4.06.2025, accepted 27.11.2025, available online 27.11.2025, published 31.03.2026

Abstract. *Purpose* of this work is to study the nonlinear dynamics and stability of the motion of a conducting thin ring in the electromagnetic field of two circular inductors. *Methods.* The analysis is performed using asymptotic methods of nonlinear mechanics. Numerical methods of bifurcation theory are used to study the average position of a levitating body in the space of key suspension parameters over the period of a rapidly oscillating field. *Results.* Assuming a slow evolution of the average position of a levitating body, the conditions for the occurrence and parameters of drift are determined. The stability of the levitation regime is investigated in a refined asymptotic formulation. *Conclusion.* It is shown that taking into account the possibility of slow evolution of the average position of a levitating body leads to the formulation of a stability condition related to the relationship between the dissipation of mechanical and electrical nature.

Keywords: induction suspension, electromagnetic suspension, electromagnetic induction, levitation, nonlinear dynamics, stability of oscillations, method of multiple scales.

Acknowledgements. The work was supported by the Russian Science Foundation, grant no. 25-21-00402, <https://rscf.ru/project/25-21-00402/>

For citation: Udalov PP, Lukin AV, Popov IA, Shtukin LV, Poletkin KV. Stability of motion and drift of a rigid body in a non-contact inductive electromagnetic suspension. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(2):247–267. DOI: 10.18500/0869-6632-003203

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Электромагнитный подвес — элемент навигационных, транспортных и электрических систем [1], работающий на основе принципа электромагнитной левитации (ЭЛ) и уравнивающей силу тяжести проводящего твердого тела (ТТ) пондеромоторными силами [2–6]. Схема работы устройств, основанных на принципе ЭЛ, позволяет достигать высокой надежности [7], стабильности [8], увеличенного срока безотказной работы [9, 10]. Устройства на основе принципа ЭЛ нашли применение в навигационном приборостроении (микромеханические акселерометры [11], гироскопы [12–15], гравиметры/сейсмические датчики [16]), микро-опто-электромеханических системах (сканирующие микрзеркала [11, 17, 18], сортировочных манипуляторах [19], поездах на магнитной подушке [20, 21], автомобильных подвесках [22], системах беспроводной передачи энергии [23], устройствах для измерения магнитных характеристик жидкостей [24] и т. д.

При разработке неконтактного подвеса как элемента микромеханических инерциальных сенсоров левитирующее ТТ, как правило, выполняется в форме простейшего геометрического объекта (диск [7], кольцо [25], прямоугольная пластина [26], сфера [27]) и изготавливается из проводящего материала. Переменное электромагнитное поле, создаваемое системой катушек [28, 29], приводит к наведению в ТТ вихревых токов. Взаимодействие индукционных токов с токами катушек может при определенных условиях приводить к режиму устойчивой левитации ТТ [3]. В работе [12] показывается, что для обеспечения устойчивости состояния левитации по отношению

к пространственным возмущениям необходимо вводить в конструкцию устройства дополнительную катушку индуктивности, запитываемую током в противофазе по отношению к току основной катушки меньшего радиуса.

Аналитическому, численному и экспериментальному исследованиям режимов работы и характеристик электромагнитного подвеса посвящено множество работ. В [7, 11, 13, 14, 30] обсуждаются вопросы разработки инерциального датчика с чувствительным элементом в форме диска на основе электромагнитного подвеса. В [31], [32] рассматривается экспериментальный прототип электромагнитного подвеса с объемными катушками индуктивности (соленоиды, спиральные катушки).

В работах [33, 34] исследуются аналитические модели акселерометра и гироскопа соответственно, основанных на принципе ЭЛ. В [35] исследуется линеаризованная модель колебаний левитирующего ТТ. В [7, 36] обсуждаются вопросы выбора оптимальных радиусов катушек индуктивности и ТТ в форме диска.

В [37, 38] выполнены аналитические расчеты собственных и взаимных индуктивностей проводов и контуров. В [39, 40] приводятся оценки сил и жесткостей чувствительного элемента индукционного подвеса. В [41] исследуются вопросы устойчивости индукционного подвеса. Работы [26, 42] посвящены экспериментальному и аналитическому исследованиям эффекта схлопывания, заключающегося в прилипании ТТ электромагнитного подвеса к обкладкам конденсаторов при достижении на них критической величины напряжения как для дискообразной, так и для прямоугольной формы в плане инерционных масс. Численные исследования режимов работы и силовых характеристик устройства электромагнитного подвеса на основе метода конечных элементов приведены в [34, 43–46].

Аналитические подходы к исследованию динамики электромагнитного подвеса ТТ [26, 33, 34, 42] основаны на ключевом предположении о постоянстве высоты левитации. Данное допущение позволяет линеаризовать систему в окрестности положения равновесия и получить условия устойчивости для консервативной модели. Однако, как показывает численный анализ полной нелинейной модели, это предположение является ограниченно применимым, существует область неустойчивости подвеса для малых высот левитации. С целью учета существенной особенности движения тела в подвесе (в реальности осредненная по быстро осциллирующему полю высота левитации является медленной функцией времени) в настоящей работе развивается подход с явным моделированием зависимости высоты левитации от медленного времени, что и составляет основную научную новизну исследования.

Основная цель настоящей работы заключается в аналитическом исследовании динамики ТТ, выполненного в форме кольца, в поле двух круговых катушек индуктивности в предположении о том, что высота левитации является медленно меняющейся функцией времени, то есть дрейфующей вблизи своего среднего положения.

Работа построена следующим образом: в разделе 1 приводится построение аналитической модели вертикальных колебаний ТТ, в разделе 2 проводится асимптотический анализ динамики исходной системы с применением метода многих масштабов, в разделе 3 приведены результаты исследования, в **Заключении** даны общие выводы по работе.

1. Математическая модель

Рассматривается модель вертикальных движений ТТ неконтактного индукционного подвеса, выполненного в форме тонкого недеформируемого кольца прямоугольного сечения и находящегося в переменном электромагнитном поле двух круговых катушек индуктивности. Схематическое

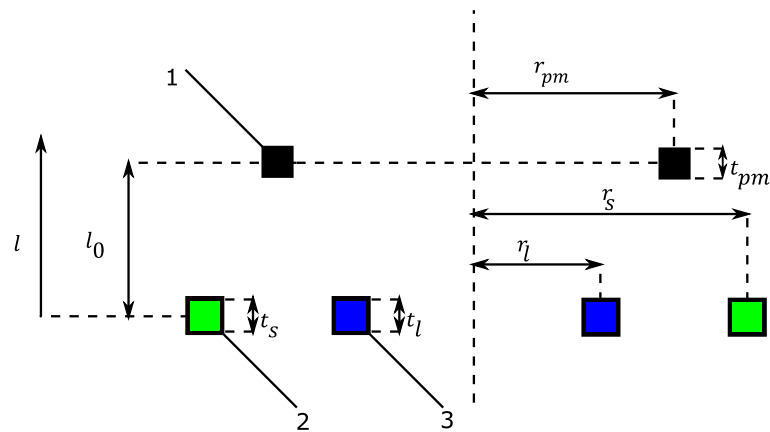


Рис. 1. Схематическое изображение индукционного бесконтактного подвеса; 1 — ТТ, 2 и 3 — стабилизирующая и левитационная катушки соответственно (цвет онлайн)

Fig. 1. Schematic view of inductive non-contact suspension; 1 — rigid body (RB), 2 and 3 — stabilizing and levitation coils, respectively (color online)

изображение рассматриваемого устройства представлено на рис. 1. Трехмерная модель возможной конструкции электромагнитного подвеса приведена рис. 2.

При подаче переменного тока $i_l = I_l \sin \omega t$ (I_l и ω — амплитуда и частота тока i_l) на левитационную катушку индуктивности среднего радиуса r_l толщины t_l (на рис. 1 она обозначена под номером 3) возникает переменное электромагнитное поле, взаимодействующее с полем вихревых токов в объеме ТТ, выполненного в форме кольца квадратного сечения среднего радиуса r_{pm} и толщиной t_{pm} (на рис. 1 оно обозначено под номером 1). Сила Ампера между током i_l и индуцированным током i_{pm} может при определенных условиях приводить к левитации ТТ (компенсировать силу тяжести и обеспечивать устойчивость движения). Стабилизирующая катушка, по которой течет ток $i_s = I_s \sin \omega t$ (I_s и ω — амплитуда и частота тока i_s), обозначенная на рис. 1 под номером 2, препятствует боковым и угловым смещениям ТТ и обеспечивает пространственную устойчивость. Результирующее электромагнитное поле представляет собой суперпозицию электромагнитных полей левитационной и стабилизирующей катушек. Параметр I_s может принимать как положительные, так и отрицательные значения: $I_s/I_l = 1$ отвечает случаю синфазности токов i_l и i_s , $I_s/I_l = -1$ — противофазности, $I_s/I_l = 0$ — отсутствие тока

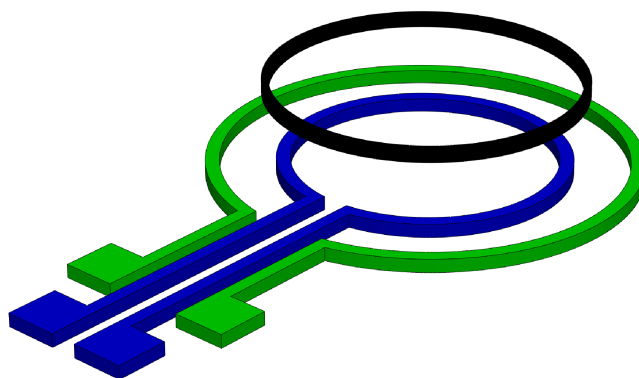


Рис. 2. Трехмерная модель индукционного бесконтактного подвеса (цвет онлайн)

Fig. 2. Three-dimensional model of inductive non-contact suspension (color online)

в стабилизирующей катушке. Изменение величины I_s обозначает собой изменение как амплитуды, так и направления тока i_s .

Система уравнений колебаний ТТ в безразмерном виде запишется следующим образом [47]:

$$\xi_l'' + \varepsilon^2 \lambda \xi_l' = \varepsilon^2 \left(\alpha m^{\xi_l} j_{pm} \sin \tau - 1 \right), \quad j_{pm}' + r j_{pm} = -m \cos \tau - m^{\xi_l} \xi_l' \sin \tau, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_l &= \frac{l}{r_l}, \quad \xi_{l0} = \frac{l_0}{r_l}, \quad j_s = \frac{I_s}{I_l}, \quad j_{pm} = \frac{i_{pm}}{I_l}, \quad \tau = \omega t, \quad \varepsilon^2 = \frac{g}{\omega^2 r_l}, \quad \alpha = \frac{L_{pm} I_l^2}{\hat{m} g r_l}, \quad r = \frac{R_{pm}}{L_{pm} \omega}, \\ \lambda &= \frac{\lambda_l}{\hat{m} \omega}, \quad b_l = \frac{r_{pm}}{r_l}, \quad b_s = \frac{r_{pm}}{r_s}, \quad \hat{\kappa}_l^2 = \frac{4b_l}{(1+b_l)^2 + \xi_l^2}, \quad \hat{\kappa}_s^2 = \frac{4b_s}{(1+b_s)^2 + (\frac{b_s}{b_l})^2 \xi_l^2}, \\ m_{l,s|pm} &= \frac{M_{l,s|pm}}{L_{pm}} = \frac{w_{l,s}}{\hat{L}} \frac{\Phi(\hat{\kappa}_{l,s})}{\sqrt{b_{l,s}}}, \quad \Phi(\hat{\kappa}_{l,s}) = \left(\frac{2}{\hat{\kappa}_{l,s}} - \hat{\kappa}_{l,s} \right) K(\hat{\kappa}_{l,s}^2) - \frac{2}{\hat{\kappa}_{l,s}} E(\hat{\kappa}_{l,s}^2), \\ m &= m_{l|pm} + j_s m_{s|pm}, \quad \hat{L} = \ln \left(\frac{8r_{pm}}{S_{pm}} \right) - 2, \\ S_{pm} &= \exp \left(\ln t_{pm} + \frac{1}{3} (\ln 2 + \pi) - \frac{25}{12} \right) \approx 0.44705 t_{pm}, \end{aligned} \quad (2)$$

t — время, g — ускорение свободного падения, \hat{m} — масса ТТ, R_{pm} — электрическое сопротивление ТТ, λ_l — коэффициент вязкой диссипации энергии в окружающую среду, $L_{pm} = \mu_0 r_{pm} \hat{L}$ — собственная индуктивность ТТ, $M_{l|pm}$ — величина взаимной индуктивности между левитационной катушкой и ТТ, $M_{s|pm}$ — величина взаимной индуктивности между стабилизирующей катушкой и ТТ, $\hat{\kappa}_{l,s}$ — эллиптические модули; $K(\hat{\kappa}_{l,s}^2)$, $E(\hat{\kappa}_{l,s}^2)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго родов соответственно, $\hat{\kappa}_{l,s}$ — эллиптические модули, $(\)' = \frac{\partial}{\partial \tau}$, $(\)^{\xi_l} = \frac{\partial}{\partial \xi_l}$, l — вертикальные перемещения ТТ, l_0 — характерный масштаб вертикального перемещения, в дальнейшем принятый равным координате среднего положения ТТ; $w_{l,s}$ — количество витков в левитационной и стабилизирующей катушках; S_{pm} — среднее геометрическое сечения ТТ [37, 38].

Отметим, что правые части системы (1) нелинейно зависят от искоемых переменных ξ_l и j_{pm} вследствие наличия в них членов, содержащих взаимную индуктивность и её производные.

При выборе рабочего режима подвеса стараются обеспечить разделение быстрых электрических и медленных механических движений, тогда параметр ε , выражающий отношение квадратов характерных частот механической и электрической природы, оказывается малым. Эта особенность основной системы уравнений позволяет применять для построения приближенного решения и анализа устойчивости асимптотические методы нелинейной механики.

2. Построение асимптотического решения

Для нахождения равномерно пригодного решения системы (1) применим метод многих масштабов [48]. Для этого представим искомые функции в виде следующих разложений по малому параметру ε :

$$\begin{aligned} j_{pm}(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) &= j_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon j_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 j_2(T_0, T_1, T_2), \\ \xi_l(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) &= \xi_{l0}(T_1, T_2) + \varepsilon \xi_{l1}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \xi_{l2}(T_0, T_1, T_2), \\ m(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) &= m_0 + m_l(\xi_l - \xi_{l0}) + \frac{1}{2} m_{ll}(\xi_l - \xi_{l0})^2, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2, \quad \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2), \end{aligned} \quad (3)$$

где $T_n = \varepsilon^n \tau$, $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$, $m_0 = m(\xi_{l0})$, $m_l = m^{\xi_l}(\xi_{l0})$, $m_{ll} = m^{\xi_l \xi_l}(\xi_{l0})$.

Подставляя (3) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$\varepsilon^0 \quad D_0 j_0 + r j_0 = -m_l D_0 \xi_{l0} \sin T_0 - m_0 \cos T_0, \quad D_0^2 \xi_{l0} = 0, \quad (4)$$

$$\varepsilon^1 \quad D_0 j_1 + r j_1 = -D_1 j_0 - \xi_{l1} m_l \cos T_0 - (m_l (D_0 \xi_{l1} + D_1 \xi_{l0}) + m_{ll} \xi_{l1} D_0 \xi_{l0}) \sin T_0, \quad (5)$$

$$D_0^2 \xi_{l1} = -2D_0 D_1 \xi_{l0},$$

$$\varepsilon^2 \quad D_0 j_2 + r j_2 = -D_1 j_1 - D_2 j_0 - \left(m_l \xi_{l2} + \frac{m_{ll} \xi_{l1}^2}{2} \right) \cos T_0 -$$

$$- ((D_0 \xi_{l2} + D_1 \xi_{l1} + D_2 \xi_{l0}) m_l + (\xi_{l2} D_0 \xi_{l0} + (D_0 \xi_{l1} + D_1 \xi_{l0}) \xi_{l1}) m_{ll}) \sin T_0, \quad (6)$$

$$D_0^2 \xi_{l2} = -2D_0 D_1 \xi_{l1} - 2D_0 D_2 \xi_{l0} - D_1^2 \xi_{l0} - \lambda D_0 \xi_{l0} + \alpha m_l j_0 \sin T_0 - 1,$$

$$\varepsilon^3 \quad D_0 j_3 + r j_3 = -D_1 j_2 - D_2 j_1 - (m_l (D_2 \xi_{l1} + D_1 \xi_{l2} + D_0 \xi_{l3}) +$$

$$+ m_{ll} \xi_{l1} (D_2 \xi_{l0} + D_1 \xi_{l1} + D_0 \xi_{l2}) + D_0 \xi_{l0} m_{ll} \xi_{l3} +$$

$$+ m_{ll} \xi_{l2} (D_1 \xi_{l0} + D_0 \xi_{l1})) \sin T_0 - (m_l \xi_{l3} + m_{ll} \xi_{l1} \xi_{l2}) \cos T_0, \quad (7)$$

$$D_0^2 \xi_{l3} = -2D_0 D_1 \xi_{l2} - 2D_0 D_2 \xi_{l1} - D_1^2 \xi_{l1} - 2D_1 D_2 \xi_{l0} -$$

$$- \lambda (D_0 \xi_{l1} + D_1 \xi_{l0}) - \alpha (m_l j_1 + m_{ll} \xi_{l1} j_0) \sin T_0.$$

Частное решение уравнения (4) может быть представлено как

$$\xi_{l0} = \xi_{l0}(T_1, T_2), \quad j_0 = -m_0 \cos \gamma \sin(T_0 + \gamma), \quad (8)$$

где $\tan \gamma = r$.

Отметим, что в выражение для ξ_{l0} не включен линейно растущий, заведомо секулярный член общего решения однородного уравнения; в выражение для тока j_0 также не включено аperiodическое переходное слагаемое в решении.

Решение системы (5) запишется как

$$\xi_{l1} = 0, \quad j_1 = \frac{1 - \cos 4\gamma}{4} m_l D_1 \xi_{l0} \cos T_0 + \frac{\sin 4\gamma}{4} m_l D_1 \xi_{l0} \sin T_0. \quad (9)$$

С учетом (9) второе уравнение в (6) запишется как

$$D_0^2 \xi_{l2} = -D_1^2 \xi_{l0} - \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{2} m_0 m_l - 1 + \frac{\alpha \cos \gamma}{2} m_0 m_l \cos(2T_0 + \gamma). \quad (10)$$

Для того чтобы избавиться от секулярных слагаемых в уравнении для ξ_{l2} , положим

$$D_1^2 \xi_{l0} = -\frac{\alpha \cos^2 \gamma}{2} m_0 (\xi_{l0}) m_l (\xi_{l0}) - 1, \quad (11)$$

откуда

$$\xi_{l2} = -\frac{\alpha \cos \gamma}{8} m_0 m_l \cos(2T_0 + \gamma). \quad (12)$$

Уравнение (11) определяет медленную эволюцию высоты левитации ξ_{l0} .

Умножим (11) на величину $d\xi_{l0}$, проинтегрируем перемещения ξ_{l0} в диапазоне $[\xi_{st} \quad \xi_{l0}]$ и получим

$$dT_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\xi_{l0}}{\sqrt{h(T_2) + h_0 - \xi_{l0} - \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{4} m_0^2}}, \quad (13)$$

где $h_0 = \xi_{st} + \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{4} m_0^2(\xi_{st})$, $h(T_2)$ – константа интегрирования, ξ_{st} – положение равновесия динамической системы, определяемое из равенства нулю правой части равенства (11):

$$\frac{\alpha \cos^2 \gamma}{2} m_0(\xi_{st}) m_l(\xi_{st}) + 1 = 0. \quad (14)$$

Устойчивость положения равновесия ξ_{st} определяется из

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{l0}} \left(m_0(\xi_{st}) m_l(\xi_{st}) + \frac{2}{\alpha \cos^2 \gamma} \right) > 0 \Rightarrow m_l^2(\xi_{st}) + m_0(\xi_{st}) m_{ll}(\xi_{st}) > 0, \quad (15)$$

что совпадает с результатами, полученными при изучении малых колебаний электромагнитного подвеса вблизи среднего положения ТТ ξ_{st} [35].

В предположении о том, что ТТ колеблется вблизи своего среднего положения ξ_{st} , разложим радикал в ряд Тейлора и перепишем (13) как

$$dT_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dy}{\sqrt{h(T_2) - by^2}}, \quad (16)$$

где $y = \xi_{l0} - \xi_{st}$, $b = \frac{\alpha \cos^2 \gamma}{4} (m_0(\xi_{st}) m_{ll}(\xi_{st}) + m_l^2(\xi_{st}))$.

Уравнение (16) дает решение в квадратурах для колебаний эквивалентного линейного осциллятора. После интегрирования левой и правой частей (16) получим

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \sqrt{\frac{b}{h(T_2)}} (\xi_{l0} - \xi_{st}), \quad (17)$$

откуда

$$\xi_{l0} = \xi_{st} + \sqrt{\frac{h(T_2)}{b}} \sin \sqrt{2b} T_1. \quad (18)$$

Решение (18) указывает на факт медленных осцилляций (дрейфа) высоты левитации ξ_{l0} вблизи положения равновесия ξ_{st} с амплитудой $\sqrt{\frac{h}{b}}$ и частотой $\sqrt{2b}$.

Подставляя (8), (9), (12) во второе уравнение в (7), получим

$$D_0^2 \xi_{l3} = -2D_1 D_2 \xi_{l0} - \left(\lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} m_l^2 \right) D_1 \xi_{l0} + \text{н.с.ч.}, \quad (19)$$

где н.с.ч. – несекулярные члены [48].

Условие на отсутствие секулярных членов в (19) приводит к соотношению

$$D_1 D_2 \xi_{l0} = -\frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} m_l^2 \right) D_1 \xi_{l0}. \quad (20)$$

После подстановки (18) в (19) получим

$$D_2 \sqrt{h} = -\frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} m_l^2 \right) \sqrt{h}. \quad (21)$$

Уравнение (21) описывает медленное изменение полной механической энергии нелинейного осциллятора (11), отсчитываемой от минимума его потенциальной энергии.

Равновесное состояние h^* (21) определяется из равенства нулю его правой части:

$$h^* = 0, \quad (22)$$

чему соответствует $\xi_{l0} = \xi_{st}$.

Устойчивость состояния равновесия h^* определяется из

$$\lambda - \frac{\alpha \sin 4\gamma}{8} m_l^2(\xi_{st}) > 0 \quad (23)$$

или с учетом (14)

$$\lambda + \cos 2\gamma \tan \gamma \frac{m_l(\xi_{st})}{m_0(\xi_{st})} > 0. \quad (24)$$

Неравенство (24) определяет области в пространстве параметров системы, при которых полная механическая энергия (21) h не возрастает во времени. Можно видеть, что условие (24) выражает соотношение между механической λ и электрической $\cos 2\gamma \tan \gamma \frac{m_l(\xi_{st})}{m_0(\xi_{st})}$ диссипацией, знак которого определяет устойчивость движений левитирующего ТТ.

Таким образом, асимптотическое приближение решения исходной задачи (1) имеет вид

$$\xi_l = \xi_{st} + \sqrt{\frac{h(\varepsilon^2\tau)}{b}} \sin \sqrt{2b\varepsilon\tau} + \frac{\varepsilon^2}{4 \cos \gamma} \cos(2\tau + \gamma), \quad j_{pm} = -m_0 \cos \gamma \sin(\tau + \gamma), \quad (25)$$

где $h(\varepsilon^2\tau)$ определяется из решения (21).

Установившееся решение при выполнении условия (24) отсутствия дрейфа среднего положения ТТ имеет вид

$$\xi_l = \xi_{st} + \frac{\varepsilon^2}{4 \cos \gamma} \cos(2\tau + \gamma), \quad j_{pm} = -m_0(\xi_{st}) \cos \gamma \sin(\tau + \gamma), \quad (26)$$

где учтена связь α и ξ_{st} согласно (14). Устойчивость ξ_{st} определяется из (15).

3. Результаты

Далее приведено сравнение аналитических результатов согласно (26) с данными численного расчета, проведенного в программном комплексе Matlab (система (1) интегрировалась с использованием встроенной функции ode45 при заданных начальных условиях $[\xi_l, \xi'_l, j_{pm}]_{\tau=0} = [0.4, 0, 0]$ [49]). Используемые для расчета параметры приведены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры системы

Table 1. System's parameters

Параметр	λ	ε	b_l	α	γ	w_l	w_s	r_l	r_s	t_{pm}	j_s
Значение	10	0.01	1.2	0.2534	0.61	14	12	1 мм	1.9 мм	0.1 мм	-0.5

На рис. 3 приведены графики сравнения колебаний ТТ и наведенного тока в случае численного расчета и аналитических выражений (26).

Из рис. 3 видно, что аналитическое решение (26) в случае установившихся колебаний ТТ с достаточной степенью точности совпадает с численными результатами.

Для исследования бифуркаций состояний равновесия динамической системы (11) в зависимости от параметров системы применяется программный комплекс численных алгоритмов теории бифуркаций MatCont [50]. На рис. 4, а–6, а приведены зависимости среднего положения ТТ ξ_{l0} от параметров α , j_s , γ . Сплошными линиями далее обозначены устойчивые положения равновесия, пунктирными — неустойчивые. Розовые кружки обозначают точки бифуркации, которые разделяют в пространстве параметров системы область отсутствия равновесных состояний и область существования двух (одного при бифуркации) нетривиальных положений равновесия.

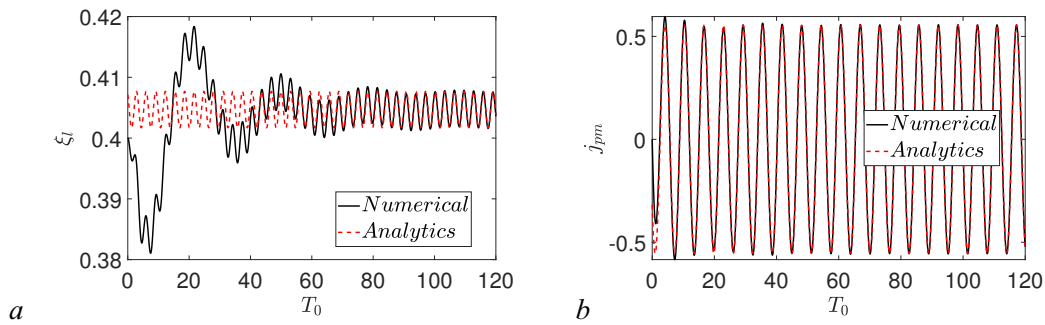


Рис. 3. График сравнения безразмерной величины: a — высоты левитации ТТ, b — наведенного тока от безразмерного времени T_0 в случае прямого численного счета (черные сплошные линии) и аналитических формул (26) (пунктирная красная линия) (цвет онлайн)

Fig. 3. Graph comparing dimensionless value of a — RB displacement, b — induced current from dimensionless time T_0 in case of direct numerical calculation (black solid lines) and analytical equations (26) (dotted red line) (color online)

Вычисленные и осредненные значения высоты левитации системы (1) с использованием функции ode45 обозначены квадратными символами. На рис. 4, $b-6$, b приведены характерные зоны, в которых существует (II) / не существует (I) положение равновесия в зависимости от параметров системы.

На рис. 4, a, b показана зависимость среднего положения ТТ ξ_{l0} от параметра α , прямо пропорционального квадрату амплитуды тока левитационной катушки I_l , при варьировании параметра j_s . Видно, что существуют «критические» значения параметра $\alpha = \alpha_{crit}$ (минимальная величина амплитуды тока левитационной катушки I_l) и соответствующие им «критические» значения параметра $\xi_{l0} = \xi_{crit}$, обозначающие случай слияния (с последующим исчезновением) состояний равновесия типа «седло» и «центр». При увеличении параметра j_s величина α_{crit} уменьшается, а ξ_{crit} — увеличивается. Граница, разделяющая зоны устойчивых и неустойчивых ветвей равновесия, изображена розовой линией (LP). Розовыми ромбами обозначаются граничные значения варьирования параметра j_s в диапазоне $[-1; 1]$.

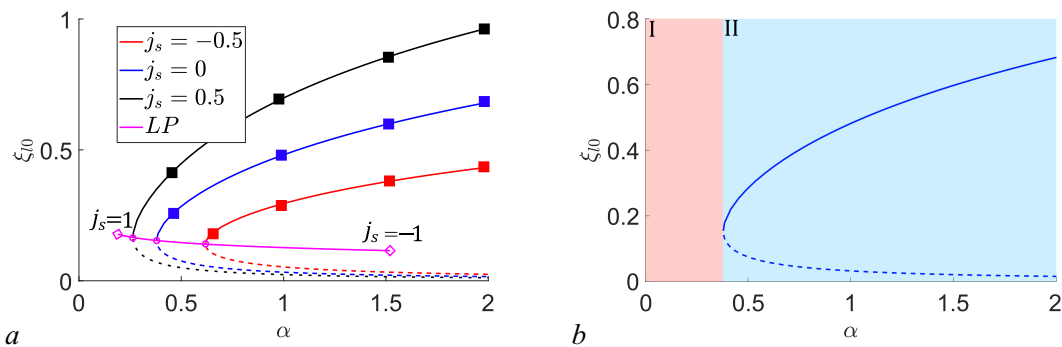


Рис. 4. a — Зависимость среднего положения ТТ ξ_{l0} от параметра α при $j_s = -0.5, 0, 0.5$ (красная, синяя, черная линии соответственно); розовая линия (LP) обозначает зону разделения устойчивых (сплошные линии) и неустойчивых (пунктирные линии) ветвей при варьировании параметра $j_s = [-1; 1]$; b — изображение характерных зон существования и несуществования положений равновесия при $j_s=0$, $\varepsilon = 0.001$, $r_l = 1$ мм, $r_s = 1.9$ мм, $t_{pm} = 0.1$ мм, $w_l = 14$, $w_s = 12$, $\lambda = 10$, $\gamma = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 4. a — Dependence of the average position of RB ξ_{l0} on the parameter α at $j_s = -0.5, 0, 0.5$ (red, blue, black lines, respectively); the pink line (LP) indicates the zone of separation of stable (solid lines) and unstable (dashed lines) branches when varying the parameter $j_s = [-1; 1]$; b — depiction of characteristic zones of existence and nonexistence of equilibrium positions at $j_s=0$, $\varepsilon = 0.001$, $r_l = 1$ mm, $r_s = 1.9$ mm, $t_{pm} = 0.1$ mm, $w_l = 14$, $w_s = 12$, $\lambda = 10$, $\gamma = 0$ (color online)

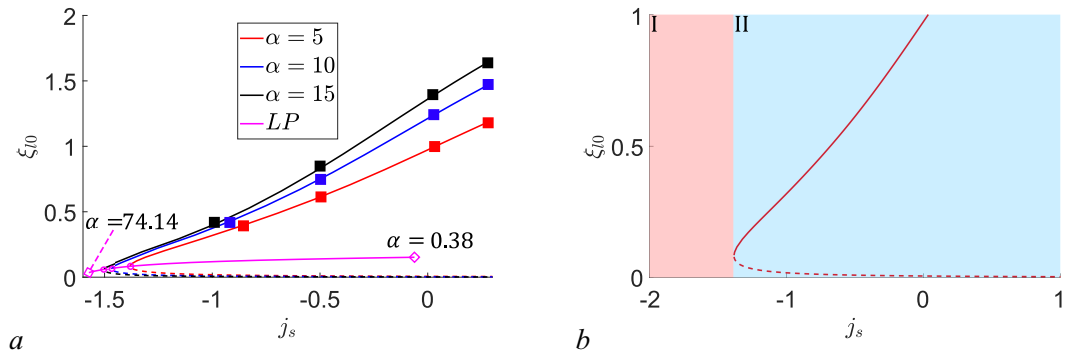


Рис. 5. *a* — Зависимость среднего положения ТТ ξ_{10} от параметра j_s при $\alpha = 5, 10, 15$ (красная, синяя, черная линии соответственно); розовая линия (LP) обозначает зону разделения устойчивых (сплошные линии) и неустойчивых (пунктирные линии) ветвей при варьировании параметра $\alpha = [0.38; 74.14]$; *b* — изображение характерных зон существования и несуществования положений равновесия при $\alpha=5, \varepsilon = 0.001, r_l = 1 \text{ мм}, r_s = 1.9 \text{ мм}, t_{pm} = 0.1 \text{ мм}, w_l = 14, w_s = 12, \lambda = 10, \gamma = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 5. *a* — Dependence of the average position of RB ξ_{10} on the parameter j_s at $\alpha = 5, 10, 15$ (red, blue, black lines, respectively); the pink line (LP) indicates the zone of separation of stable (solid lines) and unstable (dashed lines) branches when varying the parameter $\alpha = [0.38; 74.14]$; *b* — depiction of characteristic zones of existence and nonexistence of equilibrium positions at $\alpha=5, \varepsilon = 0.001, r_l = 1 \text{ mm}, r_s = 1.9 \text{ mm}, t_{pm} = 0.1 \text{ mm}, w_l = 14, w_s = 12, \lambda = 10, \gamma = 0$ (color online)

На рис. 5, *a, b* изображена зависимость среднего положения ТТ ξ_{10} от параметра j_s , обозначающего собой отношение амплитуд токов левитационной и стабилизирующей катушек, для различных значений параметра α . При увеличении амплитуды стабилизирующего тока, противофазного току левитационной катушки, наблюдается исчезновение положения равновесия. Это объясняется тем, что при увеличении амплитуды тока стабилизирующей катушки стабилизирующая и левитационная катушки компенсируют магнитный поток через ТТ, что ведет к падению индуцированного тока, что приводит к исчезновению среднего положения ТТ. Это в свою очередь вызывает притяжение ТТ к катушкам. Линия раздела устойчивых / неустойчивых положений равновесия представлена при варьировании параметра α в диапазоне $[0.38; 74.14]$.

На рис. 6, *a, b* изображена зависимость высоты левитации ξ_{10} от параметра γ , обозначающего собой разность фаз между токами i_l, i_s и i_{pm} . Видно, что ξ_{10} убывает и при приближении к «критическому» значению $\gamma = \gamma_{crit}$ режим левитации исчезает. Это следует из того, что при увеличении разности фаз между токами i_l, i_s и i_{pm} до величины γ_{crit} они могут начать притягиваться, что приводит к нарушению функционирования устройства. При $j_s = 1$, то есть если на левитирующую и стабилизирующую катушки подаются синфазные токи, видно, что при $\gamma_{crit} \approx \pi/2$ левитация не наблюдается.

Из рис. 4–6 видно, что бифуркация «седло–центр» соответствует граничному значению варьируемого параметра и определяет область параметров, при которых положение равновесия ТТ существует. Дальнейший этап исследования бифуркации, которой соответствуют одна из пар набора параметров $(\alpha^*, \gamma^*, j_s^*)$, заключается в продолжении рассмотрения положения равновесия ξ_{crit} по одному из активных параметров $(\alpha, \gamma$ или $j_s)$ [50]. Для определения области существования положения равновесия на плоскостях параметров $(\alpha, j_s), (\gamma, j_s), (\alpha, \gamma)$ осуществим продолжение по параметру точки бифуркации. Для продолжения выбирается точка слияния устойчивого и неустойчивого равновесий. Именно эта точка продолжается над исследуемыми плоскостями и дает границу области существования среднего положения ТТ. На рис. 7, *a* изображено продолжение точки бифуркации (розовая линия), рис. 7, *b–d* обозначают зоны отсутствия (I) и наличия двух равновесных состояний (II) в пространстве параметров исследуемой системы.

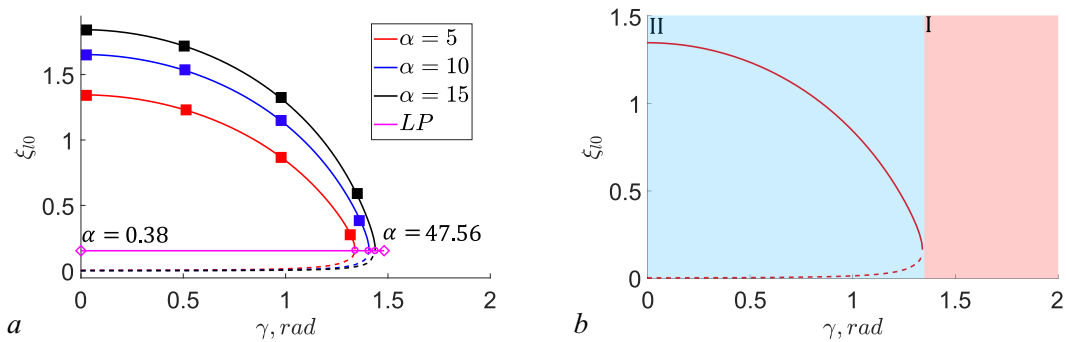


Рис. 6. *a* – Зависимость среднего положения ТТ ξ_{l0} от параметра γ при $\alpha = 5, 10, 15$ (красная, синяя, черная линии соответственно); розовая линия (LP) обозначает зону разделения устойчивых (сплошные линии) и неустойчивых (пунктирные линии) ветвей при варьировании параметра $\alpha = [0.38; 47.56]$; *b* – изображение характерных зон существования и несуществования положений равновесия при $\alpha = 5, \varepsilon = 0.001, r_l = 1 \text{ мм}, r_s = 1.9 \text{ мм}, t_{pm} = 0.1 \text{ мм}, w_l = 14, w_s = 12, \lambda = 10, j_s = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 6. *a* – Dependence of the average position of RB ξ_{l0} on the parameter γ at $\alpha = 5, 10, 15$ (red, blue, black lines, respectively); the pink line (LP) indicates the zone of separation of stable (solid lines) and unstable (dashed lines) branches when varying the parameter $\alpha = [0.38; 47.56]$; *b* – depiction of characteristic zones of existence and nonexistence of equilibrium positions at $\alpha = 5, \varepsilon = 0.001, r_l = 1 \text{ mm}, r_s = 1.9 \text{ mm}, t_{pm} = 0.1 \text{ mm}, w_l = 14, w_s = 12, \lambda = 10, j_s = 0$ (color online)

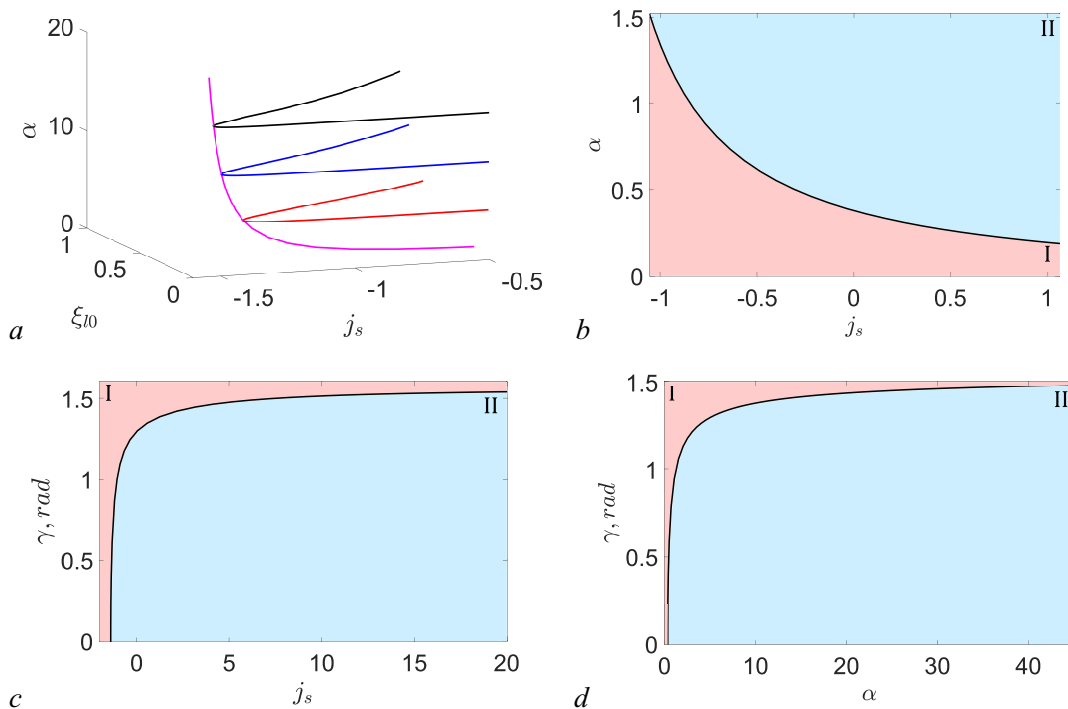


Рис. 7. *a* – Зависимость ξ_{l0} в точке бифуркации «седло-центр» от параметров α, j_s (розовая линия); красная, синяя, черная линии – многообразие решений ξ_{l0} при варьировании параметров α, j_s соответственно; *b-d* – изображение зон в пространстве параметров системы, отвечающих условиям отсутствия и наличия состояний равновесия (цвет онлайн)

Fig. 7. *a* – Dependence of ξ_{l0} at the saddle-center bifurcation point on parameters α, j_s (pink line); red, blue, black lines – manifold of solutions of ξ_{l0} at varying parameters α, j_s respectively; *b-d* – image of zones in the parameter space of the system corresponding to the conditions of the absence and presence of equilibrium states (color online)

На рис. 8, *a–d* изображены области устойчивости (серая область) среднего положения ТТ ξ_{l0} согласно (15) (черные линии), (24) (красные линии) при $\gamma = 0.2$, $\lambda = 0.4$. Синими крестиками обозначены результаты прямого интегрирования системы (1).

Из рис. 8 видны области устойчивости среднего положения ТТ.

