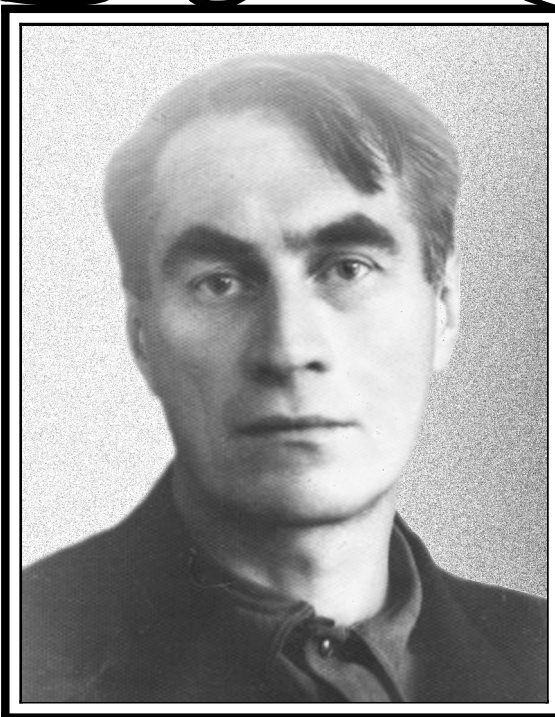


# Трикладная Деловая Динамика



3  
2026

*125 лет со дня рождения  
Александра Александровича Андропова  
(1901–1952)*

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Ю. В. Гуляев*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

## ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*И. В. Сысоев*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*А. Н. Чумаченко*, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

## ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

*М. В. Сысоева*, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

## ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

*В. М. Аникин*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*Б. П. Безручко*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*С. Боккалетти*, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

*А. М. Быков*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*Н. С. Гинзбург*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*С. В. Гонченко*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*А. С. Дмитриев*, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*О. И. Канаков*, д.ф.-м.н., ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*С. А. Кащенко*, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

*А. В. Красков*, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

*Н. В. Кузнецов*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

*Ж. ван Луйтелаар*, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

*А. Люттйоханн*, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

*Г. Г. Малинецкий*, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

*В. В. Матросов*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*А. Б. Нейман*, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

*В. И. Некоркин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*А. Н. Писарчик*, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

*А. В. Порубов*, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*В. В. Тучин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*А. М. Фейгин*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*Е. Я. Фрисман*, чл.-корр. РАН, д.б.н., профессор, ИКАРП ДВО РАН (Биробиджан, Россия)

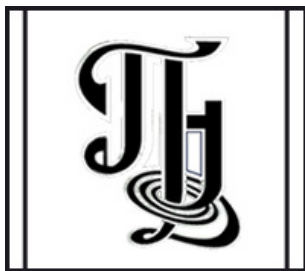
*А. Е. Храмов*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, РЭУ имени Г. В. Плеханова (Москва, Россия)

*В. А. Царёв*, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А. (Саратов, Россия)

*В. А. Черепенин*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*М. В. Шитикова*, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

*В. Г. Яхно*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений  
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*Научно-технический журнал*

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

**Учредитель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

**Издатель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Журнал «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-77991 от 20 марта 2020 года

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписной индекс издания 73498. Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Свободная цена

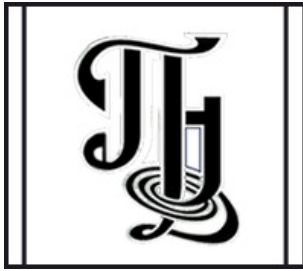
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией Д. А. Лачинова  
Редакторы: А. Р. Нигметулина, А. В. Князева  
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,  
Астраханская, 83. Тел.: +7 (927) 625-9020,  
e-mail: andjournal@sgu.ru,  
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 15.05.2026  
Вышел в свет 29.05.2026  
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 17,21 (18,5)  
Тираж 100 экз. Заказ № 50-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского  
университета. Адрес типографии: Россия,  
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8  
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



**Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy**  
**APPLIED NONLINEAR DYNAMICS**

*Scientific-technical journal*

Published since 1993, 6 issues per year

**The journal was founded by** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

**The publisher of the journal is** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

The journal “Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics” is registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Registration ПИ No ФС77-77991 of 20 March 2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

The journal subscription index is 73498. A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies ([ural-press.ru](http://ural-press.ru)). Free price

The journal is Open Access

Head of Editorial office D. A. Lachinova  
Editors: A. R. Nigmatulina, A. V. Knyazeva  
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,  
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (927) 625-9020,  
e-mail: [andjournal@sgu.ru](mailto:andjournal@sgu.ru),  
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 15.05.2026. Published 29.05.2026  
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 17,21 (18,5)  
Edition of 100 copies. Order No. 50-T

Printed by Printing House of Saratov State  
University. Address of Printing House:  
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,  
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: [sguprint@bk.ru](mailto:sguprint@bk.ru)

СО Д Е Р Ж А Н И Е

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС.  
КВАНТОВЫЙ ХАОС

*Zaamoune F., Zerimeche H., Ibrahim R. W., Karimov A. I.* Scalable fixed-time synchronization of robotic swarms via a novel 4D fractional-order system without equilibrium points and with bistable dynamics [*Заамун Ф., Зеримеш Х., Ибрахим Р. В., Каримов А. И.* Масштабируемая синхронизация за конечное время роев роботов с помощью новой 4D-системы дробного порядка без точек равновесия и с бистабильной динамикой] 349

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

*Андреев А. В., Дараселия Л. Ш., Дождев В. С., Шендерюк-Жидков А. В., Шпак В. В., Храмов А. Е.* Цифровые двойники: синтез теории сложности и искусственного интеллекта..... 371

*Kudratov A. E., Khudazarov R. S., Yuldosheva O. O.* Eliminating transverse vibrations on an elastic beam using absorbers [*Кудратов А. Э., Худазаров Р. С., Юлдошева О. О.* Подавление поперечных колебаний упругой балки с использованием динамических поглотителей]..... 420

*Дегилевич Е. А., Смирнов А. С.* Частоты колебаний цепного маятника в модели со слабой нелинейностью..... 432

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

*Сенницкий В. Л.* О динамике гидромеханической системы с вязкой жидкостью, совершающей прямолинейное движение..... 453

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

*Дик О. Е.* Нахождение связей трех взаимодействующих биологических осцилляторов методом моделирования фазовой динамики ..... 463

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

*Фахретдинов М. И., Екомасов Е. Г.* Локализованные решения уравнения  $\varphi^4$  в модели с тремя одинаковыми точечными примесями..... 481

**C O N T E N T S**

**BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.  
QUANTUM CHAOS**

*Zaamoune F., Zerimeche H., Ibrahim R. W., Karimov A. I.* Scalable fixed-time synchronization of robotic swarms via a novel 4D fractional-order system without equilibrium points and with bistable dynamics ..... 349

**APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY**

*Andreev A. V., Daraselya L. Sh., Dozhdev V. S., Shenderuk-Zhidkov A. V., Shpak V. V., Hramov A. E.* Digital twins: a synthesis of complexity theory and artificial intelligence ..... 371

*Kudratov A. E., Khudazarov R. S., Yuldosheva O. O.* Eliminating transverse vibrations on an elastic beam using absorbers ..... 420

*Degilevich E. A., Smirnov A. S.* Oscillation frequencies of a chain pendulum in a model with weak nonlinearity ..... 432

**INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS**

*Sennitskii V. L.* On the dynamics of a hydro-mechanical system with a viscous liquid fulfilling a straightforward motion ..... 453

**NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE**

*Dick O. E.* Finding connections between three interacting biological oscillators using phase dynamics modeling ..... 463

**NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION**

*Fakhretdinov M. I., Ekomasov E. G.* Localized solutions of the  $\varphi^4$  equation in a model with three identical point impurities ..... 481



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3)

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003219

**Scalable fixed-time synchronization of robotic swarms  
via a novel 4D fractional-order system without equilibrium points  
and with bistable dynamics**

F. Zaamoune<sup>1</sup>✉, H. Zerimeche<sup>2</sup>, R. W. Ibrahim<sup>3</sup>, A. I. Karimov<sup>4</sup>

<sup>1</sup>University of Biskra, Algeria

<sup>2</sup>Constantine 1-Mentouri University, Algeria

<sup>3</sup>Al-Ayen University, Nasiriyah, Iraq

<sup>4</sup>St. Petersburg Electrotechnical University “LETI”, Russia

E-mail: ✉ faiza.zaamoune@univ-biskra.dz, hadjer.zerimeche@umc.edu.dz,  
rabhaibrahim@yahoo.com, aikarimov@etu.ru

Received 11.03.2026, accepted 14.04.2026, available online 21.04.2026, published 29.05.2026

**Abstract.** Chaotic systems without equilibrium points represent a significant class of nonlinear dynamical systems because their behavior cannot be interpreted through conventional equilibrium-based analysis. *Purpose.* In this study, a novel four-dimensional fractional-order chaotic system without equilibrium points is proposed and analyzed. The *results* reveal bistable dynamics characterized by the coexistence of two distinct attractors under the same parameter set and different initial conditions, including symmetric limit cycles and chaotic attractors with different geometric structures. These dynamical features are exploited to enhance trajectory unpredictability in autonomous mobile robotic applications. Furthermore, a fixed-time synchronization framework is developed for large-scale multi-agent systems. In contrast to conventional asymptotic methods, the proposed strategy ensures convergence within a prescribed time bound independent of the initial states. The framework is then implemented in a master-slave robotic swarm, linking fractional-order reference dynamics with integer-order kinematic agents. Numerical investigations confirm the capability of the proposed method to achieve accurate synchronization and reliable trajectory tracking in networked robotic systems.

**Keywords:** fractional-order calculus, bistable dynamics, no-equilibrium system, fixed-time synchronization swarm robotics.

**Acknowledgements.** This study was supported by the Russian Science Foundation, project number 24-71-10064.

**For citation:** Zaamoune F, Zerimeche H, Ibrahim RW, Karimov AI. Scalable fixed-time synchronization of robotic swarms via a novel 4D fractional-order system without equilibrium points and with bistable dynamics. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3):349–370. DOI: 10.18500/0869-6632-003219

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Масштабируемая синхронизация за конечное время роев роботов с помощью новой 4D-системы дробного порядка без точек равновесия и с бистабильной динамикой

Ф. Заамун<sup>1</sup>, Х. Зеримеш<sup>2</sup>, Р. В. Ибрахим<sup>3</sup>, А. И. Каримов<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Университет Мохамеда Хидера в Бискре, Алжир

<sup>2</sup>Университет братьев Ментури Константина 1, Алжир

<sup>3</sup>Университет Аль-Айн, Насирия, Ирак

<sup>4</sup>Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» имени В. И. Ульянова (Ленина), Россия

E-mail: ✉ faiza.zaamoune@univ-biskra.dz, hadjer.zerimeche@umc.edu.dz, rabhaibrahim@yahoo.com, aikarimov@etu.ru

Поступила в редакцию 11.03.2026, принята к публикации 14.04.2026,  
опубликована онлайн 21.04.2026, опубликована 29.05.2026

**Аннотация.** Хаотические системы без точек равновесия представляют собой важный класс нелинейных динамических систем, поскольку их поведение невозможно интерпретировать с помощью обычного анализа, основанного на равновесии. *Цель.* В этом исследовании предложена и проанализирована новая четырёхмерная хаотическая система дробного порядка без точек равновесия. *Результаты* показывают бистабильную динамику, характеризующуюся сосуществованием двух различных аттракторов при одном и том же наборе параметров и при различных начальных условиях, включая симметричные предельные циклы и хаотические аттракторы с различной геометрической структурой. Эти динамические особенности используются для повышения непредсказуемости траекторий в автономных мобильных роботизированных приложениях. Кроме того, для крупномасштабных мультиагентных систем разработана система синхронизации с фиксированным временем. В отличие от традиционных асимптотических методов, предлагаемая стратегия обеспечивает сходимость в течение заданного времени независимо от начальных условий. Затем фреймворк реализуется в роботизированном рое «ведущий–ведомый», связывая эталонную динамику дробного порядка с кинематическими агентами, описываемыми системами целого порядка. Численные исследования подтверждают способность предложенного метода достигать точной синхронизации и надёжного отслеживания траектории в сетевых роботизированных системах.

**Ключевые слова:** дробный математический анализ, бистабильная динамика, неравновесная система, роевая робототехника с синхронизацией за конечное время.

**Благодарности.** Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-71-10064.

**Для цитирования:** Zaamoune F., Zerimeche H., Ibrahim R. W., Karimov A. I. Scalable fixed-time synchronization of robotic swarms via a novel 4D fractional-order system without equilibrium points and with bistable dynamics [Заамун Ф., Зеримеш Х., Ибрахим Р. В., Каримов А. И. Масштабируемая синхронизация за конечное время роев роботов с помощью новой 4D-системы дробного порядка без точек равновесия и с бистабильной динамикой] // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 3. С. 349–370. DOI: 10.18500/0869-6632-003219. EDN: XEKTRW

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Introduction

The use of chaotic dynamics in engineering has evolved considerably since Lorenz first revealed the sensitive dependence of nonlinear systems on initial conditions [1]. Beyond its theoretical significance, chaos has become an important tool in secure communication systems [2,3] and autonomous engineering applications [4,5]. Classical chaotic oscillators, such as the Rössler [6], Chen [7], and Sprott [8] systems, have been extensively studied; however, these models generally possess unstable equilibrium points, from which phase-space reconstruction may be facilitated. For this reason, increasing attention has recently

been directed toward non-equilibrium chaotic systems, especially those without equilibrium points or with dynamics that cannot be fully interpreted through conventional equilibrium-based analysis [9–12]. Owing to their increased complexity and resistance to analytical reconstruction, such systems are regarded as promising candidates for secure and advanced engineering applications [13–15].

Fractional calculus provides an effective framework for describing memory and hereditary effects in complex physical systems [16, 17]. In comparison with integer-order models, fractional-order chaotic systems are often characterized by richer and more diverse dynamical behaviors [18–20]. Significant efforts have therefore been devoted to the study of fractional extensions of well-known chaotic systems [21–23]. Recent investigations have further demonstrated that four-dimensional fractional-order models may exhibit hyperchaotic regimes, toroidal responses, and coexistence phenomena of considerable practical interest, particularly in applications related to encryption, nonlinear control, and complex-signal generation [24–27].

In multi-agent systems, synchronization constitutes the fundamental mechanism through which coordinated collective behavior can be achieved [28, 29]. Although asymptotic and exponential synchronization methods have been widely used and have proved effective in many settings [30–32], their convergence either requires theoretically infinite time or remains dependent on the initial conditions. Such a limitation becomes critical in time-sensitive and mission-critical applications, including secure robotic swarms. To overcome this drawback, fixed-time synchronization has emerged as a more suitable alternative [33–35]. By means of Lyapunov-based design techniques, fixed-time strategies ensure convergence within a prescribed upper bound  $T_{\max}$  that is independent of the initial states [36–38]. This property makes such methods especially attractive for practical deployment in complex dynamic networks [39–41].

The integration of chaotic dynamics into mobile robotics has also attracted considerable attention [42, 43]. Chaotic trajectories, owing to their topological transitivity and strong unpredictability, can enhance workspace exploration and coverage, which is advantageous in patrol, surveillance, and search-and-rescue operations [44–46]. In addition, fractional-order kinematic models offer extra flexibility by incorporating nonlocal dynamical effects into the robot motion description [47–49]. Nevertheless, the synchronization of large-scale robotic swarms under chaotic reference dynamics remains a challenging problem [50–52]. Effective control laws must therefore be developed to preserve coordinated motion in the presence of nonlinear dynamics, model uncertainty, and external disturbances [53, 54].

In this work, a novel four-dimensional fractional-order chaotic system is proposed and is characterized by the complete absence of equilibrium points. The obtained results reveal bistable dynamics, where two distinct attractors coexist under identical parameter values and different initial conditions. To explore its practical relevance, fixed-time synchronization between the fractional-order and integer-order forms of the system is investigated. Through this framework, convergence is guaranteed within a prescribed time bound independent of the initial states, thereby establishing a robust link between fractional-order and integer-order dynamics for control and communication purposes. The resulting chaotic behavior is then exploited in the trajectory generation of a differential-drive mobile robot, through which flexible and adaptive motion planning is achieved. In addition, the developed synchronization framework is shown to preserve its effectiveness as the number of agents increases, which makes it suitable for real-time and mission-critical multi-robot applications. Accordingly, both theoretical contributions to nonlinear chaotic-system analysis and practical advantages for robotic applications are provided.