На рис. 9, *a–c* изображены графики сравнения колебаний ТТ в случае численного расчета для различных параметров системы (ξ_{l0}, b_l) , соответствующих случаям: *a* — устойчивых

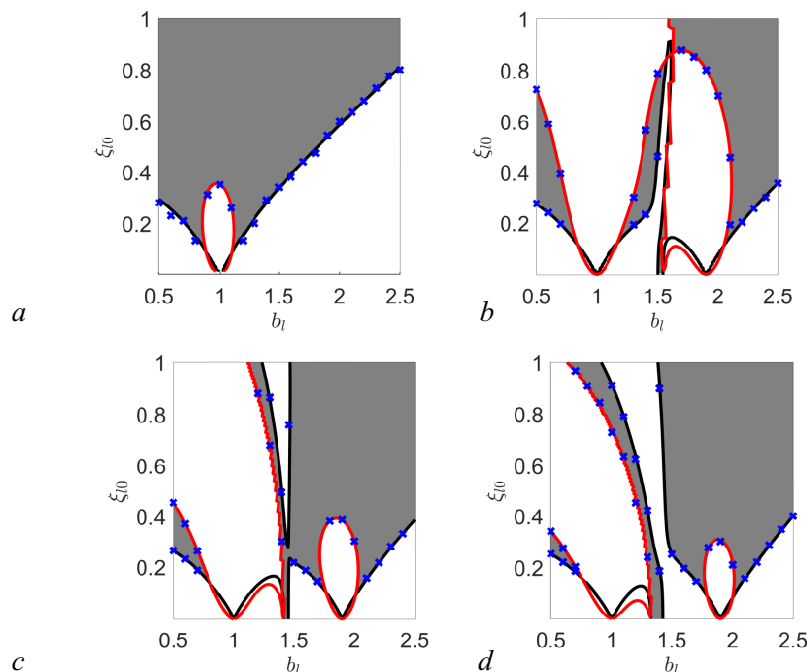


Рис. 8. Эволюция области устойчивости (серые области) среднего положения ТТ ξ_{l0} при: *a* — $j_s = 0$, *b* — $j_s = -0.5$, *c* — $j_s = -0.75$, *d* — $j_s = -1$, $r_l = 1$ мм, $r_s = 1.9$ мм, $t_{pm} = 0.1$ мм, $w_l = 14$, $w_s = 12$, $\lambda = 0.4$, $\gamma = 0.2$, $b_s = \frac{r_l}{r_s} b_l$ согласно формулам (15) (черные линии), (24) (красные линии); синие крестики — результаты прямого интегрирования системы (1) (цвет онлайн)

Fig. 8. Evolution of the stability region (gray areas) of the average position of RB ξ_{l0} at: *a* — $j_s = 0$, *b* — $j_s = -0.5$, *c* — $j_s = -0.75$, *d* — $j_s = -1$, $r_l = 1$ mm, $r_s = 1.9$ mm, $t_{pm} = 0.1$ mm, $w_l = 14$, $w_s = 12$, $\lambda = 0.4$, $\gamma = 0.2$, $b_s = \frac{r_l}{r_s} b_l$ according to the formulas (15) (black lines), (24) (red lines); blue crosses — results of direct integration of the system (1) (color online)

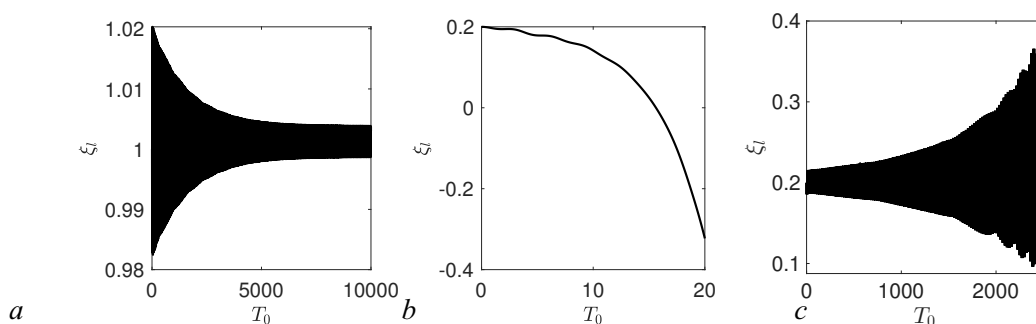


Рис. 9. Графики зависимости безразмерной величины перемещения ТТ от безразмерного времени T_0 в случае прямого численного счета для: *a* — $(b_l, \xi_{l0}) = (1, 1)$, *b* — $(2, 0.2)$, *c* — $(1, 0.2)$; $j_s = 0$, $r_l = 1$ мм, $r_s = 1.9$ мм, $t_{pm} = 0.1$ мм, $w_l = 14$, $w_s = 12$, $\lambda = 0.4$, $\gamma = 0.2$

Fig. 9. Graphs of dependence of dimensionless RB displacement on dimensionless time T_0 in the case of direct numerical calculation for: *a* — $(b_l, \xi_{l0}) = (1, 1)$, *b* — $(2, 0.2)$, *c* — $(1, 0.2)$; $j_s = 0$, $r_l = 1$ mm, $r_s = 1.9$ mm, $t_{pm} = 0.1$ mm, $w_l = 14$, $w_s = 12$, $\lambda = 0.4$, $\gamma = 0.2$

колебаний (серая область на рис. 8), b — неустойчивых колебаний согласно нарушения условия (15), c — неустойчивых колебаний в предположении о нарушении условия (24).

Из рис. 9, $a-c$ видно, что в случае выполнения всех неравенств в (15), (24) колебания ТТ являются установившимися; при невыполнении хотя бы одного из неравенств (15), (24) движения ТТ являются расходящимися.

На рис. 10 представлена зависимость высоты левитации ТТ от времени T_0 , полученная в результате численного расчёта при нарушении условия (24) в интервале $T_0 = [1200; 1250]$. Чёрной линией (1) обозначено численное решение, красной (2) — аналитическая оценка дрейфа среднего положения $\sin \sqrt{2b}\varepsilon\tau$, соответствующая выражению (25).

В качестве числового примера оценим собственную частоту и жесткость ТТ, выполненного в форме тонкого кольца. Физические параметры, взятые из [51] и принятые для аналитической оценки, приведены в табл. 2. Здесь ρ , ρ_{el} — плотность и удельное электрическое сопротивление материала ТТ.

В [35] нами была аналитически получена оценка для безразмерной величины собственной частоты ω_l :

$$\hat{\omega}_l = \varepsilon \sqrt{-\frac{m_l^2 + m_0 m_{ll}}{m_0 m_l}}, \quad (27)$$

откуда размерные собственная частота ω_l и жесткость c_l вычисляются как

$$\omega_l = \omega \hat{\omega}_l, \quad c_l = \hat{m} \omega_l^2. \quad (28)$$

Как видно из рис. 10, нарушение условия (24) приводит к дрейфу среднего положения ξ_{l0} , на который накладываются колебания с безразмерной частотой, равной двум. На рис. 11 изображена зависимость жесткости системы c_l от высоты левитации ТТ l (25).

Таблица 2. Физические и геометрические параметры подвеса

Table 2. Physical and geometric parameters of the suspension

Параметр	r_l	r_s	r_{pm}	t_{pm}
Значение	1000 мкм	1900 мкм	1600 мкм	25 мкм
Параметр	w_l	w_s	ρ	ρ_{el}
Значение	20	12	2700 кг/м ³	0.026 мкОмм
Параметр	ω	I_l	I_s	\hat{m}
Значение	12 МГц	0.11 А	-0.106 А	5.4×10^{-7} кг
Параметр	R_{pm}	g	μ_0	L_{pm}
Значение	0.42 Ом	9.8 м/с ²	$4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м	10.14 нГн

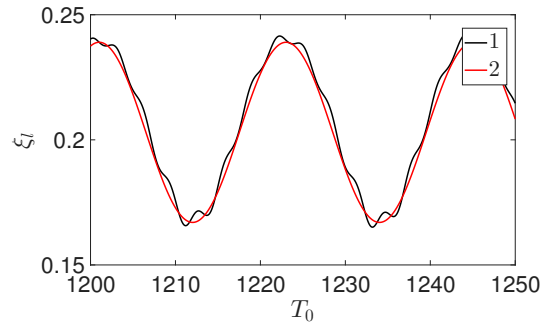


Рис. 10. График зависимости безразмерной величины перемещения ТТ от безразмерного времени T_0 в случае прямого численного счета для $(b_l, \xi_{l0}) = (1, 0.2)$; $j_s = 0$, $r_l = 1$ мм, $r_s = 1.9$ мм, $t_{pm} = 0.1$ мм, $w_l = 14$, $w_s = 12$, $\lambda = 0.4$, $\gamma = 0.2$. Диапазон $T_0 = [1250 \ 1240]$ (цвет онлайн)

Fig. 10. Graph of the dependence of the dimensionless displacement of the RB on the dimensionless time T_0 in the case of direct numerical calculation for $(b_l, \xi_{l0}) = (1, 0.2)$; $j_s = 0$, $r_l = 1$ mm, $r_s = 1.9$ mm, $t_{pm} = 0.1$ mm, $w_l = 14$, $w_s = 12$, $\lambda = 0.4$, $\gamma = 0.2$. Range $T_0 = [1250 \ 1240]$ (color online)

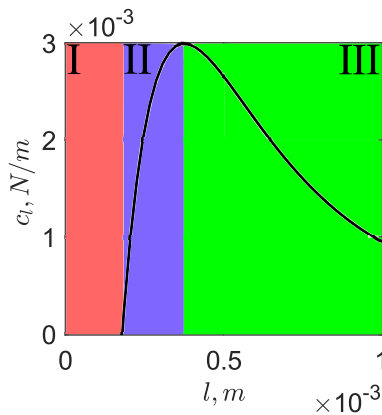


Рис. 11. График зависимости жесткости c_l системы от высоты левитации l (цвет онлайн)

Fig. 11. Graph of dependence of stiffness c_l of the system on the levitation height l (color online)

неустойчивым. Колебание имеет «среднее положение», определяемое как результат усреднения координаты на масштабе времени, который значительно больше периода колебаний, но значительно меньше других («медленных») временных масштабов динамики системы.

Динамика в медленном времени T_1 , описываемая уравнением консервативного нелинейного осциллятора (11), может иметь (или не иметь) одно или более положений равновесия ξ_{st} , каждое из которых может быть устойчивым или нет, в зависимости от выполнения условия устойчивости (15). Если положение равновесия ξ_{st} устойчиво, то система (11) имеет «медленное» колебательное решение (18) в его окрестности; это колебательное решение является аппроксимацией медленного движения («дрейфа») «среднего положения» исходной модели.

Динамика амплитуды $A = \sqrt{h(T_2)/b}$ колебательного решения (18) в ещё более медленном времени T_2 описывается уравнением 1-го порядка (21), имеющим состояние равновесия $h = 0$. Устойчивость этого состояния, в свою очередь, определяется условием (24). Если условие (24) выполнено, то медленные колебания («дрейф среднего положения») затухают (тогда суммарное асимптотическое решение устойчиво), в противном случае — нарастают (тогда суммарное решение неустойчиво).

Заключение

В настоящей работе построена аналитическая модель одномерных нелинейных колебаний чувствительного элемента электромагнитного подвеса, выполненного в форме тонкого кольца из токопроводящего материала. Приближенное решение задачи динамики найдено с применением асимптотических методов нелинейной механики. В предположении о медленной эволюции среднего положения ТТ определены условия возникновения и параметры дрейфа левитирующего твердого тела. В уточненной асимптотической постановке исследована устойчивость режима стационарной левитации. Показано, что учет возможности медленной эволюции средней высоты левитации приводит к формулировке условия устойчивости, связанного с соотношением между диссипацией механической и электрической природы.

Список литературы

1. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
2. Скубов Д. Ю., Ходжаев К. Ш. Нелинейная электромеханика. М.: Наука, 2003. 360 с.

Из рис. 11 видно, что существуют три характерные зоны зависимости жесткости c_l от высоты левитации l . В зоне малых величин l (красная область (I)) величина c_l принимает отрицательные значения (они не приведены на рис. 11). В фиолетовой области (II) наблюдается монотонное возрастание c_l вплоть до достижения максимума $c_l = c_l^{max}$, в зеленой области (III) с увеличением l величина c_l убывает.

Суммируя вышеизложенное, подчеркнем ключевые особенности режима левитации ТТ в индукционном подвесе, выявленные в ходе проведенного исследования:

Исходная модель (1) не имеет положения равновесия, только «быстрое» колебательное решение, которое может быть устойчивым или

3. *Han H. S., Kim D. S.* Magnetic Levitation: Maglev Technology and Applications. Dordrecht: Springer, 2016. 247 p. DOI: 10.1007/978-94-017-7524-3.
4. *Poletkin K.* Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. Cham: Springer, 2021. 174 p. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0.
5. *Poletkin K.* Levitating micro-actuators: A review // *Actuators*. 2018. Vol. 7, no. 2. P. 17. DOI: 10.3390/act7020017.
6. *Liu K., Zhang W., Chen W., Li K., Dai F., Cui F., Wu X., Ma G., Xiao Q.* The development of micro-gyroscope technology // *J. Micromech. Microeng.* 2009. Vol. 19, no. 11. P. 113001. DOI: 10.1088/0960-1317/19/11/113001.
7. *Shearwood C., Ho K. Y., Williams C. B., Gong H.* Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope // *Sensors and Actuators A: Physical*. 2000. Vol. 83, no. 1–3. P. 85–92. DOI: 10.1016/S0924-4247(00)00292-2.
8. *Poletkin K.* Mechanical Thermal Noise in Levitation Micro-Gyroscopes // In: *Levitation Micro-Systems. Microsystems and Nanosystems*. Cham: Springer, 2021. P. 135–154. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0_7.
9. *Mustafa M. N. M.* Comprehensive review and analysis of the electromagnetic levitation systems (modeling, controllers, nonlinearity sources) // *E3S Web Conf.* 2023. Vol. 371. P. 04027. DOI: 10.1051/e3sconf/202337104027.
10. *Poletkin K. V., Lu Z., Moazenzadeh A., Mariappan S. G., Korvink J. G., Wallrabe U., Badilita V.* Energy-aware 3D micro-machined inductive suspensions with polymer magnetic composite core // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2018. Vol. 1052. P. 012048. DOI: 10.1088/1742-6596/1052/1/012048.
11. *Shearwood C., Williams C. B., Mellor P. H., Chang K. Y., Woodhead J.* Electro-magnetically levitated micro-discs // In: *IEE Colloquium on Microengineering Applications in Optoelectronics*. London: IET, 1996. P. 6/1–6/3. DOI: 10.1049/ic:19960241.
12. *Williams C. B., Shearwood C., Mellor P. H., Yates R. B.* Modelling and testing of a frictionless levitated micromotor // *Sensors and Actuators A: Physical*. 1997. Vol. 61, no. 1–3. P. 469–473. DOI: 10.1016/S0924-4247(97)80307-X.
13. *Shearwood C., Williams C. B., Mellor P. H., Yates R. B., Gibbs M. R. J., Mattingley A. D.* Levitation of a micromachined rotor for application in a rotating gyroscope // *Electronics Letters*. 1995. Vol. 31, no. 21. P. 1845–1846. DOI: 10.1049/el:19951232.
14. *Williams C. B., Shearwood C., Mellor P. H., Mattingley A. D., Gibbs M. R. J., Yates R. B.* Initial fabrication of a micro-induction gyroscope // *Microelectronic Engineering*. 1996. Vol. 30, no. 1–4. P. 531–534. DOI: 10.1016/0167-9317(95)00302-9.
15. *Wu X. S., Chen W. Y., Zhao X. L., Zhang W. P.* Micromotor with electromagnetically levitated rotor using separated coils // *Electronics Letters*. 2004. Vol. 40, no. 16. P. 996–997. DOI: 10.1049/el:20040601.
16. *Tsai N. C., Huang W. M., Chiang C. W.* Magnetic actuator design for single-axis micro-gyroscopes // *Microsyst. Technol.* 2009. Vol. 15. P. 493–503. DOI: 10.1007/s00542-008-0769-y.
17. *Luan B., Zhang X., Xu F., Yang G., Jin J., Xu C., Sun F., Oka K.* High precision magnetic levitation actuator for micro-EDM // *Actuators*. 2022. Vol. 11, no. 12. P. 361. DOI: 10.3390/act11120361.
18. *Xiao Q., Wang Y., Dricot S., Kraft M.* Design and experiment of an electromagnetic levitation system for a micro mirror // *Microsyst. Technol.* 2019. Vol. 25. P. 3119–3128. DOI: 10.1007/s00542-019-04452-w.
19. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Korvink J., Badilita V.* Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017. Vol. 131–132. P. 753–766. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016.

20. *Jayawant B. V.* Electromagnetic suspension and levitation // *Rep. Prog. Phys.* 1981. Vol. 44, no. 4. P. 411–477. DOI: 10.1088/0034-4885/44/4/002.
21. *Kim N. H., Ge L.* Dynamic modeling of electromagnetic suspension system // *Journal of Vibration and Control.* 2013. Vol. 19, no. 5. P. 729–741. DOI: 10.1177/1077546312438601.
22. *Gysen B. L., Janssen J. L., Paulides J. J., Lomonova E. A.* Design aspects of an active electromagnetic suspension system for automotive applications // *IEEE Transactions on Industry Applications.* 2009. Vol. 45, no. 5. P. 1589–1597. DOI: 10.1109/TIA.2009.2027097.
23. *Chu S. Y., Cui X., Zan X., Avestruz A. T.* Transfer-power measurement using a non-contact method for fair and accurate metering of wireless power transfer in electric vehicles // *IEEE Transactions on Power Electronics.* 2021. Vol. 37, no. 2. P. 1244–1271. DOI: 10.1109/TPEL.2021.3105689.
24. *Lohöfer G.* High-resolution inductive measurement of electrical resistivity and density of electromagnetically levitated liquid metal droplets // *Rev. Sci. Instrum.* 2018. Vol. 89. P. 124709. DOI: 10.1063/1.5065482.
25. *Udalov P., Lukin A., Popov I., Skubov D.* Analysis of the equilibrium of a magnetic contactless suspension // In: *Microactuators, Microsensors and Micromechanisms. MAMM 2022. Mechanisms and Machine Science / Pandey A. K., Pal P., Nagahanumaiah Z. L. (eds) Cham: Springer, 2022.* P. 183–190. DOI: 10.1007/978-3-031-20353-4_14.
26. *Mamleyev E. R., Lee C. H., Korvink J. G., Kohl M., Poletkin K. V.* Experimental study and simulation of pull-in behavior in hybrid levitation microactuator for square-shaped proof masses // *Actuators.* 2023. Vol. 12, no. 2. P. 48. DOI: 10.3390/act12020048.
27. *Okress E. C., Wroughton D. M., Comenetz G., Brace P. H., Kelly J. C. R.* Electromagnetic levitation of solid and molten metals // *J. Appl. Phys.* 1952. Vol. 23, no. 5. P. 545–552. DOI: 10.1063/1.1702249.
28. *Poletkin K., Chernomorsky A. I., Shearwood C., Wallrabe U.* A qualitative analysis of designs of micromachined electromagnetic inductive contactless suspension // *International Journal of Mechanical Sciences.* 2014. Vol. 82. P. 110–121. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.03.013.
29. *Poletkin K. V., Lu Z., Wallrabe U., Korvink J. G., Badilita V.* A qualitative technique to study stability and dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions // In: *2017 19th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS).* 2017, Kaohsiung, Taiwan. New York: IEEE, 2017. P. 528–531. DOI: 10.1109/TRANSDUCERS.2017.7994102.
30. *Shearwood C., Ho K. Y., Williams C. B., Gong H.* Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope // *Sensors and Actuators A: Physical.* 2000. Vol. 83, no. 1–3. P. 85–92. DOI: 10.1016/S0924-4247(00)00292-2.
31. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Badilita V.* Hybrid electromagnetic and electrostatic micromachined suspension with adjustable dynamics // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2015. Vol. 660. P. 012005. DOI: 10.1088/1742-6596/660/1/012005.
32. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Badilita V.* A new hybrid micromachined contactless suspension with linear and angular positioning and adjustable dynamics // *Journal of Microelectromechanical Systems.* 2015. Vol. 24, no. 5. P. 1248–1250. DOI: 10.1109/JMEMS.2015.2469211.
33. *Poletkin K. V., Chernomorsky A. I., Shearwood C., Wallrabe U.* An analytical model of micromachined electromagnetic inductive contactless suspension // In: *Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition.* 15–21 November, 2013, San Diego, California, USA. P. V010T11A072. DOI: 10.1115/IMECE2013-66010.
34. *Xia D., Yu C., Kong L.* A micro dynamically tuned gyroscope with adjustable static capacitance // *Sensors.* 2013. Vol. 13, no. 2. P. 2176–2195. DOI: 10.3390/s130202176.
35. *Udalov P. P., Popov I. A., Lukin A. V., Shtukin L. V., Poletkin K. V.* Parametric stability of microscale

- contactless inductive suspension with an electrostatic control loop of stiffness // *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2024. Vol. 53. P. 25–34. DOI: 10.1134/S1052618824010138.
36. *Poletkin K., Lu Z., en Hartogh B., Wallrabe U., Badilita V.* Stability and spring constant investigation for micromachined inductivesuspensions: Theoretical analysis vs. experimental results // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2014. Vol. 557. P. 012133. DOI: 10.1088/1742-6596/557/1/012133.
 37. *Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А.* Расчет индуктивностей: Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат, 1986. 488 с.
 38. *Rosa E. B., Grover F. W.* Formulas and Tables for the Calculation of Mutual and Self-inductance. Washington, DC: US Government Printing Office, 1948. Vol. 169. 237 p.
 39. *Poletkin K. V.* Calculation of magnetic force and torque between two arbitrarily oriented circular filaments using Kalantarov–Zeitlin’s method // *International Journal of Mechanical Sciences.* 2022. Vol. 220. P. 107159. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107159.
 40. *Babic S., Akyel C.* Magnetic force between inclined circular loops (Lorentz approach) // *Progress In Electromagnetics Research B.* 2012. Vol. 38. P. 333–349. DOI: 10.2528/PIERB12011501.
 41. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Korvink J., Badilita V.* Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions // *International Journal of Mechanical Sciences.* 2017. Vol. 131–132. P. 753–766. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016.
 42. *Poletkin K.* On the static pull-in of tilting actuation in electromagnetically levitating hybrid micro-actuator: Theory and experiment // *Actuators.* 2021. Vol. 10, no. 10. P. 256. DOI: 10.3390/act10100256.
 43. *Liu K., Zhang W., Liu W., Chen W., Li K., Cui F., Li S.* An innovative micro-diamagnetic levitation system with coils applied in micro-gyroscope // *Microsyst. Technol.* 2010. Vol. 16. P. 431–439. DOI: 10.1007/s00542-009-0935-x.
 44. *Liu W., Zhang W., Chen W.* Simulation analysis and experimental study of the diamagnetically levitated electrostatic micromotor // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* 2019. Vol. 492. P. 165634. DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.165634.
 45. *Poletkin K.* Quasi-finite element modelling // In: *Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators.* Cham: Springer, 2021. P. 45–58. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0_4.
 46. *Lu Z., Jia F., Korvink J., Wallrabe U., Badilita V.* Design optimization of an electromagnetic microlevitation system based on copper wirebonded coils // In: *Proceedings of the 2012 Power MEMS. 2–5 December 2012, Atlanta, GA.* P. 363–366. DOI: 10.13140/2.1.4460.9284.
 47. *Скубов Д. Ю., Индейцев Д. А., Удалов П. П., Попов И. А., Лукин А. В., Полеткин К. В.* Нелинейная динамика микромеханического неконтактного индукционного подвеса // *Изв. РАН. МТТ.* 2023. № 6. С. 98–112. DOI: 10.31857/S0572329922600864.
 48. *Nayfeh A. H.* Perturbation Methods. New York: Wiley, 2008. 425 p.
 49. *Gatzke E.* Introduction to MATLAB // In: *Introduction to Modeling and Numerical Methods for Biomedical and Chemical Engineers.* Cham: Springer, 2022. P. 99–121. DOI: 10.1007/978-3-030-76449-4_6.
 50. *Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Y. A., Meijer H. G. E., Sautois B.* New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems // *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems.* 2008. Vol. 14, no. 2. P. 147–175. DOI: 10.1080/13873950701742754.
 51. *Lu Z., Poletkin K., den Hartogh B., Wallrabe U., Badilita V.* 3D micro-machined inductive contactless suspension: Testing and modeling // *Sensors and Actuators A: Physical.* 2014. Vol. 220. P. 134–143. DOI: 10.1016/j.sna.2014.09.017.

References

1. Martynenko YuG. Motion of a Rigid Body in Electric and Magnetic Fields. Moscow: Nauka; 1988. 368 p. (in Russian).

2. Skubov D, Khodzhaev KS. Non-Linear Electromechanics. Berlin: Springer; 2008. 471 p. DOI: 10.1007/978-3-540-44779-5.
3. Han HS, Kim DS. Magnetic Levitation: Maglev Technology and Applications. Dordrecht: Springer; 2016. 247 p. DOI: 10.1007/978-94-017-7524-3.
4. Poletkin K. Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. Cham: Springer; 2021. 174 p. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0.
5. Poletkin K. Levitating micro-actuators: A review. *Actuators*. 2018;7(2):17. DOI: 10.3390/act7020017.
6. Liu K, Zhang W, Chen W, Li K, Dai F, Cui F, Wu X, Ma G, Xiao Q. The development of micro-gyroscope technology. *J. Micromech. Microeng.* 2009;19(11):113001. DOI: 10.1088/0960-1317/19/11/113001.
7. Shearwood C, Ho KY, Williams CB, Gong H. Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2000;83(1–3):85–92. DOI: 10.1016/S0924-4247(00)00292-2.
8. Poletkin K. Thermal Noise in Levitation Micro-Gyroscopes. In: *Levitation Micro-Systems. Microsystems and Nanosystems*. Cham: Springer; 2021. P. 135–154. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0_7.
9. Mustafa MNM. Comprehensive review and analysis of the electromagnetic levitation systems (modeling, controllers, nonlinearity sources). *E3S Web of Conferences*. 2023;371:04027. DOI: 10.1051/e3sconf/202337104027.
10. Poletkin KV, Lu Z, Moazenzadeh A, Mariappan SG, Korvink JG, Wallrabe U, Badilita V. Energy-aware 3D micro-machined inductive suspensions with polymer magnetic composite core. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2018;1052:012048. DOI: 10.1088/1742-6596/1052/1/012048.
11. Shearwood C, Williams CB, Mellor PH, Chang KY, Woodhead J. Electro-magnetically levitated micro-discs. In: *IEE Colloquium on Microengineering Applications in Optoelectronics*. London: IET; 1996. P. 6/1–6/3. DOI: 10.1049/ic:19960241.
12. Williams CB, Shearwood C, Mellor PH, Yates RB. Modelling and testing of a frictionless levitated micromotor. *Sensors and Actuators A: Physical*. 1997;61(1–3):469–473. DOI: 10.1016/S0924-4247(97)80307-X.
13. Shearwood C, Williams CB, Mellor PH, Yates RB, Gibbs MRJ, Mattingley AD. Levitation of a micromachined rotor for application in a rotating gyroscope. *Electronics Letters*. 1995;31(21):1845–1846. DOI: 10.1049/el:19951232.
14. Williams CB, Shearwood C, Mellor PH, Mattingley AD, Gibbs MRJ, Yates RB. Initial fabrication of a micro-induction gyroscope. *Microelectronic Engineering*. 1996;30(1–4):531–534. DOI: 10.1016/0167-9317(95)00302-9.
15. Wu XS, Chen WY, Zhao XL, Zhang WP. Micromotor with electromagnetically levitated rotor using separated coils. *Electronics Letters*. 2004;40(16):996–997. DOI: 10.1049/el:20040601.
16. Tsai NC, Huang WM, Chiang CW. Magnetic actuator design for single-axis micro-gyroscopes. *Microsyst. Technol.* 2009;15:493–503. DOI: 10.1007/s00542-008-0769-y.
17. Luan B, Zhang X, Xu F, Yang G, Jin J, Xu C, Sun F, Oka K. High precision magnetic levitation actuator for micro-EDM. *Actuators*. 2022;11(12):361. DOI: 10.3390/act11120361.
18. Xiao Q, Wang Y, Dricot S, Kraft M. Design and experiment of an electromagnetic levitation system for a micro mirror. *Microsyst. Technol.* 2019;25:3119–3128. DOI: 10.1007/s00542-019-04452-w.
19. Poletkin K, Lu Z, Wallrabe U, Korvink J, Badilita V. Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017;131:753–766. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016.
20. Jayawant BV. Electromagnetic suspension and levitation. *Reports on Progress in Physics*. 1981;44(4):411–477. DOI: 10.1088/0034-4885/44/4/002.

21. Kim NH, Ge L. Dynamic modeling of electromagnetic suspension system. *Journal of Vibration and Control*. 2013;19(5):729–741. DOI: 10.1177/107754631243860.
22. Gysen BL, Janssen JL, Paulides JJ, Lomonova EA. Design aspects of an active electromagnetic suspension system for automotive applications. *IEEE Transactions on Industry Applications*. 2009;45(5):1589–1597. DOI: 10.1109/TIA.2009.2027097.
23. Chu SY, Cui X, Zan X, Avestruz AT. Transfer-power measurement using a non-contact method for fair and accurate metering of wireless power transfer in electric vehicles. *IEEE Transactions on Power Electronics*. 2021;37(2):1244–1271. DOI: 10.1109/TPEL.2021.3105689.
24. Lohöfer G. High-resolution inductive measurement of electrical resistivity and density of electromagnetically levitated liquid metal droplets. *Rev. Sci. Instrum.* 2018;89:124709. DOI: 10.1063/1.5065482.
25. Udalov P, Lukin A, Popov I, Skubov D. Analysis of the Equilibrium of a Magnetic Contactless Suspension. In: Pandey AK, Pal P, Nagahanumaiah ZL, editors. *Microactuators, Microsensors and Micromechanisms. MAMM 2022. Mechanisms and Machine Science*. Cham: Springer; 2022. P. 183–190. DOI: 10.1007/978-3-031-20353-4_14.
26. Mamleyev ER, Lee CH, Korvink JG, Kohl M, Poletkin KV, Badilita V. Experimental study and simulation of pull-in behavior in hybrid levitation microactuator for square-shaped proof masses. *Actuators*. 2023;12(2):48. DOI: 10.3390/act12020048.
27. Okress EC, Wroughton DM, Comenetz G, Brace PH, Kelly JCR. Electromagnetic levitation of solid and molten metals. *J. Appl. Phys.* 1952;23(5):545–552. DOI: 10.1063/1.1702249.
28. Poletkin K, Chernomorsky AI, Shearwood C, Wallrabe U. A qualitative analysis of designs of micromachined electromagnetic inductive contactless suspension. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014;82:110–121. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.03.013.
29. Poletkin KV, Lu Z, Wallrabe U, Korvink JG, Badilita V. A qualitative technique to study stability and dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions. In: 2017 19th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS). 2017, Kaohsiung, Taiwan. New York: IEEE; 2017. P. 528–531. DOI: 10.1109/TRANSDUCERS.2017.7994102.
30. Shearwood C, Ho KY, Williams CB, Gong H. Development of a levitated micromotor for application as a gyroscope. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2000;83(1–3):85–92. DOI: 10.1016/S0924-4247(00)00292-2.
31. Poletkin K, Lu Z, Wallrabe U, Badilita V. Hybrid electromagnetic and electrostatic micromachined suspension with adjustable dynamics. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2015;660:012005. DOI: 10.1088/1742-6596/660/1/012005.
32. Poletkin K, Lu Z, Wallrabe U, Badilita V. A new hybrid micromachined contactless suspension with linear and angular positioning and adjustable dynamics. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2015;24(5):1248–1250. DOI: 10.1109/JMEMS.2015.2469211.
33. Poletkin KV, Chernomorsky AI, Shearwood C, Wallrabe U. An analytical model of micromachined electromagnetic inductive contactless suspension. In: *Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. 15–21 November, 2013, San Diego, California, USA. P. V010T11A072. DOI: 10.1115/IMECE2013-66010.
34. Xia D, Yu C, Kong L. A micro dynamically tuned gyroscope with adjustable static capacitance. *Sensors*. 2013;13(2):2176–2195. DOI: 10.3390/s130202176.
35. Udalov PP, Popov IA, Lukin AV, Shtukin LV, Poletkin KV. Parametric stability of microscale contactless inductive suspension with an electrostatic control loop of stiffness. *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2024;53:25–34. DOI: 10.1134/S1052618824010138.
36. Poletkin K, Lu Z, en Hartogh B, Wallrabe U, Badilita V. Stability and spring constant investigation for micromachined inductivesuspensions: Theoretical analysis vs. experimental results. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2014;557:012133. DOI: 10.1088/1742-6596/557/1/012133.

37. Kalantarov PL, Cejtin LA. Calculation of Inductors: The Reference Book. L.: Energoatomizdat; 1986. 488 p. (in Russian).
38. Rosa EB, Grover FW. Formulas and Tables for the Calculation of Mutual and Self-inductance. Washington, DC: US Government Printing Office; 1948. Vol. 169. 237 p.
39. Poletkin KV. Calculation of magnetic force and torque between two arbitrarily oriented circular filaments using Kalantarov–Zeitlin’s method. International Journal of Mechanical Sciences. 2022;220:107159. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107159.
40. Babic S, Akyel C. Magnetic force between inclined circular loops (Lorentz approach). Progress In Electromagnetics Research B. 2012;38:333–349. DOI: 10.2528/PIERB12011501.
41. Poletkin K, Lu Z, Wallrabe U, Korvink J, Badilita V. Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions. International Journal of Mechanical Sciences. 2017;131: 753–766. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016.
42. Poletkin K. On the static pull-in of tilting actuation in electromagnetically levitating hybrid micro-actuator: Theory and experiment. Actuators. 2021;10(10):256. DOI: 10.3390/act10100256.
43. Liu K, Zhang W, Liu W, Chen W, Li K, Cui F, Li S. An innovative micro-diamagnetic levitation system with coils applied in micro-gyroscope. Microsyst. Technol. 2010;16:431–439. DOI: 10.1007/s00542-009-0935-x.
44. Liu W, Zhang W, Chen W. Simulation analysis and experimental study of the diamagnetically levitated electrostatic micromotor. Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2019;492:165634. DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.165634.
45. Poletkin K. Quasi-finite Element Modelling. In: Levitation Micro-Systems: Applications to Sensors and Actuators. Cham: Springer; 2021. P. 45–58. DOI: 10.1007/978-3-030-58908-0_4.
46. Lu Z, Jia F, Korvink J, Wallrabe U, Badilita V. Design optimization of an electromagnetic microlevitation system based on copper wirebonded coils. In: Proceedings of the 2012 Power MEMS. 2–5 December 2012, Atlanta, GA. P. 363–366. DOI: 10.13140/2.1.4460.9284.
47. Skubov DYu, Indeitsev DA, Udalov PP, Popov IA, Lukin AV, Poletkin KV. Nonlinear dynamics of a micromechanical non-contact induction suspension. Mech. Solids. 2023;58(6):2011–2023. DOI: 10.3103/S0025654423600307.
48. Nayfeh AH. Perturbation Methods. New York: John Wiley; 2008. 425 p.
49. Gatzke E. Introduction to MATLAB. In: Introduction to Modeling and Numerical Methods for Biomedical and Chemical Engineers. Cham: Springer; 2022. P. 99–121. DOI: 10.1007/978-3-030-76449-4_6.
50. Dhooge A, Govaerts W, Kuznetsov YA, Meijer HGE, Sautois B. New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. 2008;14(2):147–175. DOI: 10.1080/13873950701742754.
51. Lu Z, Poletkin K, den Hartogh B, Wallrabe U, Badilita V. 3D micro-machined inductive contactless suspension: Testing and modeling. Sensors and Actuators A: Physical. 2014;220: 134–143. DOI: 10.1016/j.sna.2014.09.017.



Удалов Павел Павлович — инженер-исследователь Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
 E-mail: pp_udalov@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-9744-8869
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1117107



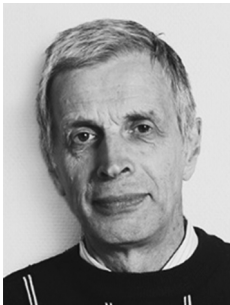
Лукин Алексей Вячеславович — кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
E-mail: lukinalexei@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-2016-8612
AuthorID (eLibrary.Ru): 742760



Попов Иван Алексеевич — инженер-исследователь Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
E-mail: popov_ia@spbstu.ru
ORCID: 0000-0003-4425-9172
AuthorID (eLibrary.Ru): 879490



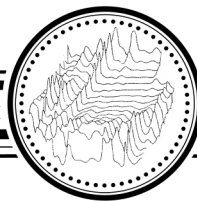
Штукин Лев Васильевич — кандидат технических наук, доцент Высшей школы «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
E-mail: shtukin_lv@spbstu.ru
ORCID: 0000-0002-8584-619X
AuthorID (eLibrary.Ru): 166909



Полеткин Кирилл Владимирович — кандидат технических наук, профессор школы приборостроения и оптико-электронной техники Технологического университета Хэфэя.

Китай, Хэфэй, ул. Тунси, 193, 230009
Технологический университет Хэфэя
E-mail: k.poletkin@gmail.com
ORCID: 0000-0002-9711-7517



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003212
EDN: UMJPRE

Динамические характеристики пространственных осесимметричных сооружений с учетом диссипации энергии в материале

М. М. Мирсаидов^{1,2}✉, А. Н. Ишматов¹, Б. Ш. Юлдошев¹, Ш. М. Салимов³, И. О. Хазраткулов¹

¹Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», Узбекистан

²Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М. Т. Уразбаева Академии наук Узбекистана, Узбекистан

³Ташкентский университет прикладных наук, Узбекистан
E-mail: mirsaidov1948@mail.ru, ribs@mail.ru, Baxtiyor_yuldashev68@mail.ru, salimovshoolim@gmail.com, ✉islomjon.xazratqulov093@gmail.com

Поступила в редакцию 1.11.2025, принята к публикации 5.02.2026,
опубликована онлайн 7.02.2026, опубликована 31.03.2026

Аннотация. Цель работы — подробный анализ современного состояния проблемы динамики осесимметричных сооружений. **Результаты.** Разработаны математическая модель, метод, алгоритм и компьютерная программа расчета на ЭВМ для оценки динамических характеристик (частота, форма и декремент колебаний) пространственных осесимметричных сооружений с учетом диссипации энергии в материале с использованием наследственной модели вязкоупругости Больцмана–Вольтерра в трехмерной постановке. Оценены динамические характеристики конкретных пространственных осесимметричных сооружений типа градирен. Установлено, что для данного типа сооружений низшие неосесимметричные собственные частоты попадают в диапазон преобладающих частот землетрясений. **Заключение.** Выявлено, что учет диссипации в материале приводит к незначительному снижению собственных частот колебаний сооружения и слабому частотно-независимому декременту колебаний; установленные кольца жесткости наверху сооружения несколько повышают неосесимметричные собственные частоты колебаний, при этом изгибные частоты сооружений несколько снижаются.

Ключевые слова: осесимметричное пространственное сооружение, градирня, динамические характеристики, неосесимметричные колебания, комплексные собственные частоты, формы и декремент колебаний, диссипация энергии, наследственная вязкоупругость.

Для цитирования: Мирсаидов М. М., Ишматов А. Н., Юлдошев Б. Ш., Салимов Ш. М., Хазраткулов И. О. Динамические характеристики пространственных осесимметричных сооружений с учетом диссипации энергии в материале // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 2. С. 268–285. DOI: 10.18500/0869-6632-003212. EDN: UMJPRE

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Dynamic characteristics of spatial axisymmetric structures considering energy dissipation in the material

M. M. Mirsaidov^{1,2}✉, A. N. Ishmatov¹, B. Sh. Yuldoshev¹, Sh. M. Salimov³, I. O. Khazratkulov¹

¹The National Research University

«Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers», Uzbekistan

²Institute of Mechanics and Seismic stability of structures named after M. T. Urazbaev,
Uzbekistan Academy of Sciences, Uzbekistan

³University Tashkent for Applied Sciences, Uzbekistan

E-mail: mirsaidov1948@mail.ru, ribs@mail.ru, Baxtiyor_yuldashev68@mail.ru,
salimovshoolim@gmail.com, ✉islomjon.xazratkulov093@gmail.com

Received 1.11.2025, accepted 5.02.2026, available online 7.02.2026, published 31.03.2026

Abstract. The purpose of the work is a comprehensive analysis of the current state of the issue concerning the dynamics of axisymmetric structures. **Results.** A mathematical model, method, algorithm, and computer program for calculations on a computer have been developed to assess the dynamic characteristics (frequency, mode, and damping ratio of vibrations) of spatial axisymmetric structures, considering energy dissipation in the material using the hereditary Boltzmann–Volterra viscoelastic model in a three-dimensional setting. The dynamic characteristics of specific spatial axisymmetric structures of the cooling tower type have been evaluated. It has been determined that for this type of structure, the lowest non-axisymmetric natural frequencies fall within the range of predominant earthquake frequencies. **Conclusion.** It has been found that: accounting for dissipation in the material results in a slight reduction in the natural vibration frequencies of the structure and a weakly frequency-independent damping ratio; the installed stiffening rings at the top of the structure somewhat increase the non-axisymmetric natural vibration frequencies, while the bending frequencies of the structures decrease slightly.

Keywords: axisymmetric spatial construction, cooling tower, dynamic properties, non-axisymmetric vibrations, complex eigenfrequencies, vibration modes and damping ratio, energy dissipation, hereditary viscoelasticity.

For citation: Mirsaidov MM. Ishmatov AN. Yuldoshev BSh. Salimov ShM. Khazratkulov IO. Dynamic characteristics of spatial axisymmetric structures considering energy dissipation in the material. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(2):268–285. DOI: 10.18500/0869-6632-003212

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В последнее время динамические пространственные характеристики различных осесимметричных сооружений с учетом как их сложной геометрии, так и неупругих свойств материалов привлекают внимание исследователей в связи со строительством АЭС и ТЭЦ в районах с высокой сейсмичностью. Очевидно, что динамические характеристики (собственная частота, форма и декремент колебаний) являются основными параметрами сооружений и несут в себе достаточно большую информацию о динамических свойствах сооружения в целом. Как известно, определение динамических характеристик этих сооружений является самостоятельной и достаточно трудной задачей механики.

Это, в свою очередь, требует создания надежной методики и алгоритмов динамического расчета для данного ряда сооружений с учетом как упругих, так и неупругих свойств материала для реального характера работы сооружения.

Имеется большое количество публикаций, рассматривающих динамическое поведение сооружений такого типа, параметры колебательных процессов с учетом диссипации энергии в материале исследованы в меньшей степени. Актуальность решения подобных задач прежде всего объясняется запросами проектирования, строительства и эксплуатации различного типа высотных пространственных осесимметричных сооружений.

Цель работы состоит в разработке методики, алгоритма решения задачи о собственных колебаниях пространственных сооружений, обладающих вязкоупругими свойствами их материала; а также в исследовании динамики конкретных сооружений и анализе полученных результатов с точки зрения обнаружения новых механических эффектов.

В последние годы опубликован ряд работ, где исследованы напряжённо-деформированное состояние и динамическое поведение различных осесимметричных сооружений.

К таким научным работам относятся нижеследующие.

- В работах [1–6] рассмотрена динамика различных осесимметричных сооружений в одномерной и двухмерной постановке с учетом упругих, вязкоупругих постановок как линейных, так и нелинейных свойств материала сооружения при различных воздействиях. Для оценки динамики рассмотренных сооружений разработаны методика и алгоритм решения поставленных задач. Исследовались собственные колебания сооружений в упругой постановке, а также вынужденные колебания с учетом вязкоупругих свойства материала. Вопрос оценки собственных колебаний сооружений с учетом различного рода диссипации в материале оставался открытым из-за сложности решения пространственных задач.

- В работе [7] на основе метода конечных элементов дан анализ свободных колебаний градирни, результаты которого хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными как для реальной градирни, так и для соответствующей модельной конструкции. Показана эффективность метода в качестве инструмента проектирования. Показана возможность использования полученных результатов для анализа другого типа вращательно-периодических сооружений, подверженных сейсмическим возмущениям, ударам ракет или силам ветра.

- В работе [8] содержатся основы физического и геометрически нелинейного анализа градирен в виде тонких оболочек, включая определение точек неустойчивости на траектории перемещения груза. Численное исследование состоит из сравнения трещиностойких и предельных нагрузок двух различных железобетонных градирен, подвергнутых собственной нагрузке и квазистатической ветровой нагрузке, с нагрузками на изгиб, полученными в результате трех режимов анализа физического линейного изгиба.

- В работе [9] рассматривается физическое и математическое моделирование системы «градирня – фундамент – грунт». Физическое моделирование было выполнено с использованием сплошного 20-узлового изопараметрического элемента для моделирования градирни, кольцевого стропильного фундамента и грунтовых сред. Система «градирня – фундамент – грунт» была проанализирована с учетом вертикальных и поперечных нагрузок, возникающих из-за собственного веса и ветровых нагрузок. Нелинейность грунта была учтена с использованием гиперболического нелинейного закона упругости. Исследована реакция конструкции на смещение и напряжения. Исследовано влияние линейного и нелинейного интерактивного анализа по сравнению с традиционным анализом. Установлено, что интерактивный анализ взаимодействия градирни, фундамента и грунта играет важную роль в снижении напряжений в градирне, особенно в нижней кольцевой балке.

- В работе [10] дан всесторонний обзор научных работ, опубликованных в области градирен, и дано представление о последних разработках градирен с естественной тягой. В статье обобщены различные методы моделирования, анализа и проектирования, а также рассмотрены проблемы. Даны 118 ссылок, которые в основном сосредоточены на обзоре опубликованных работ после 2005 года. Работа представляет собой полный обзор исследований, проведенных для градирен, и предоставляет обновленный материал для исследователей и инженеров-проектировщиков в области гиперболических градирен.

- В работе [11] рассматриваются характеристики гиперболической оболочки градирни на свободные и вынужденные колебания, которые являются одним из сложных реальных применений осесимметричных конструкций. В численной модели градирни используется 9-узловой

гармонический кольцевой конечный элемент. Физически трехмерная задача о градирне сводится к двумерной путем выражения сейсмической нагрузки в виде ряда Фурье для одной гармоники с помощью гармонических элементов. Полное решение задачи получено для одного компонента нагрузки, что значительно повышает вычислительную эффективность модели. Проведено параметрическое исследование изменений кривизны корпуса градирни. Для определения динамических характеристик корпуса градирни используется метод анализа временной истории. В исследовании использованы данные об ускорении землетрясения в Дюздже (Турция, 2022). Дан вывод, что число режимов движения по окружности и кривизна корпуса оказывают существенное влияние на динамические характеристики градирен.

- В работе [12] показано применение модифицированной модели фундамента Власова для анализа свободных колебаний гиперболических градирен, опирающихся на упругие основания. При расчете использован вычислительный инструмент, закодированный в MATLAB, использующий функцию открытого интерфейса прикладного программирования SAP2000 для обеспечения двустороннего потока данных во время выполнения. На основе численных примеров сделан вывод, что взаимодействие башни с грунтом и структурой приводит к значительному снижению частотного параметра системы по сравнению с фиксированным состоянием, а изменение геометрических параметров значительно влияет на частотные параметры.

- В работе [13] исследовано динамическое поведение гиперболических градирен с различными геометрическими свойствами при воздействии землетрясения. Анализируются различные образцы градирен с различными геометрическими размерами и исследуется влияние кривизны, гибкости, толщины и уровня горловины на динамическое поведение гиперболических градирен. Влияние данных параметров на поведение градирни исследуется путем сравнения бокового смещения, меридиональных сил и моментов. Численный анализ выполняется с использованием программного обеспечения, написанного на языке программирования MATLAB, что позволяет одновременно использовать пакет программного обеспечения для структурного анализа MATLAB и SAP2000.

- В работе [14] исследованы обширные обзорные и исследовательские статьи, опубликованные по моделированию гиперболических градирен. В работе указывается, что градирни представляют собой дважды изогнутые тонкостенные оболочки сложной геометрии, анализ и проектирование которых привлекли внимание исследователей во всем мире. Даны последние разработки градирен с естественной тягой воздуха в области моделирования надстроек и подконструкций, а также освещены такие аспекты, как конечные элементы оболочки, экспериментальные исследования, поддерживающие системы, различные системы фундаментов. Приводится обзор статей, посвященных градирням, опубликованных после 2005 года по настоящее время.

- В работе [15] рассмотрены сейсмические характеристики гиперболической градирни, опирающейся на грунтовое основание, представленное трехпараметрической моделью упругого грунта Власова. Трехпараметрическая модель грунта исключает необходимость проведения полевых испытаний для определения параметров грунта: модуля упругости и параметра сдвига. Параметры рассчитываются с использованием итерационной процедуры в зависимости от профиля вертикальной деформации поверхности грунта в модели. При расчете использована программа структурного анализа SAP2000 с применением вычислительного инструмента, закодированного в MATLAB. Численные результаты показывают, что гибкость грунтового основания приводит к увеличению смещений, но к уменьшению усилий на оболочку и колонны. Утверждается, что учет взаимодействия грунта и конструкции при анализе сейсмической реакции системы градирни обеспечивает экономичный процесс проектирования.

- В работе [16] построена трехмерная физическая модель для всех восьми этапов строительства сверхбольшой градирни высотой 210 м. Динамические характеристики градирни проанализированы на каждом этапе. Сначала получена информация о поле потока и 3D-хронологии

аэродинамических сил для всего процесса строительства с использованием моделирования больших вихрей (LES). Полный динамический анализ методом конечных элементов использован для расчета динамических характеристик башни при изменении ветровых нагрузок в реальном времени в течение всего процесса строительства. На основе исследований оценено влияние и механизм действия коэффициента вибрации от ветра, возраста бетона, нагрузки на конструкцию, геометрической нелинейности, силы внутреннего всасывания на устойчивость к изгибу и предельную несущую способность градирен.

- В работе [17] проведен нелинейный анализ устойчивости стальных гиперболических градирен высотой 150 м. Созданы модели с пятью структурными системами, включая два типа сетчатых оболочек (то есть однослойные и двухслойные оболочки) и три формы балок (то есть треугольную сетку, прямоугольную сетку и квадратную пирамидальную сетку). Проведены геометрические и материальные анализы нелинейной устойчивости более чем в 220 случаях с учетом различных распределений и амплитуд дефектов. Результаты показали, что пять стальных градирен с гиперболической формой имеют относительно низкую чувствительность к дефектам, что отличает их от большинства других тонкостенных корпусов, а чувствительность к дефектам прямоугольной сетки высока, в то время как треугольная сетка и квадратная пирамидальная сетка имеют низкую чувствительность к дефектам. Анализом установлено, что конструкции с двухслойными сетчатыми оболочками более чувствительны к дефектам, чем конструкции с однослойными.

- В работе [18] рассмотрено гиперболическое охлаждение башни высотой 117 м и исследовано поведение сооружения при землетрясении и воздействии ветра. При расчете ветровой нагрузки применялась скорость ветра 25 м/с, и в ходе анализа землетрясений к конструкциям были применены три записи о движении грунта. Ветровая нагрузка рассчитана в соответствии со стандартом ASCE 7-10 и задана как угловая. В результате анализа получены и исследованы значения смещения и напряжения. Согласно результатам анализа ветровой нагрузки, с увеличением высоты башни значения ветровой нагрузки и значения смещений, происходящих в здании, увеличиваются. Значения смещения и напряжения изменяются под углом в зависимости от угловой ветровой нагрузки. Самые высокие значения смещения и напряжения были получены при землетрясении в Кобе (Япония, 1995). Значения смещения исследованы в зависимости от высоты, и наибольшие значения смещения получены в верхней части.

- В работе [19] представлен анализ ряда работ, посвященных вопросам проектирования и расчета градирен. Особое внимание уделено расчету градирен на ветровые нагрузки (статическую и пульсационную). На основе выполненного анализа разных типов градирен показаны достоинства каркасно-обшивной градирни, выявлены особенности металлических градирен в сравнении с железобетонными, заключающиеся в том, что каркасно-обшивные сооружения можно возводить в любом климатическом районе, включая строительство в зимний период, причем без устройства тепляков. Показано, что пространственный каркас стальной башенной градирни в виде гиперболоида вращения является наиболее целесообразным конструктивным решением для объектов атомной и тепловой электростанций.

Как показывает приведенный анализ известных научных работ, каждая из этих работ имеет как свои преимущества, так и некоторые недостатки, несмотря на это, все они используются при решении конкретных практических задач.

Исходя из этого анализа, можно отметить, что разработка математических моделей, методов решения для оценки динамических характеристик пространственных осесимметричных сооружений с учетом диссипации энергии в материале конструкции с использованием наследственной теории вязкоупругости Больцмана–Вольтерра на данный момент является весьма актуальной и важной проблемой, требующей своего решения.

1. Методика

1.1. Математическая модель. Рассматриваются собственные колебания вязкоупругой пространственной осесимметричной системы, состоящей из осесимметричного сооружения, фундамента и грунтового основания. Рассматриваемая система (рис. 1) занимает объем $V = V_1 + V_2 + V_3$, в котором объемы: V_1 – сооружения, V_2 – фундамента и V_3 – основания. Материалы каждого элемента системы обладают различными вязкоупругими характеристиками. Нижняя часть основания Σ_Z жестко закреплена, а боковая поверхность Σ_R – свободна от напряжений.

Задача состоит в нахождении собственных колебаний, то есть наиболее упорядоченных движений, протекающих при отсутствии внешних воздействий. При учете диссипации в материале все точки системы колеблются по одному и тому же комплексному гармоничному закону с различными амплитудами, то есть

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}^*(\vec{x})e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

здесь ω – комплексная собственная частота; $\vec{u}^*(\vec{x})$ – комплексная собственная форма колебаний;

$$\vec{u} = \{\vec{u}(\vec{x}, t), \vec{v}(\vec{x}, t), \vec{w}(\vec{x}, t)\}, \quad u^* = \{u^*, v^*, w^*\}; \quad \vec{x} = \{r, z, \varphi\} -$$

u, v, w – продольное, тангенциальное и радиальное перемещения рассматриваемой точки системы.

В случае неконсервативных систем, то есть когда учитывается диссипация энергии, ω и \vec{u}^* являются комплексными величинами. При этом $\omega = \omega_R + i\omega_I$ и $\vec{u}^* = \vec{u}_R^* + i\vec{u}_I^*$.

По физическому смыслу действительная часть ω , то есть ω_R , является частотой собственных затухающих колебаний системы, а мнимая ω_I несет информацию о скорости затухания колебаний и с точностью до знака равна коэффициенту демпфирования. Коэффициент демпфирования, являясь количественной характеристикой скорости затухания колебаний, определяет диссипативные свойства системы в целом.

Обычно при использовании модели Кельвина или Фойгта учитывается диссипация только при ползучести или при релаксации. В данной работе для описания диссипативных процессов в системе (см. рис. 1) используется наследственная теория вязкоупругости Больцмана–Вольтерра, что одновременно учитывает диссипативные процессы как в ползучести, так и в релаксации [20–24].

Для математической постановки задачи используется принцип возможных перемещений, согласно которому работа всех активных сил, включая силы инерции на произвольно возможном перемещении, равна нулю, то есть [20, 21]:

$$\delta A = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \delta \vec{u} dV = 0, \quad (2)$$

$$\vec{x} \in \sigma_z : \vec{u} = 0, \quad \delta \vec{u} = 0. \quad (3)$$

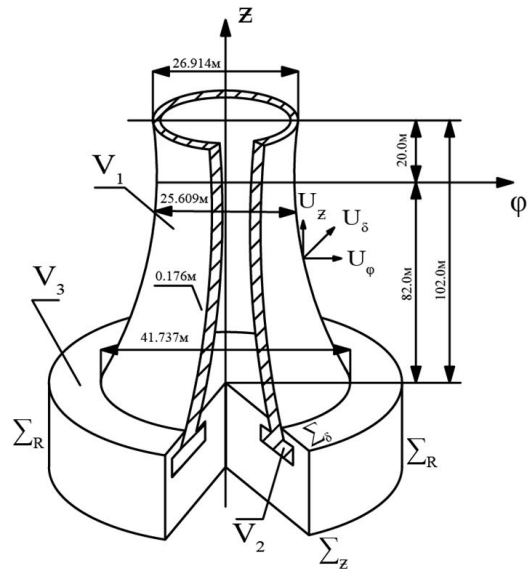


Рис. 1. Пространственная осесимметричная система: 1 – сооружение, 2 – фундамент, 3 – основание

Fig. 1. Spatial axisymmetric system: 1 – structure, 2 – foundation, 3 – base

$\vec{u}, \delta_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — соответственно компоненты вектора перемещений, тензоров напряжений и деформаций; $\delta\vec{u}, \delta\varepsilon_{ij}$ — вариации перемещений и деформаций; $V = V_1 + V_2 + V_3$ — сумма объемов соответственно тела, фундамента и основания; ρ — плотность материала; $\vec{x} = \{r, z, \varphi\}$ — цилиндрические координаты; $i, j = r, z, \varphi$.

При этом подлежит определению комплексная собственная частота ω и форма колебаний \vec{u}^* вязкоупругой пространственной системы (см. рис. 1), удовлетворяющей при любых возможных перемещениях вариационному уравнению (2) при кинематических условиях (3).

Подстановка (1) в (2) и (3) сводит рассматриваемую задачу к комплексной вариационной задаче о собственных значениях:

$$-\int \sigma_{ij}^* \delta\varepsilon_{ij} dV + \omega^2 \int_V \rho_n \vec{u}^* \delta\vec{u}^* dV = 0, \quad (4)$$

$$x \in \sigma_z : \delta\vec{u}^* = 0, \quad (5)$$

где σ_{ij}^* — амплитуда компонентов тензоров напряжений.

Собственная форма колебаний \vec{u}^* определяется из (4) с точностью до постоянного множителя. Для устранения этого произвольно вводится дополнительное условие нормировки собственных форм:

$$\int_V \rho_n \vec{u}^{*2} dV = 1. \quad (6)$$

Теперь задача о собственных колебаниях вязкоупругой системы (см. рис. 1) сводится к отысканию константы ω^2 и функции $\vec{u}^*(\vec{x})$, удовлетворяющих уравнениям (1), условиям нормировки (6) и кинематическим условиям (5) при любом $\delta\vec{u}^*(\vec{x})$.

Здесь

$$\omega, \vec{u}^* = \{u_r^*(r, z, \varphi), u_\varphi^*(r, z, \varphi), u_z^*(r, z, \varphi)\}$$

— соответственно комплексная собственная частота и собственная форма колебаний системы.

Тензор деформаций и вектор перемещений связаны соотношениями Коши [21, 25]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r^*}{\partial r}; & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi} + \frac{u_r^*}{r}; & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z^*}{\partial z}; \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^*}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial r} - \frac{u_\varphi^*}{r} \right); \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial r} + \frac{\partial u_r^*}{\partial z} \right); \\ \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi^*}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^*}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Связь между напряжениями и деформациями имеет вид [21, 26]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= K_m(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) + \frac{2}{3} \tilde{\mu}_m(2\varepsilon_r - \varepsilon_z - \varepsilon_\varphi); \\ \sigma_z &= K_m(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) + \frac{2}{3} \tilde{\mu}_m(2\varepsilon_z - \varepsilon_r - \varepsilon_\varphi); \\ \sigma_\varphi &= K_m(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) + \frac{2}{3} \tilde{\mu}_m(2\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r - \varepsilon_z); \\ \tau_{rz} &= \tilde{\mu}_m \gamma_{rz}; & \tau_{r\varphi} &= \tilde{\mu}_m \gamma_{r\varphi}; & \tau_{z\varphi} &= \tilde{\mu}_m \gamma_{z\varphi}. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом предполагается, что объемное деформирование происходит по упругому закону, а сдвиговое — по вязкоупругому, то есть [21, 26], при этом

$$\tilde{\mu}_m \varphi = \mu_m \left[\varphi(t) - \int_0^t \Gamma_m(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right], \quad (9)$$

где μ_m — модуль сдвига; K_m — модуль объемного сжатия; $\Gamma_m(t - \tau)$ — ядро релаксации; φ — произвольная функция времени; m — тело, к которому относятся механические характеристики ($m = 1$ — конструкция, $m = 2$ — фундамент, $m = 3$ — основание).

Если интегральные члены в соотношении (9) малы, то функцию $\varphi(t)$ в (5) можно представить в виде

$$\varphi(t) = \psi(t) e^{-i\omega_R t},$$

где ψ — медленно меняющаяся функция времени, i — мнимая единица, ω_R — действительная константа, то предполагая, что интегральные члены малы по сравнению с $\varphi(t)$, и используя метод замораживания [27], можно свести интегральное соотношение к комплексному, где ω_R — действительная константа; φ — медленно меняющаяся функция времени; i — мнимая единица

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_m \varphi &= \mu_m [1 - \Gamma_{\mu_m}^c(\omega_R) - i\Gamma_m^S(\omega_R)] \varphi, \\ \Gamma_m^c(\omega_R) &= \int_0^\infty \Gamma_{\mu_m}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \\ \Gamma_m^S(\omega_R) &= \int_0^\infty \Gamma_{\mu_m}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

$\Gamma_{\mu_m}^S, \Gamma_{\mu_m}^C$ — синусы и косинусы образа Фурье ядра $\Gamma_{\mu_m}(\tau)$.

Таким образом, задача об отыскании комплексных собственных частот и собственных форм колебаний вязкоупругой системы (см. рис. 1) свелась к отысканию константы ω^2 и вектора функции $\vec{u}^*(\vec{x})$, удовлетворяющей вариационному уравнению (4), с учетом соотношений (7)–(10), и условиям (5) и (6) при любом возможном перемещении $\delta\vec{u}^*$.

1.2. Метод и алгоритм решения задачи. При решении выше поставленной вариационной задачи о динамических характеристиках пространственной осесимметричной вязкоупругой системы (см. рис. 1) используется полуаналитический вариант метода конечных элементов [28]. При этом решение по одной координате (в окружном направлении) представляется в виде отдельных гармоник, то есть через n в виде

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \{u_r, u_\varphi, u_z\}, \\ u_r &= u_r^*(r, \varphi, z) \cos \omega t, \\ u_\varphi &= u_\varphi^*(r, \varphi, z) \cos \omega t, \\ u_z &= u_z^*(r, \varphi, z) \cos \omega t, \\ u_r^* &= u_n(r, z) \cos n\varphi, \\ u_\varphi^* &= w_n(r, z) \sin n\varphi, \\ u_z^* &= v_n \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

Дискретизация рассматриваемой системы (см. рис. 1) осуществляется с использованием конечного элемента в виде кольцевого конечного элемента треугольного сечения [20, 28].

Использование конечных элементов сложной формы усложняет решение системы из десятков тысяч интегро-дифференциальных уравнений. Поэтому применяются простые треугольные элементы, а требуемая точность обеспечивается за счет их большого количества.

Использование процедуры метода конечных элементов позволяет свести вариационную задачу (4)–(5) к решению комплексного алгебраического уравнения на собственные значения, то есть

$$([\bar{K}] - \omega^2 [M]) \{\bar{X}\} = 0, \quad (12)$$

где $[\bar{K}]$ – комплексная матрица жесткости системы; $[M]$ – матрица массы системы; $\omega = \omega_R - i\omega_I$, $\{\bar{X}\} = \{X_R - iX_I\}$ – комплексные собственная частота и собственный вектор рассматриваемой системы (см. рис. 1) соответственно.

Кинематические граничные условия учитываются при формировании уравнений (12), то есть если компоненты перемещений или прогиб какого-то узла равны нулю, то соответствующие им строки уравнений (12) не формируются.

Комплексные корни характеристического определителя задачи (12) ищутся методом Мюллера [29], а собственный вектор – методом Гаусса [30].

При этом решение однородной системы алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами (12), то есть действительная часть ω_R частоты ω является частотой свободных затухающих колебаний системы (см. рис. 1), а мнимая ω_I несет информацию о скорости затухания колебаний, и с точностью до знака равно коэффициенту демпфирования.

1.3. Результаты и выводы. В качестве примера для оценки пространственных динамических характеристик осесимметричных сооружений с учетом диссипативных свойств материала рассмотрена градирня Ново-Ангренской тепловой электростанции высотой 102 м с переменным уклоном и переменной толщиной, что позволяет учесть их реальную геометрию.

Для учета диссипативных свойств в материале сооружения используется линейная наследственная теория Больцмана–Вольтерра, которая достаточно хорошо описывает вязкоупругие свойства бетона. В качестве ядра релаксации используются ядра Колтунова–Ржаницина [21, 31], то есть

$$\Gamma(t - \tau) = \frac{Ae^{-\beta(t-\tau)}}{(t - \tau)^{1-\alpha}}. \quad (13)$$

Параметры ядра релаксации (13) определяются с использованием методики М. А. Колтунова [21] из экспериментальных кривых ползучести для бетона, приведенной в работе [32], то есть $A = 0.0194$, $\beta = 0.00000014$, $\alpha = 0.075$.

Для различных грунтов параметры ядра релаксации (13) также по данной методике определяются из экспериментальных кривых ползучести [33], результаты которых приведены в работе [34].

Другие физико-механические параметры бетона принимаются в следующем виде: $\rho = 2.5/3^3$; $K = 1.510^5$ МПа; $\mu = 1.3610^5$ МПа, а геометрические параметры сооружения были взяты из проектной документации.

Для определения комплексных собственных частот и форм колебаний разработаны компьютерные программы на ЭВМ [35, 36], зарегистрированные в Агентстве интеллектуальной собственности при Министерстве юстиции Республики Узбекистан от 04.03.2025 г.

При дальнейших расчетах жесткость фундамента и грунтового основания были приняты намного жестче, чем жесткость сооружения, для оценки только динамической характеристики самого сооружения.

В табл. 1 приведены в упругой постановке пять собственных частот Ново-Ангренской градирни, соответствующих различным гармоникам, то есть $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

В табл. 2 приведены значения комплексных собственных частот и логарифмических декрементов колебаний градирни при различных гармониках, то есть $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Собственные частоты и формы колебаний при $n = 0$ соответствуют крутильным, осесимметричным, при $n = 1$ – изгибным, а при $n = 2, 3, 4, 5, 6$ – неосесимметричным колебаниям.

Сравнение значений собственных частот, полученных в упругой постановке (табл. 1) и с учетом диссипации энергии в материале (табл. 2), показывает, что значение собственные частот колебаний, полученных с учетом диссипации, меньше приблизительно на 8–12%. При этом необходимо отметить, что учет диссипации в материале приводит декремент колебаний

Таблица 1 / Table 1

Номер гармоник	Собственные частоты, рад/с				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$n=0$ (крутильн.)	14.0296	32.9882	54.2194	75.5951	97.0503
$n=0$ (осесимметр.)	18.2147	30.4233	33.7759	37.1874	40.2305
$n=1$	7.6475	16.0506	25.4146	28.9566	31.3514
$n=2$	4.1310	8.6557	16.5660	22.8386	26.9128
$n=3$	3.3395	4.7183	10.3443	16.2120	21.3067
$n=4$	3.1419	3.7494	6.8003	11.4990	16.3899
$n=5$	3.2486	4.3613	5.2828	8.6026	12.8673
$n=6$	3.9139	4.7766	5.6844	7.2035	10.7321

Таблица 2 / Table 2

Номер гармоник	Собственные частоты, рад/с				
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$n=0$ (крутильн.)	13.2364 – 0.1771i $\delta_1 = 0.084$	31.3441 – 0.3867i $\delta_2 = 0.077$	51.7152 – 0.6088i $\delta_3 = 0.074$	72.2778 – 0.8250i $\delta_4 = 0.072$	92.9605 – 0.1037i $\delta_5 = 0.070$
$n=0$ (осесимметр.)	16.2283 – 0.2473i $\delta_1 = 0.095$	27.3264 – 0.3852i $\delta_2 = 0.086$	31.3398 – 0.3873i $\delta_3 = 0.078$	33.5728 – 0.3994i $\delta_4 = 0.074$	38.1766 – 0.4332i $\delta_5 = 0.071$
$n=1$	6.8208 – 0.1053i $\delta_1 = 0.097$	14.4436 – 0.2074i $\delta_2 = 0.090$	23.2058 – 0.3250i $\delta_3 = 0.088$	27.4214 – 0.3814i $\delta_4 = 0.086$	32.6175 – 0.4370i $\delta_5 = 0.084$
$n=2$	3.6661 – 0.0618i $\delta_1 = 0.105$	7.8060 – 0.1181i $\delta_2 = 0.095$	15.0946 – 0.2180i $\delta_3 = 0.091$	21.1896 – 0.3015i $\delta_4 = 0.089$	25.8517 – 0.3587i $\delta_5 = 0.087$
$n=3$	3.0718 – 0.0528i $\delta_1 = 0.107$	4.4524 – 0.0719i $\delta_2 = 0.101$	9.6549 – 0.1444i $\delta_3 = 0.094$	15.3610 – 0.2225i $\delta_4 = 0.091$	20.7157 – 0.2931i $\delta_5 = 0.088$
$n=4$	2.9875 – 0.0500i $\delta_1 = 0.109$	3.2864 – 0.0546i $\delta_2 = 0.103$	6.0604 – 0.0921i $\delta_3 = 0.096$	10.3025 – 0.1498i $\delta_4 = 0.091$	14.7369 – 0.2078i $\delta_5 = 0.089$

к слабо частотным зависимым результатам, то есть увеличение значения собственных частот колебаний сооружений приводит к незначительному уменьшению декремента колебаний.

На рис. 2–7 приведены как пример найденные первые и пятые собственные формы колебаний (то есть действительные части X_R собственных форм X), соответствующие различным гармоникам — $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Анализ полученных собственных форм колебаний при $n = 0$ показывает, что первая форма осесимметричных колебаний представляет собой продольную деформацию градирни, а при других более высоких частотах ($\omega_2 \dots \omega_5 \dots$) колебаний — осесимметричную деформацию градирни, и при этом деформируется в основном нижняя часть градирни, а верхняя часть практически не деформируется.

В формах колебаний, соответствующих низшим частотам (при гармониках $n = 1, 2, 3, 4, 5$), значительно деформируется верхняя часть градирни по сравнению с нижней частью.

Анализ значений полученных низших собственных частот и форм колебаний сооружения, соответствующих для различных гармоник, показывает, что первые собственные частоты неосесимметричных форм колебаний попадают в преобладающий диапазон частот землетрясений.

Наряду с этим исследованы собственные частоты и формы колебаний градирни с учетом верхнего подкрепляющего ребра (то есть кольца жесткости). Сравнение полученных результатов собственных частот градирни без ребра жесткости и с ребром жесткости показало, что верхнее ребро жесткости влияет на незначительное увеличение частоты осесимметричных и неосесимметричных колебаний сооружения за счет увеличения жесткости в верхней части градирни. При этом значения частот изгибных колебаний незначительно снижаются за счет увеличения массы сооружения.

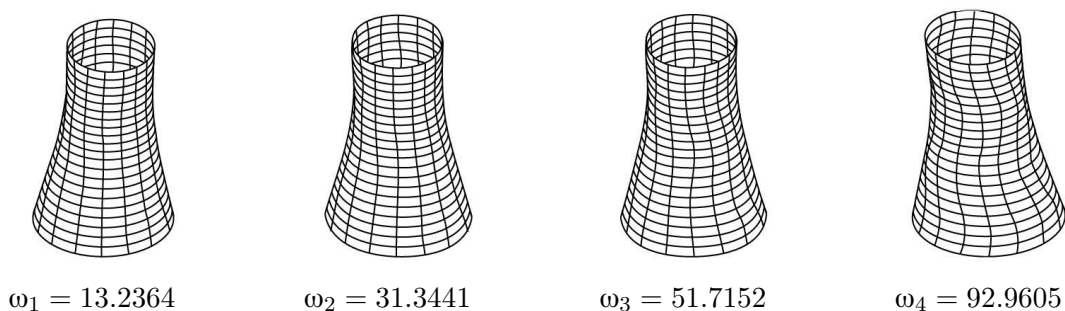


Рис. 2. Крутильные формы колебаний градирни ($n = 0$)
 Fig. 2. Torsional modes of cooling tower vibrations ($n = 0$)

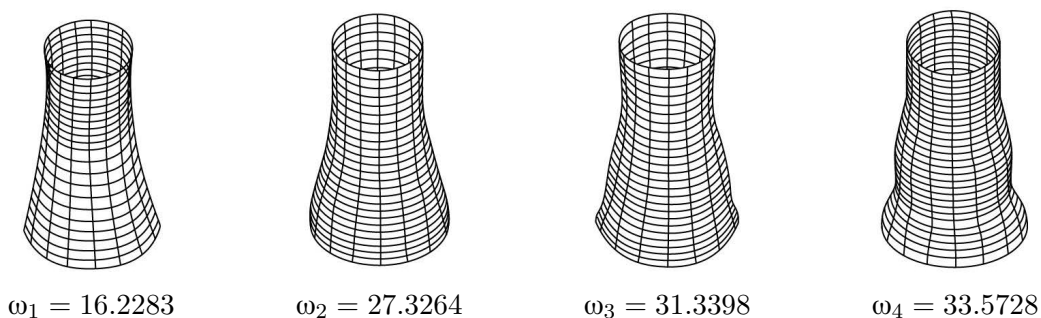


Рис. 3. Осесимметричные формы колебаний градирни ($n = 0$)
 Fig. 3. Axisymmetric forms of cooling tower oscillations ($n = 0$)

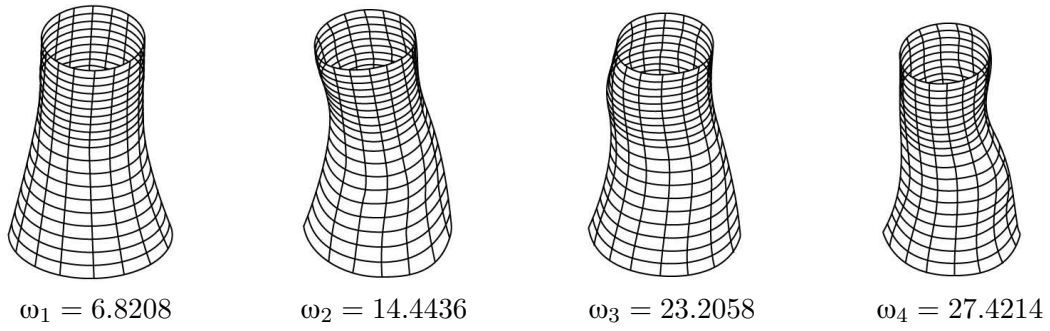


Рис. 4. Изгибные формы колебаний градирни ($n = 1$)
 Fig. 4. Bending modes of cooling tower vibrations ($n = 1$)

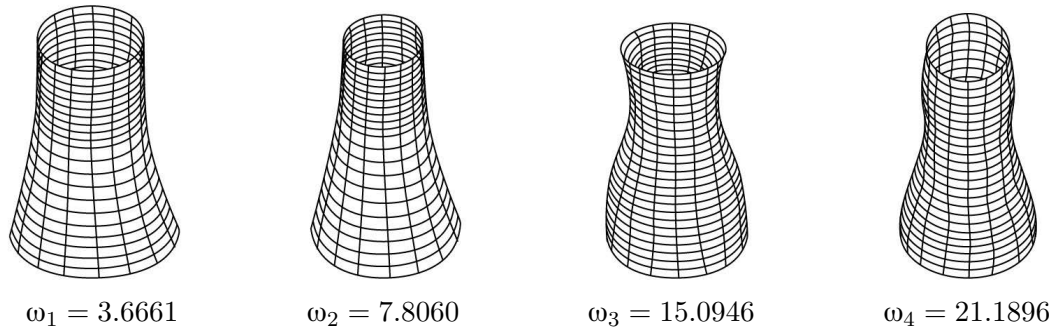


Рис. 5. Неосесимметричные формы колебаний градирни ($n = 2$)
 Fig. 5. Non-symmetrical forms of cooling tower oscillations ($n = 2$)

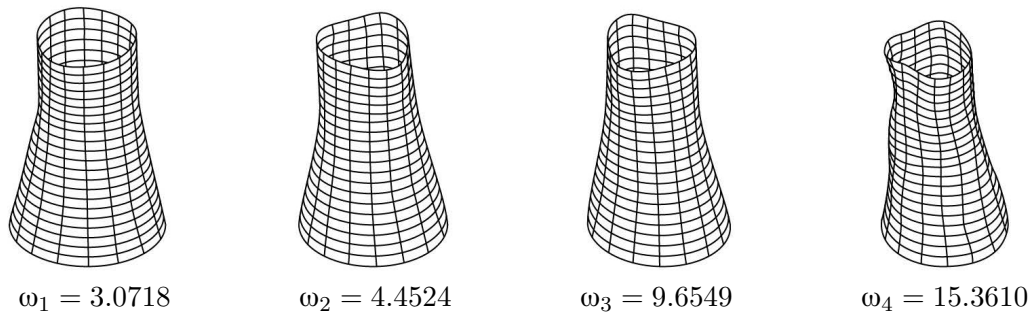


Рис. 6. Неосесимметричные формы колебаний градирни ($n = 3$)
 Fig. 6. Non-symmetrical forms of cooling tower oscillations ($n = 3$)

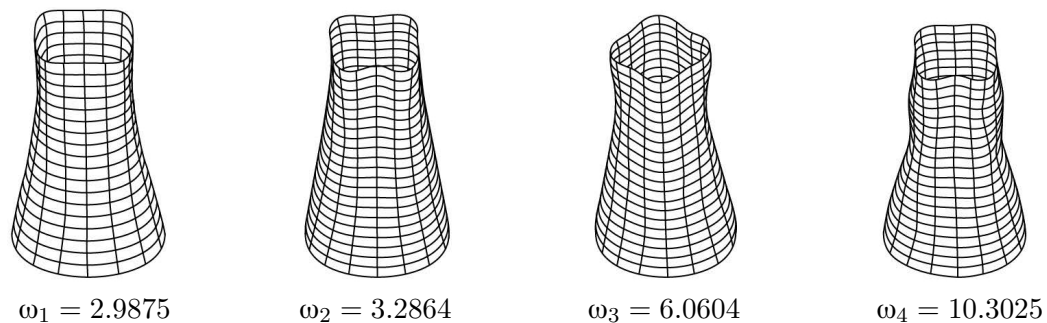


Рис. 7. Неосесимметричные формы колебаний градирни ($n = 4$)
 Fig. 7. Non-symmetrical forms of cooling tower oscillations ($n = 4$)

Заключение

1. Разработана математическая модель для оценки динамических характеристик пространственных осесимметричных сооружений с учетом диссипации энергии в материале с использованием наследственной теории вязкоупругости.

2. Разработаны метод, алгоритм и компьютерная программа расчета на ЭВМ для оценки комплексных собственных частот, формы колебаний и декремента колебаний пространственных осесимметричных сооружений с учетом вязкоупругих свойств материала.

3. Оценены динамические характеристики (комплексные частоты, декремент и форма колебаний) конкретного пространственного осесимметричного сооружения типа градирни.

4. Установлено, что для данного пространственного осесимметричного сооружения низшие неосесимметричные собственные частоты попадают в диапазон преобладающих частот землетрясения.

5. Выявлены некоторые механические эффекты, связанные с учетом диссипации энергии в материале и с учетом реальной геометрии сооружения, то есть:

- учет диссипации в материале с использованием наследственной теории вязкоупругости приводит к незначительному снижению собственных частот колебаний сооружений и к слабо частотной независимой декремента колебаний;
- кольца жесткости, установленные наверху пространственных осесимметричных сооружений, несколько повышают неосесимметричные собственные частоты колебаний, при этом изгибные частоты сооружений несколько снижаются.

Список литературы

1. *Mirsaidov M., Mekhmonov Ya.* Nonaxisymmetric vibrations of axisymmetric structures with associated masses and hollows (protrusions) // *Strength Mater.* 1987. Vol. 19. P. 424–430. DOI: 10.1007/BF01524147.
2. *Mirsaidov M. M., Khudainazarov Sh. O.* Spatial natural vibrations of viscoelastic axisymmetric structures // *Magazine of Civil Engineering.* 2020. Vol. 96, no. 4. P. 118–128. DOI: 10.18720/MCE.96.10.
3. *Mirsaidov M., Nosirov A., Nasirov I.* Spatial forced oscillations of axisymmetric inhomogeneous systems // *E3S Web of Conferences.* 2020. Vol. 164. P. 02009. DOI: 10.1051/e3sconf/202016402009.
4. *Mirsaidov M. M., Nosirov A. A., Nasirov I. A.* Modeling of spatial natural oscillations of axisymmetric systems // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. Vol. 1921. P. 012098. DOI: 10.1088/1742-6596/1921/1/012098.
5. *Мирсаидов М. М., Сафаров И. И., Тешаев М. Х., Элибоев Н. Р.* Свободные линейные колебания вязкоупругой сферической оболочки с наполнителем // *Известия вузов. ПНД.* 2025. Т. 33, № 4. С. 485–496. DOI: 10.18500/0869-6632-003162.
6. *Мирсаидов М. М., Ишматов А. Н., Юлдошев Б. Ш., Салимов Ш. М., Хазраткулов И. О.* Нелинейные колебания высотного сооружения с динамическим гасителем колебаний // *Известия вузов. ПНД.* 2025. Т. 33, № 6. С. 804–822. DOI: 10.18500/0869-6632-003186.
7. *Nelson R. L.* Analyses of cooling tower dynamics // *J. Sound Vib.* 1981. Vol. 79. P. 501–518. DOI: 10.1016/0022-460X(81)90462-4.
8. *Mang H. A., Trappel F.* Physically linear buckling analysis of reinforced concrete cooling towers—Design necessity or academic exercise? // In: *Proceedings of the IASS Symposium on Regional Urbanization.* 1984, Berlin.

9. Noorzaei J., Naghshineh A., Kadir M., Thanoon W., Jaafar M. S. Nonlinear interactive analysis of cooling tower–foundation–soil interaction under unsymmetrical wind load // *Thin-Walled Structures*. 2006. Vol. 44, iss. 9. P. 997–1005. DOI: 10.1016/j.tws.2006.08.019.
10. Asadzadeh E., Alam M. A Survey on Hyperbolic Cooling Towers // *Int. Sch. Sci. Res. Innov.* 2014. Vol. 8, no. 10. P. 1022–1034.
11. Karakas A. I., Daloglu A. T. Free and forced vibration analyses of hyperbolic cooling tower shell using harmonic solid ring finite elements // *J. Eng. Fundam.* 2015. Vol. 2, no. 1. P. 38–53. DOI: 10.17530/jef.15.06.2.1.
12. Karakas A. I., Ozgan K., Daloglu A. T. A parametric study for free vibration analysis of hyperbolic cooling towers on elastic foundation using consistent FEM-Vlasov model // *Arch. Appl. Mech.* 2016. Vol. 86. P. 869–882. DOI: 10.1007/s00419-015-1067-7.
13. Özgan K., Karakas A. I., Daloglu A. T. Earthquake analysis of hyperbolic cooling towers // *Pamukkale Univ. J. Eng. Sci.* 2016. Vol. 22, no. 6. P. 433–441. DOI: 10.5505/pajes.2015.71601.
14. Kulkarni S. Review on modeling of hyperbolic cooling towers // *International Journal of Scientific and Engineering Research*. 2018. Vol. 9, no. 1. P. 387–399.
15. Karakas A. I., Ozgan K., Daloglu A. T. Soil-structure interaction effects on seismic behavior of a hyperbolic cooling tower using three-parameter Vlasov foundation model // *Earthq. Struct.* 2018. Vol. 14, no. 1. P. 85–94. DOI: 10.12989/eas.2018.14.1.085.
16. Ke S., Zhu P., Xu L., Ge Y. Evolution mechanism of wind vibration coefficient and stability performance during the whole construction process for super large cooling towers // *Appl. Sci.* 2019. Vol. 9, no. 20. P. 4202. DOI: 10.3390/app9204202.
17. Wu J., Zhu J., Dong Y., Zhang Q. Nonlinear stability analysis of steel cooling towers considering imperfection sensitivity // *Thin-Walled Structures*. 2020. Vol. 146. P. 106448. DOI: 10.1016/j.tws.2019.106448.
18. Çarhoğlu A. I. Investigation of behavior of cooling tower structure under external loads // *Cumhur. Sci. J.* 2021. Vol. 42. P. 465–475. DOI: 10.17776/csj.719940.
19. Раценкина С. А., Акимова Э. К., Габалова Д. В. К расчету металлической башенной градирни // *Вестник Евразийской науки*. 2021. Т. 13, № 6. С. 52SAVN621.
20. Мирсаидов М. М., Трояновский Е. И. Динамика неоднородных систем с учетом внутренней диссипации и волнового уноса энергии. Ташкент: Фан, 1990. 108 с.
21. Колтунов М. А., Кравчук А. С., Майборода В. П. Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высшая школа, 1983. 349 с.
22. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985. 304 с.
23. Safarov I. I., Usmonov B. Sh., Teshaeв M. Kh. Propagation of Natural Waves in Plates and Cylindrical Viscoelastic Bodies. Cambridge: Cambridge Scholars Publishing, 2025. 262 p.
24. Сафаров И. И. Колебания и волны в диссипативно–неоднородных средах и конструкциях. Ташкент: ФАН, 1992. 252 с.
25. Лалин В. В., Зданчук Е. В. Теория упругости. Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. 98 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/id22-6.
26. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термо-вязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
27. Филатов А. Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1974. 214 с.
28. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и МКЭ. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
29. Muller D. E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer // *Mathematical*

- Tables and Other Aids to Computation. 1956. Vol. 10, no. 56. P. 208–215. DOI: 10.2307/2001916.
30. *Фадеев Д. К., Фадеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Санкт-Петербург: Лань, 2009. 736 с.
 31. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.
 32. *Александровский С. В., Багрий В. Я.* Ползучесть бетона при периодических воздействиях. М.: Стройиздат, 1970. 167 с.
 33. *Вялов С. С.* Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978. 447 с.
 34. *Мирсаидов М. М.* Теория и методы расчета грунтовых сооружений на прочность и сейсмостойкость. Ташкент: Фан, 2010. 312 с.
 35. *Мирсаидов М., Ишматов А. Н., Юлдошев Б. Ш., Салимов Ш. М., Хазраткулов И. О.* Определение собственных частот, амплитуды и остальных характеристик высотных осесимметричных сооружений»: авторское свидетельство № DGU 48676; зарегистрировано в Агентстве интеллектуальной собственности РУз от 04.03.2025 г.
 36. *Мирсаидов М., Ишматов А. Н., Юлдошев Б. Ш., Салимов Ш. М., Хазраткулов И. О.* Определение динамических характеристик осесимметричных сооружений с динамическими гасителями колебаний: авторское свидетельство № DGU 48677; зарегистрировано в Агентстве интеллектуальной собственности РУз от 04.03.2025 г.