The remainder of this paper is organized as follows. Section 2 summarizes the basic concepts of fractional calculus. Section 3 presents the mathematical model of the proposed four-dimensional fractional-order chaotic system together with its main dynamical behaviors. Section 4 is devoted to the fixed-time synchronization analysis. Section 5 discusses the application to wireless mobile robots. Finally, Section 6 concludes the paper.

## 1. Fractional derivative and basic definitions

This study utilizes the Caputo definition of the different definitions of fractional integrals and derivatives. According to Ref. [55, 56], the definitions of the Caputo fractional integral and derivative are given as follows:

**Definition 1.** The fractional integral of a function  $f(t)$  of order  $q > 0$  is defined by

$$I^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{q-1} f(\tau) d\tau,$$

where  $t \geq t_0$ , and  $\Gamma(q)$  denotes the Gamma function, which is given by

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$

**Definition 2.** According to Caputo's definition, the fractional derivative of order  $q > 0$  of a function  $f(t) \in C^n([t_0, +\infty), \mathbb{R})$ , where  $n \in \mathbb{N}$  is such that  $n - 1 \leq q < n$ , is defined as

$$D^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - q)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t - s)^{q-n+1}} ds.$$

In particular, when  $0 < q < 1$ , the Caputo fractional derivative becomes

$$D^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - q)} \int_{t_0}^t \frac{f'(s)}{(t - s)^q} ds.$$

**Definition 3.** The Laplace transform of the Caputo fractional derivative is expressed as

$$\mathcal{L} \{ {}^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (\alpha > 0, n - 1 < \alpha \leq n). \quad (1)$$

In particular, for  $\alpha \in (0, 1]$ , the expression simplifies to:

$$\mathcal{L} \{ {}^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0). \quad (2)$$

The Laplace transform of the Riemann Liouville fractional integral is:

$$\mathcal{L} \{ J^\alpha f(t) \} = s^{-\alpha} F(s), \quad (\alpha > 0). \quad (3)$$

## 2. Mathematical model

A new four-dimensional autonomous nonlinear system is formulated in the fractional-order domain. The proposed structure contains coupled bilinear terms, a quartic nonlinear term, and an absolute-value nonlinearity, whose interaction gives rise to complex dynamical behaviors. The mathematical model is formulated as

$$\begin{cases} D^{q_1} x_1(t) = x_2(t), \\ D^{q_2} x_2(t) = -x_3(t)x_2(t) - x_1(t) - a_1 x_4(t), \\ D^{q_3} x_3(t) = a_2 x_2^4(t) - a_3 |x_2(t)| - a_5, \\ D^{q_4} x_4(t) = -a_4 x_4(t) + x_2(t)x_3(t), \end{cases} \quad (4)$$

where  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ , and  $x_4(t)$  denote the state variables of the proposed system, while  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ , and  $a_5$  are positive constant parameters. The quantities  $q_i \in (0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , represent the fractional orders of the corresponding state equations.

To determine the equilibrium points of system (4), the following algebraic system must be solved:

$$x_2(t) = 0, \tag{5a}$$

$$-x_3(t)x_2(t) - x_1(t) - a_1x_4(t) = 0, \tag{5b}$$

$$a_2x_2^4(t) - a_3|x_2(t)| - a_5 = 0, \tag{5c}$$

$$-a_4x_4(t) + x_2(t)x_3(t) = 0. \tag{5d}$$

From (5a), the condition  $x_2 = 0$  is obtained. Upon substitution of  $x_2 = 0$  into (5c), the relation  $-a_5 = 0$  is derived, which leads to a contradiction because  $a_5$  is a positive constant. It is therefore concluded that system (4) admits no equilibrium points.

In the following sections, the dynamical behavior of system (4) is examined separately for the integer-order and fractional-order cases.

**2.1. Integer-order case.** To comprehensively investigate the dynamical characteristics of the proposed model in the integer-order domain, the derivative orders are set to  $q_i = 1$  for  $i = 1, \dots, 4$ . The system's behavior is analyzed by varying the bifurcation parameter  $a_3$  across the interval  $[0, 2]$ , while the remaining system parameters are held constant at  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 0.9$ ,  $a_4 = 5.5$ , and  $a_5 = 1.6$ . For the numerical simulations, the initial condition is chosen as  $x_0 = (0.2, 0.3, 0.1, 0.5)$ . Under these configurations, the integer-order form of system (4) exhibits rich chaotic dynamics, as visually confirmed by the phase portraits in Fig. 1. To rigorously validate the presence of chaos, the Lyapunov exponent spectrum a fundamental diagnostic tool that quantifies the average exponential divergence of nearby trajectories is computed [57]. The evolution of the Lyapunov exponents with respect to  $a_3$  is depicted in Fig. 2, *a*. Notably, the computed spectrum accurately captures a strictly zero Lyapunov exponent ( $L_2 = 0$ ), which perfectly aligns with the theoretical properties of an autonomous continuous-time

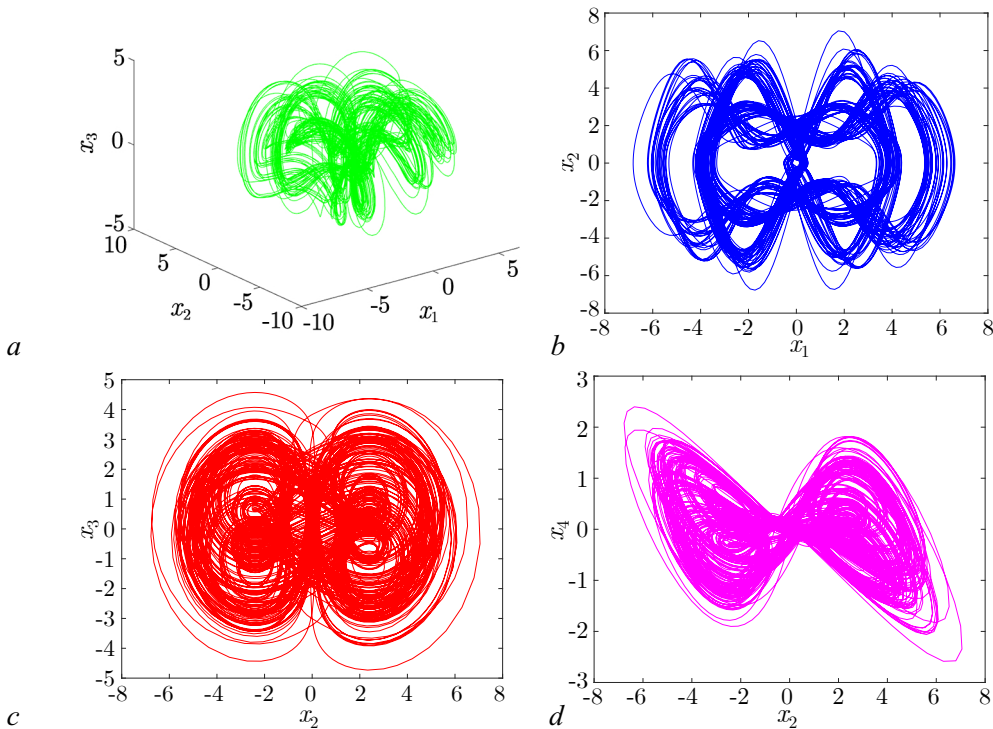


Fig. 1. Phase portraits of integer-order nonlinear system (4) for  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 0.9$ ,  $a_3 = 1.5$ ,  $a_4 = 5.5$ , and  $a_5 = 1.6$ , and  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$  with the initial condition  $(0.2, 0.3, 0.1, 0.5)$ . *a* –  $(x_1 - x_2 - x_3)$  plane; *b* –  $(x_1 - x_2)$  plane; *c* –  $(x_2 - x_3)$  plane; *d* –  $(x_2 - x_4)$  plane (color online)

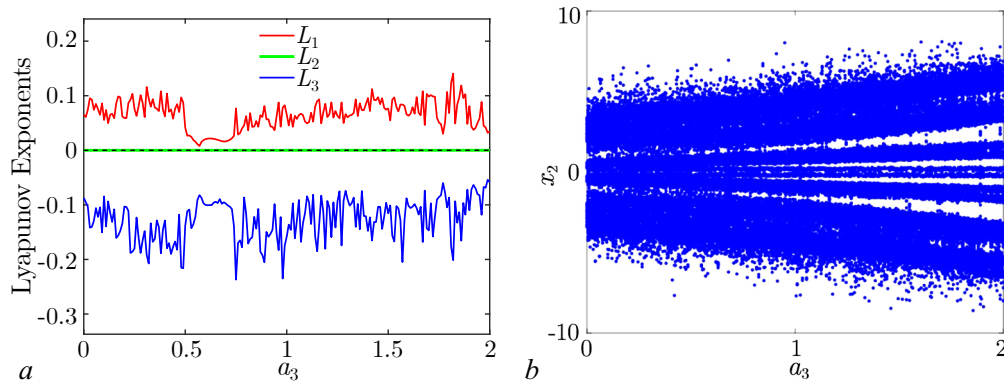


Fig. 2. The Lyapunov exponent spectrum and the bifurcation diagram with respect to the parameter  $a_3 \in [0, 2]$  for  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 0.9$ ,  $a_4 = 5.5$ , and  $a_5 = 1.6$ ,  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$  and the initial condition  $(0.2, 0.3, 0.1, 0.5)$ . *a* – The enlarged fragment of the Lyapunov exponent spectrum displaying the three dominant exponents ( $L_1$ ,  $L_2$ , and  $L_3$ ); *b* – the corresponding bifurcation diagram (color online)

dynamical system. Furthermore, the corresponding bifurcation diagram over  $a_3 \in [0, 2]$  is presented in Fig. 2, *b*, demonstrating a strong consistency with the calculated Lyapunov spectrum and clearly revealing the parameter regions where chaotic and periodic behaviors emerge.

**2.2. Fractional-order case.** The chaotic behavior of system (4) in the fractional-order domain is initially investigated by assigning a uniform fractional order  $q_i = 0.985$  to all state variables, with the parameters fixed at  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 0.9$ ,  $a_3 = 1.5$ ,  $a_4 = 5.5$ , and  $a_5 = 1.6$ . Under these specific settings, the system exhibits a complex chaotic attractor, as clearly illustrated by the 3D and 2D phase portraits in Fig. 3.

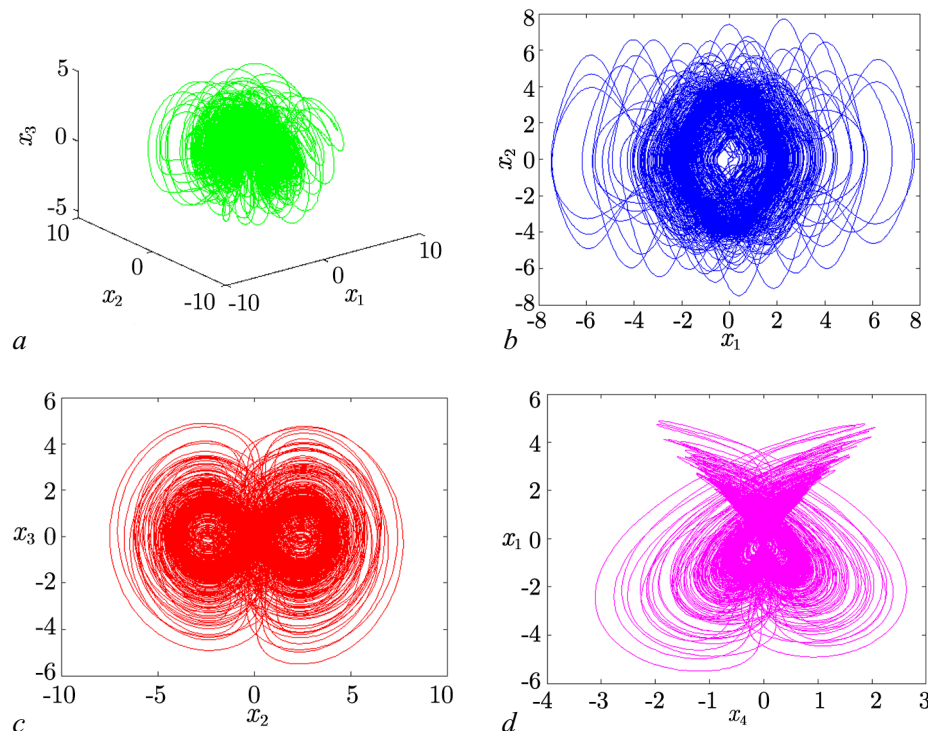


Fig. 3. Phase portraits of fractional-order system (4) for  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 0.9$ ,  $a_3 = 1.5$ ,  $a_4 = 5.5$ , and  $a_5 = 1.6$ ,  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.985$  with the initial condition  $(0.2, 0.3, 0.1, 0.5)$ . *a* –  $(x_1 - x_2 - x_3)$  plane; *b* –  $(x_1 - x_2)$  plane; *c* –  $(x_1 - x_3)$  plane; *d* –  $(x_2 - x_4)$  plane (color online)

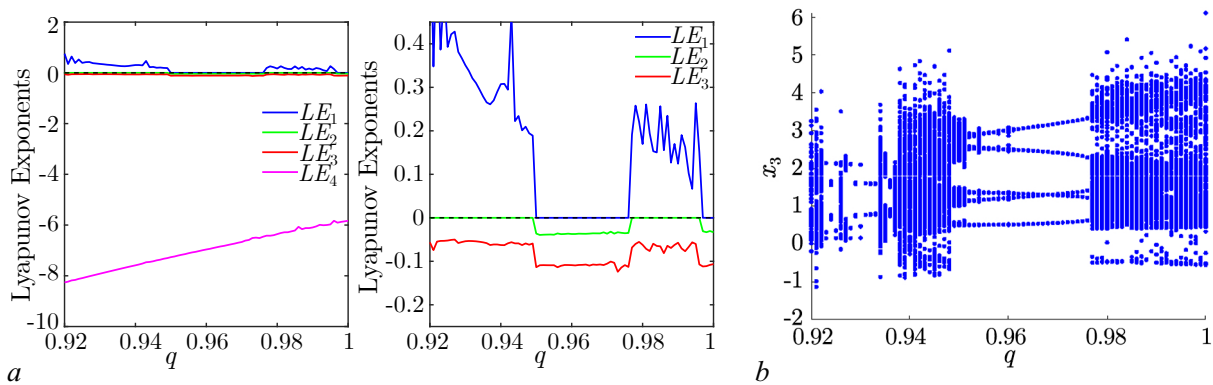


Fig. 4. The Lyapunov exponent spectrum and the bifurcation diagrams with respect to the parameter  $q \in [0.92, 1]$  for  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 0.9$ ,  $a_3 = 1.5$ ,  $a_4 = 5.5$ , and  $a_5 = 1.6$ ,  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0.985$  and the initial condition  $(0.2, 0.3, 0.1, 0.5)$ . *a* – The Lyapunov exponent spectrum shown in two panels: the full spectrum including the highly negative  $LE_4$  (left), and an enlarged fragment detailing the three dominant exponents ( $LE_1$ ,  $LE_2$ , and  $LE_3$ ) that strictly mirrors the dynamic transitions without any numerical oscillations (right); *b* – the corresponding bifurcation diagram (color online)

To rigorously validate the presence of this chaotic behavior and analyze the divergence of neighboring trajectories, the Lyapunov exponent spectrum is computed utilizing a highly refined algorithm based on the analytical Jacobian matrix [39,40]. As shown in Fig. 4, *a*, the results confirm the presence of chaos in specific regions through the existence of a positive maximum Lyapunov exponent ( $LE_1 > 0$ ), accompanied by a strictly zero second exponent ( $LE_2 = 0$ ). This perfectly flat and stable zero line aligns exactly with the theoretical expectations of a continuous-time autonomous system, completely eliminating any previous numerical oscillation artifacts.