References

1. Mirsaidov M, Mekhmonov Ya. Nonaxisymmetric vibrations of axisymmetric structures with associated masses and hollows (protrusions). *Strength Mater.* 1987;19:424–430. DOI: 10.1007/BF01524147.
2. Mirsaidov MM, Khudainazarov ShO. Spatial natural vibrations of viscoelastic axisymmetric structures. *Magazine of Civil Engineering.* 2020;96(4):118–128. DOI: 10.18720/MCE.96.10.
3. Mirsaidov M, Nosirov A, Nasirov I. Spatial forced oscillations of axisymmetric inhomogeneous systems. *E3S Web of Conferences.* 2020;164:02009. DOI: 10.1051/e3sconf/202016402009.
4. Mirsaidov MM, Nosirov AA, Nasirov IA. Modeling of spatial natural oscillations of axisymmetric systems. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;1921:012098. DOI: 10.1088/1742-6596/1921/1/012098.
5. Mirsaidov MM, Safarov II, Teshaeв MK, Eliboyev NR. Free linear oscillations of a viscoelastic spherical shell with a filler. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(4):485–496. DOI: 10.18500/0869-6632-003162.
6. Mirsaidov MM, Ishmatov AN, Yuldoshev BS, Salimov SM, Khazratkulov IO. Nonlinear oscillations of a high-rise structure with a dynamic vibration absorber. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(6):804–822. DOI: 10.18500/0869-6632-003186.
7. Nelson RL. Analyses of cooling tower dynamics. *J. Sound Vib.* 1981;79:501–518. DOI: 10.1016/0022-460X(81)90462-4.
8. Mang HA, Trappel F. Physically linear buckling analysis of reinforced concrete cooling towers—Design necessity or academic exercise? In: *Proceedings of the IASS Symposium on Regional Urbanization.* 1984, Berlin.
9. Noorzaei J, Naghshineh A, Kadir M, Thanoon W, Jaafar MS. Nonlinear interactive analysis of cooling tower–foundation–soil interaction under unsymmetrical wind load. *Thin-Walled Structures.* 2006;44(9):997–1005. DOI: 10.1016/j.tws.2006.08.019.
10. Asadzadeh E, Alam M. A survey on hyperbolic cooling towers. *Int. Sch. Sci. Res. Innov.* 2014;8(10):1022–1034.
11. Karakas AI, Daloglu AT. Free and forced vibration analyses of hyperbolic cooling tower shell using harmonic solid ring finite elements. *J. Eng. Fundam.* 2015;2(1):38–53. DOI: 10.17530/jef.15.06.2.1.

12. Karakas AI, Ozgan K, Daloglu AT. A parametric study for free vibration analysis of hyperbolic cooling towers on elastic foundation using consistent FEM-Vlasov model. Arch. Appl. Mech. 2016;86:869–882. DOI: 10.1007/s00419-015-1067-7.
13. Özgan K, Karakas AI, Daloglu AT. Earthquake analysis of hyperbolic cooling towers. Pamukkale Univ. J. Eng. Sci. 2016;22(6):433–441. DOI: 10.5505/pajes.2015.71601.
14. Kulkarni S. Review on modeling of hyperbolic cooling towers. International Journal of Scientific and Engineering Research. 2018;9(1):387–399.
15. Karakas AI, Ozgan K, Daloglu AT. Soil-structure interaction effects on seismic behavior of a hyperbolic cooling tower using three-parameter Vlasov foundation model. Earthq. Struct. 2018;14(1):85–94. DOI: 10.12989/eas.2018.14.1.085.
16. Ke S, Zhu P, Xu L, Ge Y. Evolution mechanism of wind vibration coefficient and stability performance during the whole construction process for super large cooling towers. Appl. Sci. 2019;9(20):4202. DOI: 10.3390/app9204202.
17. Wu J, Zhu J, Dong Y, Zhang Q. Nonlinear stability analysis of steel cooling towers considering imperfection sensitivity. Thin-Walled Structures. 2020;146:106448. DOI: 10.1016/j.tws.2019.106448.
18. Çarhoğlu AI. Investigation of behavior of cooling tower structure under external loads. Cumhur. Sci. J. 2021;42:465–475. DOI: 10.17776/csj.719940.
19. Rashchepkina SA, Akimova EK. To calculation of metal tower cooling tower. Eurasian Sci. J. 2021;13(6):52SAVN621 (in Russian).
20. Mirsaidov MM, Troyanovsky EI. Dynamics of Inhomogeneous Systems Taking into Account Internal Dissipation and Wave Energy Entrainment. Tashkent: Fan; 1990. 108 p.
21. Koltunov MA, Kravchuk AS, Mayboroda VP. Applied Mechanics of a Deformable Solid. Moscow: Vysshaya Shkola; 1983. 349 p.
22. Kravchuk AS, Mayboroda VP, Urzhumtsev YuS. Mechanics of Polymer and Composite Materials. M.: Nauka; 1985. 304 p.
23. Safarov II, Usmonov BSh, TeshaeV MKh. Propagation of Natural Waves in Plates and Cylindrical Viscoelastic Bodies. Cambridge: Cambridge Scholars Publishing; 2025. 262 p.
24. Safarov II. Vibrations and Waves in Dissipatively Inhomogeneous Media and Structures. Tashkent: FAN; 1992. 252 p.
25. Lalin VV, Zdanchuk EV. Theory of Elasticity. Saint-Petersburg: Polytechnic-Press; 2022. 98 p. DOI: 10.18720/SPBPU/2/id22-6.
26. Ilyushin AA, Pobedrya BE. Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermo-Viscoelasticity. M.: Nauka; 1970. 280 p.
27. Filatov AN. Asymptotic Methods in the Theory of Differential and Integro-Differential Equations. Tashkent: Fan; 1974. 214 p.
28. Bate K, Wilson E. Numerical Methods of Analysis and FEM. M.: Stroyizdat; 1982. 448 p.
29. Muller DE. A method for solving algebraic equations using an automatic computer. Mathematical Tables and Other Aids to Computation. 1956;10(56):208–215. DOI: 10.2307/2001916.
30. Fadeev DK, Fadeeva VN. Computational Methods of Linear Algebra. Saint-Petersburg: Lan; 2009. 736 p.
31. Rzhantsyn AR. Theory of Creep. M.: Stroyizdat; 1968. 416 p.
32. Alexandrovsky SV, Bagrii VYa. Creep of Concrete under Periodic Impacts. M.: Stroyizdat; 1970. 167 p.
33. Vyalov SS. Rheological Foundations of Soil Mechanics. M.: Vysshaya Shkola; 1978. 447 p.
34. Mirsaidov MM. Theory and Methods of Calculating Ground Structures for Strength and Earthquake Resistance. Tashkent: Fan; 2010. 312 p.

35. Mirsaidov MM, Ishmatov AN, Yuldoshev BSh, Salimov ShM, Khazratkulov IO. Determination of natural frequencies, amplitude and other characteristics of high-rise axisymmetric structures. Copyright certificate No. DGU 48676. Registered with the Intellectual Property Agency of the Republic of Uzbekistan on 03/04/2025.
36. Mirsaidov MM, Ishmatov AN, Yuldoshev BSh, Salimov ShM, Khazratkulov IO. Determination of dynamic characteristics of axisymmetric structures with dynamic vibration dampers. Copyright certificate No. DGU 48677. Registered with the Intellectual Property Agency of the Republic of Uzbekistan on 03/04/2025.



Мирсаидов Мирзиёд Мирсаидович — родился в Юкориичирчикском районе Ташкентской области Узбекской ССР (1948). Окончил Ташкентский политехнический институт по специальности «Инженер-механик» (1971) и Ташкентский государственный университет по специальности «Математик» (1986). Доктор технических наук (1987), профессор (1991), академик Академии наук Республики Узбекистан (2017). Заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства». Научный руководитель 30 кандидатских (PhD) и 6 докторских (DSc) диссертаций. Автор более 200 научных работ в отечественных и зарубежных научных журналах, более 250 — в сборниках материалов зарубежных и республиканских научных конференций, более 15 монографий, 9 учебников и 14 учебных пособий.

Узбекистан, Ташкент 100000, ул. Кари Ниязи, 39
 Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»
 E-mail: mirsaidov1948@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-8907-7869
 AuthorID (eLibrary.Ru): 980333



Ишматов Алишер Наркaбилович — родился в 1962 году. Кандидат физико-математических наук, доцент. Доцент кафедры механики и компьютерного моделирования Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства». Автор более 60 научных работ, более 10 авторских свидетельств.

Узбекистан, Ташкент 100000, ул. Кари Ниязи, 39
 Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»
 E-mail: ribs@mail.ru
 ScopusID: 7801321486



Юлдошев Бахтиёр Шодмонович — родился в 1968 году. Кандидат физико-математических наук, доцент. Доцент кафедры механики и компьютерного моделирования Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства». Автор более 50 научных работ и более 10 авторских свидетельств.

Узбекистан, Ташкент 100000, ул. Кари Ниязи, 39
 Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»
 E-mail: Baxtiyor_yuldashev68@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-9006-5662
 ScopusID: 57202157721



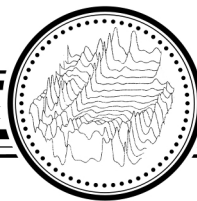
Салимов Шоолим Музаффорович — родился в 1990 году. Заведующий кафедрой математики Ташкентского университета прикладных наук. Автор более 10 научных работ.

Узбекистан, 100149 Ташкент, ул. Гавхар, 1
Ташкентский университет прикладных наук
E-mail: salimovshoolim@gmail.com
ORCID: 0000-0003-0750-8619
ScopusID: 57219129262



Хазраткулов Исломжон Обид угли — родился в 1993 году. Докторант кафедры механики и компьютерного моделирования Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства». Автор более 20 научных работ.

Узбекистан, Ташкент 100000, ул. Кари Ниязи, 39
Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»
E-mail: islomjon.hazratkulov093@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6380-6528
ScopusID: 57214069488



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2)

Научная статья
УДК 550.388.2

DOI: 10.18500/0869-6632-003207
EDN: QKRVJO

Гибридная модель прогнозирования полного электронного содержания ионосферы на основе автокодировщиков и классических алгоритмов машинного обучения

А. М. Анпалонов✉, Ю. С. Масленникова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия
E-mail: ✉artem309_97@mail.ru, yuliams1@gmail.com

Поступила в редакцию 28.11.2025, принята к публикации 25.12.2025,
опубликована онлайн 26.12.2025, опубликована 31.03.2026

Аннотация. Цель. Разработка двухэтапного алгоритма машинного обучения для прогнозирования значений полного электронного содержания (ПЭС) на основе временных рядов ПЭС и влияющих на ионосферу внешних параметров. Методы. Снижение размерности исходных данных выполнено с помощью полносвязного автокодировщика для получения латентных представлений. Эти признаки объединены с комплексом внешних параметров: критической частотой слоя F2 (foF2), индексами солнечной (F10.7) и геомагнитной (Kp) активности, а также временными метками. На обогащенном наборе данных проведено обучение и сравнение нескольких классических алгоритмов, включая градиентный бустинг (CatBoost), с оценкой по метрикам RMSE и MAE. Результаты. Показано, что алгоритм CatBoost демонстрирует наилучшую точность прогноза на тестовой выборке по сравнению с другими протестированными моделями. Предложенный двухэтапный подход позволяет эффективно выделять и использовать ключевые зависимости в данных для задачи регрессии. Заключение. Разработанный метод обеспечивает точный прогноз ПЭС за счет комбинации нейросетевого сжатия временных рядов и современных ансамблевых алгоритмов, что подтверждается результатами вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: ионосфера, полное электронное содержание, карты ПЭС, солнечная активность, машинное обучение, нейронные сети, автокодировщик, экваториальная аномалия.

Для цитирования: Анпалонов А. М., Масленникова Ю. С. Гибридная модель прогнозирования полного электронного содержания ионосферы на основе автокодировщиков и классических алгоритмов машинного обучения // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 2. С. 286–298. DOI: 10.18500/0869-6632-003207. EDN: QKRVJO

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

A hybrid total electron content forecasting model based on autoencoders and classical machine learning algorithms

A. M. Appalov[✉], Y. S. Maslennikova

Kazan Federal University, Russia

E-mail: ✉artem309_97@mail.ru, yuliams1@gmail.com

Received 28.11.2025, accepted 25.12.2025, available online 26.12.2025, published 31.03.2026

Abstract. *Purpose.* Development of a novel two-stage machine learning algorithm for total electron content (TEC) forecasting based on original TEC time series and influential external ionospheric parameters. *Methods.* Dimensionality reduction of the input data is performed using a standard fully-connected autoencoder to obtain compressed latent representations. These features are integrated with a set of external parameters: the critical frequency of the F2 layer (foF2), solar (F10.7) and geomagnetic (Kp) activity indices, and temporal descriptors (seasonal and diurnal information). The enriched dataset is used to train and evaluate several classical machine learning algorithms, including gradient boosting (CatBoost), with assessment based on RMSE and MAE metrics. *Results.* The CatBoost algorithm demonstrates superior predictive accuracy on the test dataset compared to other evaluated models. The proposed two-stage approach proves effective for extracting and utilizing key temporal dependencies for the regression task. *Conclusion.* The developed method provides accurate TEC prediction by combining neural network-based time series compression with modern ensemble algorithms, as confirmed by the computational experiment.

Keywords: ionosphere, total electronic content, TEC maps, solar activity, machine learning, neural networks, auto-coder, equatorial anomaly.

For citation: Appalov AM, Maslennikova YS. A hybrid total electron content forecasting model based on autoencoders and classical machine learning algorithms. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(2):286–298. DOI: 10.18500/0869-6632-003207

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Ионосфера Земли, представляющая собой ионизированную часть верхней атмосферы, играет критически важную роль в распространении радиоволн и функционировании современных технологических систем. Ключевым параметром, интегрально характеризующим состояние ионосферы, является полное электронное содержание (ПЭС) [1]. Колебания ПЭС оказывают существенное влияние на точность и надёжность работы спутниковых навигационных систем (таких как ГЛОНАСС и GPS), систем связи и дистанционного зондирования Земли. Внезапные возмущения ПЭС, вызванные солнечной и геомагнитной активностью, могут приводить к значительным ошибкам позиционирования, ухудшению качества связи и даже к сбоям в работе энергетических сетей [2, 3]. В связи с этим задача разработки точных и надёжных методов прогнозирования состояния ионосферы, и ПЭС в частности, сохраняет высокую актуальность для фундаментальной науки и практических приложений.

Традиционные подходы к моделированию ионосферы можно условно разделить на физические и эмпирические. Физические модели, основанные на решении сложных систем уравнений, описывающих физико-химические процессы в ионосфере, требуют значительных вычислительных ресурсов и зачастую не успевают за быстротекущими изменениями в ней [4]. Эмпирические модели, строящиеся на статистическом анализе больших архивов данных, обладают большей оперативностью, но могут недостаточно точно учитывать специфику конкретных геофизических условий. Оба подхода сталкиваются с трудностями при описании нелинейных и нестационарных временных рядов, каковыми являются данные измерений ПЭС [5, 6].

В последнее время машинное обучение (МО) демонстрирует значительный потенциал в решении задач прогнозирования временных рядов в геофизике. Алгоритмы, такие как метод

опорных векторов (SVM), случайный лес и градиентный бустинг, успешно применяются для моделирования ПЭС [7]. Однако эффективность этих методов напрямую зависит от качества и репрезентативности признакового пространства. Исходные временные ряды ПЭС характеризуются высокой размерностью, наличием шумов и сложными временными зависимостями, что затрудняет их непосредственное использование в классических алгоритмах МО. Это обуславливает необходимость этапа предварительной обработки данных и выделения информативных признаков.

Одним из мощных методов снижения размерности и выделения скрытых паттернов в данных являются автокодировщики [8]. Эти нейронные сети способны обучаться сжато представлению исходных данных, отфильтровывая шумы и сохраняя наиболее существенные зависимости. В отличие от свёрточных сетей, ориентированных на пространственные паттерны, полносвязные автокодировщики хорошо приспособлены для работы с временными рядами, позволяя эффективно сокращать их размерность без потери значимой информации. Полученные на их выходе латентные представления формируют компактное и информативное описание динамики ионосферных процессов.

Кроме того, состояние ионосферы зависит от множества внешних факторов. К ним относятся параметры, характеризующие солнечную активность (такие как индекс F10.7), геомагнитную возмущённость (индекс Kp), а также ключевые ионосферные характеристики, например, критическая частота слоя F2 (f_oF2). Суточные и сезонные вариации также вносят значительный вклад в изменчивость ПЭС. Таким образом, объединение латентных представлений временных рядов ПЭС с релевантными внешними признаками позволяет создать комплексное признаковое пространство, значительно повышающее потенциал моделей прогнозирования.

Целью настоящего исследования является разработка гибридной модели прогнозирования полного электронного содержания ионосферы, сочетающей в себе методы глубокого обучения для выделения ключевых признаков и классические алгоритмы машинного обучения для конечной регрессии.

Решаемые задачи:

- 1) построение и обучение полносвязного автокодировщика для компрессии временных рядов ПЭС и выделения латентных признаков;
- 2) формирование расширенного набора данных путём объединения этих признаков с внешними геофизическими и временными параметрами;
- 3) сравнительный анализ эффективности различных классических алгоритмов МО, включая градиентный бустинг, на расширенном наборе данных.

1. Архитектура нейронной сети для снижения размерности данных

1.1. Обоснование выбора архитектуры нейронной сети. Для эффективного решения задачи прогнозирования параметров ионосферы критически важным этапом является корректная подготовка признакового пространства. Исходные данные, включающие временные ряды карт полного электронного содержания (ПЭС) и ряды значений критической частоты слоя F2 (f_oF2), характеризуются высокой размерностью, наличием шумов и сложными нелинейными зависимостями. Прямое использование таких данных для классических алгоритмов машинного обучения часто приводит к переобучению и снижению обобщающей способности моделей. В связи с этим в данной работе применяется подход на основе автокодировщика (autoencoder) — специальной архитектуры нейронной сети, предназначенной для эффективного снижения размерности данных и выделения наиболее значимых латентных признаков.

Основная задача, решаемая на данном этапе, заключалась в нелинейном сжатии исходного пространства признаков до компактного векторного представления размерностью 10 элементов. Это позволяет существенно сократить вычислительную сложность последующего анализа, отфильтровать шумы и выделить инвариантные представления, сохраняющие ключевую информацию о динамике ионосферных процессов.

1.2. Структура автокодировщика. Предложенная архитектура автокодировщика (рис. 1) представляет собой последовательную модель, состоящую из двух симметричных частей: энкодера (кодировщика) и декодера (декодировщика).

Входной вектор модели представляет собой конкатенацию «распрямлённой» ($M \times N \rightarrow M \cdot N$) целевой карты ПЭС и соответствующей ей растянутой карты значений foF2, построенной для того же момента времени. Использование этой дополнительной пространственной информации улучшает качество реконструкции [9].

Главное преимущество данного подхода заключается в его способности выявлять сложные нелинейные зависимости в данных и извлекать наиболее информативные признаки автоматически, без явного задания правил преобразования. В отличие от традиционных методов снижения размерности, таких как анализ главных компонент, автокодировщики способны учитывать сложные структурные особенности данных, включая иерархические зависимости между признаками.

Особую ценность автокодировщика представляют при работе с пространственно-временными данными, такими как глобальные карты ионосферных параметров. В этом случае они позволяют не только эффективно снижать размерность данных, но и выявлять скрытые паттерны и аномалии, которые трудно обнаружить традиционными методами.

Исходный набор данных был разделён в пропорции 80:20 для целей обучения модели и последующей оценки её результатов: 87600 карт ПЭС (80%) выделены целенаправленно для тренировочного этапа, тогда как оставшиеся 21900 карт (20%) использованы для процедуры валидации алгоритма.

Следует подчеркнуть, что векторы, полученные на скрытом слое автокодировщика, могут демонстрировать наличие взаимосвязей (коррелировать), что, в свою очередь, может негативно сказаться на качестве и интерпретируемости разложения. В данной работе для достижения ортогональности векторов была применена дополнительная структура, которая инициализирует веса скрытого слоя линейного преобразования с использованием ортогональной матрицы, полученной через QR-разложение [9].

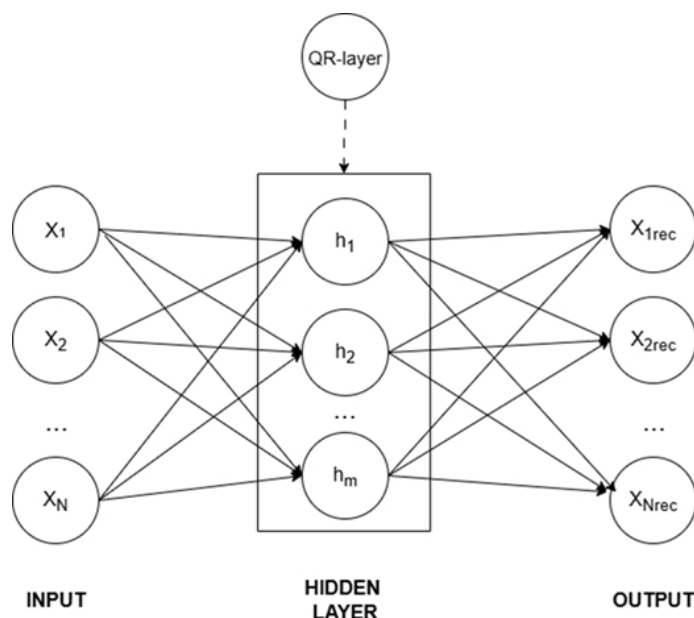


Рис. 1. Выбранная архитектура для сжатия исходного пространства входных признаков [9]

Fig. 1. The chosen architecture for compression of the original input feature space [9]

Количество скрытых слоёв было выбрано 10, так как было показано ранее, именно они несут в себе более 95% исходной информации об исходных данных [8].

После завершения обучения кодировщик и декодировщик могут быть использованы независимо. Для формирования признакового пространства для последующих моделей машинного обучения (например, CatBoost) использовался только обученный энкодер. Все исходные данные (временные ряды ПЭС и foF2) пропускались через энкодер, и на выходе получались соответствующие им 10-мерные латентные векторы. Именно эти векторы, являющиеся сжатым и информативным представлением исходного состояния ионосферы, в дальнейшем использовались в качестве входных признаков для алгоритмов прогнозирования. Данный подход позволяет не только резко сократить размерность данных, но и передавать моделям машинного обучения уже очищенные и семантически насыщенные признаки, что в конечном итоге повышает точность и надёжность прогноза.

Ключевые технические параметры: сжатие исходных данных происходит до 10 скрытых векторов, используется функции активации ReLU (Rectified Linear Unit, «Выпрямленный линейный блок») во внутренних слоях, пакетная нормализация после каждого линейного слоя для стабилизации обучения и дропаут (0.2) для регуляризации. Функция потерь состоит из MSE (Mean Squared Error, среднеквадратичная ошибка) для реконструкции. Оптимизация выполняется с помощью метода AdamW с L2-регуляризацией (затухание весов равно $1e-5$) и скоростью обучения, равной 0.001.

2. База данных

2.1. Данные полного электронного содержания (ПЭС). В качестве исходных данных о состоянии ионосферы использовались карты полного электронного содержания (Total Electron Content, TEC), предоставляемые Лабораторией реактивного движения NASA (Jet Propulsion Laboratory, JPL) [10] (рис. 2). Данные JPL GIM (Global Ionosphere Maps) являются одним

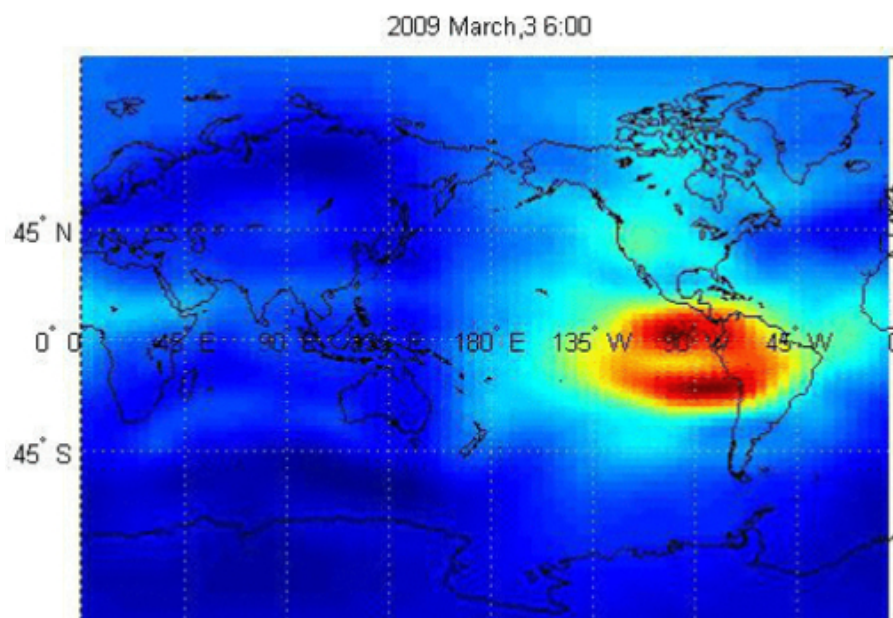


Рис. 2. Карта ПЭС ионосферы, полученная лабораторией JPL [10] (цвет онлайн)

Fig. 2. JPL ionospheric TEC map [10] (color online)

из наиболее точных и широко используемых в мировом научном сообществе продуктов, характеризующих интегральное электронное содержание в вертикальном столбе ионосферы. Карты представлены в формате IONEX с временным разрешением 2 часа и пространственным разрешением 2.5° по долготе и 5° по широте.

Предварительная обработка временных рядов ТЕС для конкретной локации включала следующие этапы.

1. Извлечение временного ряда: для выбранной точки с заданными географическими координатами из последовательности глобальных карт извлекался временной ряд значений вертикального ПЭС.
2. Идентификация и интерполяция пропусков: временной ряд проверялся на наличие пропусков данных, которые могли быть вызваны сбоями в работе спутниковой группировки или в процессе обработки. Незначительные пропуски восстанавливались с помощью линейной интерполяции.
3. Сглаживание: для подавления высокочастотного шума, не связанного с крупномасштабными ионосферными процессами, применялось скользящее среднее с окном, соответствующим 6 часам.
4. Формирование выборки: обработанные временные ряды ПЭС служили основой для построения признаков, описывающих текущее состояние ионосферы.

2.2. Данные о значениях критической частоты слоя F2 (foF2). Для дополнения признакового пространства параметрами, непосредственно характеризующими максимальную электронную плотность ионосферы, использовались данные о критической частоте слоя F2 (foF2). Эти данные были получены из глобальной сети ионозондов GIRO (Global Ionospheric Radio Observatory) [11] (рис. 3). GIRO предоставляет доступ к результатам вертикального зондирования ионосферы с большого количества станций по всему миру, что позволяет получать репрезентативные данные о ключевых параметрах ионосферы, включая foF2.



Рис. 3. Расположение сети глобальных ионосферных станций GIRO (январь 2020) [11]

Fig. 3. Location of the GIRO (Global Ionospheric Radio Observatory) network of global ionospheric stations (January 2020) [11]

Предварительная обработка данных foF2 включала следующие этапы.

1. Сопоставление по местоположению и времени: данные foF2 выбирались для ионозондной станции, наиболее близко расположенной к точке, для которой извлекался ряд ПЭС. Временные метки данных foF2 приводились в соответствие с временными метками данных JPL ПЭС.
2. Восстановление пропусков: поскольку данные ионозондов могут иметь значительные пропуски (например, из-за технических неисправностей или плохих условий распространения радиоволн), для реконструкции недостающих значений применялся алгоритм интерполяции по ближайшим соседним станциям сети GIRO с последующей временной интерполяцией.

2.3. Формирование итогового набора данных. Обработанные временные ряды ПЭС и foF2 были объединены с данными о солнечной (индекс F10.7) и геомагнитной активности (индексы Kp), полученными из открытых источников (DRAO, Leibniz Institute for Astrophysics Potsdam) [12, 13]. В более ранних работах было показано, что они коррелируют с извлекаемыми рядами ПЭС [14]. Также в качестве признаков были добавлены циклические временные характеристики: время года и время суток. Итоговый набор данных представлял собой таблицу, где каждый экземпляр содержал латентные представления ПЭС (обогащенный значениями foF2), внешние индексы и временные метки, что позволило применить для прогнозирования классические алгоритмы машинного обучения.

3. Обсуждение результатов

Ниже представлена блок-схема предложенного подхода, в которой отображены основные этапы обработки и изменения данных (рис. 4).

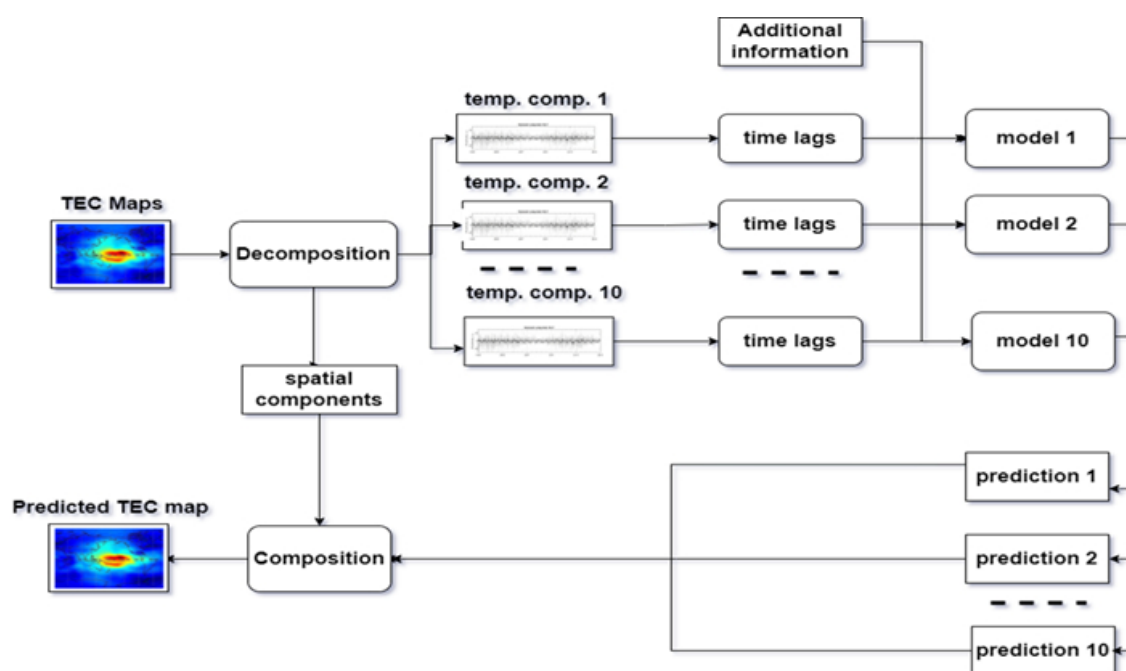


Рис. 4. Блок-схема предложенного подхода [15]

Fig. 4. Flowchart of the proposed approach [15]

3.1. Отбор признаков. В нашем случае были взяты следующие признаки, которые могут повлиять на предсказание значений временных составляющих ПЭС:

- временные лаги исходного ряда (за последние 72 часа) — это позволяет уловить изменения, которые претерпевает электронная концентрация (в том числе флуктуации значений);
- месяц, день и час даты, на которую делается прогноз;
- значение индекса F10.7 в момент, когда делается прогноз;
- значение индекса Kp в момент, когда делается прогноз.

Временные лаги, которые приведены первыми в списке признаков, являются, по сути, гиперпараметром, который настраивается при инференсе. Здесь важно найти оптимальное сочетание для того, чтобы количество лагов не сильно увеличивало время выполнения прогноза, но смогло бы повысить точность. Временные ряды отсчётов радиофизических приборов в задачах геофизики имеют свою специфичность, которую тоже нужно учитывать при отборе признаков для моделей машинного обучения. Ниже приведена табл. 1, где представлены ошибка по метрике SMAPE и время прогноза на инференсе для полученного лучшего алгоритма (по результатам табл. 2).

Метрика SMAPE определяется как

$$\text{SMAPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{(|y_i| + |\hat{y}_i| + \varepsilon) / 2}, \quad (1)$$

где y_i — фактическое значение, а \hat{y}_i — прогнозируемое значение, $\varepsilon = 10^{-8}$ — для обеспечения численной устойчивости при значениях, близких к нулю (обеспечивает универсальность данного выражения).

SMAPE является стандартной и общепризнанной метрикой в прогнозировании временных рядов, особенно в бизнес-аналитике (прогнозирование спроса, продаж, нагрузки) [16].

Таблица 1. Количество лагов для реализации алгоритма прогнозирования (для первой компоненты временного разложения автокодировщика)

Table 1. Number of lags for the implementation of the forecasting algorithm (for the first component of the temporal decomposition of the autoencoder)

Количество лагов, часы	SMAPE	Время выполнения прогноза, с
24	0.21	0.35
48	0.14	0.72
72	0.06	0.91
96	0.06	1.2

3.2. Обучение и валидация моделей. Критически важным аспектом при работе с временными рядами является корректное разделение данных на обучающую и тестовую выборки. В отличие от задач, где данные независимы и распределены одинаково, во временных рядах присутствует сильная временная зависимость (автокорреляция). Произвольное перемешивание и случайное разделение данных в таком случае привело бы к «утечке информации из будущего в прошлое»: модель, обучаясь на данных из всего временного интервала, могла бы косвенно получать информацию о будущих состояниях системы при прогнозировании прошлых, что исказило бы реальную оценку её обобщающей способности.

Во избежание этого было применено строгое временное разделение (temporal split). Первые 80% данных (87 600 векторов), соответствующих начальному временному периоду, были

выделены в обучающую выборку. Оставшиеся 20% данных (21 900 векторов), хронологически следующие за обучающей выборкой, составили тестовую выборку. Такой подход гарантирует, что модель обучается исключительно на прошлых данных и проверяется на будущих, что полностью имитирует условия реальной эксплуатации и обеспечивает адекватную валидацию её прогностической эффективности.

Для сравнения моделей на этапе обучения и валидации были использованы следующие метрики: MAE (mean absolute error), MSE (mean squared error), RMSE (root mean squared error), коэффициент детерминации R^2 и уже описанная выше SMAPE.

Сравнение алгоритмов происходило как усреднённая ошибка всех 10 моделей (для каждой из компонент) для прогноза на 24 часа вперёд.

Таблица 2. Результаты обучения моделей машинного обучения (топ 5 наилучших алгоритмов)
Table 2. Machine learning model training results (top 5 best algorithms)

Алгоритм	MAE	MSE	RMSE	R^2	SMAPE
CatBoost	1.9	11.8	3.4	0.98	0.25
XGBoost	2.1	15.2	3.9	0.98	0.27
LightGBM	3.1	17.2	4.1	0.98	0.28
ExtraTrees	3.2	17.2	4.1	0.97	0.29
Random Forest	3.4	18.2	4.2	0.97	0.30

Из табл. 2 видно, что наилучшие результаты для признаков, полученных при помощи нейронной сети автокодировщика, показала одна из модификаций алгоритма градиентного бустинга CatBoost.

Ранее авторами была разработана модель снижения размерности для данных ПЭС на основе линейного метода главных компонент (МГК), которая показала свою базовую эффективность относительно используемых моделей [15]. Однако линейный характер преобразования в МГК может ограничивать его способность к выделению сложных нелинейных закономерностей, присущих ионосферной динамике. Чтобы количественно оценить преимущества нового подхода, был проведён сравнительный анализ прогностической эффективности гибридных моделей, использующих для генерации признаков как предложенный автокодировщик, так и ранее разработанную модель на основе МГК (количество сжатых векторов в обоих случаях равнялось 10).

Для оценки качества восстановленных карт была использована метрика WMAPE, которая позволяет учитывать пространственный вклад каждой отдельной прогнозируемой точки на карте:

$$WMAPE = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i| \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{|y_i|}}{\sum_{i=1}^n |y_i|}. \quad (2)$$

Результаты сравнения приведены в табл. 3, где сопоставляются два подхода: на основе метода главных компонент (МГК) и автокодировщика (АК) [15].

Представленные в табл. 3 значения метрики WMAPE рассчитаны для глобальной области покрытия карт ПЭС. Усреднение производится по всем пространственным ячейкам расчётной сетки. Такой подход к агрегации ошибки, в отличие от точечной или региональной оценки, позволяет учесть её пространственную неоднородность по всей области исследования. Это особенно критично для анализа качества моделей в ключевых с точки зрения физики ионосферы регионах, таких как зона экваториальной аномалии, где ошибки прогноза часто имеют систематический и повышенный характер. Следовательно, глобальная WMAPE даёт интегрированную и наиболее репрезентативную оценку производительности модели для задачи восстановления полей.

Таблица 3. Результаты сравнения восстановленных карт на основе двух подходов

Table 3. Results of comparison of reconstructed maps based on two approaches

Период прогноза, часы	МГК	АК
2	0.21	0.15
4	0.25	0.17
12	0.27	0.20
24	0.31	0.23
48	0.41	0.31
72	0.51	0.35
144	0.61	0.42

Выводы и заключение

В ходе проведённого исследования была успешно разработана и протестирована двухэтапная гибридная модель для прогнозирования параметров ионосферы, в частности полного электронного содержания (ПЭС). Ключевым элементом подхода явилось использование полносвязного автокодировщика для нелинейного снижения размерности исходных высокоразмерных данных, объединяющих временные ряды карт ПЭС и значения критической частоты слоя F2 (foF2). Это позволило эффективно сжать информацию, выделить наиболее значимые латентные признаки и устранить шумы, создав компактное 10-мерное пространство описания состояния ионосферы.

На втором этапе продемонстрировано, что полученные латентные представления, обогащённые данными о солнечной и геомагнитной активности, являются высокоэффективным признаковым пространством для классических алгоритмов машинного обучения. Сравнительный анализ показал, что алгоритм градиентного бустинга CatBoost демонстрирует наилучшую точность прогноза на тестовой выборке, что подтверждается метриками RMSE и MAE. Важным условием достоверной оценки стала корректная процедура временного разделения данных, исключившая информационную утечку.

Таким образом, предложенная гибридная архитектура позволяет преодолеть ограничения, присущие как чисто физическим, так и эмпирическим моделям, что демонстрируют значения метрики WMAPE. Это может указывать на его потенциальное превосходство в сравнении с классическими методами. Сочетание глубоких нейронных сетей для выделения признаков и ансамблевых методов для регрессии открывает перспективное направление для создания точных и оперативных систем прогноза состояния ионосферы, что крайне востребовано для обеспечения надёжности спутниковой навигации и связи.

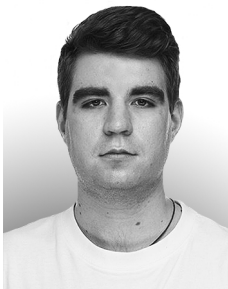
Список литературы

1. Брюнелли Б. Е., Намгаладзе А. А. Физика ионосферы. М.: Наука, 1988. 527 с.
2. Mendillo M. Storms in the ionosphere: Patterns and processes for total electron content // Rev. Geophys. 2006. Vol. 44, no. 4. P. RG4001. DOI: 10.1029/2005RG000193.

3. Максимов Д. С., Козогин Д. А., Насыров И. А., Загреддинов Р. В. Солнечные вспышки в 25-м цикле активности: влияние на ионосферную возмущённость и мощность ГНСС-сигналов // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2025. Т. 22, № 3. С. 301–317. DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-3-301-317.
4. Fitzgerald T. J. Observations of total electron content perturbation of GPS signals caused by a ground level explosion // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 1997. Vol. 59, no. 7. P. 829–834. DOI: 10.1016/s1364-6826(96)00105-8.
5. Feng J. D., Zhang T., Li W., Zhao Zh., Han B., Wang K. A new global TEC empirical model based on fusing multi-source data // GPS Solutions. 2023. Vol. 27, iss. 1. P. 20. DOI: 10.1007/s10291-022-01355-8.
6. Bilitza D., Pezzopane M., Truhlik V., Altadill D., Reinisch B. W., Pignalberi A. The international reference ionosphere model: A review and description of an ionospheric benchmark // Rev. Geophys. 2022. Vol. 60, iss. 4. P. e2022RG000792. DOI: 10.1029/2022RG000792.
7. Natras R., Soja B., Schmidt M. Ensemble machine learning of Random Forest, AdaBoost and XGBoost for Vertical Total Electron Content forecasting // Remote Sens. 2022. Vol. 14, no. 15. P. 3547. DOI: 10.3390/rs14153547.
8. Анпалонов А. М., Масленникова Ю. С., Шерстюков О. Н. Применение нейронных сетей глубокого обучения для анализа пространственных и временных компонент разложения полного электронного содержания ионосферы // Радиотехника. 2025. Т. 89, № 1. С. 172–179. DOI: 10.18127/j00338486-202501-16.
9. Анпалонов А. М., Масленникова Ю. С., Шерстюков О. Н. Анализ пространственно-временных вариаций полного электронного содержания и критической частоты слоя F2 с применением нейронных сетей глубокого обучения. Распространение радиоволн [Электронный ресурс] // В сб.: Сборник докладов XXIX Всероссийской открытой научной конференции. 30 июня–4 июля 2025 года, Казань, Россия. Казань: Издательство Казанского университета, 2025. С. 512–515. Режим доступа: https://repository.kpfu.ru/?p_id=319113.
10. JPL. Официальный сайт лаборатории JPL [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.jpl.nasa.gov>.
11. Global Ionospheric Radio Observatory. Официальный сайт [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://giro.uml.edu/>.
12. Dominion Radio Astrophysical Observatory (DRAO): официальный сайт [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.cadc-ccda.hia-ihh.nrc-cnrc.gc.ca>.
13. Helmholtz-Zentrum Potsdam – Deutsches GeoForschungsZentrum (GFZ). Официальный сайт [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.gfz.de/>.
14. Анпалонов А. М., Масленникова Ю. С., Шерстюков О. Н. Разложение глобальных карт полного электронного содержания ионосферы при помощи нейронных сетей // В сб.: Материалы 22-й Международной конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса». Москва: ИКИ РАН, 2024. С. 434. DOI: 10.21046/22DZZconf-2024a.
15. Анпалонов А. М., Масленникова Ю. С. Краткосрочное прогнозирование полного электронного содержания ионосферы с использованием солнечных параметров методами машинного обучения // В сб.: Материалы 21-й Международной конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса». Москва: ИКИ РАН, 2023. С. 299. DOI: 10.21046/21DZZconf-2023a.
16. Masini R. P., Medeiros M. C., Mendes E. F. Machine learning advances for time series forecasting // Journal of Economic Surveys. 2021. Vol. 37, no. 1. P. 76–111. DOI: 10.1111/joes.12429.

References

1. Brjunelli BE, Namgaladze AA. Physics of the Ionosphere. M.: Nauka; 1988. 527 p. (in Russian).
2. Mendillo M. Storms in the ionosphere: Patterns and processes for total electron content. *Rev. Geophys.* 2006;44(4):RG4001. DOI: 10.1029/2005RG000193.
3. Maksimov DS, Kogogin DA, Nasyrov IA, Zagretdinov RV. Solar flares in the 25th cycle of activity: Effect on ionospheric disturbance and GNSS signal strength. *Current Problems of Remote Sensing of the Earth from Space.* 2025;22(3):301–317 (in Russian). DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-3-301-317.
4. Fitzgerald TJ. Observations of total electron content perturbation of GPS signals caused by a ground level explosion. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics.* 1997;59(7):829–834. DOI: 10.1016/s1364-6826(96)00105-8.
5. Feng JD, Zhang T, Li W, Zhao Zh, Han B, Wang K. A new global TEC empirical model based on fusing multi-source data. *GPS Solutions.* 2023;27(1):20. DOI: 10.1007/s10291-022-01355-8.
6. Bilitza D., Pezzopane M., Truhlik V., Altadill D., Reinisch B. W., Pignalberi A. The international reference ionosphere model: A review and description of an ionospheric benchmark. *Rev. Geophys.* 2022;60(4):e2022RG000792. DOI: 10.1029/2022RG000792.
7. Natras R, Soja B, Schmidt M. Ensemble machine learning of Random Forest, AdaBoost and XGBoost for Vertical Total Electron Content forecasting. *Remote Sens.* 2022;14(15):3547. DOI: 10.3390/rs14153547.
8. Appalnov AM, Maslennokova YuS, Sherstyukov ON. Application of deep learning neural networks for the analysis of spatial and temporal components of the decomposition of the total electronic content of the ionosphere. *Radioengineering.* 2025;89(1):172–179 (in Russian). DOI: 10.18127/j00338486-202501-16.
9. Appalnov AM, Maslennikova JuS, Sherstyukov ON. Analysis of spatiotemporal variations of the complete electronic content and the critical frequency of the F2 layer using deep learning neural networks. Propagation of radio waves [Electronic resource]. In: Collection of Reports of the XXIX All-Russian Open Scientific Conference. June 30–July 4, 2025, Kazan, Russia. Kazan: Kazan University Publishing, 2025. P. 512–515. Available from: https://repository.kpfu.ru/?p_id=319113.
10. JPL. Official site of JPL [Electronic resource]. Available from: <https://www.jpl.nasa.gov>.
11. Global Ionospheric Radio Observatory. Official site [Electronic resource]. Available from: <https://giro.uml.edu/>.
12. Dominion Radio Astrophysical Observatory (DRAO) : official site / National Research Council Canada [Electronic resource]. Available from: <https://www.cadc-ccda.hia-ihp.nrc-cnrc.gc.ca>.
13. Helmholtz-Zentrum Potsdam – Deutsches GeoForschungsZentrum (GFZ). Official site / Helmholtz Association [Electronic resource]. Available from: <https://www.gfz.de/>.
14. Appalnov AM, Maslennikova JuS, Sherstyukov ON. Decomposition of global maps of the complete electronic content of the ionosphere using neural networks. In: Proceedings of the 22nd International Conference “Modern Problems of Remote Sensing of the Earth from Space”. M.: Russian Space Research Institute Publishing; 2024. P. 434 (in Russian). DOI: 10.21046/22DZZconf-2024a.
15. Appalnov AM, Maslennikova YuS. Short-term prediction of the total electronic content of the ionosphere using solar parameters by machine learning methods. In: Proceedings of the 21 International Conference “Modern Problems of Remote Sensing of the Earth from Space”. M.: Russian Space Research Institute Publishing; 2023. P. 299 (in Russian). DOI: 10.21046/21DZZconf-2023a.
16. Masini RP, Medeiros MC, Mendes EF. Machine learning advances for time series forecasting. *Journal of Economic Surveys.* 2021;37(1):76–111. DOI: 10.1111/joes.12429.



Аппалонов Артем Михайлович — родился в Ульяновске (1997). Окончил Казанский федеральный университет по направлению «Радиофизика» (2021, магистр радиофизики). В настоящее время обучается в аспирантуре Казанского (Приволжского) федерального университета (кафедра радиофизики). Ведущий инженер-разработчик систем машинного обучения и компьютерного зрения ООО «Техвилл». Область научных интересов: машинное обучение и искусственные нейронные сети для задач прогнозирования временных рядов и распознавания образов, динамика ионосферы, большие языковые модели, цифровая обработка сигналов в медицине.

Россия, 420008 Казань, ул. Кремлёвская, 18, корп. 1
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: artem309_97@mail.ru
ORCID: 0000-0001-7196-9837
AuthorID (eLibrary.Ru): 1176939



Масленникова Юлия Сергеевна — родилась в 1988 году. Окончила Казанский (Приволжский) федеральный университет (2010, магистр радиофизики). Кандидат физико-математических наук (2013). Область научных интересов: машинное обучение и искусственные нейронные сети для задач прогнозирования временных рядов и распознавания образов, динамика ионосферы, компьютерная лингвистика.

Россия, 420008 Казань, ул. Кремлёвская, 18, корп. 1
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: yuliamsl@gmail.com
ORCID: 0000-0003-3186-7611
AuthorID (eLibrary.Ru): 608278



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003215
EDN: VTEVRO

Три реализации одного нейрона: вариация режимов поведения радиофизического генератора нейроподобной активности в натурном эксперименте

Л. В. Такашвили^{1,2}✉, А. А. Грищенко², М. В. Сысоева², В. И. Пономаренко^{1,3}, И. В. Сысоев^{2,1}

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия

³Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

E-mail: ✉nar7187@yandex.ru, vili_von@mail.ru, bobrichek@mail.ru, ponomarenkovi@gmail.com, ivssci@gmail.com

Поступила в редакцию 4.02.2026, принята к публикации 6.03.2026,

опубликована онлайн 10.03.2026, опубликована 31.03.2026

Аннотация. Цель настоящего исследования — сопоставить режимы поведения в ансамбле радиофизических генераторов нейроподобной активности с режимами в симуляторе электронных схем и математической модели и определить, являются ли отклонения в амплитуде колебаний, их форме, значениях управляющего параметра, при которых происходит возбуждение, от соответствующих модельных значений результатом несовершенства моделей или объясняются особенностями использованной элементной базы. *Модели и методы.* Рассматриваются математические модели, имитационные модели, а также три натурные реализации перестраиваемого генератора. Определяется зависимость порога возбуждения и амплитуды колебаний от управляющего параметра при разных нелинейностях, обусловленных числом диодов в контуре обратной связи. Для сопоставления формы колебаний использована функция взаимной информации. *Результаты.* Показано, что существующие различия могут быть полностью объяснены стандартными вариациями параметров полупроводниковых компонентов и других элементов схемы, использованных при построении электронных нейронов. При этом имитационная модель может быть рассмотрена как один из генераторов, параметры которого удалось точно контролировать, а его компоненты имели нулевые допуски. *Заключение.* Современные имитационные модели способны давать достаточно хорошее описание натурального эксперимента, нельзя отличить временные ряды симулятора от экспериментальных; при этом сами экспериментальные реализации могут различаться за счёт случайных вариаций свойств компонентов.

Ключевые слова: нейрон, перестраиваемый генератор импульсов, имитационное моделирование, временные ряды, диод, осциллятор ван дер Поля.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-12-00176, <https://rscf.ru/project/25-12-00176/>.

Для цитирования: Такашвили Л. В., Грищенко А. А., Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Сысоев И. В. Три реализации одного нейрона: вариация режимов поведения радиофизического генератора нейроподобной активности в натурном эксперименте // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 2. С. 299–313. DOI: 10.18500/0869-6632-003215. EDN: VTEVRO

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Three realizations of one neuron: variation of behavior regimes for a electronic generator of neuron-like activity in a hardware experiment

L. V. Takaishvili^{1,2}✉, A. A. Grishchenko², M. V. Sysoeva², V. I. Ponomarenko^{1,3}, I. V. Sysoev^{2,1}

¹Saratov State University, Russia

²Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

³Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Russia

E-mail: ✉nar7187@yandex.ru, vili_von@mail.ru, bobrichkek@mail.ru,
ponomarenkovi@gmail.com, ivssci@gmail.com

Received 4.02.2026, accepted 6.03.2026, available online 10.03.2026, published 31.03.2026

Abstract. The purpose of this work is to compare dynamical modes in the ensemble of hardware electronic generators of neuron-like activity with dynamical modes in SPICE simulator and mathematical model in order to detect whether the difference in oscillation amplitude, form and bifurcation value of control parameter between the hardware generators and simulation is a result of model imperfection, or this difference can be explained by features of the used electronic elements. **Models and methods.** Mathematical models, SPICE simulations and three hardware copies of the tunable generator are considered. The dependence of the excitation threshold and the oscillation amplitude on the control parameter is determined for different nonlinearities due to the number of diodes in the feedback loop. The mutual information function is used to compare the waveform. **Results.** It is shown that the existing differences can be fully explained by standard variations in the parameters of semiconductor components and other circuit elements used for the construction of electronic neurons. In this case, the simulation model can be considered as one of the generators, the parameters of which could be precisely controlled, and its components had zero tolerances. **Conclusion.** Modern simulation models are able to give a fairly good description of a full-scale experiment, it is impossible to distinguish the time series of the simulator from the experimental ones; at the same time, the experimental implementations themselves may differ due to random variations in the properties of the components.

Keywords: neuron, tunable pulse generator, SPICE simulation, time series, diode, van der Pol oscillator.

Acknowledgements. This study was supported by Russian Science Foundation, grant No. 25-12-00176, <https://rscf.ru/project/25-12-00176/>.

For citation: Takaishvili LV, Grishchenko AA, Sysoeva MV, Ponomarenko VI, Sysoev IV. Three realizations of one neuron: variation of behavior regimes for a electronic generator of neuron-like activity in a hardware experiment. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(2):299–313. DOI: 10.18500/0869-6632-003215

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Создание искусственных нейронов потенциально может иметь целый ряд важных приложений. Это создание новых типов искусственных нейронных сетей для конструирования человекоподобного искусственного интеллекта [1], нейропротезирование и нейрореабилитация [2], верификация моделей нервной системы живых организмов и др. Помимо прикладных задач, аппаратные модели нейронных сетей и систем необходимы также для проведения фундаментальных исследований, направленных на понимание работы мозга. С момента появления первой аппаратной реализации было разработано множество схем электронных нейронов. Некоторые из них представляли собой усовершенствования оригинальной схемы, предложенной Маховальд и Дугласом [3], например [4, 5]. В дальнейшем были реализованы схемы, основанные на различных математических моделях, таких как модель ФитцХью–Нагумо, модель Моррис–Лекара,

а также упрощённые версии модели Ходжкина–Хаксли с использованием электронных компонентов. Поскольку нелинейные функции в модели ФитцХью–Нагумо — самые простые, в большинстве случаев аппаратные реализации так или иначе аппроксимируют её непосредственно [6–8] или берут из неё основные принципы организации [9, 10] ввиду простоты её реализации.

Аппаратные реализации, построенные методом схемотехнического моделирования уравнений, как в [7, 8], теоретически должны быть довольно стабильны с точки зрения параметров (этот вопрос в действительности слабо изучен), поскольку аппроксимация нелинейных функций в них опирается на прямые аналоги математических функций: сложение и умножение аппаратными методами, что при современной элементной базе должно относительно точно работать на невысоких частотах от сотен герц до десятков килогерц, на которых работают такие нейроны. Это не относится к моделям, построенным на основе аппроксимации нелинейных функций вольт-амперными характеристиками полупроводниковых элементов, например, диодов, как это сделано в работах [9, 10], поскольку при конструировании нейронов в таком случае подразумеваются очень приближенные теоретические характеристики. Хотя структурная устойчивость построенных моделей часто позволяет получить режимы, близкие к исходным, и даже работать с относительно большими ансамблями таких радиофизических нейронов [11], всё равно не ясно, насколько основные режимы колебаний зависят от конкретной реализации.

При разработке электронных генераторов нейроподобной активности часто используются симуляторы электронных схем [12], например, Multisim, LtSPICE или ngSPICE. Качество таких симуляций может зависеть от многих факторов, в том числе от степени проработанности моделей отдельных компонентов в них. Конечно, при этом даже самые реалистичные модели аппроксимируют компоненты однозначно, в то время как в натурном эксперименте свойства диодов и транзисторов будут отличаться, даже если взять их из одной партии. Построение радиофизических нейронных сетей означает как масштабирование производства элементов этих сетей — отдельных электронных нейронов, так и — в качестве обязательного этапа — построение моделей таких сетей в симуляторах для контроля результата, устранения ошибок монтажа и упрощения исследования динамики. В этой связи встаёт важный вопрос: являются ли различия, наблюдаемые между сигналами электронных нейронов в симуляторах и (при их наличии) математических моделях, результатом несовершенства таких моделей, либо это результат вариации конкретных экземпляров полупроводниковых элементов, используемых в натурном эксперименте. Фактически можно поставить вопрос: является ли модель в симуляторе с точки зрения генерируемых сигналов одним из экземпляров электронных нейронов (просто для этого экземпляра удалось точно проконтролировать все параметры), или она принципиально отличается от натуральных реализаций, поскольку при её построении были допущены существенные систематические неточности? Цель настоящего исследования — ответить на данный вопрос для перспективной модели, разработанной в [9].

1. Методы

1.1. Схемотехническое моделирование. Имитационное моделирование выполнялось в симуляторе схем с открытым исходным кодом ngSPICE [12]. Поскольку сам по себе ngSPICE — это движок, решатель систем уравнений и библиотека компонентов, но не среда разработки, в качестве визуального помощника использовалась активно развиваемая в настоящее время, в том числе отечественными разработчиками, среда QUQS-S [13]. За основу была взята схема нейрона ФитцХью–Нагумо, опубликованная в [10]. Затем эта схема была редуцирована в [9], в результате

чего удалось более чем в два раза уменьшить число компонентов схемы, но при этом добавить элемент управления формой сигнала через различное количество диодов и увеличить скважность импульсов, сделав режимы генерации более нейроподобными. На рис. 1 показана разработанная в [9] схема нейрона.

Далее были созданы три аппаратные реализации данной схемы. Модели и номиналы компонентов всех трёх реализаций были идентичны. Элементы — диоды, конденсаторы, катушки индуктивности — брались из одной и той же партии. На рис. 2 показаны аппаратные реализации трёх генераторов.

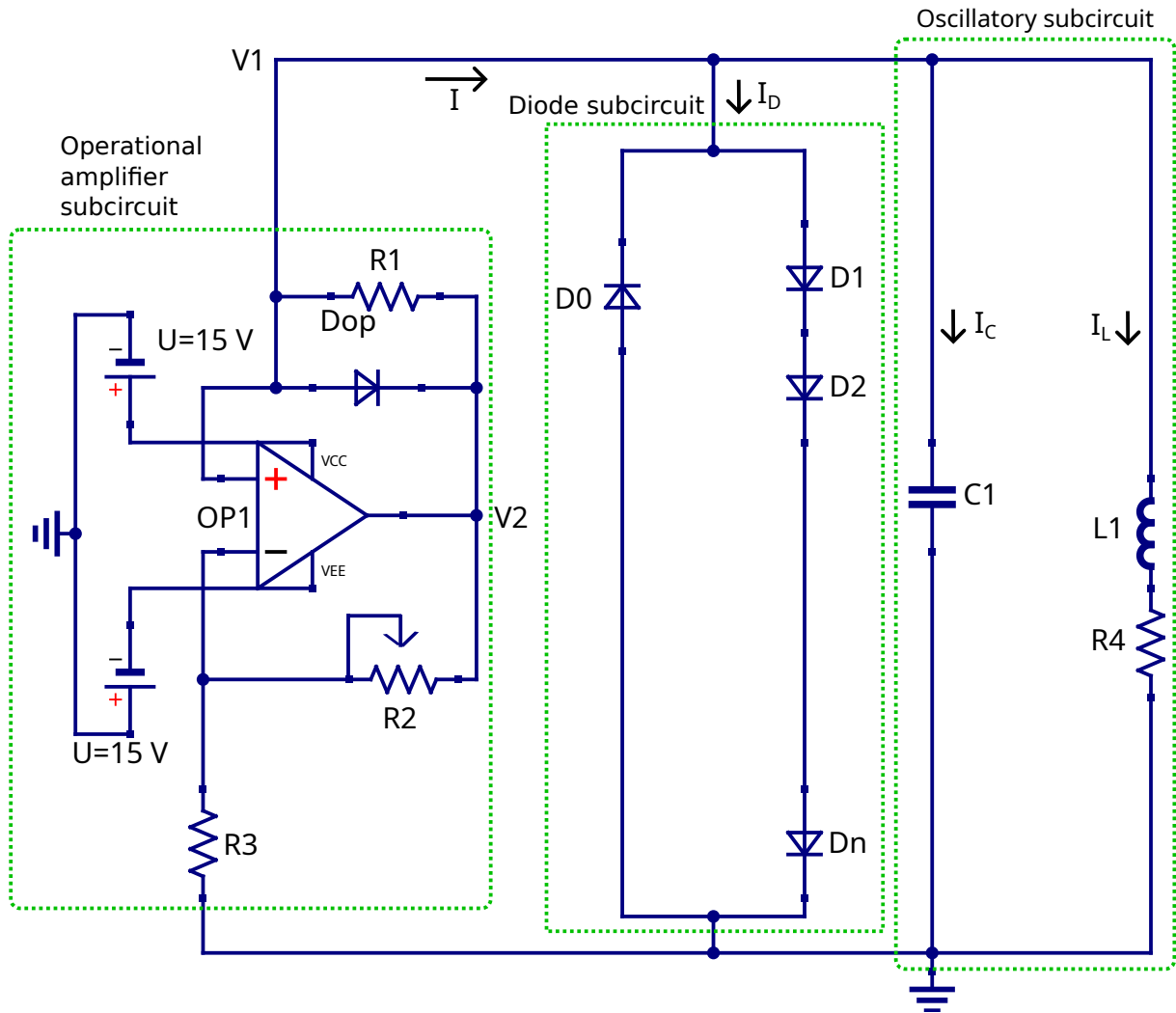


Рис. 1. Принципиальная схема простого перестраиваемого генератора нейроподобной активности. Контур операционного усилителя включает собственно усилитель $OP1$ типа LM358, резисторы $R_1 = 1 \text{ кОм}$ и $R_3 = 1 \text{ кОм}$, потенциометр R_2 и диод D_{op} типа 1N4148. Диодный контур состоит из $n + 1$ диодов типа 1N4148. Колебательный контур состоит из конденсатора $C_1 = 300 \text{ нФ}$, катушки индуктивности $L_1 = 1 \text{ мГн}$, резистора $R_4 = 2 \text{ Ом}$ (цвет онлайн)

Fig. 1. Circuit diagram of the simple tunable generator of neuron-like activity. Operational amplifier subcircuit consist of operational amplifier $OP1$ of type LM358, resistors $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ and $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, potentiometer R_2 , diode D_{op} of type 1N4148. Diode subcircuit consists of $n + 1$ diodes of type 1N4148. Oscillatory subcircuit consists of capacitor $C_1 = 300 \text{ nF}$, inductor coil $L_1 = 1 \text{ mH}$, resistor $R_4 = 2 \text{ }\Omega$ (color online)

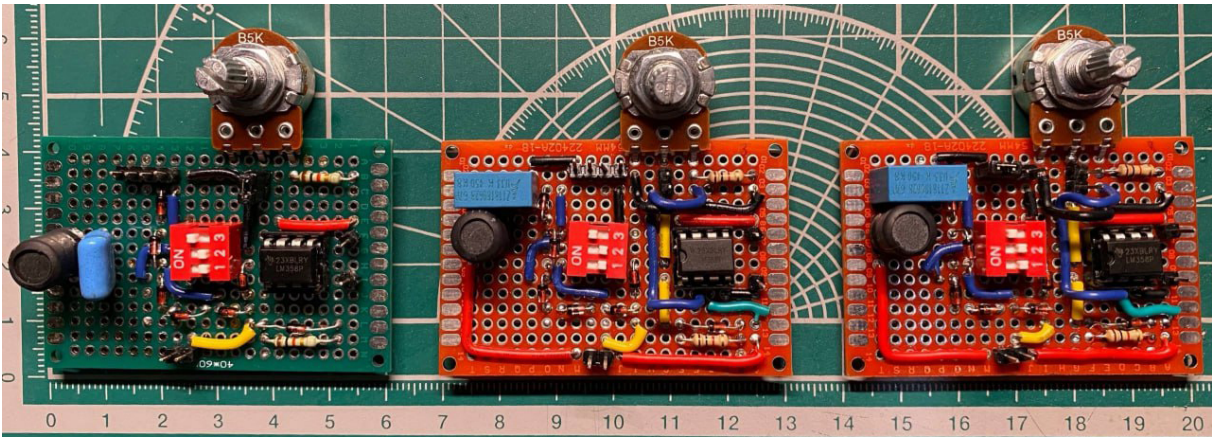


Рис. 2. Фотография трёх аппаратных реализаций простого перестраиваемого генератора нейроподобной активности (цвет онлайн)

Fig. 2. The photo of three different items — hardware realizations of the simple tunable generator of neuron-like activity (color online)

1.2. Математическая модель электронного нейрона. Математическая модель разработанного генератора фактически представляет собой обобщённый генератор ван дер Поля, который может быть записан следующим образом:

$$\frac{d^2V_1}{dt^2} + \frac{dV_1}{dt} \left(\frac{R_4}{L_1} + \frac{\rho + \rho_D}{C_1} + \frac{1}{C_1} V_1 \left(\frac{d\rho}{dV_1} + \frac{d\rho_D}{dV_1} \right) \right) + \frac{1}{L_1 C_1} V_1 (1 + (\rho + \rho_D) R_4) = 0, \quad (1)$$

где ρ — проводимость контура операционного усилителя, а ρ_D — проводимость диодного контура. При малых по амплитуде (в линейных режимах) напряжениях все диоды закрыты, поэтому проводимость $\rho_D \rightarrow 0$, а в контуре операционного усилителя ток идёт только через резистор R_1 , но не через диод D_{op} , поэтому проводимость контура можно выразить как $\rho = -\frac{R_2}{R_1 R_3}$ (подробнее вывод на основе уравнений Кирхгофа изложен в работе [9]), то есть это просто константа, отвечающая за усиление колебаний — внешний источник энергии, или отрицательное трение. В таком случае зависимость ρ от приложенного напряжения пропадает и, следовательно, $\frac{d\rho}{dV_1} = 0$. Таким образом, в линейных режимах, в том числе вблизи бифуркационного значения параметра R_2 , отвечающего за суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа, уравнения модели могут приближённо быть сведены к уравнению линейного диссипативного осциллятора:

$$\frac{d^2V_1}{dt^2} + \frac{dV_1}{dt} \left(\frac{R_4}{L_1} - \frac{R_2}{R_1 R_3 C_1} \right) + \frac{1}{L_1 C_1} V_1 \left(1 - \frac{R_2}{R_1 R_3} R_4 \right) = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что условие возбуждения для такого осциллятора — равенство нулю коэффициента перед первой производной, то есть

$$\frac{R_4}{L_1} = \frac{R_2}{R_1 R_3 C_1}. \quad (3)$$

Это соотношение соответствует потере устойчивости фокусом и рождению цикла. На него влияют, как видим, номиналы большинства резисторов, конденсатора и катушки, в том числе потенциометра R_2 , и сопротивление катушки R_4 , причём из (3) прямо следует, что R_2 пропорционально R_4 , которое относительно мало (2 Ом).

1.3. Функция взаимной информации. Для оценки схожести формы сигналов использовалась функция взаимной информации. Функция взаимной информации MI — это универсальная мера сходства двух экспериментальных выборок X (состоит из значений $\{x_i\}_{i=1}^N$) и Y (состоит из значений $\{y_i\}_{i=1}^N$). Здесь важно, что каждому x_i сопоставлен свой y_i , то есть это именно пары значений, которые могут быть обозначены точками на плоскости (X, Y) . Традиционно функция взаимной информации определяется через совместную $H_{X,Y}$ и индивидуальные H_X и H_Y энтропии следующим образом:

$$MI_{X,Y} = H_X + H_Y - H_{X,Y}. \quad (4)$$

Часто её используют для анализа сигналов; в таком случае говорят о ненаправленной связанности или синхронности, в том числе потому, что мера остро реагирует на различие частот рассматриваемых сигналов, как и корреляционная функция, только выявляет как линейные, так и нелинейные взаимозависимости.

Непосредственный способ расчёта MI по формуле (4) требует оценить по экспериментальным данным все три энтропии: H_X , H_Y и $H_{X,Y}$, например, с помощью разбиения всей области измерения на бины и подсчёта попадания в каждый бин, но такой подход чреват большими ошибками и требует огромных объёмов данных. Поэтому на практике рассчитывают не саму функцию взаимной информации, а её оценку, например, так называемую энтропию Козаченко–Леоненко [14]. Именно такой подход, описанный в [15], и применяется в данной работе. Для ускорения расчётов используется сортировочный алгоритм, описанный в [16].

Для расчёта оценки по Козаченко–Леоненко на плоскости (X, Y) ищут соседей для каждой i -й точки ($i = 1, \dots, N$), причём расстояние между i -й и j -й точками вводится не по Евклиду, а как максимум из модулей расстояний по координатам — по формуле (5):

$$d_{i,j} = \max(|x_i - x_j|, |y_i - y_j|). \quad (5)$$

Далее находят K -го по близости соседа, расстояние до которого обозначается $\varepsilon/2$, после чего рассчитывается число соседей отдельно по $X - n_X$ и по $Y - n_Y$. В данной работе $K = 4$.

При таком способе введения расстояния асимптотически несмещённая, то есть при $N \rightarrow \infty$ имеющая математическое ожидание, равное истинному значению MI , оценка функции взаимной информации может быть рассчитана по следующей формуле:

$$MI_{xy} = \psi(N) + \psi(K) - \langle \psi(n_x(i) + 1) + \psi(n_y(i) + 1) \rangle_i, \quad (6)$$

где $\psi(n)$ — дигамма-функция.

2. Результаты

2.1. Визуальный анализ сигналов. Были записаны сигналы со всех трёх аппаратных реализаций для разного количества диодов ($n = 1, 3, 5$) и при разном сопротивлении резистора R_2 (меняли от 500 Ом до 1600 Ом с шагом 50 Ом). Аналогично были записаны временные реализации для математической модели и имитационной модели из симулятора ngspice.

Для начала рассмотрим графики зависимости амплитуды напряжения сигнала от сопротивления управляющего резистора R_2 (рис. 3) для одного, трёх и пяти диодов, подключённых в прямом направлении в диодном контуре. Так как изначально предполагалось, что колебания должны получиться сильно нелинейные, то за «амплитуду» брали размах между минимальным и максимальным значениями сигнала. Основные различия между кривыми заключаются в сопротивлении, при котором возникают колебания. Причём момент возникновения колебаний для каждой

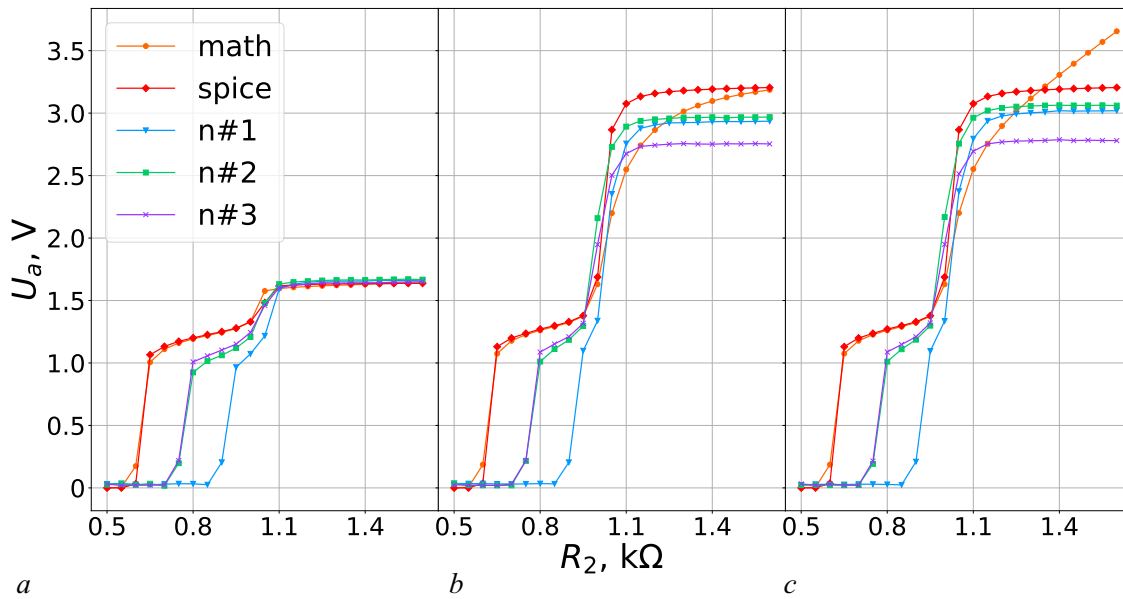


Рис. 3. График зависимости амплитуды сигнала от сопротивления управляющего резистора R_2 . $a - n = 1$; $b - n = 3$; $c - n = 5$. Оранжевой линией показаны зависимости для математической модели, красной линией — для имитационной модели в симуляторе ngSPICE, голубой линией — для нейрона № 1, зелёной — для нейрона № 2, фиолетовой — для нейрона № 3 (цвет онлайн)

Fig. 3. Dependence of voltage amplitude of resistance in controlling resistor R_2 . $a - n = 1$; $b - n = 3$; $c - n = 5$. Orange line corresponds to the mathematical model, red line — to the ngspice simulation, blue line — to the neuron #1, green line — to the neuron #2, purple line — neuron #3 (color online)

конкретной реализации не зависит от количества диодов в диодном контуре. В математической и имитационной моделях колебания возникают при $R_2 \approx 600$ Ом. Три физические реализации показали отличающиеся результаты относительно друг друга и виртуальных моделей. У первого нейрона колебания возникают при $R_2 \approx 900$ Ом, в то время как у второго и третьего — при $R_2 \approx 750$ Ом. Данные отличия легко объясняются в рамках бифуркационного соотношения (3) тем, что реальное сопротивление катушки оказалось выше номинального во всех реализациях, причём небольшое отклонение — на десятые доли Ома — приводит к существенному — на сотни Ом — сдвигу по R_2 , поскольку при прочих равных параметрах R_4 в 500 раз меньше R_2 . Это очевидное слабое место схемы, которое можно устранить за счёт, например, увеличения номинала R_4 и одновременного уменьшения номинала R_3 либо R_1 во столько же раз. При этом данный недостаток не сказывается значительно на нелинейных режимах — целевых для рассматриваемого генератора, то есть не имеет существенного значения.

Далее на всех графиках видно резкое возрастание амплитуды колебаний до $U_a \approx 1$ В. Потом амплитуда колебаний медленно (для математической и имитационной моделей), чуть побыстрее (для нейронов № 2 и № 3) или практически мгновенно (для нейрона № 1) возрастает до значения, примерно одинакового для разных реализаций, но различного для разного количества диодов в диодном контуре. При количестве диодов $n = 1$ амплитуда у всех возрастает до $U_a \approx 1.6$ В, а при $n = 3$ и $n = 5$ амплитуда возрастает до $U_a \approx 2.9 \pm 0.2$ В.

Далее разберёмся с формой колебаний, для этого обратим внимание на сами сигналы при нескольких характерных значениях R_2 : 750 Ом (момент первого резкого возрастания амплитуды для нейронов № 2 и № 3) и 1300 Ом (момент выхода на второе «плато» амплитуды колебаний всех трёх аппаратных нейронов). Временные реализации при малых R_2 (примерно до 900 Ом) выглядят одинаково при всех рассматриваемых в работе количествах диодов ($n = 1, 3, 5$).

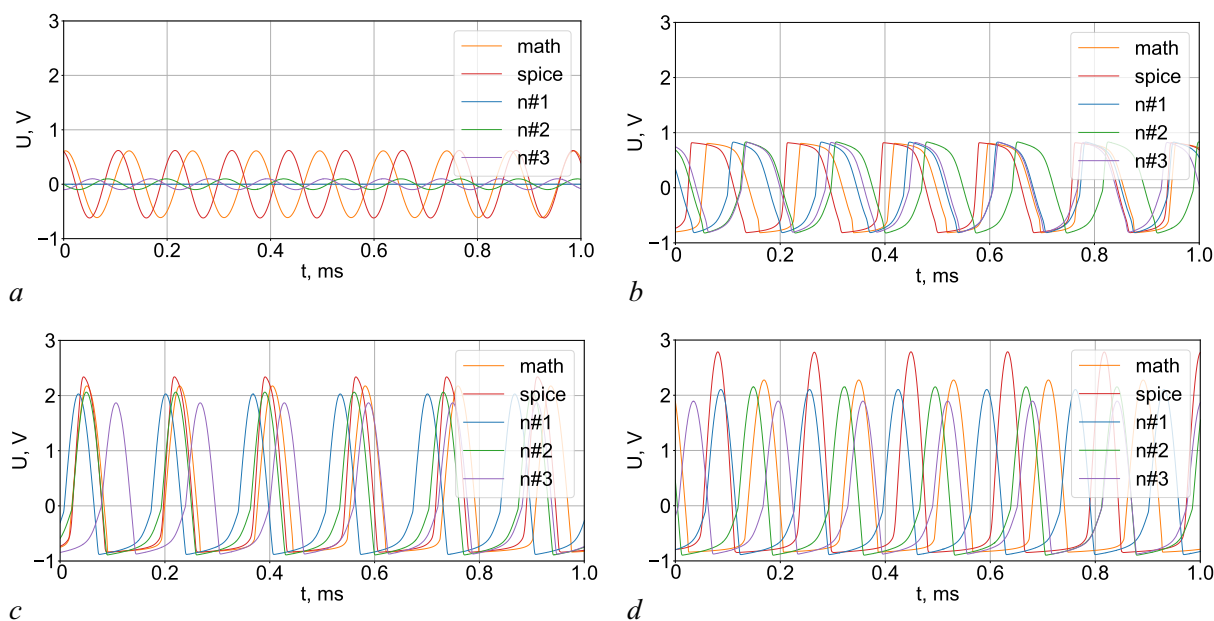


Рис. 4. График временных рядов выходного напряжения V_1 при: $a - R_2 = 750 \text{ Ом}$ ($n = 1, 3, 5$); $b - R_2 = 1300 \text{ Ом}$ ($n = 1$); $c - R_2 = 1300 \text{ Ом}$ ($n = 3$); $d - R_2 = 1300 \text{ Ом}$ ($n = 5$). Оранжевой линией показаны ряды математической модели, красной линией – ряды имитационной модели в симуляторе ngSPICE, голубой линией – ряды нейрона № 1, зелёной – ряды нейрона № 2, фиолетовой – ряды нейрона № 3 (цвет онлайн)

Fig. 4. Time series of the circuit output voltage V_1 at: $a - R_2 = 750 \text{ Ohm}$ ($n = 1, 3, 5$); $b - R_2 = 1300 \text{ Ohm}$ ($n = 1$); $c - R_2 = 1300 \text{ Ohm}$ ($n = 3$); $d - R_2 = 1300 \text{ Ohm}$ ($n = 5$). Orange line corresponds to the mathematical model, red line – to the ngspice simulation, blue line – to the neuron #1, green line – to the neuron #2, purple line – neuron #3 (color online)

На рис. 4, a видно, что при значении $R_2 = 750 \text{ Ом}$ математическая (имеется в виду полная модель (1), хотя в данном режиме её колебания визуально не отличимы от колебаний редуцированной модели (2)) и имитационная модели уже демонстрируют синусоидальные колебания высокой амплитуды, нейроны № 2 и № 3 демонстрируют колебания синусоидальной формы, но ещё небольшой амплитуды, а нейрон № 1 всё ещё находится в подпороговом режиме. При значениях $R_2 > 900 \text{ Ом}$ количество подключённых в диодный контур диодов уже влияет на итоговую форму колебаний. На рис. 4 b, c, d видно, что при значении $R_2 = 1300 \text{ Ом}$ амплитуда увеличивается с ростом количества диодов в контуре. Форма сигнала также зависит от количества диодов в диодном контуре.

2.2. Количественный анализ сигналов. В этой работе наша основная задача – оценить степень похожести или различия сигналов, полученных с трёх аппаратных реализаций нейронов, а также от математической и имитационной моделей при одинаковых параметрах схем (одинаковое количество диодов, одинаковые номиналы всех резисторов и потенциометров). Для начала оценим спектральный состав сигналов.

Амплитудные спектры были построены при $R_2 = 750 \text{ Ом}$ и $R_2 = 1300 \text{ Ом}$ для одного, трёх и пяти диодов в диодном контуре. При $R_2 = 750 \text{ Ом}$ спектры предсказуемо выглядят одинаково (рис. 5, a) при всех рассматриваемых в работе количествах диодов ($n = 1, 3, 5$). Это линейные колебания, на спектрах отсутствуют высшие гармоники основной частоты. На рис. 5 b, c, d показаны амплитудные спектры сигнала выходного напряжения при номинале управляющего резистора $R_2 = 1300 \text{ Ом}$ для одного (рис. 5, b), трёх (рис. 5, c) и пяти (рис. 5, d) «прямых» диодов в диодном контуре. Во-первых, по спектрам видно, что полученные сигналы сильно нелинейные – хорошо выражены вторая и третья гармоники сигнала, причём чем больше n , тем больше энергии

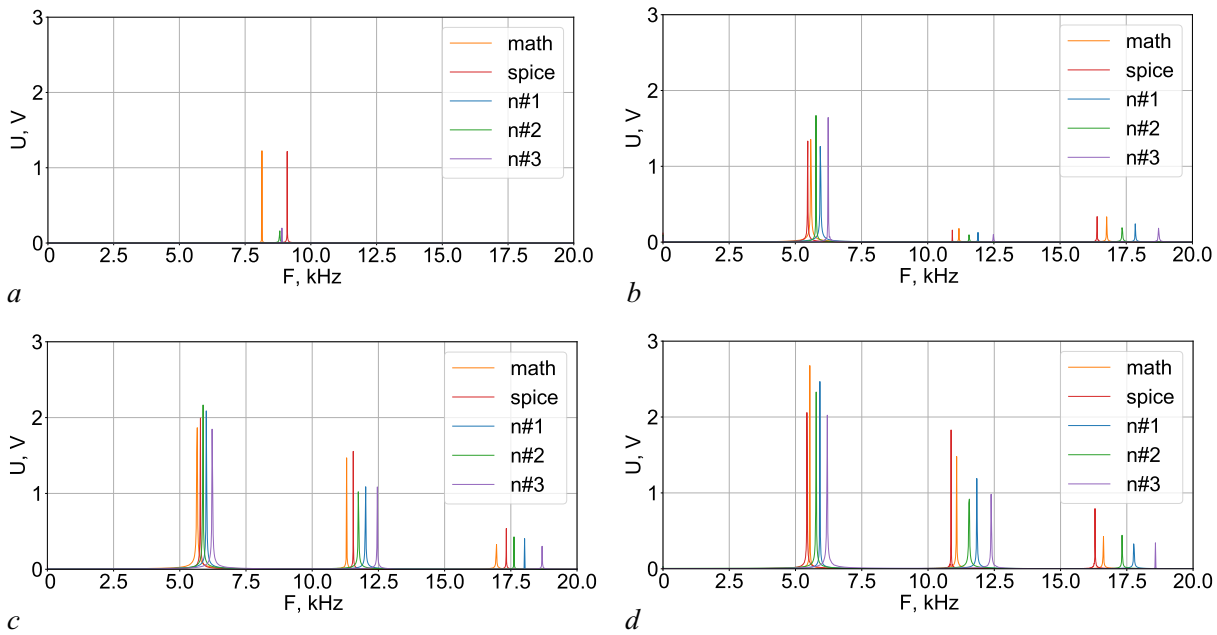


Рис. 5. Амплитудный спектр сигнала выходного напряжения V1 при: $a - R_2 = 750 \text{ Ом}$ ($n = 1, 3, 5$); $b - R_2 = 1300 \text{ Ом}$ ($n = 1$); $c - R_2 = 1300 \text{ Ом}$ ($n = 3$); $d - R_2 = 1300 \text{ Ом}$ ($n = 5$). Оранжевой линией показаны ряды математической модели, красной линией – ряды имитационной модели в симуляторе ngspice, голубой линией – ряды нейрона № 1, зелёной – ряды нейрона № 2, фиолетовой – ряды нейрона № 3 (цвет онлайн)

Fig. 5. Amplitude spectrum for signal of the circuit output voltage V1 at: $a - R_2 = 750 \text{ Ohm}$ ($n = 1, 3, 5$); $b - R_2 = 1300 \text{ Ohm}$ ($n = 1$); $c - R_2 = 1300 \text{ Ohm}$ ($n = 3$); $d - R_2 = 1300 \text{ Ohm}$ ($n = 5$). Orange line corresponds to the mathematical model, red line – to the ngspice simulation, blue line – to the neuron #1, green line – to the neuron #2, purple line – neuron #3 (color online)

содержится в высших гармониках. Во-вторых, видно, что при $n \geq 3$ спектральная структура уже не меняется. В-третьих, видно, что спектральная структура для всех трёх аппаратных реализаций нейрона, а также математической и имитационной моделей очень похожа, хотя основные частоты колебаний и несколько отличаются (табл. 1). Посчитали, на сколько процентов отличаются полученные частоты друг от друга с помощью симметричной формулы процентной разницы: $d_{xy} = \frac{2|f_x - f_y|}{(f_x + f_y)} \cdot 100\%$, где x – первая система, f_x – основная частота колебаний первой системы, y – вторая система, f_y – основная частота колебаний второй системы.

Таблица 1. Основная частота колебаний сигнала выходного напряжения V1

Table 1. The main oscillation frequency for signal of the circuit output voltage V1

F , кГц	$R_2 = 750 \text{ Ом}$					$R_2 = 1300 \text{ Ом}$				
	math	spice	n#1	n#2	n#3	math	spice	n#1	n#2	n#3
$n = 1$	8.10	9.10	0	8.80	8.90	5.60	5.45	5.90	5.80	6.20
$n = 3$	8.10	9.10	0	8.80	8.90	5.70	5.80	6.00	5.90	6.20
$n = 5$	8.10	9.10	0	8.80	8.90	5.50	5.45	5.90	5.80	6.20

По табл. 2 хорошо видно, что частоты всех пяти рассматриваемых сигналов при любых использованных значениях R_2 и n отличаются не более чем на 13%. При этом основные частоты сигналов аппаратных реализаций отличаются друг от друга максимум на 7%. Максимальное отличие наблюдается между частотой третьего нейрона и частотами математической и имитационной моделей.

Таблица 2. Симметричная процентная разница основных частот сигналов. Нижние индексы: m – математическая модель, s – имитационная модель в симуляторе ngSPICE, 1 – нейрон № 1, 2 – нейрон № 2, 3 – нейрон № 3
 Table 2. Symmetrical percentage difference of the signal main frequencies. Lower indexes: m – mathematical model, s – ngspice simulation, 1 – neuron #1, 2 – neuron #2, 3 – neuron #3

R_2 , Ом	Diodes	d_{ms}	d_{m1}	d_{m2}	d_{m3}	d_{s1}	d_{s2}	d_{s3}	d_{12}	d_{13}	d_{23}
750	1, 3, 5	12 %	—	8 %	9 %	—	3 %	2 %	—	—	1 %
1300	$n = 1$	3 %	5 %	4 %	10 %	8 %	6 %	13 %	2 %	5 %	7 %
	$n = 3$	2 %	5 %	3 %	8 %	3 %	2 %	7 %	2 %	3 %	5 %
	$n = 5$	1 %	7 %	5 %	12 %	8 %	6 %	13 %	2 %	5 %	7 %

Так как наша задача — оценить схожесть именно формы сигнала, а не основной его частоты, то для каждой временной реализации время было отнормировано на период колебаний (ряд времени почленно разделили на $T = 1/F$). В итоге у всех сигналов характерный период стал занимать 1 усл. ед. К сожалению, после этой операции непосредственное применение функции взаимной информации стало невозможно, так как теперь шаг выборки стал своим в каждом сигнале и нет одновременных значений. Поэтому далее была проведена интерполяция кубическими сплайнами, и все пять реализаций были перевыбраны с одинаковой новой частотой выборки. Для этого использовались функции `splev` и `splrep` из модуля `interpolate` пакета `scipy` [17]. Именно такие перевыбранные ряды использовались для сопоставления степени схожести на основе оценки функции взаимной информации. Следует заметить, что такой способ также позволил избавиться от зависимости от шага квантования и отношения динамического диапазона АЦП к размаху колебаний.