In addition, a comprehensive bifurcation analysis is carried out to examine the qualitative changes in the system dynamics as the fractional order  $q$  is varied over the interval  $[0.92, 1]$ . For this purpose, system (4) is numerically integrated by means of the Adams–Bashforth–Moulton method [58]. The resulting bifurcation diagram, illustrated in Fig. 4, *b*, provides a clear visual description of the dynamical regimes exhibited by the system. Most importantly, a direct comparison between the Lyapunov spectrum and the bifurcation diagram reveals a strict and perfect correspondence. When the system enters the periodicity windows (e.g., the stable limit cycles clearly visible between  $q = 0.950$  and  $q = 0.976$ ), the maximum Lyapunov exponent ( $LE_1$ ) drops sharply and strictly to zero, while the remaining exponents become strictly negative. This flawless correlation validates the consistency between the dynamically computed Lyapunov exponents and the observed periodic behaviors associated with the fractional-order operator.

**2.3. Characterization of hidden bistability.** Hidden bistability is demonstrated in the proposed system despite the complete absence of equilibrium points. This phenomenon is confirmed through bifurcation analysis and phase-space reconstruction. Numerical simulations reveal that two distinct attractors can be obtained under identical parameter values when the initial condition is varied in the form  $(x_1(0), 0.2, 0.3, 0.2)$  over the fractional-order range  $q \in [0.9, 1]$ . The observed bistable behavior provides a clear explanation for the periodic windows appearing in the bifurcation diagrams that are not always reflected in the Lyapunov exponent spectrum. In such non-equilibrium models, the asymptotic response is determined by the corresponding basin of attraction; therefore, a single-path Lyapunov exponent computation may follow a chaotic branch while a coexisting periodic branch remains simultaneously present.

First, symmetric limit cycles with nontrivial periodicity and broken rotational symmetry are obtained for  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 0.8$ ,  $a_3 = 1.5$ ,  $a_4 = 5.5$ , and  $a_5 = 1.6$ . As shown in Fig. 5, *a*, the green attractor is generated from the initial condition  $x_1(0) = 2.5$ , whereas the red attractor is generated

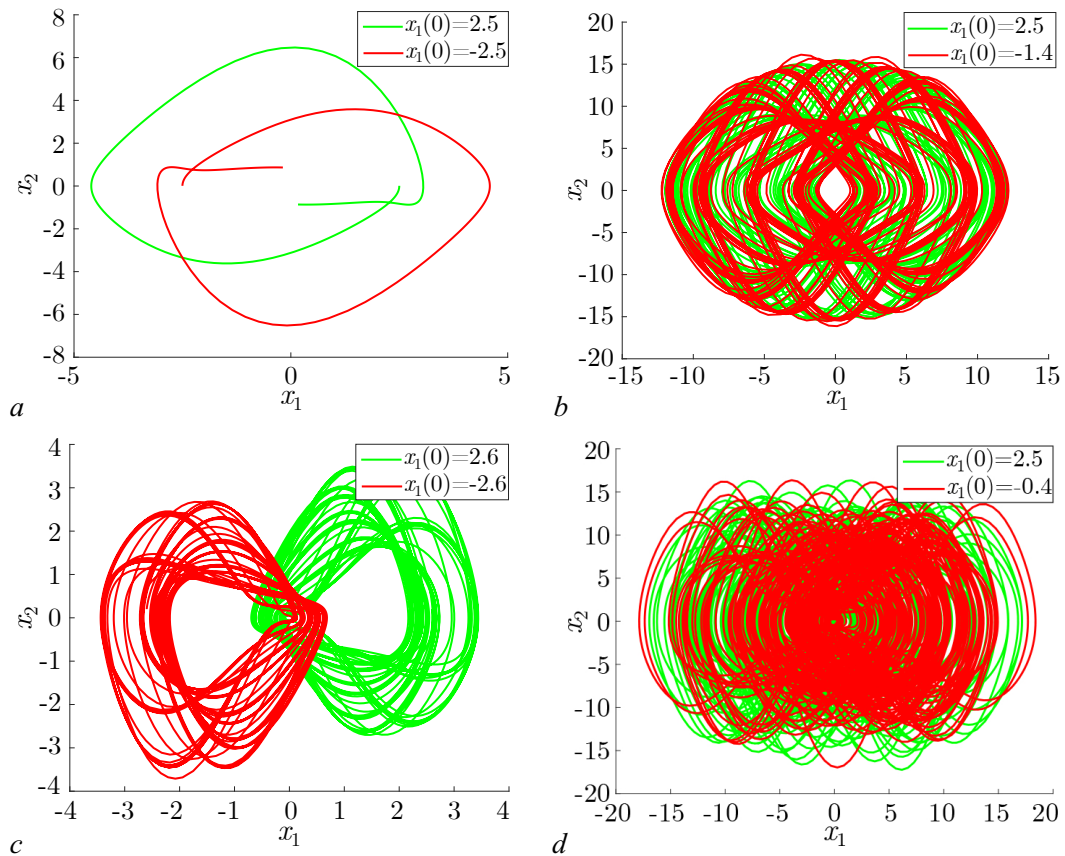


Fig. 5. Bistable coexisting attractors of system (4) obtained from the initial conditions  $(x_1(0), 0.2, 0.3, 0.2)$  for  $q \in [0.9, 1]$ : *a* – symmetric limit cycles for  $a_1 = 0.5$  and  $a_5 = 1.6$ ; *b* – bistable chaotic attractors with different amplitudes for  $a_1 = 0.1$  and  $a_5 = 0.8$ ; *c* – symmetric bistable chaotic attractors for  $a_1 = 2.5$  and  $a_5 = 0.6$ ; *d* – two distinct bistable chaotic attractors for  $a_1 = 2.5$  and  $a_5 = 0.6$  (color online)

from  $x_1(0) = -2.5$ . Second, for  $a_1 = 0.1$ ,  $a_2 = 0.1$ ,  $a_3 = 0.5$ ,  $a_4 = 0.2$ , and  $a_5 = 0.8$ , bistable chaotic behavior with different amplitudes is observed. In this case, the green attractor is obtained from  $x_1(0) = 2.5$ , whereas the red attractor is obtained from  $x_1(0) = -1.4$ , as illustrated in Fig. 5, *b*.

Moreover, a symmetric bistable pattern is identified for  $a_1 = 2.5$ ,  $a_2 = 0.9$ ,  $a_3 = 0.5$ ,  $a_4 = 5.5$ , and  $a_5 = 0.6$ . The corresponding attractors are produced from the initial conditions  $x_1(0) = 2.6$  for the green trajectory and  $x_1(0) = -2.6$  for the red trajectory, as depicted in Fig. 5, *c*. Finally, another bistable chaotic regime is observed for the same parameter set, where two distinct chaotic attractors are generated from  $x_1(0) = 2.5$  and  $x_1(0) = -0.4$ , respectively, as shown in Fig. 5, *d*. These results demonstrate that, under the same system parameters, different long-term dynamical behaviors can be selected solely through the initial conditions. Such persistent bistable oscillatory responses indicate strong potential for applications requiring enhanced unpredictability and flexible state selection, particularly in secure communication and nonlinear control systems.

### 3. Fixed-time synchronization

This study presents a novel fixed-time synchronization method for the new chaotic system (4) in both its integer-order and fractional-order representations. The following lemma and theorem are presented:

**Lemma 1.** [59] Let  $z_1, z_2, \dots, z_n > 0$ ,  $0 < l \leq 1$ , and  $r > 1$ . Then, the following two inequalities hold:

$$\sum_{i=1}^n z_i^l \geq \left( \sum_{i=1}^n z_i \right)^l,$$

$$\sum_{i=1}^n z_i^r \geq n^{1-r} \left( \sum_{i=1}^n z_i \right)^r.$$

The following fixed-time stability result is adopted from [41].

**Theorem 1.** Consider the fractional-order system

$${}_{t_0}D_t^q x(t) = f(t, x(t)).$$

The origin is said to be fixed-time stable if there exists a positive definite Lyapunov function  $V(t, x(t))$ , denoted for simplicity by  $V(t)$ , such that

$${}^0D_t^\alpha V(t) \leq \frac{\lambda_1 \Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-\gamma+1)} V^{1-\alpha+\gamma}(t) - \frac{\lambda_2 \Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-\beta+1)} V^{1-\alpha+\beta}(t), \quad (6)$$

where  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $1 < \gamma < \alpha + 1$ , and  $\alpha - 1 < \beta < \alpha$ . Then, the origin of the considered system is fixed-time stable for any initial condition, and the corresponding settling time is estimated by

$$T = \left( \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left( \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Consider the following integer-order new chaotic system as the drive system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_3(t)x_2(t) - x_1(t) - a_1x_4(t), \\ \dot{x}_3(t) = a_2x_2(t)^4 - a_3|x_2(t)| - a_5, \\ \dot{x}_4(t) = -a_4x_4(t) + x_2(t)x_3(t), \end{cases} \quad (7)$$

Let the following fractional-order new chaotic system be the response system:

$$\begin{cases} D^q y_1(t) = y_2(t) + u_1, \\ D^q y_2(t) = -y_3(t)y_2(t) - y_1(t) - a_1y_4(t) + u_2, \\ D^q y_3(t) = a_2y_2(t)^4 - a_3|y_2(t)| - a_5 + u_3, \\ D^q y_4(t) = -a_4y_4(t) + y_2(t)y_3(t) + u_4, \end{cases} \quad (8)$$

Where  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  are two continuous differentiable functions.

$$e(t) = S(x) - W(y). \quad (9)$$



The fixed gains in (11) are extended to the adaptive form:

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= 0.5 + 2e^{-0.1\|e(t)\|}, \\ \gamma(t) &= 0.9 - 0.2 \cos(2\pi t/10).\end{aligned}\tag{13}$$

**Theorem 2.** *The adaptive controller preserves fixed-time stability provided that  $\frac{d\lambda_1}{dt} < 0$  and  $\gamma(t) \in [0.7, 1.1]$ .*

$$\begin{aligned}\text{where } 0 < \gamma_i < 1, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 &= -\frac{4^{\frac{\gamma_1}{2}} \Gamma(2-q) \Gamma\left(\frac{3-\gamma_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\gamma_1}{2}-q\right)}, \quad \lambda_3 = -\frac{4^{\frac{\gamma_1}{2}} \Gamma(2-q) \Gamma\left(\frac{3-\gamma_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\gamma_1}{2}-q\right)}, \\ \lambda_4 &= \lambda_2 - \frac{4^{\frac{\gamma_1}{2}} \Gamma(2-q) \Gamma\left(\frac{3-\gamma_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\gamma_1}{2}-q\right)}.\end{aligned}$$

**Theorem 3.** *The drive system (7) achieves fixed-time synchronization with the response (8) when the control input is defined by (11).*

**Proof 1.** *By following the methodology presented in [60], and by substituting the control law defined in equations (11)–(12) into the slave system given in equation (8), the following reformulated slave system is obtained:*

$$\begin{cases} D^q y_1(t) = J^{1-q_1} (y_2(t) - r_1(t)), \\ D^q y_2(t) = J^{1-q_2} (-y_3(t)y_2(t) - y_1(t) - a_1 y_4(t) - r_2(t)), \\ D^q y_3(t) = J^{1-q_3} (a_2 y_2(t)^4 - a_3 |y_2(t)| - a_5 - r_3(t)), \\ D^q y_4(t) = J^{1-q_4} (-a_4 y_4(t) + y_2(t)y_3(t) - r_4(t)). \end{cases}\tag{14}$$

By applying the Laplace transform to equation (14) and denoting  $F(s) = \mathcal{L}(Y(t))$ , the following expression is obtained:

$$\begin{cases} s^p F(s) - s^{p-1} y_1(0) = s^{p-1} \mathcal{L}(y_2(t) - r_1(t)), \\ s^p F(s) - s^{p-1} y_2(0) = s^{p-1} \mathcal{L}(-y_3(t)y_2(t) - y_1(t) - a_1 y_4(t) - r_2(t)), \\ s^p F(s) - s^{p-1} y_3(0) = s^{p-1} \mathcal{L}(a_2 y_2(t)^4 - a_3 |y_2(t)| - a_5 - r_3(t)), \\ s^p F(s) - s^{p-1} y_4(0) = s^{p-1} \mathcal{L}(-a_4 y_4(t) + y_2(t)y_3(t) - r_4(t)). \end{cases}\tag{15}$$

By multiplying both sides of equation (15) by  $s^{1-p}$  and then applying the inverse Laplace transform, a new expression for the slave system is obtained:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) - r_1(t), \\ \dot{y}_2(t) = -y_3(t)y_2(t) - y_1(t) - a_1 y_4(t) - r_2(t), \\ \dot{y}_3(t) = a_2 y_2(t)^4 - a_3 |y_2(t)| - a_5 - r_3(t), \\ \dot{y}_4(t) = -a_4 y_4(t) + y_2(t)y_3(t) - r_4(t), \end{cases}\tag{16}$$

Then, the error system is obtained as

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) = & -\lambda_1 e_i(t) - \lambda_2 \operatorname{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^{1+\gamma_1} - \\ & - \lambda_3 \operatorname{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^{1-\gamma_1} - \lambda_4 \operatorname{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^{1+\gamma_1}, \end{aligned} \quad (17)$$

where  $i = (1, \dots, 4)$ . Now, construct the following Lyapunov function:

$$V(t) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^4 e_i^T(t) e_i(t) \right) \quad (18)$$

By evaluating the derivative of  $V(t)$  along the trajectories of system (18), the following expression is obtained:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^4 e_i^T(t) \dot{e}_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^4 e_i^T(t) \left( -\lambda_1 e_i(t) - \lambda_2 \operatorname{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^{1+\gamma_1} - \lambda_3 \operatorname{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^{1-\gamma_1} - \right. \\ &\quad \left. - \lambda_4 \operatorname{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^{1+\gamma_1} \right) \leq \\ &\leq - \sum_{i=1}^4 e_i^T(t) \lambda_1 e_i(t) - \sum_{i=1}^4 e_i^T(t) \lambda_2 \operatorname{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^{1+\gamma_1} - \sum_{i=1}^4 e_i^T(t) \lambda_3 \operatorname{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^{1-\gamma_1} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^4 e_i^T(t) \lambda_4 \operatorname{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^{1+\gamma_1} \leq \\ &\leq - \sum_{i=1}^4 e_i^T(t) \lambda_1 e_i(t) - \lambda_2 \sum_{i=1}^4 |e_i(t)|^{2+\gamma_1} - \lambda_3 \sum_{i=1}^4 |e_i(t)|^{2-\gamma_1} - \lambda_4 \sum_{i=1}^4 |e_i(t)|^{2+\gamma_1} = \\ &= - \sum_{i=1}^4 e_i^T(t) \lambda_1 e_i(t) - \lambda_2 \sum_{i=1}^4 (|e_i(t)|^2)^{\frac{2+\gamma_1}{2}} - \lambda_3 \sum_{i=1}^4 (|e_i(t)|^2)^{\frac{2-\gamma_1}{2}} - \lambda_4 \sum_{i=1}^4 (|e_i(t)|^2)^{\frac{2+\gamma_1}{2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

From Lemma 1, the following result is obtained:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\lambda_1 V(t) - \lambda_2 4^{1-\frac{2+\gamma_1}{2}} \left( \sum_{i=1}^4 |e_i(t)|^2 \right)^{\frac{2+\gamma_1}{2}} - \lambda_3 \left( \sum_{i=1}^4 |e_i(t)|^2 \right)^{\frac{2-\gamma_1}{2}} - \\ &\quad - \lambda_4 4^{1-\frac{2+\gamma_1}{2}} \left( \sum_{i=1}^4 |e_i(t)|^2 \right)^{\frac{2+\gamma_1}{2}} = -\lambda_1 V(t) - \lambda_2 V(t)^{1+\frac{\gamma_1}{2}} - \lambda_3 V(t)^{1+\frac{\gamma_1}{2}} - \lambda_4 V(t)^{1+\frac{\gamma_1}{2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

According to Theorem 1, the drive system (7) and the response system (8) are capable of achieving fixed-time synchronization when utilizing the controller (11). The proof has been finalized.