По табл. 3 хорошо видно, что когда сигналы явно не похожи (нейрон № 1 при $R_2 = 750$ Ом не колеблется), функция взаимной информации получается меньше единицы, во всех остальных случаях $1 < MI < 2$. Если сравнивать между собой три выборки при $R_2 = 1300$ Ом:

Таблица 3. Оценка функции взаимной информации MI . Нижние индексы: m – математическая модель, s – имитационная модель в симуляторе ngspice, 1 – нейрон № 1, 2 – нейрон № 2, 3 – нейрон № 3
 Table 3. Evaluation of the mutual information function MI . Lower indexes: m – mathematical model, s – ngspice simulation, 1 – neuron #1, 2 – neuron #2, 3 – neuron #3

	$R_2 = 750$ Ом			$R_2 = 1300$ Ом		
	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$
MI_{ms}	1.241	1.181	1.195	1.248	1.284	1.354
MI_{m1}	0.835	0.813	0.810	1.468	1.493	1.339
MI_{m2}	1.194	1.330	1.181	1.301	1.200	1.235
MI_{m3}	1.598	1.224	1.385	1.275	1.234	1.269
MI_{s1}	0.837	0.821	0.818	1.256	1.877	1.663
MI_{s2}	1.221	1.291	1.277	1.380	1.266	1.366
MI_{s3}	1.480	1.272	1.276	1.599	1.313	1.252
MI_{12}	0.461	0.280	0.165	1.489	1.252	1.275
MI_{13}	0.501	0.284	0.235	1.377	1.482	1.537
MI_{23}	1.269	1.257	1.284	1.408	1.275	1.267

аппаратные реализации друг с другом (MI_{12} , MI_{13} , MI_{23}), математическая модель с аппаратными реализациями (MI_{m1} , MI_{m2} , MI_{m3}), имитационная модель с аппаратными реализациями (MI_{s1} , MI_{s2} , MI_{s3}), то хорошо видно, что их распределения перекрываются. То есть аппаратные реализации отличаются друг от друга настолько, насколько они отличаются от математических и имитационных моделей.

Заключение

Симуляторы электронных схем (известные также как SPICE) уже много лет используются для моделирования различных нелинейных устройств, в том числе генераторов хаоса [18–20]. Значительное число результатов, относящихся к скрытым аттракторам в электронных системах, также получены с помощью симуляторов [21]. В то же время до сих пор не ясно, насколько такие симуляторы количественно точно воспроизводят режимы в реальной схеме. В том числе остаётся открытым вопрос о том, насколько неточность задания номиналов компонентов в натурном эксперименте влияет на различие симуляции и экспериментальных сигналов.

Проделанная работа свидетельствует о том, что заложенные в современные симуляторы модели полупроводниковых элементов в целом количественно адекватны для описания режимов, в том числе сильно нелинейных (импульсных), характерных для электронных нейронов. Можно считать, что модель в симуляторе является идеальным представителем своего класса, для которого удалось абсолютно точно выставить номиналы отдельных элементов. Очевидно, что в случае реальных устройств это невозможно, более того, мы сталкиваемся с проблемами использования неидентичных одинаковых элементов в одной и той же установке, а не только неидентичных элементов в разных экземплярах рассматриваемого генератора. Важно, что симулятор показывает не только качественно и количественно (с точки зрения формы колебаний) сходные временные ряды, но и даёт очень похожую на экспериментальную кривую зависимости размаха колебаний от управляющего параметра, в том числе для несимметричного диодного контура. При этом существующие количественные различия в амплитуде колебаний и бифуркационном значении легко объясняются именно неточностью задания параметров генераторов.

При этом математическая модель, построенная в работе [9], очевидно, несколько упрощённая по сравнению с симулятором, демонстрируя сходные по форме сигналы, неточно воспроизводит кривую зависимости размаха колебаний от величины усиления (управляющего параметра), показывая рост там, где в симуляторе и натурном эксперименте имеется насыщение. Для электронных нейронов, построенных с использованием полупроводниковых элементов для непосредственного описания их нелинейных функций (например, за счёт их вольт-амперных характеристик), проблема наличия адекватной математической модели всегда имела место.

Список литературы

1. *Levi T., Nanami T., Tange A., Aihara K., Kohno T.* Development and applications of biomimetic neuronal networks toward brainmorphic artificial intelligence // *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*. 2018. Vol. 65, no. 5. P. 577–581. DOI: 10.1109/TCSII.2018.2824827.
2. *Park H.-L., Lee Y., Kim N., Seo D.-G., Go G.-T., Lee T.-W.* Flexible neuromorphic electronics for computing, soft robotics, and neuroprosthetics // *Adv. Mater.* 2020. Vol. 32, no. 15. P. 1903558. DOI: 10.1002/adma.201903558.
3. *Mahowald M., Douglas R.* A silicon neuron // *Nature*. 1991. Vol. 354. P. 515–518. DOI: 10.1038/354515a0.
4. *Rasche C., Douglas R.* An improved silicon neuron // *Analog Integr. Circ. Sig. Process.* 2000. Vol. 23. P. 227–236. DOI: 10.1023/A:1008357931826.

5. *van Schaik A.* Building blocks for electronic spiking neural networks // *Neural Netw.* 2001. Vol. 14. no. 6–7. P. 617–628. DOI: 10.1016/S0893-6080(01)00067-3.
6. *Li F., Liu Q., Guo H., Zhao Y., Tang J., Ma J.* Simulating the electric activity of FitzHugh–Nagumo neuron by using Josephson junction model // *Nonlinear Dyn.* 2012. Vol. 69. P. 2169–2179. DOI: 10.1007/s11071-012-0417-z.
7. *Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Hramov A. E.* Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators // *Nonlinear Dyn.* 2019. Vol. 98. P. 735–748. DOI: 10.1007/s11071-019-05224-x.
8. *Egorov N. M., Sysoev I. V., Ponomarenko V. I., Sysoeva M. V.* Complex regimes in electronic neuron-like oscillators with sigmoid coupling // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2022. Vol. 160. P. 112171. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112171.
9. *Takaishvili L. V., Ponomarenko V. I., Sysoev I. V.* Simple tunable generator of neuron-like activity // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2025. Vol. 196. P. 116316. DOI: 10.1016/j.chaos.2025.116316.
10. *Binczak S., Kazantsev V. B., Nekorkin V. I., Bilbault J. M.* Experimental study of bifurcations in modified FitzHugh–Nagumo cell // *Electronics Letters.* 2003. Vol. 39, no. 13. P. 961–962. DOI: 10.1049/el:20030657.
11. *Binczak S., Jacquir S., Bilbault J.-M., Kazantsev V. B., Nekorkin V. I.* Experimental study of electrical FitzHugh–Nagumo neurons with modified excitability // *Neural Netw.* 2006. Vol. 19, no. 5. P. 684–693. DOI: 10.1016/j.neunet.2005.07.011.
12. *Madec M., Lallement C., Haiech J.* Modeling and simulation of biological systems using SPICE language // *PLoS ONE.* 2017. Vol. 12, no. 8. P. e0182385. DOI: 10.1371/journal.pone.0182385.
13. *Brinson M. E., Kuznetsov V. V.* Extended behavioural device modelling and circuit simulation with Qucs-S // *International Journal of Electronics.* 2018. Vol. 105, no. 3. P. 412–425. DOI: 10.1080/00207217.2017.1357764.
14. *Козаченко Л. Ф., Леоненко Н. Н.* О статистической оценке энтропии случайного вектора // *Пробл. передачи информ.* 1987. Т. 23, № 2. С. 9–16.
15. *Kraskov A., Stögbauer H., Grassberger P.* Estimating mutual information // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69, no. 6. P. 66–138. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.066138.
16. *Сысоев И. В.* Сравнение численных реализаций алгоритма расчёта взаимной информации на основе учёта ближайших соседей // *Известия вузов. ПНД.* 2016. Т. 24, № 4. С. 86–95. DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-86-95.
17. *Virtanen P., Gommers R., Oliphant T. E., Haberland M., Reddy T., Cournapeau D., Burovski E., Peterson P., Weckesser W., Bright J., van der Walt S. J., Brett M., Wilson J., Millman K. J., Mayorov N., Nelson A. R. J., Jones E., Kern R., Larson E., Carey C. J., Polat İ., Feng Y., Moore E. W., VanderPlas J.* SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python // *Nat. Methods.* 2020. Vol. 17, no. 3. P. 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
18. *Кузнецов С. П.* Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом и моделирование их динамики в программной среде Multisim // *Известия вузов. ПНД.* 2011. Т. 19, № 5. С. 98–115. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-5-98-115.
19. *Kuznetsov S. P.* Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM // *Chaos.* 2011. Vol. 21, no. 4. P. 043105. DOI: 10.1063/1.3646903.
20. *Кузнецов С. П.* Простые электронные генераторы хаоса и их схемотехническое моделирование // *Известия вузов. ПНД.* 2018. Т. 26, № 3. С. 35–61. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-35-61.
21. *Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V.* Nonlinear analysis of classical phase-locked loops in signal’s phase space // *IFAC Proceedings Volumes.* 2014. Vol. 47, no. 3. P. 8253–8258. DOI: 10.3182/20140824-6-ZA-1003.02772.

References

1. Levi T, Nanami T, Tange A, Aihara K, Kohno T. Development and applications of biomimetic neuronal networks toward brainmorphic artificial intelligence. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*. 2018;65(5):577–581. DOI: 10.1109/TCSII.2018.2824827.
2. Park HL, Lee Y, Kim N, Seo DG, Go GT, Lee TW. Flexible neuromorphic electronics for computing, soft robotics, and neuroprosthetics. *Adv. Mater.* 2020;32(15):1903558. DOI: 10.1002/adma.201903558.
3. Mahowald M, Douglas R. A silicon neuron. *Nature*. 1991;354:515–518. DOI: 10.1038/354515a0.
4. Rasche C, Douglas R. An improved silicon neuron. *Analog Integr. Circ. Sig. Process.* 2000;23:227–236. DOI: 10.1023/A:1008357931826.
5. van Schaik A. Building blocks for electronic spiking neural networks. *Neural Netw.* 2001;14(6–7):617–628. DOI: 10.1016/S0893-6080(01)00067-3.
6. Li F, Liu Q, Guo H, Zhao Y, Tang J, Ma J. Simulating the electric activity of FitzHugh–Nagumo neuron by using Josephson junction model. *Nonlinear Dyn.* 2012;69:2169–2179. DOI: 10.1007/s11071-012-0417-z.
7. Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Hramov AE. Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators. *Nonlinear Dyn.* 2019;98:735–748. DOI: 10.1007/s11071-019-05224-x.
8. Egorov NM, Sysoev IV, Ponomarenko VI, Sysoeva MV. Complex regimes in electronic neuron-like oscillators with sigmoid coupling. *Chaos, Solitons and Fractals.* 2022;160:112171. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112171.
9. Takaishvili LV, Ponomarenko VI, Sysoev IV. Simple tunable generator of neuron-like activity. *Chaos, Solitons and Fractals.* 2025;196:116316. DOI: 10.1016/j.chaos.2025.116316.
10. Binczak S, Kazantsev VB, Nekorkin VI, Bilbault JM. Experimental study of bifurcations in modified FitzHugh–Nagumo cell. *Electronics Letters.* 2003;39(13):961–962. DOI: 10.1049/el:20030657.
11. Binczak S, Jacquir S, Bilbault JM, Kazantsev VB, Nekorkin VI. Experimental study of electrical FitzHugh–Nagumo neurons with modified excitability. *Neural Netw.* 2006;19(5):684–693. DOI: 10.1016/j.neunet.2005.07.011.
12. Madec M, Lallement C, Haiech J. Modeling and simulation of biological systems using SPICE language. *PLoS ONE.* 2017;12(8):e0182385. DOI: 10.1371/journal.pone.0182385.
13. Brinson ME, Kuznetsov VV. Extended behavioural device modelling and circuit simulation with Qucs-S. *International Journal of Electronics.* 2018;105(3):412–425. DOI: 10.1080/00207217.2017.1357764.
14. Kozachenko LF, Leonenko NN. Sample estimate of the entropy of a random vector. *Problems of Information Transmission.* 1987;23(2):95–101.
15. Kraskov A, Stögbauer H, Grassberger P. Estimating mutual information. *Phys. Rev. E.* 2004;69(6):66–138. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.066138.
16. Sysoev IV. Comparison of numerical realisation of algorithm of mutual information calculation based on nearest neighbours. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2016;24(4):86–95. DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-86-95.
17. Virtanen P, Gommers R, Oliphant TE, Haberland M, Reddy T, Cournapeau D, Burovski E, Peterson P, Weckesser W, Bright J, van der Walt SJ, Brett M, Wilson J, Millman KJ, Mayorov N, Nelson ARJ, Jones E, Kern R, Larson E, Carey CJ, Polat İ, Feng Y, Moore EW, VanderPlas J. *SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python.* *Nat. Methods.* 2020;17(3):261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
18. Kuznetsov SP. Electronic circuits manifesting hyperbolic chaos and simulation of their dynamics

- using software package multisim. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2011;19(5): 98–115. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-5-98-115.
19. Kuznetsov SP. Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM. *Chaos*. 2011;21(4):043105. DOI: 10.1063/1.3646903.
 20. Kuznetsov SP. Simple electronic chaos generators and their circuit simulation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(3):35–61. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-35-61.
 21. Kuznetsov NV, Leonov GA, Yuldashev MV, Yuldashev RV. Nonlinear analysis of classical phase-locked loops in signal's phase space. *IFAC Proceedings Volumes*. 2014;47(3):8253–8258. DOI: 10.3182/20140824-6-ZA-1003.02772.



Такашвили Лев Вячеславович — родился в Саратове (1998). Окончил МОУ СОШ № 77 (Саратов, 2016), бакалавриат факультета нано- и биомедицинских технологий (2020) и магистратуру Института физики (2022) Саратовского государственного университета. Аспирант и ассистент факультета компьютерных наук и информационных технологий СГУ имени Н. Г. Чернышевского. Инженер Института физики и математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Научные интересы — радиофизические модели биологических нейронов. Автор 5 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
 E-mail: nar7187@yandex.ru
 ORCID: 0009-0006-7860-7883
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1230857



Гриценко Анастасия Александровна — родилась в 1996 году в Ленинградской области. Окончила бакалавриат (2018) и магистратуру (2020) факультета нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета. Защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 2024) по специальностям «Радиофизика» и «Биофизика». Доцент Института физики и математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Автор 11 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
 E-mail: vili_von@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-1707-7317
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1073519



Сысоева Марина Вячеславовна — родилась в Саратове (1987). Бакалавр (2009, СГУ) и магистр (2011, СГУ) техники и технологии по направлению «Биомедицинская инженерия». Защитила диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальностям «Биофизика» и «Радиофизика» (2015, СГУ) и на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальностям «Радиофизика» и «Биофизика» (2023, СГТУ). Имеет учёное звание доцента по специальности «Радиофизика» (2021, СГТУ). Профессор кафедры физики СПбПУ. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, радиотехническое моделирование. Автор 49 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
 E-mail: bobrichkek@mail.ru
 ORCID: 0000-0003-4228-9124
 AuthorID (eLibrary.Ru): 651344

Такашвили Л. В., Гриценко А. А., Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Сысоев И. В.
 Известия вузов. ПНД, 2026, т. 34, № 2

Пономаренко Владимир Иванович — родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ имени Н. Г. Чернышевского. Область научных интересов: нелинейная динамика, системы с запаздыванием, синхронизация, моделирование биологических систем. Автор более 220 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
имени В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1579-6465
AuthorID (eLibrary.Ru): 39986

Сысоев Илья Вячеславович — родился в Саратове (1983). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по специальности «Физика» (2004, СГУ). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007, СГУ) и доктора физико-математических наук (2019, ИРЭ) по специальности «Радиофизика». Имеет учёное звание профессора по специальности «Радиофизика» (2024, СГУ). Заведующий кафедрой высшей математики СПбПУ, профессор кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ. Научные интересы — исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор более 100 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.



Россия, 195251 Санкт-Петербург, Политехническая, 29
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ivssci@gmail.com
ORCID: 0000-0002-9203-5504
AuthorID (eLibrary.Ru): 128457



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2)

Научная статья
УДК 57.024

DOI: 10.18500/0869-6632-003204
EDN: OYKENL

Исследование двухпороговой модификации биоморфной системы навигации

Ю. А. Малышев¹✉, С. А. Лобов^{1,2,3}, В. Г. Яхно^{1,2}

¹ФИЦ Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

²Нижегородский национальный исследовательский университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

³Московский физико-технический институт, Россия

E-mail: ✉u.malishev@ipfran.ru, lobov@neuro.nnov.ru, yakhno@ipfran.ru

Поступила в редакцию 11.10.2025, принята к публикации 25.11.2025,
опубликована онлайн 9.12.2025, опубликована 31.03.2026

Аннотация. Цель настоящей работы состоит в реализации и изучении динамики функционирования двухпорогового варианта биорелевантной системы визуальной навигации. **Методы.** В работе используются система одновременной навигации и составления карты RatSLAM. Система RatSLAM является биорелевантной моделью визуальной навигации в гиппокампе грызунов. В данной работе исследуется модифицированная версия системы RatSLAM, в которой обработка визуальных ориентиров ведется по двухпороговому алгоритму. **Результаты.** В статье представлена версия модифицированной системы визуальной навигации. Применение двухпорогового алгоритма распознавания визуальных ориентиров позволяет уменьшить размер получаемой карты без существенных потерь в точности получаемой карты. С помощью построенной системы были получены оценки местоположения и метрики кластеризации визуальных ориентиров на публичных наборах данных. **Заключение.** Построенная система визуальной навигации дает оценку местоположения субъекта (видеокамеры) в пространстве, хорошо согласующуюся с истинными данными о местоположении. Размер карты при использовании двухпорогового алгоритма может быть уменьшен без существенного уменьшения точности карты.

Ключевые слова: системы одновременной локализации и картирования, интегрирование траектории, ориентиры, нейронные сети, кластеризация.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (проекты № FFUF-2024-0037 — разработка системы, FSMG-2024-0047 — исследование кластеризации).

Для цитирования: Малышев Ю. А., Лобов С. А., Яхно В. Г. Исследование двухпороговой модификации биоморфной системы навигации // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 2. С. 314–330. DOI: 10.18500/0869-6632-003204. EDN: OYKENL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Study of a two-threshold modification of a biomorphic navigation system

Y. A. Malichev¹✉, S. A. Lobov^{1,2,3}, V. G. Yakhno^{1,2}

¹A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

³Moscow Institute of Physics and Technology, Russia

E-mail: ✉u.malichev@ipfran.ru, lobov@neuro.nnov.ru, yakhno@ipfran.ru

Received 11.10.2025, accepted 25.11.2025, available online 9.12.2025, published 31.03.2026

Abstract. The purpose of this work is to implement and study the dynamics of a modified version of a biomorphic visual navigation system. *Methods.* The paper uses the RatSLAM simultaneous navigation and mapping system. The RatSLAM system is a biomorphic model of visual navigation in the rodent hippocampus. In this study, we investigate a modified version of the RatSLAM system in which visual landmarks are processed using a two-threshold algorithm. *Results.* This article presents a modified version of the visual navigation system. Using a two-threshold algorithm for determining visual landmarks allows for a reduction in the size of the resulting map without loss of accuracy. Using the constructed system, location estimates and clustering metrics for visual landmarks were obtained on publicly available datasets. *Conclusion.* The constructed visual navigation system provides an estimate of the location of an object (video camera) in space that is in good agreement with the true location data. Using a two-threshold algorithm, the map size can be reduced without increasing map accuracy.

Keywords: simultaneous localization and mapping systems, integration paths, landmarks, neural networks, clustering.

Acknowledgements. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under a state assignment (Project Nos. FFUF-2024-0037 – system development, FSMG-2024-0047 – research of clustering).

For citation: Malichev YA, Lobov SA, Yakhno VG. Study of a two-threshold modification of a biomorphic navigation system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(2):314–330. DOI: 10.18500/0869-6632-003204

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Навигация в пространстве необходима для животных и человека. Для изучения навигации живых систем используется в том числе построение и изучение их вычислительных моделей. Одной из подобных моделей является RatSLAM [1, 2], основанная на представлениях о навигационных процессах в мозге грызунов. Данная система является биологически релевантным алгоритмом, для которого биологическое соответствие важнее метрической точности. Подобные модели позволяют существенно уменьшить требования к вычислительным ресурсам, особенно при применении нейроморфных аппаратных вычислительных модулей [3]. Также преимуществом биологически релевантных моделей является легкость добавления и изменения модальностей системы [4].

Одним из главных элементов алгоритмов SLAM (одновременного определения местоположения и составления карты) и алгоритма RatSLAM является механизм замыкания петель, позволяющий сбросить накопленную ошибку интегрирования пути при попадании в известную точку пространства. Данный механизм связан с задачей распознавания мест (place recognition), то есть с распознаванием текущего местоположения как одного из известных. Распознавание выполняется на основе данных различных сенсоров, установленных на объекте. Часто в качестве входных данных используется изображение с видеокамеры.

Традиционно к данной задаче подходят как к поиску в базе данных изображений, наиболее близких в пространстве к запрошенному. Ключевым вопросом является составление такого описания изображения, чтобы изображения со схожими описаниями были получены в близких точках пространства, и наоборот.

Возможно использование различных типов описаний изображений, таких как непосредственно пиксельные данные изображения, наборы ключевых точек на изображении [5], выходные значения искусственных нейронных сетей различной архитектуры [6], а также комбинации данных методов [7]. В алгоритме RatSLAM в качестве описания изображений используются пиксельные данные сжатого изображения. Однако для всех видов описаний с увеличением известной области пространства происходит увеличение и количества изображений в базе данных, что приводит к увеличению требуемого объема памяти и вычислительных ресурсов.

В алгоритме RatSLAM данная проблема решается путем сохранения в базе данных только наиболее значимых изображений. Данный алгоритм не зависит от источника описаний изображений и может быть использован с более современными описаниями, такими как NetVLAD [6].

Квантование пространства для распознавания отдельных областей проводилось также в [8], однако там выполнялась классификация изображений по известным классам мест, а в RatSLAM выполняется кластеризация в процессе работы системы.

Однако возможно дополнительно улучшить размер карты и стабильность функционирования системы RatSLAM путем оптимизации модуля распознавания визуальных ориентиров и сокращения количества создаваемых визуальных ориентиров на траектории. Данная работа является развитием исследований [9].

1. Техническая реализация системы визуальной навигации

Система состоит из трех основных модулей: клеток позы, клеток локального вида и карты опыта, также возможно добавление четвертого модуля — визуальной одометрии (рис. 1). Модуль визуальной одометрии принимает на вход изображения входного видеопотока и определяет скорость движения робота в пространстве. Модуль клеток позы выполняет интегрирование пути и замыкание петель. Модуль карты опыта сохраняет граф известных уникальных точек пространства в метрическом пространстве. Модуль визуальных ориентиров поддерживает коллекцию визуальных ориентиров и выполняет их распознавание.

В данной работе основное внимание направлено на модуль визуальных ориентиров.

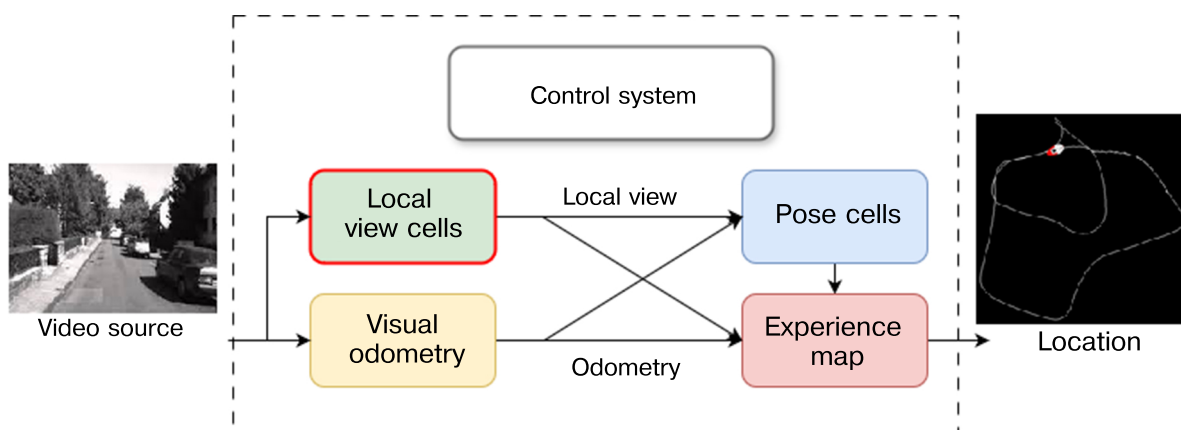


Рис. 1. Структура системы OpenRatSLAM [2]. Если одометрия уже предоставлена набором данных или роботом, модуль визуальной одометрии не требуется

Fig. 1. Structure of OpenRatSLAM [2]. If odometry is already provided by the dataset or robot, the Visual Odometry node is not required

1.1. Модуль визуальных ориентиров. Модуль визуальных ориентиров принимает на вход данные изображений входного видеопотока. Выходными данными модуля является текущий распознанный визуальный ориентир.

Визуальные ориентиры представляют собой расширяемый массив блоков, каждый из которых соответствует отдельной визуальной сцене в окружающей среде. При появлении новой визуальной сцены создается новый визуальный ориентир, который ассоциируется с пиксельными данными этой сцены.

После предварительной обработки изображения видеопотока (удаления неинформативных областей кадра, нормализации яркостей, перевода в монохромный вид и сжатия) модуль визуальных ориентиров сравнивает полученный визуальный шаблон, представляющий текущее изображение с камеры, со всеми ранее изученными шаблонами визуальных ориентиров. Для этого вычисляется мера сходства на основе суммы абсолютных разностей (SAD) между текущим визуальным шаблоном p и каждым ранее изученным шаблоном визуального ориентира p^j :

$$d(p, p^j) = \frac{1}{s} \|p, p^j\|_1 = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} |p_x, p_x^j|, \quad (1)$$

где s — размер визуального шаблона. Далее определяется самый ближний шаблон визуального ориентира:

$$b = \arg \min_{0 \leq j < n} d(j), \quad (2)$$

где n — количество известных визуальных шаблонов. Если наименьшая разница меньше порогового значения s_{th} , то выбирается соответствующий имеющийся шаблон ($m = 1$). В противном случае ($m = 0$) текущий визуальный шаблон добавляется в базу данных шаблонов

$$m = \begin{cases} 1, & d(b) \leq s_{th}, \\ 0, & d(b) > s_{th}. \end{cases} \quad (3)$$

Модуль визуальных ориентиров сравнивает текущий вид со всеми сохраненными шаблонами видов, чтобы найти наилучшее соответствие. Сравнение производится при сдвиге текущего вида и шаблонов визуальных ориентиров относительно друг друга. Результатом является текущий активный визуальный ориентир.

Для камер, направленных вперед, процесс сравнения позволяет справиться с небольшими вращательными смещениями путем нахождения минимального SAD при смещении сохраненных шаблонов относительно текущего вида в горизонтальном направлении на заданную величину.

1.2. Алгоритм кластеризации локальных видов. Модуль визуальных ориентиров содержит расширяемую коллекцию изображений — шаблонов визуальных ориентиров. Новый визуальный ориентир формируется, если входное изображение существенно отличается по значению метрики от всех известных ориентиров. Таким образом, можно считать, что данный модуль выполняет задачу кластеризации входных изображений в пространстве интенсивностей всех пикселей изображения. Данный метод кластеризации можно отнести к иерархическим методам непрерывной кластеризации с фиксированным порогом [10]. Центрами кластеров являются визуальные ориентиры, расстояние между центрами кластеров и размер (радиус) кластера соответствует пороговому значению метрики схожести изображений. Распознавание входного изображения как одного из визуальных ориентиров аналогично попаданию точки в пространстве интенсивности пикселей, соответствующей данному изображению, в соответствующий кластер визуального ориентира. Поскольку в качестве меры используется SAD (сумма абсолютных разностей интенсивности пикселей), это соответствует Манхэттенскому расстоянию [11] в пространстве

интенсивности пикселей. Расстояние городских кварталов d_1 между двумя векторами \mathbf{p}, \mathbf{q} в n -мерном вещественном векторном пространстве с заданной системой координат определено как сумма длин проекций отрезка между точками на оси координат

$$d_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \|\mathbf{p}, \mathbf{q}\|_1 = \sum_{i=1}^N |p_i - q_i|. \quad (4)$$

Таким образом, кластеры имеют форму n -ромбов. В случае когда размер (радиус) кластера равен расстоянию между центрами кластеров, имеет место существенное наложение кластеров. Однако поскольку алгоритм определения визуальных ориентиров выполняется последовательно по всем локальным видам в хронологическом порядке и при попадании в кластер любого из визуальных ориентиров перебор прекращается, то при попадании входного изображения в область, принадлежащую нескольким кластерам, оно распознается как хронологически первый визуальный ориентир, в кластере которого находится изображение. Таким образом, кластеры более поздних визуальных ориентиров представляют собой многомерные ромбы вокруг точки локального вида за вычетом пространства, занятого более ранними кластерами. Таким образом, кластеры получаются различных размеров: самый первый и достаточно удаленные друг от друга кластеры — полноценные многомерные ромбы, все остальные — «добавки» на их границах. При этом введение различия между размером (радиусом) кластера, соответствующего порогу распознавания визуальных ориентиров, и расстоянием между кластерами, соответствующего порогу создания новых визуальных ориентиров, в случае, если порог распознавания ниже порога создания, должно обеспечить более равномерную кластеризацию.

1.3. Двухпороговый алгоритм определения визуальных ориентиров. Модификация относится к модулю определения ориентиров. Данный модуль поддерживает коллекцию визуальных ориентиров — изображений ориентиров. При получении на вход нового изображения из видеопотока система принимает решение о создании нового ориентира или о распознавании одного из знакомых ориентиров (из коллекции). Решение принимается на основе значения метрики несоответствия нового изображения и всех изображений в коллекции. Если наименьшая разница значения метрики меньше порогового значения s_{th} , то выбирается соответствующий имеющийся шаблон ($m = 1$). В противном случае ($m = 0$) текущий визуальный шаблон добавляется в базу данных шаблонов согласно (1), (2), (3). Предложенная ранее система принимает решение о создании нового и о распознавании известного ориентира на основании превышения одного и того же порога значения метрики несоответствия. То есть при предъявлении нового изображения система либо распознает его как один из известных ориентиров, либо определяет как новый ориентир. Такой подход имеет недостаток в том, что при входном изображении на границе кластеров соседних ориентиров возможно постоянное перескакивание между двумя ориентирами. Это приводит к ложному определению ориентиров и, соответственно, местоположения. Поэтому было предложено разделить процессы создания и распознавания ориентиров. Создание ориентиров выполняется по более высокому значению порога метрики несоответствия s_c , что дает лучше разделяющиеся кластеры (более различающиеся ориентеры). Распознавание происходит с меньшим значением порога s_m , то есть только изображения, действительно похожие на ориентир, распознаются как этот ориентир. Это создает зоны на границах кластеров, в которых не происходит распознавания каких-либо ориентиров. То есть при получении нового изображения система может либо распознать его как имеющийся ориентир ($m = 1$), либо сохранить его как новый ориентир ($m = 0$), либо не предпринимать никаких действий ($m = -1$)

$$m = \begin{cases} 1 & d(b) \leq s_m, \\ -1 & s_m < d(b) < s_c, \\ 0 & d(b) \geq s_c. \end{cases} \quad (5)$$

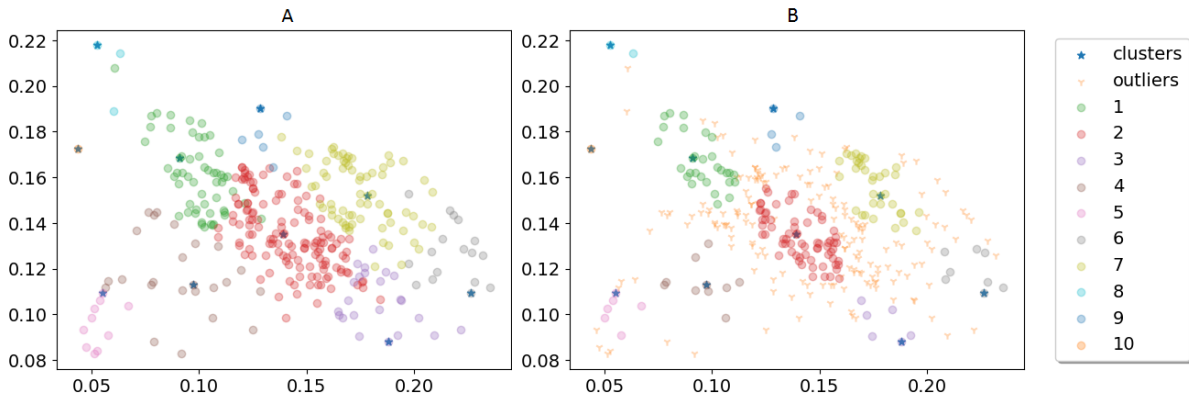


Рис. 2. Кластеризация визуальных ориентиров. (А) исходный алгоритм ($s_{th} = 0.09$), (В) модифицированный алгоритм ($s_c = 0.09, s_m = 0.04$). Знаками (*) показаны центры кластеров, (+) — выбросы (цвет онлайн)

Fig. 2. Clustering of visual landmarks. (A) original algorithm ($s_{th} = 0.09$), (B) modified algorithm ($s_c = 0.09, s_m = 0.04$). Cluster centroids are marked with (*), and outliers with (+) (color online)

Это позволило существенно повысить пороги создания новых ориентиров и, соответственно, уменьшить их количество в несколько раз без существенных потерь в точности карты, что приводит к уменьшению требуемых для работы системы памяти и вычислительных ресурсов.

Данный механизм кластеризации иллюстрирует рис. 2, на котором приведены результаты кластеризации визуальных ориентиров в видеопотоке «Kitti-00» в течение 120 секунд. Для удобства визуализации было выбрано разрешение ориентиров 3x1, то есть три точки в ширину и одна в высоту. Пространство признаков в таком случае получается двухмерным, так как производится нормализация значений интенсивности пикселей.

2. Тестирование разработанной системы

Для тестирования систем SLAM используются наборы данных сенсоров, полученных с объектов, движущихся в пространстве. Системы принимают на вход данные сенсоров и строят собственную оценку траектории движения объекта и карты местности, и далее производится сравнение оценки траектории, полученной в результате работы системы, с истинной траекторией.

В качестве метрики для сравнения траекторий в данной работе применяется средняя абсолютная ошибка определения местоположения [12]. Абсолютная ошибка траектории (ATE — Absolute Trajectory Error) оценивается путем сравнения абсолютных расстояний между расчетной и истинной траекторией.

В работе применяется монокулярная визуальная одометрия. При этом размеры получаемой траектории выполнены в относительном масштабе.

2.1. Методы оценки кластеризации. Для оценки качества кластеризации в данной работе выбраны такие метрики, как количество объектов в кластере, межкластерное расстояние, диаметр кластера, расстояние между центроидами кластеров и метрика индекса Данна [13]. В качестве метрики расстояния также используется Манхэттенское расстояние.

Межкластерное расстояние δ (оценка разделения) определяется как минимальное расстояние между точкой, принадлежащей данному кластеру, и точкой другого кластера:

$$\delta(c_k, c_l) = \min_{x_i \in c_k, x_j \in c_l} \|x_i - x_j\|. \quad (6)$$

Диаметр кластера $\Delta(c_k)$ (оценка сплоченности) определяется как максимальное расстояние между точками одного кластера:

$$\Delta(c_k) = \max_{x_i, x_j \in c_k} \|x_i - x_j\|. \quad (7)$$

Поскольку в применяемом методе кластеризации центры кластеров жестко заданы и не изменяются с момента образования кластера, целесообразно в качестве меры сплоченности использовать радиус кластера, максимальное расстояние от центра кластера до объекта, принадлежащего данному кластеру:

$$\Delta_1(c_k) = \max_{x_i \in c_k} \|x_i - c_k\|. \quad (8)$$

Расстояние между кластерами определяется как расстояние между центрами кластеров:

$$\delta^4(c_k, c_l) = \|\bar{c}_k - \bar{c}_l\|. \quad (9)$$

В качестве метрики выбрана модифицированная версия индекса Данна [14],

$$D(C) = \frac{\min_{c_k \in C} \{\min_{c_l \in C \setminus c_k} \{\delta(c_k, c_l)\}\}}{\max_{c_k \in C} \{\Delta_1(c_k)\}}. \quad (10)$$

Большие величины индекса Данна соответствуют лучшей кластеризации.

2.2. Используемые для тестирования наборы данных. В качестве набора данных в данной работе используется публичный набор данных KITTI, последовательности 00 и 02 [15], а также набор данных TUM RGB-D, последовательность fr2/pioneer_slam [12]. Наборы данных содержат кадры видеопотока, а также истинные траектории.

Результаты и их обсуждение

2.3. Метрики определения траектории. При проверке работы системы на используемых наборах данных были получены метрики, представленные в табл. 1.

На рис. 3 приведено распределение средней абсолютной ошибки локализации (нормирована на максимальную ошибку, показана цветом) на соответствующей траектории при различных величинах порогов создания (ось ординат) и распознавания (ось абсцисс) ориентиров.

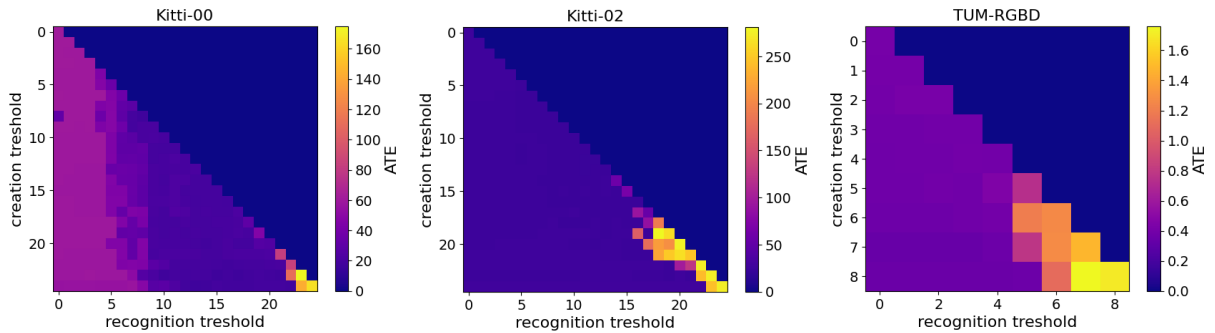


Рис. 3. Распределение средней абсолютной ошибки локализации на траекториях при различных величинах порогов создания s_c (ось ординат) и распознавания s_m (ось абсцисс) ориентиров (цвет онлайн)

Fig. 3. Average absolute trajectory error distribution on trajectories for different thresholds for creating s_c (Y axis) and recognizing s_m (X axis) landmarks (color online)

Таблица 1. Метрики работы систем (м)

Table 1. Model performance metrics (m)

Последовательность	Метрики	Параметры	Система	
			RatSLAM	
			Один порог	Два порога
Kitti-00 один порог: $s_{th} = 0.075$ два порога: $s_{th} = 0.15$ $s_m = 0.085$	ATE	Max	37.487	44.949
		Mean	18.765	18.266
		Median	19.162	16.389
	Количество визуальных ориентиров	2456	646	
	Размер карты, МБ	4.73	1.01	
Kitti-02 один порог: $s_{th} = 0.075$ два порога: $s_{th} = 0.15$ $s_m = 0.085$	ATE	Max	122.099	121.101
		Mean	24.279	25.489
		Median	22.234	24.293
	Количество визуальных ориентиров	2503	556	
	Размер карты, МБ	5.36	2.03	
TUM fr2/pioneer_slam один порог: $s_{th} = 0.03$ два порога: $s_{th} = 0.05$ $s_m = 0.03$	ATE	Max	0.734	0.783
		Mean	0.385	0.393
		Median	0.382	0.354
	Количество визуальных ориентиров	326	149	
	Размер карты, КБ	861.3	406.1	

На главной диагонали представлен случай оригинальной системы, в которой пороги равны. Можно видеть, что на больших значениях порогов происходит резкий рост ошибки, связанный с ошибочным распознаванием ориентиров. При этом при уходе с главной диагонали в сторону меньших абсцисс (порог распознавания меньше порога создания) восстанавливаются небольшие значения ошибок.

На рис. 4 представлен график — срез графика на рис. 3 по главной диагонали (синий график, соответствует оригинальной системе), а также со сдвигом на 4 значения влево от главной диагонали (оранжевый график), но по оси абсцисс приведено количество ориентиров, созданных на траектории.

По оси ординат представлена величина средней абсолютной ошибки локализации. Рост ошибки на траектории Kitti-00 для оригинальной системы начинается при количестве ориентиров

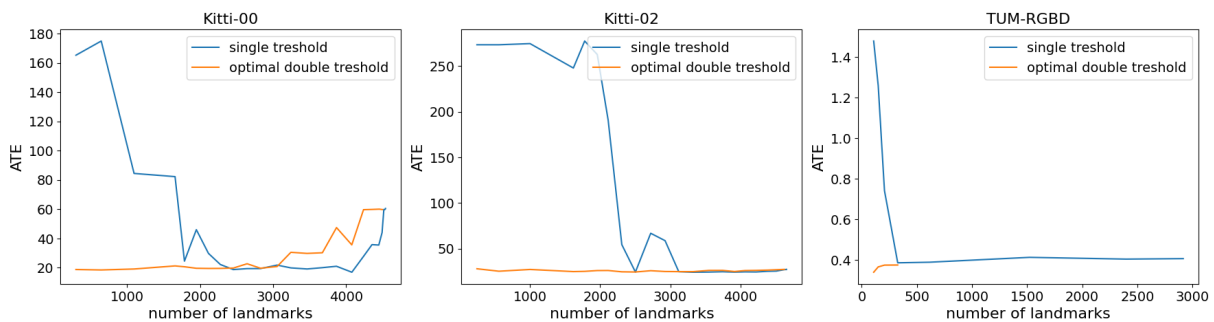


Рис. 4. Зависимость средней абсолютной ошибки локализации от количества сохраненных визуальных ориентиров на траекториях (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of the average absolute localization error on the number of stored visual landmarks on the trajectories (color online)

менее 2000, для системы с двумя порогами нарастание ошибки начинается при количестве менее 300.

Далее приведены визуализации траекторий, полученных в результате тестирования. Пунктирные линии — истинные траектории, цветные линии — оценка траекторий в результате работы системы, цветом представлена величина отклонения оценки от истинной траектории.

На рис. 5-I представлен пример работы системы с одинаковыми низкими порогами (0.01). Здесь почти на каждое изображение создается свой ориентир, и потому замыканий петель

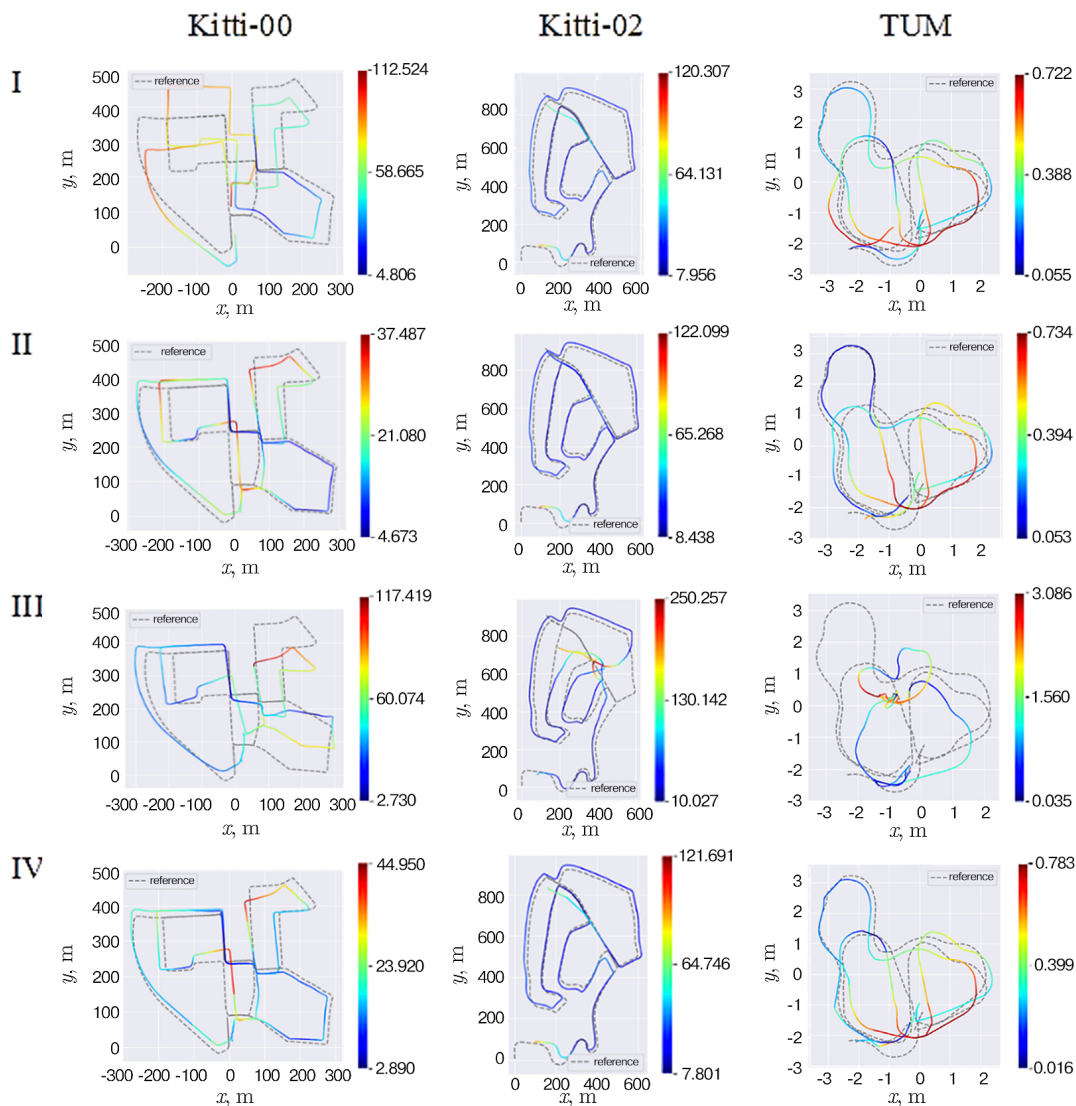


Рис. 5. Визуализации траекторий оригинальной и модифицированной систем на траекториях Kitti 00.02 и TUM. Приведены графики распределения средней абсолютной ошибки локализации при различных величинах порогов создания и распознавания ориентиров. s_c — порог создания ориентиров, s_m — порог распознавания. Kitti: (I) $s_c = 0.01$, $s_m = 0.01$ (II) $s_c = 0.075$, $s_m = 0.075$ (III) $s_c = 0.09$, $s_m = 0.09$ (IV) $s_c = 0.15$, $s_m = 0.08$. TUM: (I) $s_c = 0.01$, $s_m = 0.01$ (II) $s_c = 0.03$, $s_m = 0.03$ (III) $s_c = 0.05$, $s_m = 0.05$ (IV) $s_c = 0.05$, $s_m = 0.03$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Visualizations of the trajectories of the original and modified systems on the Kitti 00.02 and TUM trajectories. Graphs of the distribution of the average absolute localization error for different values of the landmark creation and recognition thresholds are shown. s_c is the landmark creation threshold, s_m is the recognition threshold. Kitti: (I) $s_c = 0.01$, $s_m = 0.01$ (II) $s_c = 0.075$, $s_m = 0.075$ (III) $s_c = 0.09$, $s_m = 0.09$ (IV) $s_c = 0.15$, $s_m = 0.08$. TUM: (I) $s_c = 0.01$, $s_m = 0.01$ (II) $s_c = 0.03$, $s_m = 0.03$ (III) $s_c = 0.05$, $s_m = 0.05$ (IV) $s_c = 0.05$, $s_m = 0.03$ (color online)

(изменения местоположения при определении известных ориентиров) почти не происходит. Величина ошибки соответствует интегрированию скорости (одометрии).

На рис. 5-II представлен пример работы системы с одинаковыми критическими порогами (0.075). Идеальный случай для оригинальной системы, выполняются все возможные замыкания петель.

На рис. 5-III представлен пример работы системы с одинаковыми закритическими порогами (0.09). При поднятии порога выше критического начинаются ложные замыкания петель. Величина ошибки начинает расти. При дальнейшем увеличении порога величина ошибки начинает быстро расти, теряется топологическое подобие карты и реального пространства.

На рис. 5-IV представлен график для идеального варианта в двухпороговой системе. Порог создания ориентиров — 0.15 (больше, чем тот, при котором «портится» карта для оригинальной системы), порог распознавания — 0.085. Величина ошибки слабо отличается от идеального однопорогового случая, однако количество необходимых ориентиров меньше в несколько раз.

В случае излишне низкого порога распознавания ориентиров в двухпороговой схеме распознавания ориентиров редки, поэтому замыкания петель не происходит, и карта соответствует интегрированию траектории.

Основной особенностью наборов данных Kitti-02 и TUM является малое число возможных замыканий петель и высокое качество одометрии без использования визуальных ориентиров. Благодаря этому влияние замыканий петель на величину ошибки мало. Однако остается рост ошибки определения местоположения при повышении порогов определения визуальных ориентиров, вызванный ошибочными замыканиями петель. Таким образом, при малых порогах величина ошибки практически постоянна.

2.4. Метрики кластеризации. При тестировании системы на наборе данных «KITTI-00» были получены метрики кластеризации визуальных ориентиров. Для системы с одним порогом использовался порог $s_{th} = 0.15$, для системы с двумя порогами порог создания ориентиров — $s_c = 0.15$, порог распознавания — $s_m = 0.085$. На рис. 6 представлены гистограммы распределения кластеров по количеству содержащихся в них визуальных ориентиров. Справа приведены результаты для оригинальной однопороговой системы, слева — для модифицированной системы с двумя порогами. Из рисунка можно видеть, что для системы с одним порогом общее количество объектов в кластерах, а также среднее количество объектов в одном кластере выше, чем в системе с двумя порогами. Это связано с тем, что в двухпороговой системе существуют визуальные ориентиры, не попадающие ни в один кластер, что вызывает уменьшение суммарного количества визуальных ориентиров в кластерах, а также с тем, что в двухпороговой системе в один кластер попадают действительно близкие визуальные ориентиры, что вызывает уменьшение среднего количества визуальных ориентиров в одном кластере.

Также были получены метрики минимального расстояния от центроида кластера до точек, принадлежащих другим кластерам. Распределение кластеров по значениям метрики также приведено на рис. 6. Из рисунка видно, что для системы с одним порогом среднее расстояние до точек соседнего кластера меньше расстояния между центроидами кластеров, соответствующего величине порога $s_{th} = 0.15$. Это связано с тем, что в системе с одним порогом кластеры могут пересекаться, при этом точки одного кластера могут практически касаться центроида другого кластера. Это приводит к неоднозначному распознаванию точек, находящихся в зоне пересечения кластеров, что, в свою очередь, приводит к нестабильному распознаванию визуальных ориентиров.

В системе с двумя порогами распознавания распределение смещено в сторону более дальних точек, основное количество кластеров имеет ближайшую точку соседнего кластера на расстоянии, сравнимом с величиной межкластерного расстояния $s_c = 0.15$. В этом случае

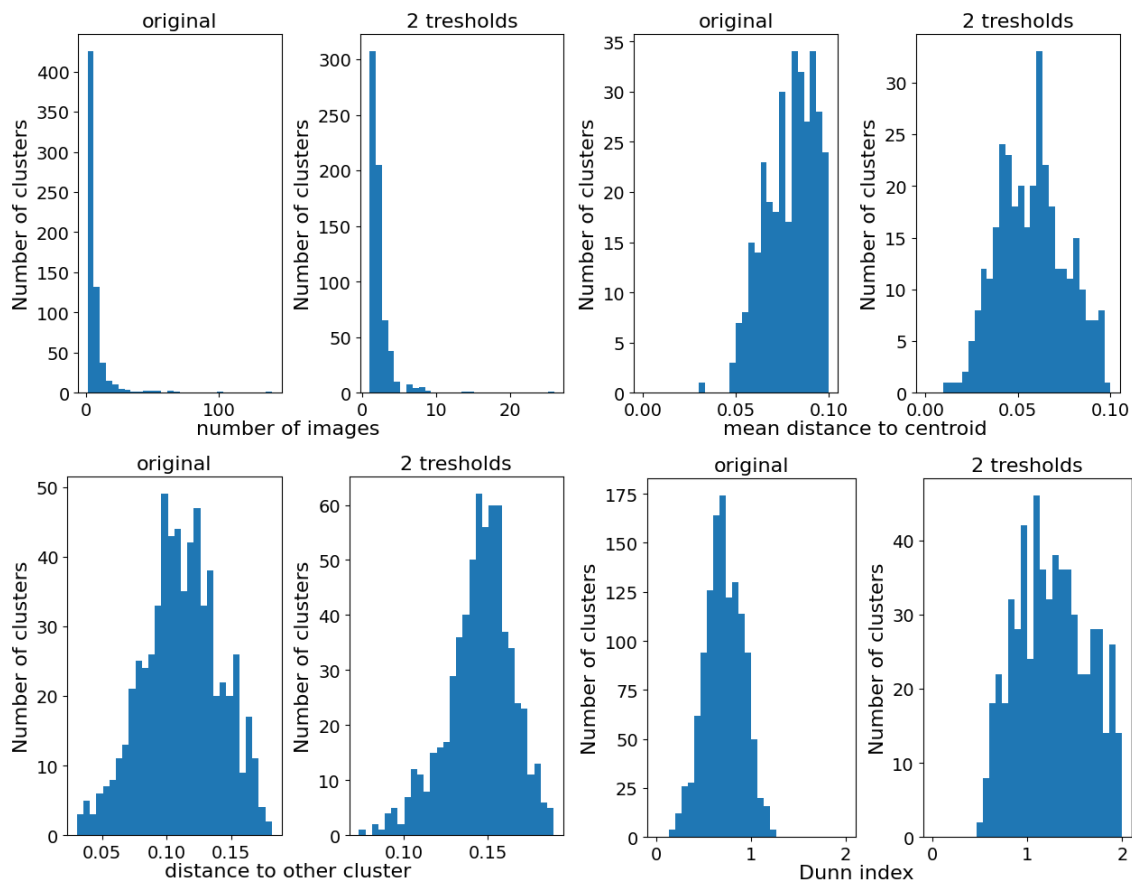


Рис. 6. Распределения кластеров в оригинальной и двухпороговой системе на наборе данных Kitti-00 по количеству точек, по расстоянию до точек других кластеров, по среднему расстоянию от центра кластера до точек кластера и по значению индекса Данна

Fig. 6. Distributions of clusters in the original and two-threshold systems on the Kitti-00 data set by the number of points, by the distance to points of other clusters, by the average distance from the cluster centroid to the cluster points, and by the Dunn index value

также существуют области пересечения кластеров (расстояния от 0.075 до 0.085), однако для подавляющего большинства кластеров не существует точек, попадающих в этот диапазон.

Также была получена метрика компактности кластеров — среднее расстояние от центра кластера до других точек кластера. Распределение кластеров по значениям метрики приведено на рис. 6. Из рисунка видно, что для системы с одним порогом среднее расстояние до центра кластера приблизительно в 2 раза меньше, чем для системы с двумя порогами. Таким образом, кластеры в двухпороговой системе более компактны.

Далее на основании метрик компактности и удаленности кластеров были вычислены индексы Данна для кластеров. Распределение кластеров по значениям метрики приведено на рис. 6. Из рисунка видно, что для системы с одним порогом основное количество кластеров имеет индекс Данна менее 1, что соответствует пересекающимся кластерам. Для системы с двумя порогами основное количество кластеров имеет значение данной метрики выше 1, что соответствует компактным удаленным кластерам. Таким образом, кластеризация в двухпороговой системе более эффективна. На рис. 7 приведены аналогичные графики для набора данных TUM. Данные графиков проявляют те же закономерности, что и в наборе данных Kitti-00.

Результаты тестирования систем приведены в табл. 2.

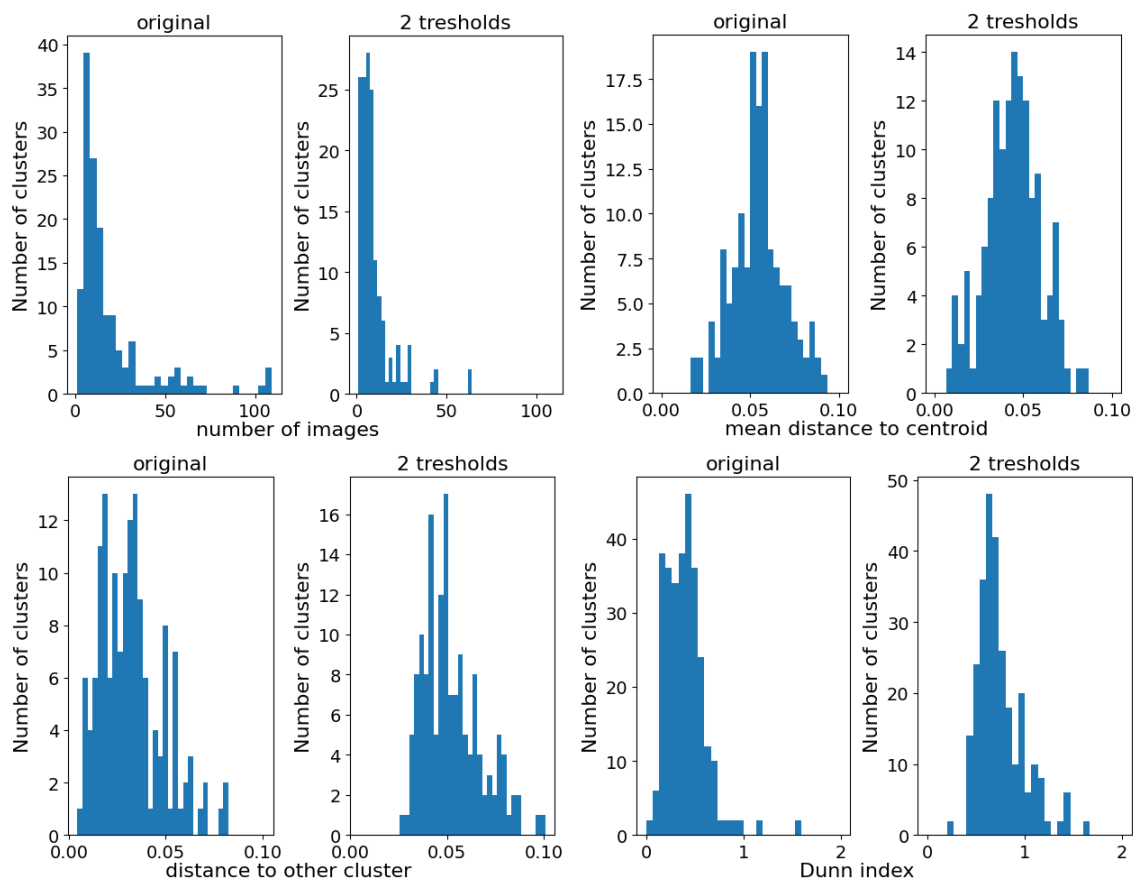


Рис. 7. Распределения кластеров в оригинальной и двухпороговой системе на наборе данных TUM по количеству точек, по расстоянию до точек других кластеров, по среднему расстоянию от центра кластера до точек кластера и по значению индекса Данна

Fig. 7. Distributions of clusters in the original and two-threshold systems on the TUM data set by the number of points, by the distance to points of other clusters, by the average distance from the cluster centroid to the cluster points, and by the Dunn index value

Таблица 2. Метрики кластеризации

Table 2. Clustering metrics

	Метрики	Система	
		Один порог	Два порога
Kitti-00	Количество объектов в кластере	7.01	2.01
	Средний радиус кластера	0.114	0.062
	Минимальное расстояние до точек соседнего кластера	0.111	0.145
	Индекс Данна	0.71	1.45
TUM	Количество объектов в кластере	19.45	9.84
	Средний радиус кластера	0.053	0.045
	Минимальное расстояние до точек соседнего кластера	0.032	0.052
	Индекс Данна	0.40	0.81

3. Обсуждение

Проведенное исследование посвящено разработке и всестороннему анализу модифицированного двухпорогового алгоритма для биоморфной системы навигации RatSLAM. Основная цель работы заключалась в оптимизации процесса кластеризации визуальных ориентиров для снижения вычислительной нагрузки и объема потребляемой памяти без существенной потери точности локализации.

Результаты экспериментальной оценки на стандартных наборах данных убедительно подтвердили эффективность предложенного подхода. Ключевым достижением является демонстрация того, что разделение общего порога распознавания визуальных ориентиров на два независимых — порог создания новых ориентиров и порог их распознавания — позволяет в несколько раз сократить общее количество формируемых визуальных шаблонов. Это сокращение напрямую ведет к значительному уменьшению финального размера карты местности. При этом, как показали метрики абсолютной ошибки траектории (АТЕ), точность оценки местоположения системы сохраняется на уровне, сопоставимом с исходным алгоритмом, а в некоторых сценариях даже улучшается за счет снижения количества ложных срабатываний при замыкании петель.

Глубокий анализ кластеризации с использованием метрик компактности (средний радиус кластера), делимости (минимальное расстояние до соседнего кластера) и обобщенного индекса Данна выявил качественное улучшение структуры данных. В двухпороговой системе кластеры становятся более компактными и лучше отделенными друг от друга, что проявляется в увеличении индекса Данна с 0.71 до 1.45 для KITTI-00 и с 0.40 до 0.81 для TUM. Это свидетельствует о более устойчивом и однозначном процессе распознавания, минимизирующем «перескакивание» между ориентирами на границах кластеров.

Несмотря на положительные результаты, важно отметить ряд ограничений и выявленных проблем. Во-первых, производительность системы в значительной степени зависит от ручного подбора оптимальных значений порогов, которые могут варьироваться в зависимости от характеристик окружающей среды (например, текстуры, освещенности) и параметров сенсора. Автоматизация или адаптивный подбор этих порогов является важной задачей для будущих исследований. Во-вторых, текущая реализация по-прежнему основана на низкоуровневых пиксельных признаках (SAD), что делает ее чувствительной к изменениям освещения, погодных условий и динамических объектов в кадре. В-третьих, в сценариях с очень бедной визуальной информацией или при длительном дрейфе без замыкания петель преимущества алгоритма могут быть нивелированы накоплением ошибки одометрии.

Перспективы дальнейшего развития работы видятся в нескольких направлениях. Прежде всего, это расширение мультимодальности системы за счет интеграции данных с дополнительных сенсоров (лидаров, IMU), что повысит робастность в разнообразных условиях. Во-вторых, целесообразна замена пиксельного сравнения на современные нейросетевые дескрипторы (например, по типу NetVLAD), которые обладают большей инвариантностью к изменениям внешнего вида сцены.

Ключевым шагом для перехода от лабораторных экспериментов к практическому применению является интеграция предложенных алгоритмов в полноценную робототехническую систему, способную ориентироваться в динамически меняющихся условиях. Многообещающим путем для достижения этой цели представляется объединение оптимизированного RatSLAM с моделью обобщенных когнитивных карт, предложенной группой В. А. Макарова [16, 17]. Данная модель продемонстрировала свою универсальность и эффективность как в задачах управления колесными роботами [17], так и в планировании движений для роботизированных манипуляторов [18]. Ее высокая биологическая релевантность, подтвержденная в том числе в психофизиологических экспериментах на человеке [19, 20], позволяет говорить о создании действительно биоинспирированной гибридной архитектуры.

Таким образом, полученная в будущем нейроморфная система может включать в себя предложенный двухпороговый модуль низкоуровневой навигации, связанный с ядром принятия решений более высокого уровня. В качестве такого ядра может выступить граф семантических когнитивных карт, как это предложено в работе [21], что позволит роботу не только ориентироваться в пространстве, но и понимать его семантику, адаптивно планируя свои действия в сложных, нестабильных и динамических средах.

Заключение

Предложен и реализован двухпороговый алгоритм определения визуальных ориентиров. Применение данного алгоритма позволяет уменьшить требуемый размер карты пространства без существенных потерь в точности получаемой карты. Предложенный алгоритм показал свою эффективность.

В дальнейшем планируется расширение набора модальностей сигналов, используемых при распознавании мест, а также разработка алгоритмов совместного использования сигналов различной модальности для улучшения стабильности системы. Кроме того, планируется внедрение более современных методов сравнения изображений на основе нейросетевых алгоритмов и интеграция предложенных алгоритмов в робототехническую систему, способную ориентироваться в динамически меняющихся условиях.

Список литературы

1. *Milford M. J.* Robot Navigation from Nature. Berlin: Springer, 2008. 196 p. DOI: 10.1007/978-3-540-77520-1.
2. *Ball D., Heath S., Wiles J., Wyeth G., Corke P., Milford M.* OpenRatSLAM: an open source brain-based SLAM system // *Auton. Robot.* 2013. Vol. 34. P. 149–176. DOI: 10.1007/s10514-012-9317-9.
3. *Hines A., Milford M., Fischer T.* A compact neuromorphic system for ultra-energy-efficient, on-device robot localization // *Sci. Robot.* 2025. Vol. 10, iss. 103. P. eads3968. DOI: 10.1126/scirobotics.ads3968.
4. *Milford M., Jacobson A.* Brain-inspired sensor fusion for navigating robots // In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation.* 2013, Karlsruhe, Germany. IEEE, 2013. P. 2906–2913. DOI: 10.1109/ICRA.2013.6630980.
5. *Campos C., Elvira R., Rodríguez J. J. G., Montiel J. M. M., Tardós J. D.* ORB-SLAM3: An Accurate Open-Source Library for Visual, Visual-Inertial, and Multimap SLAM // *IEEE Transactions on Robotics.* 2021. Vol. 37, no. 6. P. 1874–1890. DOI: 10.1109/TRO.2021.3075644.
6. *Arandjelovic R., Gronat P., Torii A., Pajdla T., Sivic J.* NetVLAD: CNN architecture for weakly supervised place recognition // In: *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR).* 2016, Las Vegas, NV, USA. IEEE, 2016. P. 5297–5307. DOI: 10.1109/CVPR.2016.572.
7. *Cao B., Araujo A., Sim J.* Unifying Deep Local and Global Features for image search // In: *European Conference on Computer Vision (ECCV) / Vedaldi A., Bischof H., Brox T., Frahm J. M. (eds) Cham: Springer,* 2020. P. 726–743. DOI: 10.1007/978-3-030-58565-5_43.
8. *Berton G., Trivigno G., Caputo B., Masone C.* EigenPlaces: Training Viewpoint Robust Models for Visual Place Recognition // In: *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision.* 2023, Paris, France. IEEE, 2023. P. 11046–11056. DOI: 10.1109/ICCV51070.2023.01017.
9. *Мальшев Ю. А., Яхно В. Г.* Версия биоморфной системы навигации // *Известия вузов. ПНД.* 2024. Т. 32, № 5. С. 606–624. DOI: 10.18500/0869-6632-003107.

10. *Mousavi M., Bakar A. A., Vakilian M.* Data stream clustering algorithms: A review // *Int. J. Adv. Soft Comput. Appl.* 2015. Vol. 7. P. 1–15.
11. *Yadav D. P., Kumar N. K., Sahani S. K.* Distance metrics for machine learning and it's relation with other distances // *Mikailalsys J. of Math. and Statistics.* 2023. Vol. 1, no. 1. P. 15–23. DOI: 10.58578/mjms.v1i1.1990.
12. *Sturm J., Engelhard N., Endres F., Burgard W., Cremers D.* A benchmark for the evaluation of RGB-D SLAM systems // In: 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2012. P. 573–580. DOI: 10.1109/IROS.2012.6385773.
13. *Dunn J. C.* A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters // *Journal of Cybernetics.* 1973. Vol. 3, no. 3. P. 32–57. DOI: 10.1080/01969727308546046.
14. *Bezdek J. C., Pal N. R.* Cluster validation with generalized Dunn's indices // In: Proceedings 1995 Second New Zealand International Two-Stream Conference on Artificial Neural Networks and Expert Systems. IEEE, 1995. P. 190–193. DOI: 10.1037/h0061626.
15. *Geiger A., Lenz P., Stiller C., Urtasun R.* Vision meets robotics: The kitti dataset // *The International Journal of Robotics Research.* 2013. Vol. 32, no. 11. P. 1231–1237. DOI: 10.1177/0278364913491297.
16. *Villacorta-Atienza J. A., Velarde M. G., Makarov V. A.* Compact internal representation of dynamic situations: neural network implementing the causality principle // *Biol. Cybern.* 2010. Vol. 103, no. 4. P. 285–297. DOI: 10.1007/s00422-010-0398-2.
17. *Villacorta-Atienza J. A., Makarov V. A.* Neural network architecture for cognitive navigation in dynamic environments // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems.* 2013. Vol. 24, no. 12. P. 2075–2087. DOI: 10.1109/TNNLS.2013.2271645.
18. *Villacorta-Atienza J. A., Calvo C., Lobov S., Makarov V. A.* Limb movement in dynamic situations based on generalized cognitive maps // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena.* 2017. Vol. 12, no. 4. P. 15–29. DOI: 10.1051/mmnp/201712403.
19. *Villacorta-Atienza J. A., Calvo C., Díez-Hermano S., Sánchez-Jiménez A., Lobov S., Krilova N., Murciano A., López-Tolsa G. E., Pellón R., Makarov V. A.* Static internal representation of dynamic situations reveals time compaction in human cognition // *Journal of Advanced Research.* 2021. Vol. 28. P. 111–125. DOI: 10.1016/j.jare.2020.08.008.
20. *Lobov S. A., Krilova N. P., Makarov V. A., Kurganov D. P., Makarova J.* Arcade game testing of generalized cognitive maps in humans // In: 2021 Third International Conference Neurotechnologies and Neurointerfaces (CNN). 2021, Kaliningrad, Russian Federation. IEEE, 2021. P. 61–63. DOI: 10.1109/CNN53494.2021.9580220.
21. *Calvo C., Villacorta-Atienza J. A., Díez-Hermano S., Khoruzhko M., Lobov S., Potapov I., Sánchez-Jiménez A., Makarov V. A.* Semantic knowledge representation for strategic interactions in dynamic situations // *Front. Neurobot.* 2020. Vol. 14. P. 4. DOI: 10.3389/fnbot.2020.00004.

References

1. Milford MJ. *Robot Navigation from Nature.* Berlin: Springer; 2008. 196 p. DOI: 10.1007/978-3-540-77520-1.
2. Ball D, Heath S, Wiles J, Wyeth G, Corke P, Milford M. OpenRatSLAM: an open source brain-based SLAM system. *Auton. Robot.* 2013;34:149–176. DOI: 10.1007/s10514-012-9317-9.
3. Hines A, Milford M, Fischer T. A compact neuromorphic system for ultra-energy-efficient, on-device robot localization. *Sci. Robot.* 2025;10(103):eads3968. DOI: 10.1126/scirobotics.ads3968.
4. Milford M, Jacobson A. Brain-inspired sensor fusion for navigating robots. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation.* 2013, Karlsruhe, Germany. IEEE; 2013. P. 2906–2913. DOI: 10.1109/ICRA.2013.6630980.

5. Campos C, Elvira R, Rodríguez JGG, Montiel JMM, Tardós JD. ORB-SLAM3: An Accurate Open-Source Library for Visual, Visual–Inertial, and Multimap SLAM. *IEEE Transactions on Robotics*. 2021;37(6):1874–1890. DOI: 10.1109/TRO.2021.3075644.
6. Arandjelovic R, Gronat P, Torii A, Pajdla T, Sivic J. NetVLAD: CNN architecture for weakly supervised place recognition. In: *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2016, Las Vegas, NV, USA. IEEE; 2016. P. 5297–5307. DOI: 10.1109/CVPR.2016.572.
7. Cao B, Araujo A, Sim J. Unifying Deep Local and Global Features for image search. In: Vedaldi A, Bischof H, Brox T, Frahm JM, editors. *European Conference on Computer Vision (ECCV)*. Cham: Springer; 2020. P. 726–743. DOI: 10.1007/978-3-030-58565-5_43.
8. Berton G, Trivigno G, Caputo B, Masone C. EigenPlaces: Training Viewpoint Robust Models for Visual Place Recognition. In: *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*. 2023, Paris, France. IEEE; 2023. P. 11046–11056. DOI: 10.1109/ICCV51070.2023.01017.
9. Malishev YA, Yakhno VG. Biomorphic navigation system version. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(5):606–624. DOI: 10.18500/0869-6632-003107.
10. Mousavi M, Bakar AA, Vakilian M. Data stream clustering algorithms: A review. *Int. J. Adv. Soft Comput. Appl.* 2015;7:1–15.
11. Yadav DP, Kumar NK, Sahani SK. Distance metrics for machine learning and it's relation with other distances. *Mikailalsys J. of Math. and Statistics*. 2023;1(1):15–23. DOI: 10.58578/mjms.v1i1.1990.
12. Sturm J, Engelhard N, Endres F, Burgard W, Cremers D. A benchmark for the evaluation of RGB-D SLAM systems. In: *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE; 2012. P. 573–580. DOI: 10.1109/IROS.2012.6385773.
13. Dunn JC. A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters. *Journal of Cybernetics*. 1973;3(3):32–57. DOI: 10.1080/01969727308546046.
14. Bezdek JC, Pal NR. Cluster validation with generalized Dunn's indices. In: *Proceedings 1995 Second New Zealand International Two-Stream Conference on Artificial Neural Networks and Expert Systems*. IEEE; 1995. P. 190–193. DOI: 10.1037/h0061626.
15. Geiger A, Lenz P, Stiller C, Urtasun R. Vision meets robotics: The kitti dataset. *The International Journal of Robotics Research*. 2013;32(11):1231–1237. DOI: 10.1177/0278364913491297.
16. Villacorta-Atienza JA, Velarde MG, Makarov VA. Compact internal representation of dynamic situations: neural network implementing the causality principle. *Biol. Cybern.* 2010;103(4):285–297. DOI: 10.1007/s00422-010-0398-2.
17. Villacorta-Atienza JA, Makarov VA. Neural network architecture for cognitive navigation in dynamic environments. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2013;24(12):2075–2087. DOI: 10.1109/TNNLS.2013.2271645.
18. Villacorta-Atienza JA, Calvo C, Lobov S, Makarov VA. Limb movement in dynamic situations based on generalized cognitive maps. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2017;12(4): 15–29. DOI: 10.1051/mmnp/201712403.
19. Villacorta-Atienza JA, Calvo C, Díez-Hermano S, Sánchez-Jiménez A, Lobov S, Krilova N, Murciano A, López-Tolsa GE, Pellón R, Makarov VA. Static internal representation of dynamic situations reveals time compaction in human cognition. *Journal of Advanced Research*. 2021;28: 111–125. DOI: 10.1016/j.jare.2020.08.008.
20. Lobov SA, Krilova NP, Makarov VA, Kurganov DP, Makarova J. Arcade game testing of generalized cognitive maps in humans. In: *2021 Third International Conference Neurotechnologies and Neurointerfaces (CNN)*. 2021, Kaliningrad, Russian Federation. IEEE; 2021. P. 61–63. DOI: 10.1109/CNN53494.2021.9580220.
21. Calvo C, Villacorta-Atienza JA, Díez-Hermano S, Khoruzhko M, Lobov S, Potapov I, Sánchez-Jiménez A, Makarov VA. Semantic knowledge representation for strategic interactions in dynamic situations. *Front. Neurobot.* 2020;14:4. DOI: 10.3389/fnbot.2020.00004.



Мальшев Юрий Александрович — родился в Тольятти (1999). Окончил с отличием факультет электроники и приборостроения Самарского государственного аэрокосмического университета по направлению «Биотехнические системы и технологии» (2021), факультет биологии и биомедицины Нижегородского государственного университета по направлению «Нейробиология» (2023). Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, компьютерное моделирование.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: smmalisheva@gmail.com
AuthorID (eLibrary.Ru): 1317706



Лобов Сергей Анатольевич — родился в Горьком (1974). Окончил ННГУ (1997), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук (2003, ННГУ). С 2003 по 2009 г. работал инженером-программистом. Старший научный сотрудник, доцент кафедры нейротехнологий Института биологии и биомедицины ННГУ. Научные интересы — нейронные сети, синаптическая пластичность и обучение, управляемые ЭМГ роботизированные устройства, интерфейсы «человек–компьютер». Имеет более 30 научных публикаций.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: lobov@neuro.nnov.ru
ORCID: 0000-0002-3689-6035
AuthorID (eLibrary.Ru): 195796



Яхно Владимир Григорьевич — родился в 1947 году. Доктор физико-математических наук. Заведующий лабораторией в Институте прикладной физики РАН (Нижний Новгород). Научные интересы связаны с исследованием процессов самоорганизации в распределенных неравновесных системах и применением автоволновых представлений для моделирования процессов обработки сенсорных сигналов, развития компьютерных алгоритмов кодирования сложных изображений (разработка биометрических систем); рассмотрением характерных процессов в модельных системах, имитирующих функционирование живых систем. Имеет более 200 научных публикаций (в том числе 2 монографии и 10 патентов).

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН
E-mail: yakhno@appl.sci.nnov.ru
ORCID: 0000-0002-4689-472X
AuthorID (eLibrary.Ru): 18659



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(2)

Научная статья
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003210
EDN: TRPSXT

Нейронная сеть как индикатор связанности в ансамбле хаотических систем

А. В. Шабунин

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: ✉shabuninav@info.sgu.ru

*Поступила в редакцию 12.12.2025, принята к публикации 4.01.2026,
опубликована онлайн 27.01.2026, опубликована 31.03.2026*

Аннотация. Цель — разработка и исследование алгоритма определения структуры связей ансамбля хаотических систем в условиях внешнего шума. Метод основан на определении причинности по Грэнджеру и использовании искусственных нейронных сетей прямого распространения, обучаемых с регуляризацией. Результаты. Разработан метод выявления структуры связей в сети хаотических отображений, использующий принцип причинности по Грэнджеру и аппарат искусственных нейронных сетей. Метод является модификацией ранее предложенного алгоритма и позволяет выявлять структуру связей ансамбля в целом за один проход обучения сети. Алгоритм показал свою эффективность на примере небольших ансамблей неидентичных одномерных отображений с линейными функциональными связями. При наличии внешнего шума, маскирующего сигнал, точность метода ухудшается, однако при небольших интенсивностях шума он остается работоспособным. Обсуждение. Метод показал свою эффективность для простых математических моделей, в том числе и при наличии шума. Однако возможность его использования при высоком уровне зашумленности требует дополнительных исследований, касающихся использования методов статистической обработки полученных данных. Интересно также рассмотреть, насколько метод сохранит работоспособность при других типах связей.

Ключевые слова: динамический хаос, искусственные нейронные сети, ансамбли отображений, определение структуры связей.

Для цитирования: Шабунин А. В. Нейронная сеть как индикатор связанности в ансамбле хаотических систем // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 2. С. 331–344. DOI: 10.18500/0869-6632-003210. EDN: TRPSXT

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Neural network as an indicator of connectivity in an ensemble of chaotic systems

A. V. Shabunin

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉shabuninav@info.sgu.ru

Received 12.12.2025, accepted 4.01.2026, available online 27.01.2026, published 31.03.2026

Abstract. The purpose of this work is development and research of an algorithm for determining the structure of coupling of an ensemble of chaotic systems under conditions of external noise. *The method* is based on the Granger causality approach and the use of artificial direct propagation neural networks trained with regularization. *Results.* We have developed a method to identify the structure of couplings of a network of chaotic maps, which is based on the Granger causality principle and artificial neural networks. It represents a modification of the previously proposed algorithm and allows us to find the connectivity of the ensemble as a whole by a single pass of the network training. The algorithm has shown its effectiveness for an example of a small ensemble of non-identical maps with linear couplings. It keeps to work at presences of weak external noise, though the accuracy of the method deteriorates with the noise intensity. *Discussion.* The method has demonstrated its effectiveness for simple mathematical models, including in the presence of noise. However, its effectiveness at larger noise intensity requires additional statistical processing methods. It is also interesting to consider how it works for other types of couplings.

Keywords: dynamical chaos, artificial neural networks, ensembles of maps, couplings structure identification.

For citation: Shabunin AV. Neural network as an indicator of connectivity in an ensemble of chaotic systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(2):331–344. DOI: 10.18500/0869-6632-003210

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В работах [1, 2] был рассмотрен алгоритм определения структуры связей в ансамбле хаотических отображений, основанный на использовании искусственной нейронной сети (ИНС), обучаемой с учителем. Такую задачу называют *определением связанности*. Для ее решения используются различные методы анализа сигналов, генерируемых составляющими ансамбль подсистемами, одним из которых является расчет *причинности по Грэнджеру (ПГ)* [3, 4]. Последний основан на предположении, что если система A влияет на систему B , то учет состояния A должен улучшать прогноз поведения B . Это улучшение отражается на уменьшении среднеквадратичной погрешности ошибок предсказания $\varepsilon = \sqrt{\langle |\bar{B} - B|^2 \rangle}$, где \bar{B} – предсказанное значение. Соответственно, степень влияния A на B можно оценить по уменьшению ε за счет учета информации об A : $PI = (\varepsilon^2 - \varepsilon_A^2) / \varepsilon^2$ [5].

Использование ПГ требует построения соответствующего фильтра-предсказателя¹, что само по себе является непростой и неоднозначной задачей. Поэтому существует множество методов определения связанности, применяющихся к различным природным [6–12] и модельным [13–15] системам. Разнообразие используемых подходов свидетельствует об отсутствии единого эффективного алгоритма определения связанности, поэтому задача его разработки остается актуальной.

Одним из инструментов для прогноза поведения систем по генерируемым ими временным рядам является искусственная нейронная сеть прямого распространения [16, 17]. Способность ИНС к решению подобных задач хорошо известна [18–21]. Кроме того, ИНС обладает собственной сетевой структурой, которая, меняясь в ходе обучения, может при определенных условиях

¹Фильтром-предсказателем называется $N \times M$ многополюсник, который по N предыдущим отсчетам сигнала предсказывает M последующих.

подстраиваться под структуру связей ансамбля и тем самым выявлять последнюю. Для обеспечения такой подстройки необходимо использовать процедуру обучения с регуляризацией [22]. Метод регуляризации был впервые предложен А. Н. Тихоновым [23] и получил широкое применение в задачах оптимизации. Суть его заключается во введении так называемого «штрафа за сложность» сети, который обеспечивает «обнуление» ненужных синаптических коэффициентов. Тем самым удаляются «лишние» связи и остаются лишь те, что необходимы для правильного предсказания.

В работе [1] было предложено использовать процедуру обучения с регуляризацией для выявления диффузионных связей между N идентичными одномерными хаотическими отображениями. Для этого ИНС последовательно обучалась предсказанию динамики каждого из N отображений в отдельности, используя в качестве входных данных сигналы от всех узлов сети. По результатам обучения определялось, с какими узлами ансамбля связано то отображение, чья динамика предсказывается. Соответственно, для определения всей структуры связей ансамбля требовалось провести N отдельных процедур обучения. Как оказалось, такой метод является избыточным. В настоящей работе мы предлагаем модифицированный алгоритм, позволяющий выявить полную картину связей в ансамбле в результате обучения ИНС к предсказанию его динамики в целом. Кроме того, мы отошли от ранее используемых ограничений на идентичность подсистем и на диффузионный тип связей между элементами ансамбля.

1. Постановка задачи

Рассмотрим сеть из N одномерных хаотических подсистем с дискретным временем, связанных между собой индивидуальными связями:

$$x_i(n+1) = f_i(x_i(n)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_{ij}(g_{ij}x_j(n)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь $x_i(n)$ — вещественная динамическая переменная, описывающая состояние i -й подсистемы в момент времени n , f_i — функция, задающая ее индивидуальную динамику, γ_{ij} — функция связи, описывающая воздействие j -го узла на i -й, g_{ij} — соответствующий коэффициент связи.

Будем полагать, что все связи являются пассивными, то есть не содержат собственных источников сигналов. Поэтому все $\gamma_{ij}(0) = 0$. Кроме того, предположим, что функции γ_{ij} не принимают в нуле экстремальных или стационарных значений, а динамика ансамбля (1) является финитной. Тогда при слабых связях (то есть при $g_{ij} \ll 1/a_j$, где $a_j = \max |x_j|$) их можно линеаризовать в окрестности нуля: $\gamma_{ij}(x) \simeq g_{ij}x$. При условии структурной устойчивости системы (1) такое огрубление не должно существенно сказаться на установившихся колебательных режимах ансамбля и, соответственно, на работе метода определения его связанности. Поэтому в дальнейшем мы сочли возможным ограничиться рассмотрением только линейных связей.