The synchronization performance between the driving system and the response system is demonstrated by the time responses of the corresponding state variables. After the proposed controllers are applied, the trajectories of the response system are observed to follow those of the driving system

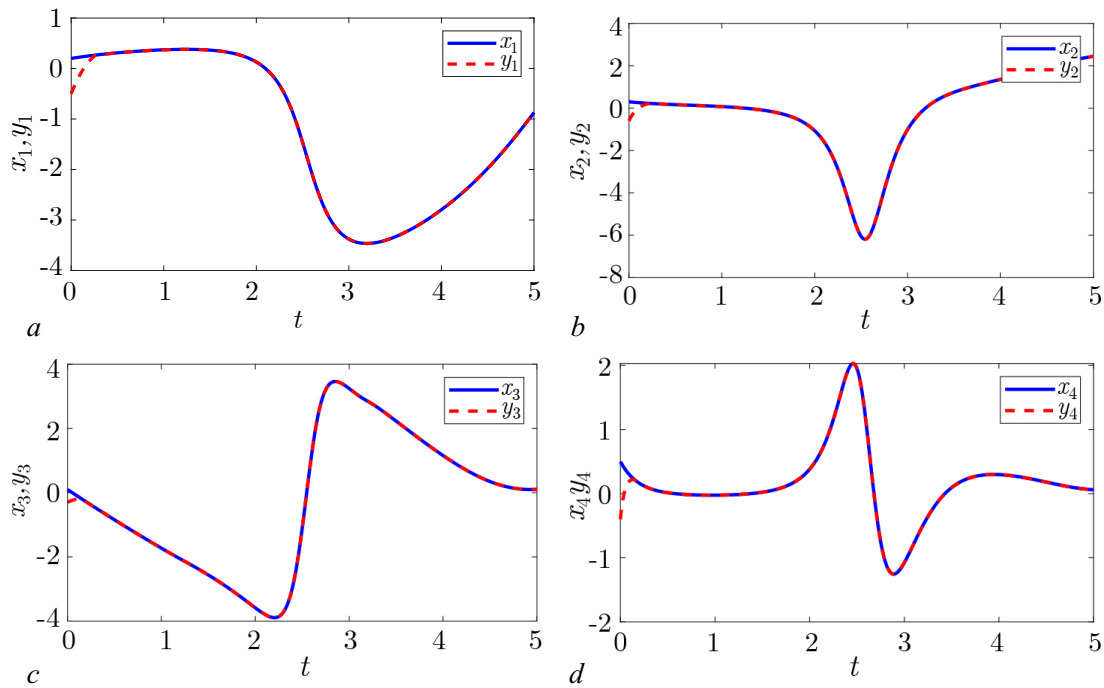


Fig. 6. The state variable synchronization diagram for chaotic systems with fixed time:  $x_1 - y_1$  (a),  $x_2 - y_2$  (b),  $x_3 - y_3$  (c),  $x_4 - y_4$  (d) (color online)

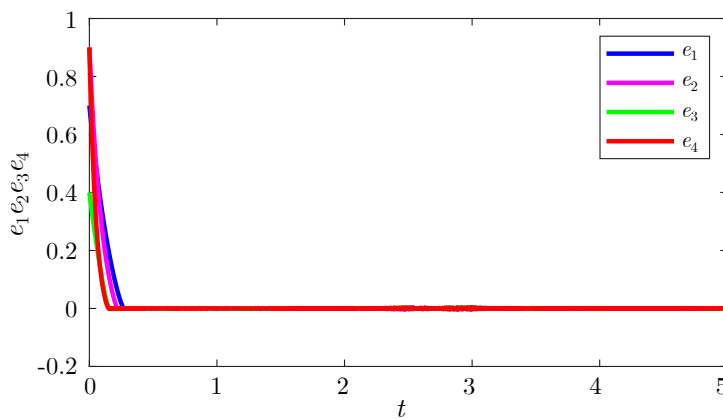


Fig. 7. The fixed-time synchronization error (color online)

accurately, which confirms the effectiveness of the developed control scheme, as illustrated in Fig. 6. In addition, the time evolution of the synchronization errors  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ , and  $e_4$  is presented. The rapid convergence of all error states toward zero further verifies that synchronization between the two systems is successfully achieved, as shown in Fig. 7.

#### 4. Application to Networked Mobile Robots

Autonomous navigation of mobile robots in complex environments plays an important role in applications such as search-and-rescue, surveillance, and patrol missions. By incorporating the proposed four-dimensional chaotic dynamics into the robot control framework, unpredictable trajectories can be generated, thereby improving workspace exploration and motion flexibility.

The kinematic behavior of the mobile robot is described by the following nonholonomic model [42]:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = v(t) \cos \theta(t), \\ \dot{Y}(t) = v(t) \sin \theta(t), \\ \dot{\theta}(t) = \omega(t), \end{cases} \quad (21)$$

where  $X(t)$  and  $Y(t)$  denote the Cartesian coordinates of the robot,  $\theta(t)$  represents its orientation angle,  $v(t)$  is the linear velocity, and  $\omega(t)$  is the angular velocity.

For a two-wheeled differential-drive mobile robot, the fractional-order kinematic model can be written as

$$\begin{cases} D^q X(t) = v(t) \cos \theta(t), \\ D^q Y(t) = v(t) \sin \theta(t), \\ D^q \theta(t) = \omega(t), \end{cases} \quad (22)$$

where  $D^q$  denotes the fractional derivative of order  $q$ . The linear and angular velocities are defined by

$$v(t) = \frac{v_R(t) + v_L(t)}{2}, \quad \omega(t) = \frac{v_R(t) - v_L(t)}{L},$$

with  $v_R(t)$  and  $v_L(t)$  representing the right and left wheel velocities, respectively, and  $L$  denoting the distance between the two wheels.

Within the master-slave synchronization framework, the states of the master robot are denoted by

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T,$$

whereas the states of the slave robot are denoted by

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))^T.$$

Accordingly, the linear and angular velocities of the master robot are expressed as

$$v_m(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2}, \quad \omega_m(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)}{L},$$

while those of the slave robot are given by

$$v_s(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2}, \quad \omega_s(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{L}.$$

Accordingly, a seven-dimensional coupled model is formulated to describe the motion of the master-slave mobile robotic system under the influence of the proposed chaotic dynamics, as follows:

$$\begin{cases} D^q y_1(t) = y_2(t) + u_1(t), \\ D^q y_2(t) = -y_3(t)y_2(t) - y_1(t) - a_1 y_4(t) + u_2(t), \\ D^q y_3(t) = a_2 y_2^4(t) - a_3 |y_2(t)| - a_5 + u_3(t), \\ D^q y_4(t) = -a_4 y_4(t) + y_2(t)y_3(t) + u_4(t), \\ D^q X(t) = v(t) \cos \theta(t), \\ D^q Y(t) = v(t) \sin \theta(t), \\ D^q \theta(t) = \omega(t). \end{cases} \quad (23)$$

For the numerical implementation, the parameters were selected as  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = 0.9$ ,  $a_3 = 1.5$ ,  $a_4 = 5.5$ , and  $a_5 = 1.6$ , while the control gains were chosen as  $\lambda = [3, 2, 2.5, 1.5]$  and  $\gamma = 0.8$ , with wheel separation  $L = 0.08$  m. Under these settings, accurate trajectory synchronization of the master–slave pair is achieved within a finite time. After synchronization is established, both robots are shown to follow closely matching chaotic trajectories inside the prescribed workspace, which confirms the effectiveness of the proposed control framework for coordinated motion generation and tracking, as illustrated in Fig. 8. These results demonstrate that the proposed formulation provides an effective link between the theoretical fractional-order chaotic model and its robotic implementation, while preserving coordinated motion and trajectory complexity.

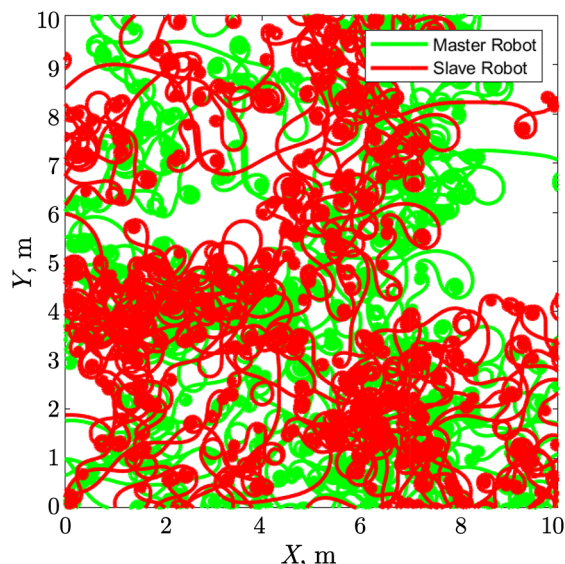


Fig. 8. Trajectory synchronization in X-Y plane. Green: master robot ( $x$ ), red: slave robot ( $y$ ). Inset shows convergence within initial 3 seconds (color online)

**4.1. Multi-robot swarm synchronization.** In the context of multi-robot systems, synchronization is crucial for ensuring coordinated actions and consistent behavior among multiple agents. Applications such as search-and-rescue missions, swarm robotics, and autonomous vehicle fleets require the ability to synchronize a large number of robots so that they operate cohesively in dynamic and complex environments [61, 62]. The master-slave synchronization approach presented in this work is designed to tackle this challenge, where one robot (the master) provides a reference trajectory, and the other robots (the slaves) follow this trajectory while maintaining synchronization across their states.

Synchronization of mobile robots with chaotic dynamics is particularly challenging due to the inherent unpredictability and nonlinear behavior of these systems. The introduction of chaotic dynamics allows for a more thorough exploration of the environment but requires careful coordination between robots to prevent divergence and instability. The proposed fixed-time synchronization framework provides a solution by ensuring that the synchronization is achieved in a finite, predictable amount of time, irrespective of initial conditions or system size [63]. The proposed fixed-time synchronization framework is extended to coordinate  $N$  robots in a swarm. Let the master system generate the reference chaotic trajectory  $X_m(t)$ , while  $N$  slave robots follow  $X_s^i(t)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) with dynamics:

$$D^q X_s^i = f(X_s^i) + U_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \gamma_{ij} (X_s^j - X_s^i). \quad (24)$$

The distributed fixed-time controller is designed as:

$$U_i = -k_1 \text{sign}(e_i) |e_i|^\alpha - k_2 \text{sign}(e_i) |e_i|^\beta + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ x_{3,m} \sin(x_{1,m}) \\ |x_{2,m}| \cos(x_{4,m}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$e_i = X_s^i - X_m, \quad \alpha = 1.8, \quad \beta = 0.6, \quad \delta = 0.2, \quad (26)$$

**Theorem 4.** The swarm system (24) under controller (26) achieves fixed-time synchronization if  $k_1 > \|\nabla f(X_m)\|_\infty$  and  $k_2 > \sqrt{N} \cdot d_{\max}$  where  $d_{\max}$  is maximum inter-robot distance. The settling time  $T_s$  satisfies:

$$T_s \leq \frac{1}{k_1(1-\beta)} \ln \left( 1 + \frac{k_1 V(0)^{1-\beta}}{\eta} \right), \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T e_i. \quad (27)$$

**Proof 2.** Consider the Lyapunov function  $V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T e_i + \frac{1}{4} \sum_{i,j} \|X_s^i - X_s^j\|^2$ . Taking fractional derivative:

$$\begin{aligned} D^q V &\leq \sum_{i=1}^N e_i^T D^q e_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (X_s^i - X_s^j)^T (D^q X_s^i - D^q X_s^j) \\ &\leq -k_1 \sum_{i=1}^N |e_i|^{1+\beta} - k_2 \sum_{i=1}^N |e_i|^{1+\alpha} + \Phi, \end{aligned}$$

$$\Phi \leq \|\nabla f\|_\infty \|e_i\| - k_1 |e_i|^{1+\beta} \leq 0 \quad (\text{when } k_1 > \|\nabla f\|_\infty).$$

Thus  $D^q V \leq -k_1 V^{(1+\beta)/2}$  proving fixed-time stability.

**4.2. Discussion of synchronization and scalability results.** The synchronization performance of the proposed control framework for a networked robotic system is illustrated through the time evolution of the state variable  $x_1$  for the master and two representative slave units (Slave 1 and Slave 5).

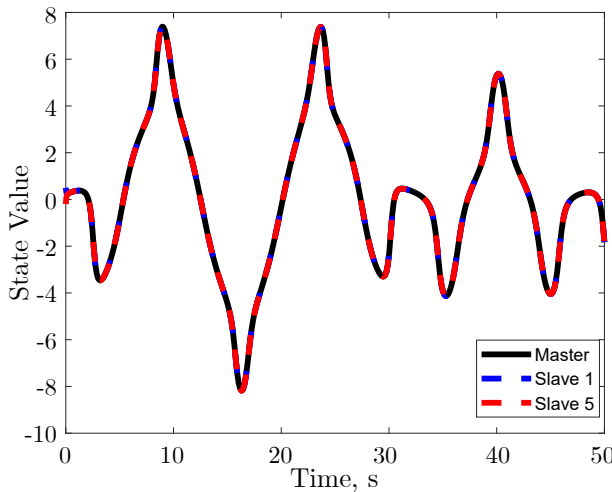


Fig. 9. Synchronization of state variable  $x_1$  between Master, Slave 1, and Slave 5 (color online)

It can be observed that all trajectories converge rapidly toward the same reference trajectory, thereby demonstrating effective synchronization behavior. The very small phase lag and the close overlap among the curves further confirm that the designed control protocol ensures state convergence across all agents, as shown in Fig. 9. This level of synchronization is particularly notable given the nonlinear and potentially chaotic nature of the robot dynamics. The ability to achieve full-state synchronization (as seen in the virtually indistinguishable trajectories) validates the robustness of the control method against model complexities and disturbances. Moreover, this implies that the control input not only stabilizes each agent's dynamics but also enforces coherence across the entire multi-agent system.

**4.3. Scalability analysis.** To evaluate the scalability of the proposed synchronization algorithm, the average synchronization time was analyzed as the number of robots increased from 2 to 50. The results, presented in Fig. 10 and Table 1, were found to follow a highly efficient linear trend, with an approximate slope of 0.023 seconds per additional robot.

It is important to note that while Theorem 4 guarantees fixed-time convergence for the error dynamics of a single pair, the slight increase in synchronization time observed in the swarm simulation is attributed to the signal propagation delay inherent in the coupled network topology is seen in Eq. 24. Despite this, the near-linear behavior confirms that the computational and control overhead remains minimal, making the framework suitable for large-scale swarm deployments.

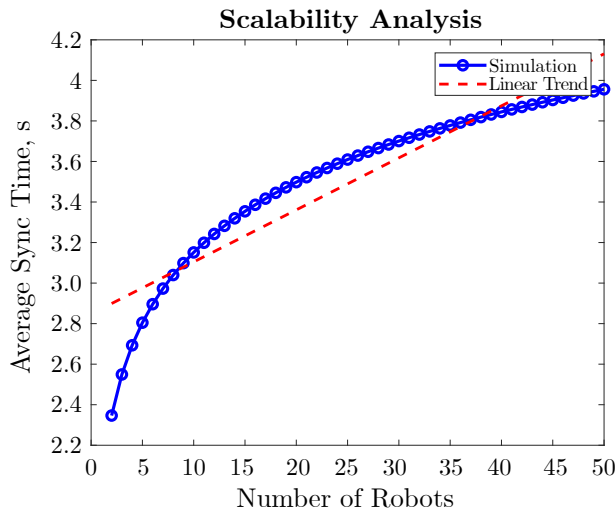


Fig. 10. Scalability analysis showing average synchronization time versus number of robots (color online)

Table 1. Average synchronization time as a function of number of robots

Number of Robots	Sync Time (s)
2	2.35
5	2.80
10	3.15
12	3.50
25	3.61
30	3.70
35	3.78
40	3.84
45	3.90
50	3.96

### 5. Discussion

The plot and data clearly indicate that synchronization time increases progressively with the number of robots. The linear regression trend exhibits a slope of approximately 0.023 seconds per robot. This result is highly efficient, indicating that as the system scales to 50 robots, the additional synchronization burden is minimal. The near-linear behavior indicates the algorithm’s strong scalability, with minimal performance degradation as system size increases.

The results illustrate an effective and scalable synchronization strategy for networked nonlinear robotic systems. High-precision synchronization at a low incremental cost per agent is infrequently documented in the literature. Many current methods experience exponential time growth or necessitate centralized computation, thereby restricting scalability.

A comparative analysis with recent and relevant literature is presented in Table 2 to contextualize the contributions of the proposed framework. A key distinguishing feature of this work is its proven scalability and guaranteed synchronization within a fixed time frame. This study presents robust simulation results for up to 50 robotic agents, demonstrating a near-linear and minimal increase in

Table 2. Comparison of robotic synchronization methods and contributions

Characteristic	This Work	Ref. [45]	Ref. [61]	Ref. [63]	Ref. [44]
Sync Method	<b>Fixed-Time Sync</b>	Generalized Sync	Fixed-Time Sync	General Sync	N/A (Single Robot)
Scalability	<b>Excellent, tested to 50 robots</b>	Obstacle-focused, less scalable	Theoretical focus	Multi-robot, no fixed-time focus	N/A (Single Robot)
Dynamics	<b>4D Fractional-Order Chaos</b>	Integer-Order Chaos	Chaotic Multi-Robot	Chaotic Dynamics	Integer-Order Chaos
Contribution	<b>Scalable fixed-time sync framework</b>	Obstacle avoidance with sync	Theoretical fixed-time sync	Multi-robot sync method	Single robot navigation

synchronization time, in contrast to other works that have examined fixed-time theory [61] or generalized synchronization for tasks such as obstacle avoidance [45]. This contrasts with methods based on single-robot navigation [44] or those that do not provide a fixed-time guarantee [63], which is essential for mission-critical applications that demand predictable convergence. The introduction of a novel 4D fractional-order chaotic system enhances dynamic complexity and modeling fidelity relative to the integer-order systems in the comparative studies. This analysis highlights that the framework offers a robust and efficient solution to the challenge of guaranteed-time synchronization in large-scale robotic swarms, addressing a significant gap in the current literature.

## Conclusion

The present investigation has provided important insights into a previously unexplored four-dimensional chaotic system distinguished by the complete absence of equilibrium points. Through a detailed investigation of its integer-order and fractional-order forms, complex dynamical behaviors have been identified, including distinct chaotic attractors and transition mechanisms characterized by Lyapunov spectra and bifurcation diagrams. In particular, bistable behavior has been established through the coexistence of two attractors under the same parameter set and different initial conditions. To bridge theory and application, a fixed-time synchronization framework grounded in fractional stability theory has been developed, enabling coordinated dynamics between the fractional-order and integer-order representations. The synchronized system has been successfully employed for trajectory regulation in differential-drive mobile robots. Moreover, the proposed strategy has been shown to be fully distributed and capable of maintaining synchronization with a low and consistent temporal overhead. These features make the framework well suited for large-scale applications, including coordinated swarm robotics, decentralized sensor networks, and autonomous vehicles. Finally, the numerical results have validated both the synchronization performance and its usefulness in robotic navigation, thereby demonstrating the practical potential of the proposed method for cyber-physical systems subject to nonlinear dynamics and guaranteed-time convergence requirements.

## References

1. Lorenz EN. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 1963;20(2):130–141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2.
2. Wang X, Akgul A, Cicek S, Pham VT, Hoang DV. A chaotic system with two stable equilibrium points: dynamics, circuit realization and communication application. *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2017;27(8):1750130. DOI: 10.1142/S0218127417501309.
3. Liao TL, Wan PY, Yan JJ. Design of synchronized large-scale chaos random number generators and its application to secure communication. *Appl. Sci.* 2019;9(1):185. DOI: 10.3390/app9010185.
4. Vaidyanathan S, Sambas A, Mamat M, Ws MS. A new three-dimensional chaotic system with a hidden attractor, circuit design and application in wireless mobile robot. *Arch. Control Sci.* 2017;27:541–554. DOI: 10.1515/acsc-2017-0032.
5. Yıldız BS, Kumar S, Pholdee N, Bureerat S, Sait SM, Yildiz AR. A new chaotic Lévy flight distribution optimization algorithm for solving constrained engineering problems. *Expert Syst.* 2022;39(8):e12992. DOI: 10.1111/exsy.12992.
6. Rössler OE. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A* 1976;57(5):397–398. DOI: 10.1016/0375-9601(76)90101-8.
7. Chen F, Lin Y, Ren Z, Wang S. Uniform-in-time propagation of chaos for kinetic mean field Langevin dynamics. *Electron. J. Probab.* 2024;29(17):1–43. DOI: 10.1214/24-EJP1079.
8. Sprott JC. Some simple chaotic flows. *Phys. Rev. E.* 1994;50(2):R647–R650. DOI: 10.1103/PhysRevE.50.R647.

9. Wang N, Zhang G, Kuznetsov NV, Bao H. Hidden attractors and multistability in a modified Chua's circuit. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2021;92:105494. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105494.
10. Dong C, Yang M, Jia L, Li Z. Dynamics investigation and chaos-based application of a novel no-equilibrium system with coexisting hidden attractors. *Physica A.* 2024;633:129391. DOI: 10.1016/j.physa.2023.129391.
11. Zaamoune F, Volos C. Sculpting chaos: Task-specific robotic control with a novel hopfield system and false attractors. *Symmetry.* 2025;17(12):2081. DOI: 10.3390/sym17122081.
12. Zaamoune F, Tinedert IE, Abro KA, Menacer T, Faizan M. A novel Chua circuit with hyperbolic tangent nonlinearity for brain-inspired dynamics and stable delta rhythm generation. *Int. J. Numer. Model.* 2026;39(1):e70141. DOI: 10.1002/jnm.70141.
13. Zaamoune F, Tinedert IE, Menacer T. Analysis of novel 3D chaotic system, hidden coexisting, adaptive control, offset boosting control, and circuit implementation. *Eur. J. Control.* 2025;8:101259. DOI: 10.1016/j.ejcon.2025.101259.
14. Zaamoune F, Tinedert IE, Menacer T, Wang N. Multistability and multi-spiral chaotic sea in a novel 3-D system with a line of equilibrium. *Phys. Scr.* 2025;100(3):035226. DOI: 10.1088/1402-4896/adb3d8
15. Zaamoune F, Tinedert IE, Abro KA, Faizan M. A novel approach to structured multistability in a 3D chaotic system: Implementation and circuit validation. *Int. J. Numer. Model.* 2024;38(6):e70123. DOI: 10.1002/jnm.70123.
16. Ahmad WM, Sprott JC. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. *Chaos Solitons and Fractals.* 2003;16(2):339–351. DOI: 10.1016/S0960-0779(02)00438-1.
17. Basti B, Hammami N, Berrabah I, Nouioua F, Djemiat R, Benhamidouche N. Stability analysis and existence of solutions for a modified SIRD model of COVID-19 with fractional derivatives. *Symmetry.* 2021;13(8):1431. DOI: 10.3390/sym13081431.
18. Bayani A, Jafari MA, Rajagopal K, Jiang H, Jafari S. A novel fractional-order chaotic system with specific topology: from proposing to FPGA implementation. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2017;226:3729–3745. DOI: 10.1140/epjst/e2018-00031-y.
19. Zerimeche H, Houmor T, Berkane A. Combination synchronization of different dimensions fractional-order non-autonomous chaotic systems using scaling matrix. *Int. J. Dyn. Control.* 2021;9:788–796. DOI: 10.1007/s40435-020-00660-9.
20. Houmor T, Zerimeche H, Berkane A. Dynamical behaviors of fractional-order Selkov model and its discretization. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory.* 2021;21:246–261.
21. Petráš I. A note on the fractional-order Chua's system. *Chaos Solitons and Fractals.* 2008;38(1):140–147. DOI: 10.1016/j.chaos.2006.10.054.
22. Lu JG, Chen G. A note on the fractional-order Chen system. *Chaos Solitons and Fractals* 2006;27(3):685–688. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.04.037.
23. Luo C, Wang X. Chaos in the fractional-order complex Lorenz system and its synchronization. *Nonlinear Dyn.* 2013;71:241–257. DOI: 10.1007/s11071-012-0656-z.
24. Iskakova K, Alam MM, Ahmad S, Saifullah S, Akgül A, Yılmaz G. Dynamical study of a novel 4D hyperchaotic system: an integer and fractional order analysis. *Math. Comput. Simul.* 2023;208:219–245. DOI: 10.1016/j.matcom.2023.01.024.
25. Zhang X, Li Z. Hidden extreme multistability in a novel 4D fractional-order chaotic system. *Int. J. Non-Linear Mech.* 2019;111:14–27. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.01.009.
26. Wei D, Dong C. Dynamics, periodic orbits of a novel four-dimensional hyperchaotic system with hidden attractors. *Phys. Scr.* 2024;99(8):085251. DOI: 10.1088/1402-4896/ad61cc.
27. Yu F, Zhang S, Su D, Wu Y, Gracia YM, Yin H. Dynamic analysis and implementation of FPGA

- for a new 4D fractional-order memristive Hopfield neural network. *Fractal Fract.* 2025;9(2):115. DOI: 10.3390/fractalfract9020115.
28. Agrawal SK, Srivastava M, Das S. Synchronization of fractional order chaotic systems using active control method. *Chaos Solitons and Fractals.* 2012;45(6):737–752. DOI: 10.1016/j.chaos.2012.02.004.
  29. Pham VT, Ouannas A, Volos C, Kapitaniak T. A simple fractional-order chaotic system without equilibrium and its synchronization. *AEU-Int. J. Electron. Commun.* 2018;86:69–76. DOI: 10.1016/j.aeue.2018.01.023.
  30. Abro KA, Zaamoune F, Mahariq I, Faizan M. Thermal analysis of rotating fluid under fractal–fractional differential approach with G-Jitter effect: The dynamism of modulation. *Phys. Fluids.* 2025; 37:093124. DOI: 10.1063/5.0288914.
  31. Abro KA, Atangana A, Gómez-Aguilar JF. Optimal synchronization of fractal–fractional differentials on chaotic convection for Newtonian and non-Newtonian fluids. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2023;232:2403–2414. DOI: 10.1140/epjs/s11734-023-00913-6.
  32. Aghababa MP. Finite-time chaos control and synchronization of fractional-order nonautonomous chaotic (hyperchaotic) systems using fractional nonsingular terminal sliding mode technique. *Nonlinear Dyn.* 2012;69:247–261. DOI: 10.1007/s11071-011-0261-6.
  33. Butusov D, Rybin V, Karimov A. Fast time-reversible synchronization of chaotic systems. *Phys. Rev. E.* 2025;111(1):014213. DOI: 10.1103/PhysRevE.111.014213.
  34. Li TZ, Tan XW, Wang Y, Wang QK. Analysis of stability and quasi-synchronization in fractional-order neural networks with mixed delays, uncertainties, and external disturbances. *Fractal Fract.* 2026;10(1):73. DOI: 10.3390/fractalfract10010073.
  35. Bendib I, Ouannas A, Dalah M. Mittag–Leffler synchronization of fractional-order reaction–diffusion systems. *Asian J. Control.* 2026;28:279–293. DOI: 10.1002/asjc.3702.
  36. He Y, Peng J, Zheng S. Fractional-order financial system and fixed-time synchronization. *Fractal Fract.* 2022;6(9):507. DOI: 10.3390/fractalfract6090507.
  37. Cheng Y, Yang W, Xu W, Zhong S. Impulsive effects on delayed fractional-order neural networks: sliding mode control-based fixed-time synchronization analysis. *Nonlinear Dyn.* 2025;113:16571–16592. DOI: 10.1007/s11071-025-10955-1.
  38. Sun Y, Liu Y, Liu L. Fixed-time synchronization for fractional-order cellular inertial fuzzy neural networks with mixed time-varying delays. *Fractal Fract.* 2024;8(2):97. DOI: 10.3390/fractalfract8020097.
  39. Danca MF, Kuznetsov N. Matlab code for Lyapunov exponents of fractional-order systems. *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2018;28(5):1850067. DOI: 10.1142/S0218127418500670.
  40. Danca MF. Matlab code for Lyapunov exponents of fractional-order systems, part II: The noncommensurate case. *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2021;31(12):2150187. DOI: 10.1142/S021812742150187X.
  41. Ding Y, Liu H. A new fixed-time stability criterion for fractional-order systems. *AIMS Math.* 2022;7(4):6173–6181. DOI: 10.3934/math.2022343.
  42. Nakamura Y, Sekiguchi A. The chaotic mobile robot. *IEEE Trans. Robot. Autom.* 2001;17(6):898–904. DOI: 10.1109/70.976022.
  43. Zang X, Iqbal S, Zhu Y, Liu X, Zhao J. Applications of chaotic dynamics in robotics. *Int. J. Adv. Robot. Syst.* 2016;13(2):60. DOI: 10.5772/62796.
  44. Nwachioma C, Pérez-Cruz JH. Analysis of a new chaotic system, electronic realization and use in navigation of differential drive mobile robot. *Chaos Solitons and Fractals.* 2021;144:110684. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110684.
  45. Marwan M, Li F, Ahmad S, Wang N. Mixed obstacle avoidance in mobile chaotic robots

- with directional keypads and its non-identical generalized synchronization. *Nonlinear Dyn.* 2025;113:2377–2390. DOI: 10.1007/s11071-024-10361-z.
46. Li Y, Li C, Yu W, Lei T, Li RYM. Symmetric pseudo-multi-scroll attractor and its application in mobile robot path planning. *Symmetry.* 2024;16(7):868. DOI: 10.3390/sym16070868.
  47. Abro KA, Atangana A, Gómez-Aguilar JF. Chaos control and characterization of brushless DC motor via integral and differential fractal-fractional techniques. *Int. J. Model. Simul.* 2023;43(4): 416–425. DOI: 10.1080/02286203.2022.2086743.
  48. Valencia-Ponce MA, González-Zapata AM, de la Fraga LG, Sanchez-Lopez C, Tlelo-Cuautle E. Integrated circuit design of fractional-order chaotic systems optimized by metaheuristics. *Electronics.* 2023;12(2):413. DOI: 10.3390/electronics12020413.
  49. Singh AP, Bingi K. Applications of fractional-order calculus in robotics. *Fractal Fract.* 2024;8(7): 403. DOI: 10.3390/fractalfract8070403.
  50. Kethiri MF, Charrouf O, Betka A, Tibermacine IE, Napoli C. Hybrid fuzzy-PSO based self-tuning fractional order PI controller for BLDC motors in electric vehicles: Comparative analysis and experimental validation. *J. Vib. Control.* 2025;10775463251374112. DOI: 10.1177/10775463251374112.
  51. Kethiri MF, Charrouf O, Betka A, Salman M, Boccaletti C. Minimizing power losses in BLDC motor drives through adaptive flux control: A real-time experimental study. *Actuators.* 2025;14(8):395. DOI: 10.3390/act14080395.
  52. Yurdem B, Aksu MF, Sagbas M. Microcontroller realization of a novel 4D hyperchaotic system and its autonomous mobile robot application. *Informacije MIDEM.* 2025;55(3):151–165. DOI: 10.1109/ISDFS58141.2023.10131716.
  53. Labbadi M, Boubaker S, Djemai M, Mekni SK, Bekrar A. Fixed-time fractional-order global sliding mode control for nonholonomic mobile robot systems under external disturbances. *Fractal Fract.* 2022;6(4):177. DOI: 10.3390/fractalfract6040177.
  54. Cui Y, Zheng Z. Novel fractional-order chaotic system applied to mobile robot path planning and chaotic path synchronization. *Symmetry.* 2025;17(3):350. DOI: 10.3390/sym17030350.
  55. Das S. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls.* Berlin: Springer; 2007. 240 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72703-3.
  56. Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Boca Raton: CRC Press; 1993. 1016 p.
  57. Benettin G, Galgani L, Giorgilli A, Strelcyn JM. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica.* 1980;15:9–20. DOI: 10.1007/BF02128236.
  58. Diethelm K, Ford NJ, Freed AD. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dyn.* 2002;29:3–22. DOI: 10.1023/A:1016592219341
  59. Hardy GH, Littlewood JE, Pólya G. *Inequalities.* Cambridge: Cambridge University Press; 1952. 324 p.
  60. Ouannas A, Abu-Saris R. A robust control method for  $Q-S$  synchronization between different dimensional integer-order and fractional-order chaotic systems. *J. Control Sci. Eng.* 2015;2015(4): 703753. DOI: 10.1155/2015/703753.
  61. Li S, Zhang S, He G, Jiang T. Discrete-time flocking control in multi-robot systems with random link failures. *IEEE Transactions on Vehicular Technology.* 2024;73(9):12290–12304. DOI: 10.1109/TVT.2024.3382617.
  62. Sun F, Li H, Zhu W, Kurths J. Fixed-time formation tracking for multiple nonholonomic wheeled mobile robots based on distributed observer. *Nonlinear Dynamics.* 2021;106:3331–3349. DOI: 10.1007/s11071-021-06946-7.
  63. Zhou L, Tokekar P. Multi-robot coordination and planning in uncertain and adversarial environments. *Current Robotics Reports.* 2021;2:147–157. DOI: 10.1007/s43154-021-00046-5.



*Заамун Файза* — профессор лаборатории прикладной математики математического факультета университета Мохамеда Хидера Бискры (Алжир). Phd в области математики (университет Бискры). Научные интересы: хаос, теория бифуркаций, системы с дробным хаосом, шифрование изображений, мобильные роботы и нейронные сети.

Алжир, 07000 Бискра, BP 145 RP  
Университет Мохамеда Хидера Бискры  
E-mail: faiza.zaamoune@univ-biskra.dz  
ORCID: 0000-0002-0099-4952

*Зеримеш Хаджер* — исследователь, специалист в области прикладной нелинейной динамики и теории дробного исчисления. Работает на факультете точных наук университета Константина 1 (Алжир).

Алжир, 25017 Константин, улица Айн-эль-Бей, 325  
Университет братьев Ментури Константина 1  
E-mail: hadjer.zerimeche@umc.edu.dz



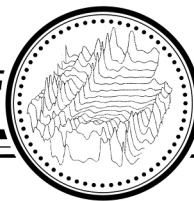
*Ибрахим Рабха Ваэлл* — профессор научно-исследовательского центра университета Аль-Айен (Ирак). Phd в области сложных систем (2011, Центр моделирования и анализа данных в Национальном университете Малайзии). Имеет сертификат Google Data Analytics от Coursera (2022, США). Научные интересы: сложные системы, облачные системы, математическое моделирование, пересечение фракталов и дробное исчисление с приложениями в различных научных областях.

Ирак, Насирия, Thi Qar, Nile Street  
Университет Аль-Айен  
E-mail: rabhaibrahim@yahoo.com  
ORCID: 0000-0001-9341-025X



*Каримов Артур Искандарович* — кандидат технических наук (2017, СПбГЭТУ «ЛЭТИ»), магистр английского языка (2014, СПбГЭТУ «ЛЭТИ»). Доцент кафедры автоматизированного проектирования Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ». Научные интересы: робототехника, искусственный интеллект, идентификация систем и теория хаоса.

Россия, 197022 Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5Ф  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»  
E-mail: aikarimov@etu.ru  
ORCID: 0000-0002-2591-0962  
AuthorID (eLibrary.Ru): 767425



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3)

Обзорная статья  
УДК 004.8

DOI: 10.18500/0869-6632-003211  
EDN: UIJBGW

### Цифровые двойники: синтез теории сложности и искусственного интеллекта

А. В. Андреев<sup>1</sup>, Л. Ш. Дараселия<sup>2</sup>, В. С. Дождев<sup>3</sup>, А. В. Шендерюк-Жидков<sup>4</sup>,  
В. В. Шпак<sup>3</sup>, А. Е. Храмов<sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup>Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва, Россия

<sup>2</sup>ФГАУ «Цифровые промышленные технологии», Москва, Россия

<sup>3</sup>Министерство промышленности и торговли Российской Федерации, Москва, Россия

<sup>4</sup>Совет Федерации Федерального Собрания Российской Федерации, Москва, Россия

E-mail: andreevandre1993@gmail.com, L.Daraseliya@cit.gov.ru, dozhdevvs@minprom.gov.ru,  
a.shenderyuk@yandex.ru, shpakvv@minprom.gov.ru, ✉hramov.ae@rea.ru

Поступила в редакцию 15.12.2025, принята к публикации 23.01.2026,

опубликована онлайн 1.02.2026, опубликована 29.05.2026

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — проанализировать концепцию цифровых двойников как технологии, объединяющей теорию сложности и искусственный интеллект, а также рассмотреть их применение в различных областях. Особое внимание уделено математическим подходам к построению цифровых двойников, их отличиям от традиционных математических моделей и перспективам развития. **Методы.** В работе использован междисциплинарный подход, включающий анализ современных технологий, таких как физически информированные нейронные сети, модели пониженного порядка, графовые нейронные сети и резервуарные вычисления. Проведено сравнение методов моделирования, основанных на первых принципах и данных, с акцентом на их интеграцию для создания гибридных цифровых двойников. **Результаты.** Показано, что цифровые двойники обладают уникальными характеристиками, такими как динамичность, адаптивность и двусторонняя связь с физическими объектами. Выявлены ключевые преимущества и ограничения различных математических подходов, включая их применимость в промышленности, медицине, экономике и других сферах. Предложена обобщенная математическая формализация цифрового двойника, объединяющая традиционные модели и методы машинного обучения. **Заключение.** Сформулированы перспективы развития цифровых двойников, включая создание сквозных экосистем и развитие гибридных подходов к моделированию сложных нелинейных процессов. Подчеркнута важность дальнейшей интеграции методов теории сложности и искусственного интеллекта для повышения точности и адаптивности виртуальных моделей. Цифровые двойники открывают новые возможности для прогнозирования и управления сложными системами в условиях неопределенности, что делает их ключевым инструментом в науке, промышленности и обществе.

**Ключевые слова:** цифровые двойники, искусственный интеллект, теория сложности, нелинейная динамика, машинное обучение, гибридные модели, предиктивное моделирование, персонализированная медицина, Индустрия 4.0, графовые нейронные сети, физически информированные сети.

**Для цитирования:** Андреев А. В., Дараселия Л. Ш., Дождев В. С., Шендерюк-Жидков А. В., Шпак В. В., Храмов А. Е. Цифровые двойники: синтез теории сложности и искусственного интеллекта // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 3. С. 371–419. DOI: 10.18500/0869-6632-003211. EDN: UIJBGW

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Digital twins: a synthesis of complexity theory and artificial intelligence

A. V. Andreev<sup>1</sup>, L. Sh. Daraselya<sup>2</sup>, V. S. Dozhdev<sup>3</sup>, A. V. Shenderuk-Zhidkov<sup>4</sup>,  
V. V. Shpak<sup>3</sup>, A. E. Hramov<sup>2,4</sup>✉

<sup>1</sup>Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Federal State Autonomous Institution “Digital Industrial Technologies”, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Ministry of Industry and Trade of the Russian Federation, Moscow, Russia,

<sup>4</sup>Federation Council of the Russian Federation, Moscow, Russia

E-mail: andreevandre1993@gmail.com, L.Daraseliya@cit.gov.ru, dozhdevvs@minprom.gov.ru,  
a.shenderyuk@yandex.ru, shpakvv@minprom.gov.ru, ✉hramov.ae@rea.ru

Received 15.12.2025, accepted 23.01.2026, available online 1.02.2026, published 29.05.2026

**Abstract.** *Purpose.* The objective of this study is to analyze the concept of digital twins as a technology integrating complexity theory and artificial intelligence, and to examine their applications across various fields. Particular emphasis is placed on mathematical approaches to the construction of digital twins, their distinctions from traditional mathematical models, and future development prospects. *Methods.* This research employs an interdisciplinary approach, incorporating an analysis of contemporary technologies such as physics-informed neural networks, reduced-order models, graph neural networks, and reservoir computing. A comparison of first-principles and data-driven modeling methods is conducted, with a focus on their integration for creating hybrid digital twins. *Results.* The findings demonstrate that digital twins possess unique characteristics, including dynamism, adaptability, and bidirectional interaction with physical objects. The key advantages and limitations of various mathematical approaches are identified, encompassing their applicability in industry, medicine, economics, and other domains. A general mathematical formalization of a digital twin, integrating traditional models and machine learning methods, is proposed. *Conclusion.* The prospects for the development of digital twins are outlined, including the creation of end-to-end ecosystems and the advancement of hybrid approaches for modeling complex nonlinear processes. The importance of further integration of complexity theory and artificial intelligence methods to enhance the accuracy and adaptability of virtual models is emphasized. Digital twins present new opportunities for the forecasting and management of complex systems under uncertainty, establishing them as a pivotal tool in science, industry, and society.

**Keywords:** digital twins, artificial intelligence, complexity theory, nonlinear dynamics, machine learning, hybrid models, predictive modeling, personalized medicine, Industry 4.0, graph neural networks, physics-informed neural networks.

**For citation:** Andreev AV, Daraselya LSh, Dozhdev VS, Shenderuk-Zhidkov AV, Shpak VV, Hramov AE. Digital twins: a synthesis of complexity theory and artificial intelligence. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2026;34(3):371–419. DOI: 10.18500/0869-6632-003211

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение. Экскурс в историю

Цифровые двойники (англ. Digital Twins) — одна из наиболее перспективных технологий XXI века, все чаще находящая применение в самых разных областях: от промышленности и науки до медицины и управления городской инфраструктурой. Суть цифровых двойников заключается в создании виртуальных копий реальных объектов, процессов или систем, которые динамически отражают их состояние в реальном времени. Это позволяет не только отслеживать текущее состояние объекта или системы, но и прогнозировать их поведение, оптимизировать процессы и предотвращать возможные сбои.

История цифровых двойников восходит к программе НАСА «Аполлон», где для обучения астронавтов и диспетчеров использовалось 15 симуляторов [1]. Как писал позже Джин Кранц, главный полётный директор НАСА для «Аполлон–13»: «Симуляторы были одними из самых сложных технологий всей космической программы: единственными реальными вещами в симуляционном обучении были экипаж, кабина и консоли управления полетами, все остальное было притворно, созданное кучей компьютеров, множеством формул и квалифицированными техни-

*ческими специалистами»*. Хотя в то время они, очевидно, не назывались так, эти симуляторы были, возможно, первым реальным примером «цифровых двойников». Эти симуляторы высокой точности и связанные с ними компьютерные системы имели решающее значение для успеха программы «Аполлон». Различные симуляторы управлялись отдельными компьютерами, которые могли объединяться для имитации взаимодействия различных подсистем. Было четыре компьютера для симулятора командного модуля и три для симулятора лунного модуля. Компьютеры могли общаться, используя 256 килобайт общей памяти, где можно было хранить информацию, необходимую на протяжении всего моделирования.

Конечно, симулятор сам по себе не является цифровым двойником, а является фактически моделью реального устройства. Но в миссии «Аполлон-13» эти симуляторы, по-видимому, стали первыми настоящими примерами цифровых двойников. Этот полет стал единственным из всей программы полетов на Луну, во время которого произошла серьезная авария. 13 апреля 1970 на расстоянии 330 000 километров от Земли во время плановых операций по обслуживанию баков с кислородом часть систем корабля «Аполлон-13» вышла из строя, при этом сам корабль с астронавтами продолжал удаляться от Земли на 640 километров каждую минуту.

Диспетчеры миссии НАСА смогли быстро адаптировать и изменить имеющиеся симуляторы, чтобы соответствовать условиям на реальном, частично вышедшем из строя космическом корабле, чтобы они могли исследовать, отвергать и совершенствовать стратегии, необходимые для возвращения астронавтов домой. Забегая вперед отметим, что большинство современных цифровых двойников включают в себя удаленный физический объект, который подключен к цифровой модели через непрерывный поток данных. Это соединение используется для обновления компьютерных моделей в ответ на изменения в реальном объекте. НАСА использовало самые современные на тот момент телекоммуникационные технологии, чтобы оставаться на связи со своим космическим аппаратом. Эти данные были использованы для модификации симуляторов, чтобы отразить состояние поврежденного космического аппарата. Хотя связь той эпохи являлась грубой по современным стандартам, реализация такой коммуникации между симуляторами и физическим объектом подчеркивает общую проблему с современными цифровыми двойниками: получение данных в режиме реального времени — это одно, но обработка этих данных в форму, которую можно легко использовать для принятия решений в режиме реального времени, остается проблемой. Даже с учетом этих ограничений управление полетом смогло быстро и точно диагностировать проблему и эвакуировать астронавтов в лунный модуль до того, как кислород в космическом модуле закончился. Также был сделан вывод, что двигатель сервисного модуля был поврежден. Инженеры смогли использовать эти данные для изменения своих симуляторов, чтобы отразить состояние физического объекта — еще одно ключевое качество цифрового двойника. Не вдаваясь во все подробности миссии по спасению экипажа, можно с уверенностью утверждать, что эта операция остается одним из лучших примеров применения цифрового двойника в критической аварийной ситуации. Скорее всего, без оперативно созданного цифрового двойника астронавты не смогли бы благополучно вернуться на Землю.

Давайте остановимся на характеристиках симуляторов программы «Аполлон», которые определяют их как пример цифрового двойника в действии.

*Физические.* Цифровые двойники наиболее полезны, когда они связаны с физическими объектами, которые (по крайней мере, временно) недоступны для прямого вмешательства человека. Несмотря на то, что на борту находились три астронавта, «Аполлон-13» является идеальным примером этого, так как экипаж не мог влиять на аппаратуру, которая находилась на корабле.

*Коммуникационные.* Цифровые двойники требуют постоянной обратной связи с физическими активами, которая может быть использована для обновления их состояния, а также для обоснования инженерных решений, что является ключевым требованием цифрового двойника. Современные цифровые двойники обычно используют Интернет вещей для достижения этой цели.

НАСА в 70-х годах достигло той же цели с помощью передовых телекоммуникаций, которые включали двустороннюю передачу данных.

*Адаптивные.* Цифровые двойники должны быть достаточно гибкими, чтобы реагировать на изменения в физическом объекте. События «Аполлона-13» разворачивались всего 3.5 дня, в течение которых произошло невероятное количество адаптаций и реинжиниринга. НАСА смогло в считанные часы перенастроить свои симуляторы на конфигурацию, которая никогда не была предусмотрена при их разработке, и использовать эти симуляторы для предоставления критически важной информации экипажу.

*Модульные.* Для программы «Аполлон» не существовало единого цифрового двойника; НАСА использовало 15 различных тренажеров для отработки различных аспектов миссии. Концепция, согласно которой цифровые двойники должны быть основаны на единой «большой унифицированной модели», предсказывающей все аспекты работы физического устройства, чаще всего не работает и сегодня. Современные цифровые двойники состоят из множества взаимодействующих моделей, которые могут быть иерархически объединены для учета различных аспектов реального объекта.

Мы специально уделили столько внимания этому уже ставшему историческим примеру создания цифрового двойника, чтобы показать их основные особенности и специфику, а также их отличие от цифровых моделей объектов, которая позволяет анализировать динамику объекта моделирования, но не позволяет прогнозировать его поведение без получения в реальном времени информации о состоянии объекта, которое может постоянно меняться в связи с управляющими воздействиями.

Сам термин «цифровой двойник» появился в работе [2], где он использовался для представления цифровой модели для итеративных модификаций при проектировании городских дорожных сетей. Однако общепризнано, что впервые концепция «цифрового двойника» как «цифрового эквивалента физического продукта» была использована в работе [3], где она была направлена на построение архитектуры управления информацией, которая поддерживает двунаправленный поток информации с точки зрения продукт-центризма.

Конечно, настоящий прорыв в развитии этой концепции произошел с появлением и широким внедрением таких технологий, как Интернет вещей (IoT), искусственный интеллект (ИИ) и обработка больших данных. Сегодня цифровые двойники становятся базовой технологией Индустрии 4.0, которая объединяет киберфизические системы, Интернет вещей (IoT) и ИИ для создания «умных производств» [4], широко применяясь в аэрокосмической отрасли, машиностроении, энергетике, логистике и т. д. Но надо иметь в виду, что концепция цифровых двойников все активнее выходит за границы только технических задач и находит свое применение в здравоохранении, экономике и даже в создании «умных городов».

Особую актуальность цифровые двойники приобретают в контексте науки о сложности и нелинейной динамики, где сложные системы демонстрируют непредсказуемое поведение, зависящее от множества взаимосвязанных факторов. Благодаря интеграции с ИИ и методами машинного обучения цифровые двойники позволяют моделировать такие системы, выявлять скрытые закономерности и адаптироваться к изменениям в реальном времени. Это открывает новые возможности для прогнозирования, управления и оптимизации в условиях высокой неопределенности.

В данной статье рассматриваются ключевые аспекты цифровых двойников: их эволюция, технологические основы, применение в различных сферах и перспективы развития, связанные с нелинейной динамикой и искусственным интеллектом. Предложен обобщенный математический подход к описанию цифровых двойников, который естественным образом объединяет подходы, основанные на традиционных математических моделях и технологиях машинного обучения. Особое внимание уделяется тому, как цифровые двойники могут стать инструментом для решения сложных, многопараметрических задач в науке и промышленности.

## 1. Определение цифрового двойника. Отличия от математической модели

Цифровой двойник — это виртуальная динамическая модель физического объекта, системы или процесса, которая синхронизируется с реальным объектом в режиме реального времени за счет обмена данными (см. рис. 1, на котором схематично показаны различные типы цифровых двойников в зависимости от уровня интеграции с реальной физической системой, процессом или объектом). Цифровой двойник не только отражает текущее состояние физического объекта/системы или процесса, но и позволяет прогнозировать их поведение, оптимизировать процессы и принимать решения на основе анализа данных, получаемых от реального объекта.

Прежде чем переходить к обсуждению свойств и характеристик цифрового двойника, следует остановиться на важном вопросе: чем различаются цифровой двойник и традиционная математическая модель физического объекта? Не является ли цифровой двойник просто другим названием для математической модели, которая реализована с использованием тех или иных численных методов на современных вычислительных платформах (в литературе, посвященной цифровым двойникам, ее часто называют цифровой моделью)? На эти вопросы можно дать однозначный ответ, что цифровой двойник и математическая модель объекта, хотя и связаны между собой, обладают принципиальными различиями. Основное отличие заключается в их взаимодействии с реальным объектом, системой или процессом. Модель объекта представляет собой представление, которое существует независимо от физического прототипа и не обновляется в реальном времени. В отличие от нее, цифровой двойник поддерживает постоянную динамическую синхронизацию с реальным объектом через потоки данных и системы обратной связи, которые обычно реализуются через IoT-системы.

Наглядным примером может служить сравнение модели — карты города со всеми домами и улицами — и цифрового двойника — Yandex Map с пробками, маршрутами и обновлениями информации в реальном времени, получаемой от объектов в городе. Аналогично можно сравнить 3D-модель двигателя в CAD-системе, которая остается просто цифровой моделью, с той же моделью, подключенной к датчикам работающего двигателя — в этом случае мы имеем дело уже с полноценным цифровым двойником.

Математические модели преимущественно используются для задач проектирования, визуализации или теоретического анализа, тогда как цифровые двойники служат для оперативного

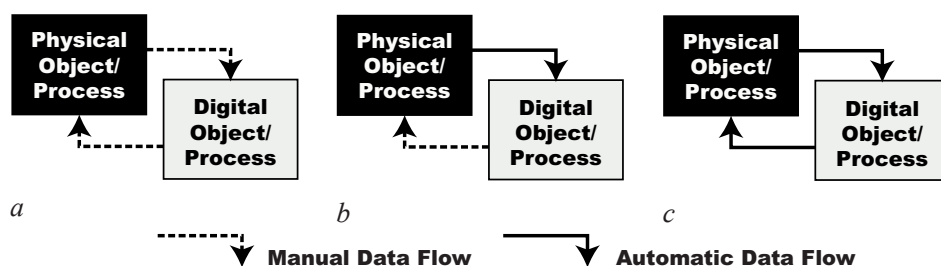


Рис. 1. Типы цифровых двойников в зависимости от уровня интеграции с реальной физической системой, процессом или объектом: *a* — математическая модель; *b* — цифровая тень; *c* — цифровой двойник. Представленная схема подчеркивает иерархию создания цифрового двойника, который содержит как математическую модель, описывающую взаимосвязь между всеми интересующими нас переменными физического объекта, так и цифровую тень, представляющую собой структурированный набор операционных, условных и процессуальных данных. Основано на данных из [5, 6]

Fig. 1. Types of Digital Twins based on level of integration: *a* — Digital Model; *b* — Digital Shadow; *c* — Digital Twin. The presented scheme highlights a hierarchy for creating a digital twin is presented, which contains both a mathematical model describing the relationship between all the variables of the physical object that interest us, and a digital shadow, which is a structured set of operational, conditional, and procedural data. Based on data from [5, 6]

мониторинга, прогнозирования и управления в реальном времени [7]. В результате мы можем сделать вывод, что основным отличием математической модели от цифрового двойника, как показано на рис. 1, а, является отсутствие самостоятельного взаимодействия и передачи данных между физическим объектом или процессом и его цифровым двойником.

Например, аэродинамическая модель самолета в ANSYS остается всего лишь моделью, в то время как цифровой двойник того же самолета, анализирующий актуальные данные полета и предупреждающий о потенциальных перегрузках, представляет собой принципиально иной инструмент. Если существует самостоятельный однонаправленный поток данных между физическим объектом и цифровым двойником, то говорят о цифровой тени объекта (см. рис. 1, б), отличительной способностью которой является способность к адаптации [8]. Математические модели при их анализе остаются неизменными, если только их не модифицируют вручную, чтобы учесть те или иные дополнительные особенности объекта. Цифровые тени и/или двойники непрерывно модифицируются и обучаются на поступающих данных и приобретают способность прогнозировать будущие состояния анализируемого объекта.

И, наконец, максимальную степень интеграции с реальным объектом демонстрирует цифровой двойник, для которого взаимодействие на уровне потоков данных между существующим физическим объектом и цифровым объектом полностью интегрировано в обоих направлениях (см. рис. 1, в). Таким образом, если модель можно сравнить со статичной картой местности, то цифровой двойник подобен современной навигационной системе, которая не только отображает объекты, но и оперативно реагирует на изменения, предлагая оптимальные решения в реальном времени, например, изменение маршрута движения в зависимости от пробок и загруженности дорог в городе. В то же самое время анализ и прогноз потоков транспорта может быть учтен на уровне оперативного перенаправления потоков как за счет средств городского регулирования, так и за счет изменения стратегии каждого пользователя навигационной системы на основании информации, предоставляемой ей, что обеспечивает наличие динамической обратной связи, то есть обратного потока информации от цифрового двойника к реальному физическому процессу.

## 2. Характеристики цифрового двойника

В зависимости от типа цифрового двойника он может обладать отличительными свойствами, но, независимо от этого, все цифровые двойники имеют несколько общих характеристик. Остановимся на них подробнее.

**2.1. Высокая точность.** В отличие от математических моделей, которые, как отмечалось в [9], являются «упрощенным представлением оригинала», «карикатурой на объект» в силу того, что они обычно обладают только рядом свойств, присущих физическому объекту, для эффективной работы цифровой двойник должен быть почти идентичной копией своего физического аналога с точки зрения динамики, содержания, функциональности и т. д. с очень высокой степенью точности.

Сверхреалистичная цифровая модель (англ. High-fidelity Digital Model) помогает цифровому двойнику имитировать и предсказывать все аспекты своего физического двойника при изменении его состояния. Цифровые модели с высокой точностью считаются основой цифровых двойников [10]. Высокий уровень детализации позволяет инструментам моделирования и прогнозирования цифрового двойника быть более надежными при представлении набора альтернативных действий или сценариев [11]. Обычно достаточно сложно достичь необходимую точность с использованием традиционных методов моделирования, например, с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или дифференциальных уравнений в частных производных (УЧП) за счет очень большого числа факторов, которые необходимо учесть для точного описания процессов в реальном физическом объекте. Более того, в случае медицинских

цифровых двойников это часто даже невозможно в принципе, потому что мы не имеем хороших математических детерминированных моделей, основанных на физических принципах, таких как системы ОДУ, описывающих соответствующие процессы в живых организмах. Например, для многих медицинских применений соответствующая базовая биология частично или полностью неизвестна. Так, известно, что некоторые заболевания имеют важный микробиомный компонент. Однако в большинстве случаев о механизмах, участвующих в этом процессе, известно очень мало. При этом данные о микробиоме легко собирать, и их много, поэтому есть возможность применять подходы, основанные на данных, для стратификации пациентов и получения потенциально полезных сведений для таргетирования лечения на подгруппы пациентов, идентифицированные с помощью алгоритмов машинного обучения [12]. Этот пример говорит о том, что для построения цифрового двойника нам не обязательно знать все особенности внутреннего функционирования исходного объекта.

Поэтому наиболее часто в настоящее время для построения цифровых двойников используются модели машинного обучения [13], которые позволяют преодолевать эти сложности за счет обучения на основе больших данных, которые регистрируются с физического объекта или процесса. Часто такой подход противоречит основному принципу математического моделирования об активной познавательной роли модели: модель необходима, чтобы выявить и понять поведение исследуемого моделируемого объекта. Однако модели машинного обучения часто не обладают этим свойством — они имеют высокую обобщающую способность к описанию процесса, но не позволяют в силу своей природы «черного ящика» объяснить те или иные закономерности взаимосвязей между характеристиками объекта, а повышение уровня прозрачности или интерпретируемости моделей машинного обучения обычно неизбежно ведет к снижению точности их работы за счет упрощения архитектуры моделей. Но для цифрового двойника это часто не важно. Мы уже знаем особенности работы объекта с использованием технологий математического моделирования, проведенного во время разработки и/или исследования физического объекта. Задача цифрового двойника — имитировать и предсказывать различные аспекты динамики и характеристик физического объекта, с чем методы ИИ отлично справляются. Это еще раз говорит о том, что цифровой двойник не заменяет традиционного математического моделирования, как и математические модели ограничены задачами познания и оптимизации объекта [9], а не его мониторинга и прогноза текущего состояния.

**2.2. Динамичность и нестационарность.** Обычно реальный объект динамичен, то есть он меняется во времени, а часто даже нестационарен, например, в случае, когда возникают сбои оборудования или пациент переходит из состояния «здоровье» в состояние «болезнь». Промышленные цифровые двойники характеризуются двумя особенностями: (1) они построены на основе тех или иных математических моделей физического объекта, которая должна быть «клонирована», и (2) они динамически в режиме реального времени калибруются по объекту с целью прогнозирования производительности системы и определения мер вмешательства, таких как профилактическое обслуживание и т. д. [14]. Другими словами, цифровой двойник развивается вместе с физическим объектом или системой с течением времени [5, 15]. Этот подход полностью соответствует и концепции персонализированной медицины, как лечебной, так и профилактической. Поэтому концепция цифровых двойников все больше находит применение в задачах персонализированной медицины [16].

Цифровой двойник развивается вместе со своим физическим аналогом на протяжении всего жизненного цикла в физическом и цифровом представлении. Любые изменения в физическом или цифровом двойнике отражаются в его аналоге, создавая замкнутую цепь обратной связи [17], показанную на рис. 2. Эта двухсторонняя связь осуществляется через двунаправленный обмен информацией, где «физически → виртуальная» и «виртуально → физическая» связи образуют

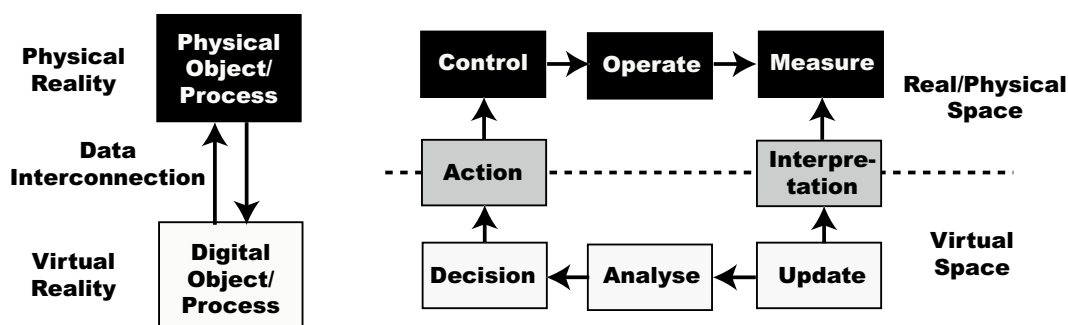


Рис. 2. Компоненты цифрового двойника и процессы высокого уровня в киберфизических системах (основано на данных из [17])

Fig. 2. Digital Twin components and high-level processes in cyber-physical systems (based on data from [17])

замкнутый цикл управления в киберфизической системе «физический объект ↔ цифровой двойник».

Таким образом, цифровой двойник самоадаптируется и самооптимизируется с помощью данных, регистрируемых с реального объекта в режиме реального времени, меняясь по мере изменения состояния физического объекта или процесса, корректируя свои параметры и состояние для возможности прогноза физического объекта [15, 18]. Это достигается за счет бесшовной связи и непрерывного обмена между физическим и виртуальным мирами, о которой поговорим в разделе 2.3. Цель динамичности цифрового двойника заключается в том, чтобы реалистично отражать реальный объект и его поведение в виртуальном представлении [19].

**2.3. Двухсторонняя связь.** Взаимодействие между физической реальностью и виртуальным представлением, реализующим замкнутую цепь обратной связи, составляет основу функциональности цифрового двойника. Как отмечено в разделе 2.2, это взаимодействие осуществляется через двунаправленный обмен информацией между физическим и цифровым пространствами, образуя замкнутый цикл управления.

«Физически → виртуальная» связь включает три ключевых этапа: сбор данных о физической системе, их интерпретацию в соответствии с выбранным уровнем абстракции и обновление состояний цифрового представления. В медицинских приложениях это соответствует интеграции клинических данных (лабораторные показатели, визуализация, мониторинг в реальном времени) в персонализированные модели пациента. Например, данные непрерывного мониторинга глюкозы могут ассимилироваться в фармакокинетическую модель для уточнения параметров инсулинотерапии.

«Виртуально → физическая» связь представляет процесс трансляции аналитических выводов цифрового двойника в действия, влияющие на физическую систему. Такой подход очевиден для инженерных управлений и соответствует автоматической корректировке параметров оборудования [17]. В здравоохранении данный процесс в настоящее время чаще реализуется непрямым способом через рекомендательные системы поддержки врачебных решений [20]. Цифровой двойник пациента может, к примеру, прогнозировать индивидуальный риск осложнений при различных схемах лечения, позволяя клиницистам выбирать оптимальную терапевтическую стратегию. Вместе с тем в некоторых биомедицинских приложениях, работающих в реальном времени, например, в интеллектуальных системах интерфейсов «мозг–компьютер» [21] или системах глубокой стимуляции мозга [22], допустимо прямое воздействие на живой организм в силу необходимости быстрого принятия очень большого числа решений на основе текущего состояния организма [23, 24]. Однако такие сценарии применения цифровых двойников в биомедицине все же пока остаются исключением из правил [25].

**2.4. Многомасштабность и модульность.** Эти свойства тесно связаны между собой и заключаются в том, что цифровой двойник, являясь виртуальной копией своего физического двойника, должен включать в себя свойства реального объекта на нескольких масштабах или на нескольких уровнях. Например, нас может интересовать поведение макроскопического физического объекта как целого, но для этого необходимо учитывать его микроскопические характеристики, такие как шероховатость поверхности и т. д. [26]. Аналогичная ситуация возникает при построении цифровых моделей пациентов, где перспективным представляется использование гибридных моделей, сочетающих физические принципы, например, уравнения гемодинамики (микромасштабный уровень) с методами машинного обучения, связывающими микромасштабные характеристики с макропараметрами пациента (ЭКГ, кровяное давление и т. д.) [27, 28].

Модульный характер цифровых двойников обусловлен тем, что различные компоненты и детали, из которых состоит конечный продукт, имеют свои соответствующие модели, например, цифровой двойник самолета состоит из цифрового двойника стойки, цифрового двойника системы управления полетом и т. д. [29]. Таким образом, цифровой двойник можно рассматривать как серию интегрированных подмоделей [30]. Возникает серьезная проблема, как увязать подобные разрозненные модули в единую систему, которая могла бы дать точное описание и прогноз динамики физического объекта (см. раздел 2.1). В этом случае принципиально необходимо учитывать как многомасштабность рассматриваемых процессов на шкале времени, так и разнородные пространственные масштабы процессов, описываемых цифровыми двойниками.

### 3. Математические подходы к построению цифровых двойников

Описанная выше структура цифровых двойников представлена на рис. 3, а. Цифровой двойник используется для непрерывного во времени управления поведением и анализа состояния физического объекта или процесса на основании данных, которые удается получить с объекта/процесса в реальном времени с некоторой задержкой по времени  $\Delta T$ , которая определяется как задержкой в коммуникационных каналах, так и временем первичной обработки данных. Цифровые двойники при высокой степени достоверности положенных в их основу моделей также могут быть использованы для моделирования гипотетических ситуаций, например, условий возникновения аварийных состояний или различных воздействий на реальный объект.

Формализуем математическое описание цифрового двойника некоторого реального/физического объекта. Пусть задана математическая модель объекта

$$S = (\mathcal{F}, \mathcal{G}, X, Y, Z, P), \quad (1)$$

где  $\mathcal{F} : X \times Y \rightarrow Y$  — оператор эволюции состояния реального объекта,  $\mathcal{G} : Y \rightarrow Z$  — оператор наблюдения,  $X$  — пространство входных управляющих параметров,  $Y$  — пространство состояний объекта,  $Z$  — пространство выходных измеряемых величин,  $P$  — пространство управляющих параметров.

Тогда цифровой двойник объекта в самом общем виде можно определить как динамическую систему

$$D = (S, \Phi, \Psi, \Omega, \mathcal{K}, \varepsilon_{\text{доп}}), \quad (2)$$

где  $\Phi : Z \times Y \rightarrow X$  — алгоритм коррекции входных параметров на основе данных от физического объекта,  $\Psi : Y \times Z \rightarrow Y$  — механизм адаптации внутреннего состояния по измерениям,  $\Omega : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$  — функция оценки расхождения между моделью и объектом (оператор невязки),  $\mathcal{K} : Y \times Z \times \mathbb{R}^+ \rightarrow P$  — оператор калибровки параметров  $P$ ,  $\varepsilon_{\text{доп}}$  — допустимая погрешность представления состояния реального объекта.

Процесс работы цифрового двойника в процессе взаимодействия с реальным объектом в дискретные моменты времени  $k$  может быть описан следующей общей итерационной схемой.

1. *Получение данных*: на  $k$ -м моменте времени получаем измерение  $z_k \in Z$  с физического объекта.
2. *Коррекция входов*: вычисляем скорректированные входные параметры:  $\tilde{x}_k = \Phi(z_k, y_{k-1})$ .
3. *Прогноз состояния*: обновляем состояние модели:  $\hat{y}_k = F(\tilde{x}_k, \Psi(y_{k-1}, z_k))$ .
4. *Оценка точности*: вычисляем невязку между моделью и объектом:  $\varepsilon_k = \Omega(\tilde{x}_k, y_k)$ .
5. *Адаптация модели*:
  - Если  $\varepsilon_k \leq \varepsilon_{\text{доп}}$ , принимаем  $y_k = \hat{y}_k$ ,
  - Если  $\varepsilon_k > \varepsilon_{\text{доп}}$ , выполняем калибровку:

$$p_k = \mathcal{K}(y_{k-1}, z_k, \varepsilon_k),$$

$$y_k = \mathcal{F}_{p_k}(\tilde{x}_k, \Psi_{p_k}(y_{k-1}, z_k)),$$

где  $\mathcal{F}_{p_k}$  и  $\Psi_{p_k}$  — операторы модели и коррекции с обновленными параметрами  $P$ . Оператор  $\mathcal{K}$  может реализовываться различными методами: градиентным методом, методом наименьших квадратов, байесовской адаптацией, и т. д.

Отметим, что не все шаги данной схемы могут выполняться при построении цифрового двойника, в частности, при конкретных реализациях может опускаться шаг адаптации модели.

Окончательно в дискретном времени  $k$  цифровой двойник реализует отображение

$$D : Z^* \times Y \rightarrow Y \times \mathbb{R}^+, \quad (3)$$

где  $Z^*$  — последовательность измерений, а обновление состояния цифрового двойника происходит согласно следующему выражению:

$$y_k = F(\Phi(z_k, \Psi(y_{k-1}, z_k)), y_{k-1}). \quad (4)$$

Сходимость состояния цифрового двойника к состоянию реального объекта обеспечивается выполнением условия

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|z_k - G(y_k)\| < \delta \Rightarrow \Omega(x_k, y_k) < \varepsilon, \quad (5)$$

где величина  $\varepsilon$  характеризует точность представления цифровым двойником реального объекта в виртуальном пространстве. Здесь и далее  $\|\cdot\|$  обозначает евклидову норму (норму  $L_2$ ), если не оговорено иное.

Очевидно, что цифровые двойники могут быть применены практически во всех сферах нашей жизни — от производства и управлением движением транспорта до медицины и социальных процессов — при условии, что существуют подходящие методы для создания сверхточных и надежных математических моделей соответствующих процессов или объектов [31, 32]. По определению цифровые двойники должны быть в конечном итоге неотличимы от физических объектов в моделируемых ими аспектах поведения реального объекта. Это требование ставит большие задачи, например, в области надежности, устойчивости, достоверности и предсказуемости с использованием построенных моделей. Как показано на рис. 3, а (штриховая стрелка), в основе построения цифрового двойника используются ретроспективные данные о функционировании объекта/процесса (собранные датасеты) и/или понимание его работы на основе известных законов физики, биологии и т. д., например, мехатронные системы могут моделироваться с использованием законов механики, а для описания динамики кровотока в организме могут быть использованы соответствующие законы гемодинамики. Соответственно, в настоящее время рассматриваются

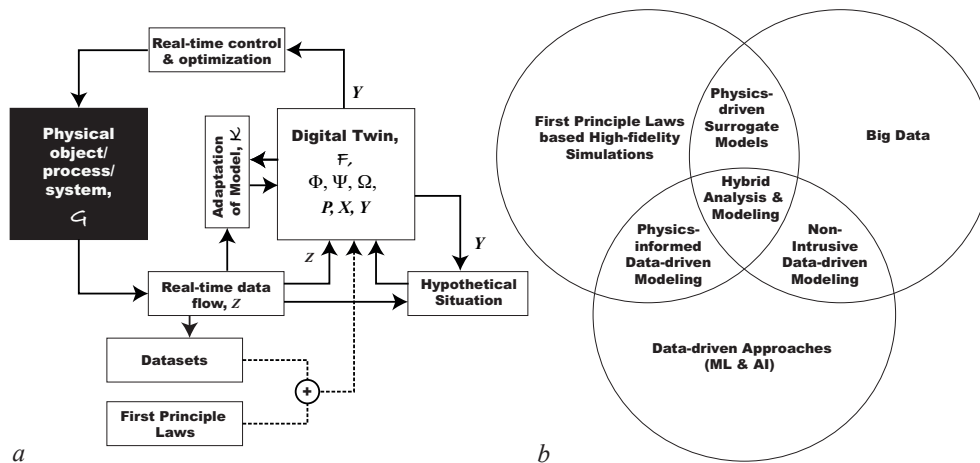


Рис. 3. *a* — Базовая схема применения и конструирования цифровых двойников. *b* — Диаграмма Венна методов моделирования, основанных на первых принципах и на больших данных, для создания цифровых двойников (панель *b* основана на данных из [33])

Fig. 3. *a* — Basic scheme for the application and design of digital twins. *b* — Venn diagram of first-principles modeling and data-driven approaches for the creation of digital twins (panel *b* is based on data from [33])

три основных математических подхода к созданию цифровых двойников: (1) построение математических моделей из первых принципов, (2) моделирование на основе данных и (3) гибридное моделирование на основе больших данных [33].

Моделирование на основе первых принципов основано на наблюдении за поведением обычно физического, реже — биологического объекта, а также на основании физических/биофизических законов и формировании частичного понимания, которое затем выражается в математических уравнениях, которые в конечном итоге решаются. Наиболее часто в качестве таких математических уравнений выступают ОДУ или УЧП. Поскольку понимание является лишь частичным и в процессе обычно делается много допущений и упрощений, то значительная часть реальных явлений и взаимосвязей в сложном объекте игнорируется.

Учитывая эти ограничения традиционного математического моделирования, для построения цифровых двойников все более популярным становится моделирование на основе данных, под которым мы понимаем подход к созданию моделей, при котором используются данные (например, результаты измерений) для обучения алгоритмов ИИ без явного учета физических законов. Моделирование на основе первых принципов, конечно, менее предвзято, чем методы на основе данных, поскольку использует законы природы, которые легко интерпретировать и обобщать, но они могут быть сложными в вычислительном плане (например, требовать решения уравнений в частных производных в многомерных пространствах, что даже для современной вычислительной техники является сложной задачей при работе в реальном времени), характеризоваться численной неустойчивостью и требовать экспертных знаний для построения.

В то же самое время моделирование, основанное на данных, становится все более эффективным благодаря растущему объему собираемых данных о процессах так называемых датасетов, относительно недорогим высокопроизводительным вычислительным решениям и эффективным методам обучения моделей ИИ. Данные о процессах отражают не только известные закономерности процессов и явлений, но и неизвестные их составляющие. Поэтому на основе этих данных можно составить более полную картину поведения реального объекта.

Интересным балансом, который объединяет достоинства моделей, основанных на первых принципах, и моделей, основанных на данных, являются редуцированные модели или, как их еще часто называют, модели пониженного порядка (англ. Reduced Order Models), или метамодели,

которые хорошо подходят для создания цифровых двойников, обеспечивая баланс между уровнем точности и необходимой вычислительной мощностью [34]. Редуцированные модели — это упрощенные версии высокоточных моделей, сохраняющие ключевые характеристики, но требующие меньше вычислительных ресурсов, например, вместо полного решения уравнений Навье–Стокса можно использовать аппроксимирующую модель на основе нейросетей, так называемую физически информированную нейронную сеть.

Наконец, гибридное моделирование, позволяющее сочетать в себе физическое моделирование и моделирование на основе данных с подходами больших данных, позволяет включить больше физики за счет увеличения сложности модели. Преимуществом данного подхода является то, что анализ больших данных позволяет выявить неизвестные закономерности данных и дать более точные оценки связанных величин. Подходы, которые извлекают суррогатные модели на основе данных из физических моделей, расположены на пересечении физического моделирования и анализа больших данных, такие модели традиционно называют суррогатными моделями на основе физики [33].

В табл. 1 представлены основные методы построения цифровых двойников и их сравнение с точки зрения преимуществ и ограничений.

Таблица 1. Сравнение методов построения цифровых двойников

Table 1. Comparison of methods for building digital twins

Метод	Основа	Преимущества	Ограничения	Ключевые выводы
Первые принципы	Физические законы (ОДУ/УЧП)	Высокая интерпретируемость, обобщаемость	Требует полных знаний о системе, вычислительно дорог	Физические модели незаменимы, когда известны законы системы.
PINNs	Данные + физические ограничения	Гибкость, работа с неполными данными	Сложность обучения, выбор гиперпараметров	Гибридные методы (PINNs, ROM) дают баланс между точностью и скоростью.
ROM	Редукция размерности	Высокая скорость прогноза	Потеря точности для нелинейных режимов	—
Глубокое обучение	Большие данные	Автоматическое извлечение признаков	Требует много данных, «чёрный ящик»	Машинное обучение эффективно при избытке данных, но страдает от недостаточной интерпретируемости.
Резервуарные вычисления	Данные и рекуррентные нейронные сети	Быстрое обучение, обработка временных рядов	Ограниченная точность, эмпирический дизайн	Компромисс для задач реального времени, простота учета внешних факторов.
Сетевые модели	Теория графов и сложных сетей, графовые нейронные сети	Учет структурных и функциональных зависимостей, топологий систем, выявление критических узлов, устойчивость к атакам	Сложность определения весов связей, вычислительная сложность для больших графов	Незаменимы для распределенных систем с явной структурой взаимодействий.

**3.1. Модели на основе первых принципов для построения цифровых двойников.** Концепция цифровых двойников существенно опирается на математическое моделирование с использованием дифференциальных уравнений. В этом контексте дифференциальные уравнения служат ядром виртуального представления физического объекта, позволяя не только описывать его текущее состояние, но и прогнозировать будущее поведение при различных сценариях.

В этом случае физический объект или процесс рассматривается как динамическая система, описываемая дифференциальными уравнениями, которые представляют собой мощный универсальный инструмент для описания эволюции систем во времени. Сущность данного подхода заключается в формализации поведения системы через математические соотношения, связывающие текущее состояние системы с его производными по времени, базируясь на первых принципах — законах механики, электродинамики, биофизики и т. д. Выбор конкретного типа дифференциальных уравнений — обыкновенных, в частных производных или стохастических — определяется природой моделируемого процесса и требуемой детализацией описания.

В этом случае динамика состояния  $\mathcal{F}$  в математической системе (1) описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t), \quad (6)$$

где  $\mathbf{y}(t) \in Y$  — вектор-состояние системы в момент  $t$ ,  $\mathbf{x}(t) \in X$  — входные параметры системы, а  $\mathbf{F} : X \times Y \rightarrow Y$  — гладкое векторное поле, задающее динамику системы.

При вычислительной реализации подобного цифрового дневника необходимо ввести, во-первых, временную сетку  $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$  (приведен простейший вариант эквидистантных временных интервалов) и, во-вторых, дискретный оператор эволюции  $\mathbf{F}_{\Delta} : X \times Y \rightarrow Y$ , получаемый численным интегрированием:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{F}_{\Delta}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) = \mathbf{y}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}(\tau)) d\tau.$$

В этом контексте дифференциальные уравнения служат ядром виртуального представления физического объекта, позволяя не только описывать его текущее состояние, но и прогнозировать будущее поведение при различных сценариях. Особую ценность представляет возможность анализа чувствительности системы к изменениям параметров  $\mathbf{p}$  и управления  $\mathbf{u}(\mathbf{y}, t)$  в системах с обратной связью вида

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(\mathbf{y}, t), t). \quad (7)$$

Такие модели позволяют проводить виртуальные эксперименты, оптимизировать параметры работы системы и разрабатывать алгоритмы управления без вмешательства в реальный объект.

Современные технологии цифровых двойников сталкиваются с проблемой моделирования сложных систем, где традиционные методы на основе дифференциальных уравнений могут быть либо вычислительно дорогостоящими, либо недостаточно точными из-за неполноты физических моделей. Поэтому, как отмечалось выше в разделе 3, современные тенденции в области моделирования динамических систем включают разработку редуцированных и гибридных моделей, сочетающих дифференциальные уравнения с методами машинного обучения, что особенно актуально для систем с неполной наблюдаемостью или сложными нелинейностями. Рассмотрим эти подходы более подробно.

**3.2. Физически информированные нейронные сети в цифровых двойниках.** Физически информированные нейронные сети (Physics-Informed Neural Networks, PINNs) предлагают принципиально новый подход, сочетающий преимущества глубокого обучения с фундаментальными законами физики. Они представляют собой класс моделей глубокого обучения, в которые явно встроены известные физические законы, описывающие поведение моделируемой системы.

В отличие от традиционных нейросетевых подходов, PINNs не требуют исключительно данных для обучения, а используют также уравнения, задающие физические ограничения, что делает их особенно перспективными для построения цифровых двойников реальных процессов, описываемых УЧП.

Рассмотрим цифровой двойник, заданный системой (1), где динамика состояния определяется дифференциальным уравнением (6). В случае PINNs модель состояния  $y(t)$  аппроксимируется нейронной сетью  $y_{\text{NN}}(t, \theta)$ , где  $\theta$  — набор обучаемых параметров нейронной сети.

Физическая информированность достигается за счет введения функции потерь, состоящей из двух компонент:

1. Потери на данных (data loss):

$$\mathcal{L}_{\text{data}} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} \|y_{\text{NN}}(t_i; \theta) - y_i\|^2, \quad (8)$$

где  $\{t_i, y_i\}_{i=1}^{N_d}$  — доступные измерения состояния объекта.

2. Физические потери (physics loss):

$$\mathcal{L}_{\text{physics}} = \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} \|\dot{y}_{\text{NN}}(t_j; \theta) - F(x(t_j), y_{\text{NN}}(t_j; \theta))\|^2, \quad (9)$$

где  $\{t_j\}_{j=1}^{N_c}$  — точки коллокации, в которых выполняется проверка соответствия поведения модели уравнению динамики.

Общая функция потерь представляет собой сумму этих двух типов потерь (8) и (9) и имеет вид

$$\mathcal{L}(\theta) = (1 - \lambda)\mathcal{L}_{\text{data}} + \lambda\mathcal{L}_{\text{physics}}, \quad (10)$$

где  $\lambda \in [0, 1]$  — весовой коэффициент, балансирующий вклад данных и физических законов. Нейронная сеть  $y_{\text{NN}}(t; \theta)$  тренируется таким образом, чтобы найти оптимальные параметры  $\theta^*$  путем минимизации общей функции потерь (10).

Пример использования PINN для моделирования классического нелинейного уравнения математической физики — уравнения Бюргерса, описывающего формирование ударной волны, показан на рис. 4.

В рамках итерационной схемы цифрового двойника PINNs могут быть использованы на этапах прогноза состояния и адаптации модели.

На этапе прогноза состояния вместо численного интегрирования уравнения (6) состояние модели предсказывается обученной нейросетью:

$$\hat{y}_k = y_{\text{NN}}(t_k, \theta^*). \quad (11)$$

На этапе адаптации модели в случае выполнения условия, если  $\varepsilon_k > \varepsilon