В данном исследовании в качестве подсистем будем использовать логистические отображения: $f_i = \alpha_i x_i (1 - x_i)$, находящиеся в режиме развитого хаоса; последнее обеспечивается соответствующим выбором параметров α_i . Функции связей между отображениями полагаются линейными: $\gamma_{ij} = g_{ij}x_j$. С учетом вышесказанного система (1) принимает вид

$$x_i(n+1) = \alpha_i x_i(n) (1 - x_i(n)) + \sum_{j=1}^N g_{ij} x_j(n), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где все $g_{ii} = 0$. Ее удобно переписать в матрично-векторной форме:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)) + \hat{G}\mathbf{x}(n), \quad (3)$$

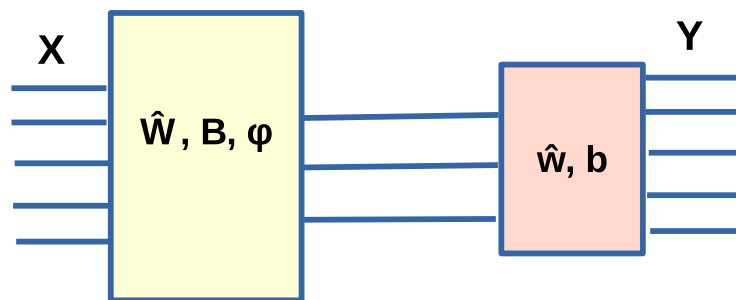


Рис. 1. Схема двухслойной нейронной сети: \mathbf{X} и \mathbf{Y} — векторы входного и выходного сигналов, \hat{W} и \hat{w} — матрицы синаптических коэффициентов нейронов первого и второго слоев соответственно; векторы \mathbf{B} и \mathbf{b} — значения их смещений, $\varphi(x) = \text{th}(x)$ — функция активации нейронов первого слоя; второй слой является линейным

Fig. 1. The scheme of a two-layer neural network: \mathbf{X} and \mathbf{Y} are vectors of input and output signals, \hat{W} and \hat{w} are matrices of synaptic coefficients of neurons of the first and the second layers, respectively, while vectors \mathbf{B} and \mathbf{b} represent the values of their offsets, $\varphi(x) = \text{th}(x)$ is the activation function of the neurons of the first layer; the second layer is linear

где $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ — вектор-столбец переменных (индекс T означает транспонирование), \hat{G} — матрица связей ансамбля ($G_{ij} = g_{ij}$), $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_N(x_N)]^T$ — вектор-функция отображений. Оценка \hat{G} по наблюдаемому сигналу $\mathbf{x}(n)$ и представляет собой решение задачи об определении связанности ансамбля (2).

Алгоритм определения структуры связей основан на использовании ИНС прямого пространства, обучаемой с учителем [16]. Такие нейронные сети успешно выполняют задачи предсказания будущей динамики системы по ее предыдущим данным. Для этого в процессе обучения ИНС перестраивает связи между нейронами. В настоящей работе мы попытаемся организовать этот процесс таким образом, чтобы адаптировать связи нейронной сети под структуру связей ансамбля (2).

Для решения этой задачи используем двухслойную ИНС, структура которой показана на рис. 1. Уравнение такой сети имеет вид

$$\mathbf{Y} = \hat{w}\varphi(\hat{W}\mathbf{X} + \mathbf{B}) + \mathbf{b}, \quad (4)$$

где \mathbf{X} и \mathbf{Y} — N -мерные векторы входного и выходного сигналов соответственно. В качестве \mathbf{X} используются значения всех N отображений в текущий момент времени: $\mathbf{X}(n) = [\tilde{x}_1(n), \tilde{x}_2(n), \dots, \tilde{x}_N(n)]^T$. Для исключения влияния таких факторов, как амплитуда и смещение сигналов, они предварительно центрируются и нормируются по амплитуде: $x_i \rightarrow \tilde{x}_i$. Размерность скрытого слоя (m) не связана напрямую с размерностью ансамбля, но определяется сложностью задачи. Рекомендации по выбору этого параметра перечисляются в [16]. В данном исследовании используется $m = 10$. В качестве функции активации $\varphi(x)$ выбран гиперболический тангенс, поскольку он обращается в ноль при нулевом аргументе и, кроме того, является стандартным выбором для ИНС прямого распространения.

2. Алгоритм обучения ИНС для оценки связанности

2.1. Общее описание. В ходе обучения с учителем сеть (4) меняет значения синаптических коэффициентов и векторов смещений так, чтобы аппроксимировать правые части уравнений (2) с заданной точностью. Возможность этого при достаточном количестве обучающих данных и нейронов скрытого слоя гарантирована теоремой Колмогорова–Арнольда [24, 25]. Рассмотрим,

как полученные значения коэффициентов матриц \hat{W} и \hat{w} связаны со структурой уравнений ансамбля (3), а именно с матрицей связей \hat{G} . Для этого запишем связь l -й компоненты выходного сигнала ИНС (то есть $Y_l(n)$) со всеми N текущими значениями $\tilde{x}_i(n)$ ($i = 1, \dots, N$):

$$Y_l(n) = b_l + \sum_{k=1}^m w_{lk} \text{th} \left(B_k + \sum_{i=1}^N W_{ki} \tilde{x}_i(n) \right). \quad (5)$$

Если значение аргумента гиперболического тангенса не очень большое, его можно приблизительно заменить линейной функцией:

$$Y_l(n) \simeq b_l + \sum_{k=1}^m w_{lk} B_k + \sum_{k=1}^m w_{lk} \sum_{i=1}^N W_{ki} \tilde{x}_i(n). \quad (6)$$

Заменяв порядок суммирования в последнем слагаемом, перепишем это выражение в виде

$$Y_l(n) \simeq b_l + \sum_{k=1}^m w_{lk} B_k + \sum_{i=1}^N C_{li} \tilde{x}_i(n), \quad (7)$$

где $C_{li} = \sum_k w_{lk} W_{ki}$ — матричный коэффициент произведения $\hat{w}\hat{W}$. Как видно из формулы (7), этот коэффициент характеризует влияние i -го отображения на l -й выход нейронной сети, то есть указывает на связь между ними. Последний представляет собой предсказание значения $\tilde{x}_l(n+1)$. Таким образом, $N \times N$ матрица $\hat{C} = \hat{w}\hat{W}$ может служить для диагностирования матрицы связей \hat{G} .

Как правило, для обучения ИНС предсказанию временных рядов в качестве целевой функции выбирается средний квадрат ошибок предсказания:

$$\Phi = \frac{1}{KN} \sum_{n=0}^{K-1} \sum_{l=1}^N (Y_l(n) - D_l(n))^2, \quad (8)$$

где K — число обучающих векторов, $D_l(n)$ — предсказываемое значения l -го отображения; в нашем случае им является следующее по времени: $D_l(n) = \tilde{x}_l(n+1)$. Целью обучения является достижение Φ точки глобального минимума. Будет ли значение коэффициентов ИНС в точке минимума Φ соответствовать структуре связей того ансамбля, чья динамика предсказывается? Очевидно, такое соответствие не обязательно: минимум Φ может достигаться и при избыточных величинах связей между нейронами, поскольку в формуле (8) последние никак не лимитируются. Чтобы побудить ИНС «экономить» связи в ходе обучения, в работе [22] было предложено использовать процедуру регуляризации, заключающуюся во введении «платы» за величины синаптических коэффициентов:

$$P = r \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N W_{ij}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m w_{ij}^2 \right), \quad (9)$$

которая представляет собой r -ю часть общей суммы от их квадратов. Параметр $r \geq 0$ называют *коэффициентом регуляризации* (КР). В результате модифицированная целевая функция приобретает вид

$$\Psi = \Phi + P. \quad (10)$$

Данный вид целевой функции характеризует способность предсказывать динамику ансамбля отображений при минимальных связях между нейронами ИНС. При этом ненужные для успешного предсказания связи подавляются. После их «обнуления» полученные значения коэффициентов C_{ij} позволят диагностировать структуру связей между узлами исследуемого ансамбля.

Таким образом, величины недиагональных коэффициентов матрицы \hat{C} , полученные по завершении процедуры обучения с регуляризацией, используются для диагностирования матрицы \hat{G} . Для этой цели мы применим также процедуру их нормирования на диагональные коэффициенты: $S_{ij} = C_{ij}/C_{ii}$. Значение S_{ij} будем называть *коэффициентом влияния* j -го узла на i -й, а составленную из них матрицу \hat{S} — *матрицей влияния*. Последняя служит для определения качественного вида матрицы связей \hat{G} .

Таким образом, предлагаемый метод диагностирования связанности ансамбля отображений заключается в следующем.

1. Создается ИНС, структура которой изображена на рис. 1, с входной и выходной размерностями, равными числу элементов ансамбля N , и числом нейронов скрытого слоя $m = 10$.
2. Коэффициенты сети инициализируются случайными значениями.
3. Для обучения ИНС формируется обучающее множество из $K = 1000$ векторов $\{\mathbf{X}(n)\}_{n=0}^{K-1}$, каждый из которых представляет собой отображение всего ансамбля в n -й момент времени: $\mathbf{X}(n) = \tilde{\mathbf{x}}(n)$, а также множество целевых значений $\{\mathbf{D}(n)\}_{n=0}^{K-1}$, в качестве которых берутся последующие значения тех же величин: $\mathbf{D}(n) = \tilde{\mathbf{x}}(n+1)$.
4. Проводится обучение сети, основанное на целевой функции (10). Для обучения используется квазиньютонов алгоритм, относящийся к методам второго порядка и обладающий более быстрой сходимостью по сравнению с градиентными методами. Длительность обучения выбрана в 1000 эпох.
5. Для идентификации связей рассчитывается матрица влияния \hat{S} .

Заметим, что, поскольку метод обучения базируется на случайных начальных значениях коэффициентов ИНС, а функция Ψ имеет множество локальных минимумов, процесс обучения будет давать случайные результаты², обработка которых требует использование статистических методов.

2.2. Численные исследования алгоритма. Для проверки алгоритма выберем ансамбль (2) из четырех отображений с параметрами $\alpha = [3.7, 3, 2.6, 3.1]$ и матрицей связей

$$G = 0.2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Как видно из (11), между элементами ансамбля действуют одинаковые по величине односторонние связи. При этом первый узел полностью автономен, на второй действует сигнал от первого узла, на третий — сигналы первого и второго, а на четвертый — только второго. Данная структура связей была выбрана произвольно. Выбранные значения параметров не являются бифуркационными, и их малое изменение почти не меняет динамику ансамбля, что свидетельствует о грубости системы. Они соответствуют режиму развитого несинхронного хаоса во всех узлах, что можно увидеть по проекциям фазовых портретов, представленным на рис. 2.

Применим описанную в разделе (2) методику для определения связанности в рассматриваемом ансамбле. Для этого проведем серию повторяющихся попыток обучения ИНС, стартующих с разных начальных значений синаптических коэффициентов, и рассчитаем по результатам каждой

²Поэтому подобные методы называются *стохастическим обучением*.

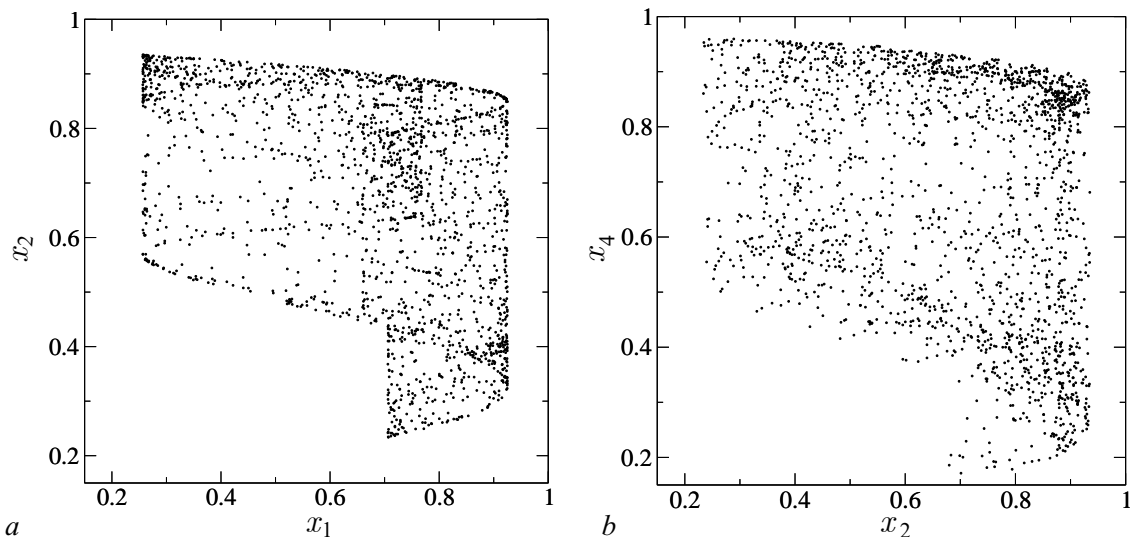


Рис. 2. Проекция фазовых портретов системы (2) на плоскости $x_1 - x_2$ (a) и $x_2 - x_4$ (b) при выбранных параметрах
 Fig. 2. Projections of phase portraits of system (2) on $x_1 - x_2$ (a) and $x_2 - x_4$ (b) planes at the chosen parameters

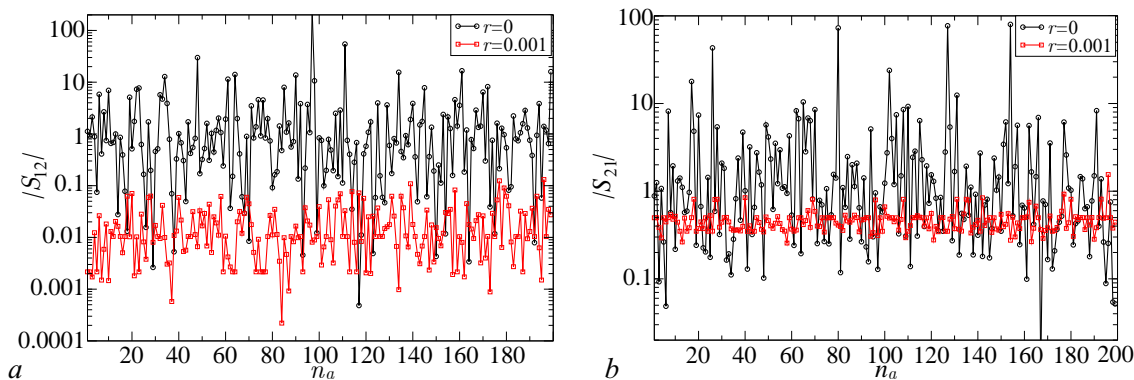


Рис. 3. Зависимость модулей коэффициентов влияния $|S_{12}|$ (a) и $|S_{21}|$ (b) от номера попытки обучения n_a при разных значениях параметра регуляризации r
 Fig. 3. The dependence of the modules of influence coefficients $|S_{12}|$ (a) and $|S_{21}|$ (b) on the number of training attempts n_a for different values of regularization parameter r

из них коэффициенты матрицы \hat{S} . В качестве иллюстрирующих примеров будем использовать значения коэффициентов S_{12} , который соответствует «нулевому» коэффициенту связи, и S_{21} , соответствующего величине связи 0.2.

Сначала проведем обучение ИНС без регуляризации ($r = 0$). Обучение проходит успешно, о чем свидетельствует малая величина среднего квадрата ошибок предсказания, составляющая $\sim 10^{-4}$ и менее. Однако получаемые в результате коэффициенты матрицы \hat{S} не обладают какой-либо повторяемостью, о чем свидетельствуют графики, отображающие значения $|S_{12}|$ (см. рис. 3, a) и $|S_{21}|$ (см. рис. 3, b), рассчитанные по итогам каждой попытки обучения³. Видно, что обе величины демонстрируют случайные флуктуации большой амплитуды, так что их среднеквадратичные отклонения составляют $\sigma_{12} \simeq 18$ и $\sigma_{21} \simeq 10$ соответственно. Последние существенно превышают средние величины коэффициентов влияния, что не позволяет сделать на их основе

³Сами коэффициенты могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, однако, поскольку графики построены в логарифмическом масштабе, на них отображаются их модули.

достоверное заключение о соответствующих коэффициентах матрицы \hat{G} . Аналогично ведут себя и остальные коэффициенты S_{ij} . При этом величина среднего квадрата ошибок предсказания, характеризующая качество обучения, остается достаточно малой: для большинства случаев она менее 10^{-4} и лишь в отдельных точках демонстрирует выбросы до $\Phi \sim 0.001$.

Теперь применим ту же методику при ненулевых значениях параметра регуляризации. Выберем для примера достаточно малое значение: $r = 0.001$. Полученные по результатам попыток обучения значения $|S_{12}|$ и $|S_{21}|$ отображены на тех же рисунках 3, *a* и 3, *b*. Как видно из графиков, регуляризация приводит к существенной стабилизации значений рассчитываемых коэффициентов, уменьшая среднеквадратичные отклонения до $\sigma_{12} \simeq 0.03$ и $\sigma_{21} \simeq 0.15$ соответственно. Одновременно происходит смещение среднего значения «нулевого» коэффициента $|S_{12}|$ до величины ~ 0.02 .

Таким образом, значение параметра регуляризации существенно влияет на результаты измерений матрицы \hat{S} , делая их более предсказуемыми. Для анализа этого влияния проведем измерения при разных значениях r и построим графики зависимости средних значений коэффициентов (рис. 4, *a*) и их среднеквадратичных отклонений (рис. 4, *b*) от параметра регуляризации.

Как видно из рис. 4, *a*, средняя величина «нулевого» коэффициента S_{12} быстро уменьшается до $|\langle S_{12} \rangle| \sim 0.01$ с ростом r от нуля до $r \simeq 0.0075$, после чего она незначительно меняется в окрестности этой величины. Подобным образом ведут себя и остальные «нулевые» коэффициенты. Чтобы не загромождать рисунок большим числом схожих между собой кривых, мы привели график значений, усредненных по всем «нулевым» коэффициентам, который отображен пунктирной линией. Он демонстрирует качественно сходное поведение с $|\langle S_{12} \rangle|$. Что касается среднего значения коэффициента S_{21} , как и других «ненулевых» коэффициентов, оно слабо зависит от r , демонстрируя небольшие осцилляции в окрестности $|\langle S_{12} \rangle| \simeq 0.5$.

Повторяемость результатов измерений S_{ij} может быть охарактеризована значениями их среднеквадратичных отклонений σ_{ij} . Зависимости σ_{12} и σ_{21} от r приведены на рис. 4, *b*. Здесь мы видим быстрое падение на начальном этапе: $r \in [0, 0.001]$, после чего их величины стабилизируются. Аналогично ведут себя и остальные коэффициенты σ_{ij} .

Рассмотрим также влияние r на предсказательную способность обученной нейронной сети. Поскольку «штраф» уменьшает роль среднеквадратичной ошибки предсказания в оценке эффективности ИНС, с ростом r величина Φ должна увеличиваться. Данное предположение подтверждается результатами численных экспериментов, график которых отображен на рис. 4, *b*

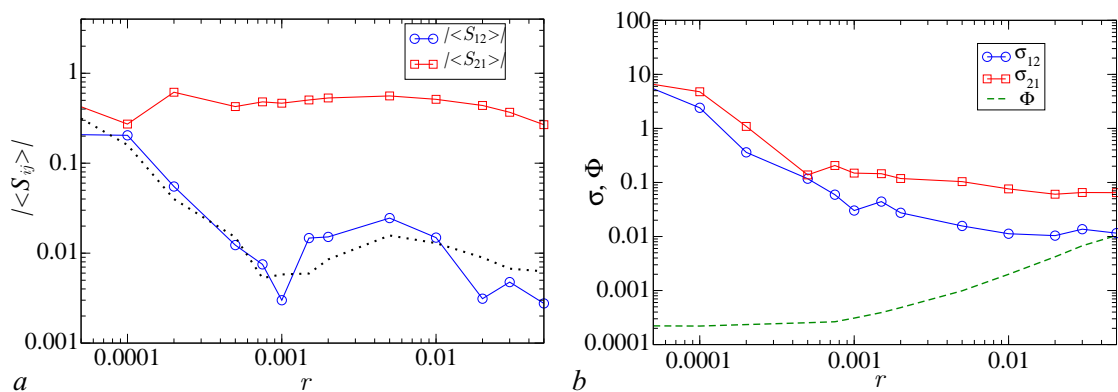


Рис. 4. Зависимость модулей средних значений $|\langle S_{12} \rangle|$ и $|\langle S_{21} \rangle|$ (*a*) и среднеквадратичных отклонений σ_{12} и σ_{21} (*b*) от r ; на рисунке (*b*) штриховой линией приведен также график $\Phi(r)$

Fig. 4. The dependence of $|\langle S_{12} \rangle|$ and $|\langle S_{21} \rangle|$ (*a*), and the standard deviations σ_{12} and σ_{21} (*b*) from r ; dashed line in subfigure (*b*) plots the graph of $\Phi(r)$

штриховой линией. Последняя представляет собой монотонно возрастающую функцию $\Phi(r)$. При этом на начальном этапе при $r < 0.001$ рост среднеквадратичной ошибки предсказания остается незначительным, и лишь при $r > 0.001$ он существенно ускоряется.

Таким образом, для получения устойчивых результатов коэффициентов матрицы влияния при сохранении способности ИНС к предсказанию динамики ансамбля необходимо использовать значения коэффициента регуляризации порядка ~ 0.001 . Дальнейшее увеличение r нецелесообразно, поскольку оно слабо влияет на величину и устойчивость рассчитываемых данных, существенно ухудшая работу ИНС как фильтра-предсказателя.

3. Расчет связанности элементов ансамбля

В соответствии с рекомендациями, полученными в предыдущем разделе, выберем значение $r = 0.001$, которое будем использовать в дальнейших вычислениях. Рассмотрим работу алгоритма определения связанности в ходе повторяющихся попыток обучения сети на основе одних и тех же данных, но с разных начальных условий самой сети. В ходе численного моделирования было проведено 1000 таких попыток, для каждой из которых рассчитывались свои значения \hat{S} . По полученным результатам находились функции плотностей вероятности $p_{ij} = p(S_{ij})$; графики для некоторых из них представлены на рис. 5.

Для визуального отображения были выбраны два коэффициента — S_{12} и S_{41} — из разряда «нулевых», и два — S_{21} и S_{32} — из разряда «ненулевых». Для первых плотность вероятности представляет собой почти симметричную функцию с резким максимумом вблизи нуля и формой, напоминающей гауссову кривую. При удалении от нуля значение плотности вероятности быстро уменьшается. Остальные представленные на рисунке графики относятся к действующим связям. Для них плотности вероятности характеризуются сложной формой с несколькими максимумами и значительным разбросом. Поэтому по ним трудно определить количественно интенсивность связи, можно лишь заключить о ее существовании.

Для получения оценки коэффициентов матрицы влияния будем использовать два способа оценки: наиболее вероятные значения коэффициентов $\tilde{S}_{ij} = \arg(\max(p_{ij}))$ и средние $\langle S_{ij} \rangle$. Оценка, полученная по наиболее вероятным значениям, представлена в табл. 1.

Сравнение ее недиагональных коэффициентов с таковыми матрицы \hat{G} демонстрирует их соответствие: значениям «нулевых» коэффициентов матрицы связи соответствуют значения матрицы \hat{S} — порядка одного процента и менее, а остальные коэффициенты находятся

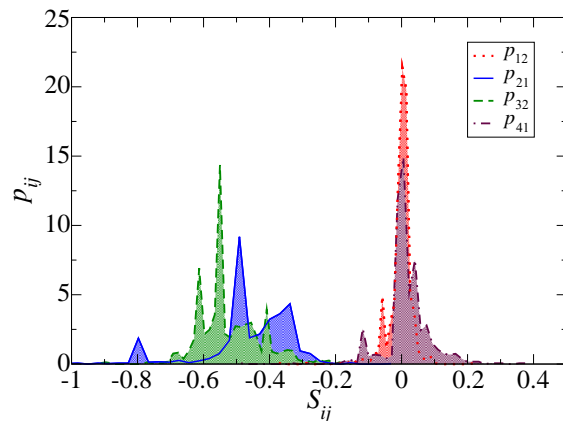


Рис. 5. Плотности вероятности для коэффициентов S_{12} , S_{21} , S_{32} и S_{41} , рассчитанные по результатам серии из тысячи попыток обучения с регуляризацией; $r = 0.001$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Probability density of coefficients S_{12} , S_{21} , S_{32} and S_{41} , calculated from a series of 1000 training passes with regularization; $r = 0.001$ (color online)

Таблица 1. Оценка матрицы \hat{S} по максимумам функций распределения
Table. 1. Estimation of matrix \hat{S} by maxima of distribution functions

1	0.002	-0.004	-0.0004
-0.49	1	0.009	0.004
-0.6	-0.55	1	0.016
0.006	-0.55	0.0006	1

Таблица 2. Средние значения коэффициентов матрицы \hat{S} и их среднеквадратичные отклонения
 Table 2. The average values of the coefficients of matrix \hat{S} and their standard deviations

1	-0.004 ± 0.04	-0.004 ± 0.015	-0.0002 ± 0.007
-0.47 ± 0.15	1	0.002 ± 0.03	0.009 ± 0.01
-0.53 ± 0.13	-0.52 ± 0.1	1	0.011 ± 0.02
0.015 ± 0.07	-0.52 ± 0.12	-0.002 ± 0.02	1

в окрестности 0.5. Подсчитанные по тому же набору значений средние от S_{ij} приведены в табл. 2. Сравнение обеих таблиц указывает на их сходство. Поэтому для оценки связанности можно использовать любой из двух методов статистической обработки результатов как с помощью расчетов плотностей вероятностей, так и просто с помощью расчетов средних. Разброс получаемых коэффициентов влияния можно оценить по значениям их среднеквадратичных отклонений σ_{ij} . Последние также приведены для недиагональных элементов в табл. 2.

4. Измерение связанности в условиях шума

Полученные в разделе (3) результаты относятся к чисто детерминированной системе с хаотической динамикой. Насколько они изменятся при наличии шума, искажающего сигналы подсистем? Данный вопрос принципиально важен для использования алгоритма на практике, поскольку там обычно трудно отделить сигналы от шума. В работе [2] было рассмотрено влияние внутреннего шума (то есть такого, который создается самими подсистемами ансамбля) и показано, что он почти не препятствует диагностированию связанности ансамбля при помощи ИНС. Здесь мы рассмотрим влияние внешнего шума, который создается сторонними источниками и добавляется к генерируемым сигналам, маскируя их от нейронной сети.

Проведем расчеты S_{ij} при тех же параметрах, что и в предыдущих разделах, но в качестве наблюдаемых данных будем использовать «зашумленные» переменные: $u_i(n) = x_i(n) + v_i \xi_i(n)$, где ξ_i — источники белого гауссового шума единичной дисперсии, v_i — их интенсивности. Далее будем рассматривать одинаковые источники: $v_i = v$ для всех i . Переменные u_i используются при вычислениях так же, как ранее использовались x_i .

Применим ту же методику для определения коэффициентов связанности, что и в предыдущем разделе, постепенно увеличивая интенсивность шума с $v = 0$ до $v = 0.05$. Будем отслеживать значения среднеквадратичных отклонений σ_{12} и σ_{21} , среднего квадрата ошибки обучения Φ , а также $|\langle S_{12} \rangle|$ и $|\langle S_{21} \rangle|$. Графики полученных зависимостей представлены на рис. 6, а и рис. 6, б.

Обратим внимание, прежде всего, на влияние маскирующего шума на способность ИНС к предсказанию динамики ансамбля. Как и следовало ожидать (см. график $\Phi(v)$ на рис. 6, а), с ростом шума предсказательная способность сети ухудшается. Однако вплоть до $v \simeq 0.001$ средняя ошибка предсказания остается небольшой, демонстрируя быстрый рост лишь после $v \simeq 0.002$.

Ухудшение работы ИНС в качестве фильтра-предсказателя сказывается и на способности распознавания связанности ансамбля, что выражается как в ухудшении предсказуемости рассчитываемых коэффициентов влияния, так и в смещении их средних значений. Анализ зависимостей среднеквадратичных отклонений показывает (см. рис. 6, а), что последние остаются небольшими вплоть до $v = 0.005$, демонстрируя быстрый рост после $v \simeq 0.01$. Что касается самих средних, то значение от ненулевых коэффициентов, взятых по модулю, остается примерно тем же, что и в отсутствие шума. Однако этого нельзя сказать про нулевые коэффициенты. Как следует

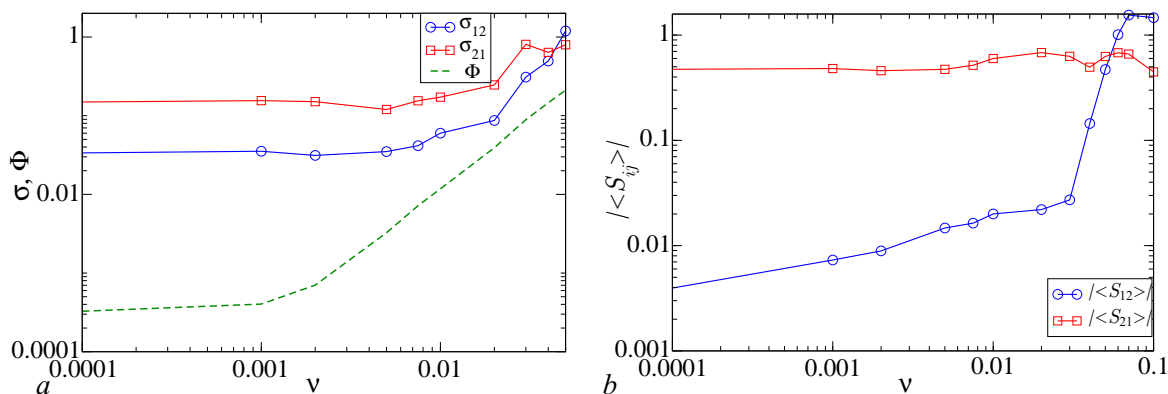


Рис. 6. Зависимость среднеквадратичных отклонений (a) и модулей средних (b) для коэффициентов S_{12} и S_{21} от интенсивности внешнего шума ν ; на рисунке a штриховой линией приведен также график $\Phi(\nu)$

Fig. 6. Dependence of the standard deviations (a) and the modulus of averages (b) for the coefficients S_{12} and S_{21} on the intensity of the external noise ν ; the dashed line in figure a plots graph $\Phi(\nu)$

из рис. 6, b, здесь напротив наблюдается монотонный рост с увеличением интенсивности шума. При этом до $\nu \simeq 0.02$ скорость роста почти постоянна и остается относительно небольшой, а при $\nu > 0.02$ наблюдается быстрое увеличение до значений, сопоставимых с $|\langle S_{21} \rangle|$. В результате вплоть до $\nu \simeq 0.002$ величина $|\langle S_{12} \rangle|$ остается в пределах одного процента, а при $0.002 < \nu < 0.02$ — нескольких процентов.

Таким образом, как и следовало ожидать, маскирующий внешний шум ухудшает работу алгоритма. Для рассматриваемой системы алгоритм можно полагать надежно работающим вплоть до $\nu \simeq 0.002$ и работающим до $\nu \simeq 0.02$; при большем шуме его уже невозможно использовать. Поскольку среднеквадратичное отклонение для самих генерируемых отображениями сигналов составляет $\sigma_x \simeq 0.2$, то максимально допустимый уровень внешнего шума составляет десятую, а удовлетворительный — сотую долю от величины сигнала.

Заключение

В статье рассмотрен метод выявления структуры связей в сети неидентичных хаотических отображений посредством ИНС. Он является модификацией предложенного в работе [1] алгоритма и базируется на обучении ИНС прямого распространения с использованием процедуры регуляризации. В отличие от предыдущей версии, новый алгоритм позволяет определить структуру связей всего ансамбля сразу вместо последовательного выявления связей каждого из отображений в отдельности.

Исследования показали, что метод эффективно работает для неидентичных одномерных хаотических систем при линейном характере связей и произвольно выбранной топологии. Предположительно, он должен остаться работоспособным и для многомерных систем при нелинейных связях, однако этот вопрос требует дополнительного рассмотрения.

Поскольку предлагаемый метод основан на стохастическом обучении ИНС, его результаты носят вероятностный характер, так что коэффициенты связей, полученные по итогам каждой отдельной попытки обучения, могут отличаться друг от друга. Тем не менее рассчитанные коэффициенты «недействующих» связей всегда остаются существенно меньшими «действующих» и составляют, как правило, порядка одного процента. Для улучшения достоверности результатов необходимо использовать их статистическую обработку. Последняя заключается как в расчете средних по ансамблю результирующих значений, так и в вычислении максимальных значений функций распределения. Оба подхода дают схожие результаты.

Исследования измерения связанности в условиях внешнего аддитивного белого гауссова шума показало, что результаты существенно зависят от его интенсивности. Слабый шум (при $SNR > 40$ дБ) почти не влияет на достоверность обнаружения связей. Шум средней интенсивности, до $SNR \sim 20$ дБ, ухудшает достоверность предсказания, но все же позволяет отличать действующие связи от недействующих. При $SNR < 14$ дБ отличия между связями нивелируются, и метод полностью теряет работоспособность.

Список литературы

1. *Шабунин А. В.* Определение структуры связей в ансамбле хаотических отображений при помощи нейронной сети // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 636–653. DOI: 10.18500/0869-6632-003111.
2. *Шабунин А. В.* Определение структуры связей в хаотических и стохастических системах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, № 3. С. 277–287. DOI: 10.18500/1817-3020-2025-25-3-277-287.
3. *Granger C. W. J.* Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // In: Essays in Econometrics: Collected Papers of Clive W. J. Granger. Econometric Society Monographs / Ghysels E., Swanson N. R., Watson M. W. (eds.). Cambridge: Cambridge University Press, 2001. P. 31–47. DOI: 10.1017/CBO9780511753978.002.
4. *Granger C. W. J.* Testing for causality. A personal viewpoint // J. Economic Dynamics and Control. 1980. Vol. 2. P. 329–352. DOI: 10.1016/0165-1889(80)90069-X.
5. *Сысоев И. В.* Диагностика связанности по хаотическим сигналам нелинейных систем: решение обратных задач. Саратов: КУБиК, 2019. 46 с.
6. *Hesse R., Molle E., Arnold M., Schack B.* The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies // Journal of Neuroscience Methods. 2003. Vol. 124, iss. 1. P. 27–44. DOI: 10.1016/S0165-0270(02)00366-7.
7. *Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Смирнов Д. А., Тасс П. А.* Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии) // УФН. 2008. Т. 178. С. 323–329. DOI: 10.3367/UFNr.0178.200803h.0323.
8. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Диагностика причинно-следственной связи солнечной активности и глобальной приповерхностной температуры Земли // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2008. Т. 44, № 3. С. 283–293.
9. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Эмпирические оценки воздействия естественных антропогенных факторов на глобальную приповерхностную температуру // ДАН. 2009. Т. 426, № 5. С. 679–684.
10. *Сысоев И. В., Караваев А. С., Наконечный П. И.* Роль нелинейности модели в диагностике связей при патологическом треморе методом грейнджеровской причинности // Известия вузов. ПНД. 2010. Т. 18, № 4. С. 81–90. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90.
11. *Сысоева М. В., Сысоев И. В.* Математическое моделирование динамики энцефалограммы во время эпилептического припадка // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38, № 3. С. 103–110.
12. *Sysoev I. V., Sysoeva M. V.* Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes // Physica D. 2015. Vol. 309. P. 9–19. DOI: 10.1016/j.physd.2015.07.005.
13. *Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M.* Analyzing multiple nonlinear time series with extended Granger causality // Phys. Lett. A. 2004. Vol. 324, no. 1. P. 26–35. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.02.032.
14. *Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S.* Nonlinear parametric model for Granger causality of time series // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73, iss. 6. P. 066216. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.066216.
15. *Корнилов М. В., Сысоев И. В.* Реконструкция архитектуры связей в цепочке из трех однона-

- правленно связанных систем методом причинности по Грейнджеру // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44, № 10. С. 86–95. DOI: 10.21883/PJTF.2018.10.46103.17201.
16. Хайкин С. Нейронные сети. М: Вильямс, 2006. 1104 с.
 17. Галушкин А. И. Нейронные сети. Основы теории. М.: Телеком, 2010. 496 с.
 18. Kulkarni D. R., Parikh J. C., Pandya A. S. Dynamic predictions from time series data – an artificial neural network approach // International Journal of Modern Physics C. 1997. Vol. 8, no. 6. P. 1345–1360. DOI: 10.1142/S0129183197001193.
 19. de Oliveira K. A., Vannucci A., da Silva E. C. Using artificial neural networks to forecast chaotic time series // Physica A. 2000. Vol. 284, no. 1–4. P. 393–404. DOI: 10.1016/S0378-4371(00)00215-6.
 20. Антипов О. И., Неганов В. А. Прогнозирование и фрактальный анализ хаотических процессов дискретно-нелинейных систем с помощью нейронных сетей // ДАН. 2011. Т. 436, № 1. С. 34–37.
 21. Шабунин А. В. Нейронная сеть как предсказатель динамики дискретного отображения // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22, № 5. С. 58–72. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-5-58-72.
 22. Tank A., Covert I., Foti N., Shojaie A., Fox E. Neural Granger causality for nonlinear time series // arXiv:1802.05842. arXiv Preprint, 2018. DOI: 10.48550/arXiv.1802.05842.
 23. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // ДАН СССР. 1965. Т. 163, № 3. С. 591–594.
 24. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // ДАН СССР. 1956. Т. 108. С. 179–182.
 25. Арнольд В. И. О функции трёх переменных // ДАН СССР. 1957. Т. 114. С. 679–681.

References

1. Shabunin AV. Searching the structure of couplings in a chaotic maps ensemble by means of neural networks. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5):636–653 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-003111.
2. Shabunin AV. Determining the structure of couplings in chaotic and stochastic systems using a neural network. Izvestiya of Saratov University. Physics. 2025;25(3):277–287 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2025-25-3-277-287.
3. Granger CWJ. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. In: Ghysels E, Swanson NR, Watson MW, editors. Essays in Econometrics: Collected Papers of Clive W. J. Granger. Econometric Society Monographs. Cambridge: Cambridge University Press; 2001. P. 31–47. DOI: 10.1017/CBO9780511753978.002.
4. Granger CWJ. Testing for causality. A personal viewpoint. J. Economic Dynamics and Control. 1980;2:329–352. DOI: 10.1016/0165-1889(80)90069-X.
5. Sysoev IV. Diagnostics of Connectivity by Chaotic Signals of Nonlinear Systems: Solving Reverse Problems. Saratov: Kubik; 2019. 46 p. (in Russian).
6. Hesse R, Molle E, Arnold M, Schack B. The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies. Journal of Neuroscience Methods. 2003; 124(1):27–44. DOI: 10.1016/S0165-0270(02)00366-7.
7. Bezruchko BP, Ponomarenko VI, Prohorov MD, Smirnov DA, Tass PA. Modeling nonlinear oscillatory systems and diagnostics of coupling between them using chaotic time series analysis: applications in neurophysiology. Phys. Usp. 2008;51:304–310. DOI: 10.1070/PU2008v051n03ABEH006494.
8. Mokhov II, Smirnov DA. Diagnostics of a cause-effect relation between solar activity and the Earth's global surface temperature. Izv. Atmos. Ocean. Phys. 2008;44:263–272. DOI: 10.1134/S0001433808030018.

9. Mokhov II, Smirnov DA. Empirical estimates of the influence of natural and anthropogenic factors on the global surface temperature. Dokl. Earth Sci. 2009;427:798–803. DOI: 10.1134/S1028334X09050201.
10. Sysoev IV, Karavaev AS, Nakonechny PI. Role of model nonlinearity for Granger causality based coupling estimation for pathological tremor. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2010;18(4):81–90. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90.
11. Sysoeva MV, Sysoev IV. Mathematical modeling of encephalogram dynamics during epileptic seizure. Tech. Phys. Lett. 2012;38(2):151–154. DOI: 10.1134/S1063785012020137.
12. Sysoev IV, Sysoeva MV. Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes. Physica D. 2015;309:9–19. DOI: 10.1016/j.physd.2015.07.005.
13. Chen Y, Rangarajan G, Feng J, Ding M. Analyzing multiple nonlinear time series with extended Granger causality. Phys. Lett. A. 2004;324(1):26–35. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.02.032.
14. Marinazzo D, Pellicoro M, Stramaglia S. Nonlinear parametric model for Granger causality of time series. Phys. Rev. E. 2006;73(6):066216. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.066216.
15. Kornilov MV, Sysoev IV. Recovering the architecture of links in a chain of three unidirectionally coupled systems using the Granger-Causality Test. Tech. Phys. Lett. 2018;44:445–449. DOI: 10.1134/S1063785018050206.
16. Haykin S. Neural Networks. New Jersey: Prentice Hall; 2006. 842 p.
17. Galushkin AI. Neural Networks. The Theory Basics. M.: Telekom; 2012. 496 p. (in Russian).
18. Kulkarni DR, Parikh JC, Pandya AS. Dynamic predictions from time series data – an artificial neural network approach. International Journal of Modern Physics C. 1997;8(6):1345–1360. DOI: 10.1142/S0129183197001193.
19. de Oliveira KA, Vannucci A, da Silva EC. Using artificial neural networks to forecast chaotic time series. Physica A. 2000;284(1–4):393–404. DOI: 10.1016/S0378-4371(00)00215-6.
20. Antipov OI, Neganov VA. Neural network prediction and fractal analysis of the chaotic processes in discrete nonlinear systems. Dokl. Phys. 2011;56:7–9. DOI: 10.1134/S1028335811010034.
21. Shabunin AV. Neural network as a predictor of discrete map dynamics. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2014;22(5):58–72. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-5-58-72.
22. Tank A, Covert I, Foti N, Shojaie A, Fox E. Neural Granger causality for nonlinear time series. arXiv:1802.05842. arXiv Preprint; 2018. DOI: 10.48550/arXiv.1802.05842.
23. Tihonov AN. On incorrect linear algebra problems and a stable solution method. Soviet Mathematics Doklady. 1965;163(3):591–594 (in Russian).
24. Kolmogorov AN. On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of a smaller number of variables. Soviet Mathematics Doklady. 1956;108:179–182.
25. Arnold VI. On function of three variables. Soviet Mathematics Doklady. 1957;114:679–681.



Шабунин Алексей Владимирович — родился в Саратове (1966). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика и электроника» (1990). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (1998, СГУ) и доктора физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2007, СГУ). С 1990 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета, в настоящее время — в должности профессора. Научные интересы — нелинейная динамика, синхронизация, мультистабильность, клеточные автоматы, искусственные нейронные сети. Опубликовал свыше 100 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru
 ORCID: 0000-0002-3495-9418
 AuthorID (eLibrary.Ru): 34839

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. N. Chumachenko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

MANAGING EDITOR

M. V. Sysoeva, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

S. Boccaletti, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

A. M. Bykov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

N. S. Ginzburg, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

O. I. Kanakov, Ph.D., Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

A. V. Kraskov, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

N. V. Kuznetsov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

G. van Luijelaar, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

A. Lüttjohann, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

G. G. Malinetskiy, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

A. B. Neiman, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

V. I. Nekorkin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

V. V. Tuchin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

E. Ya. Frisman, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute for Complex Analysis of Regional Problems of the RAS (Birobidzhan, Russia)

A. E. Hramov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Plekhanov Russian University of Economics (Moscow, Russia)

V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

V. A. Cherepenin, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >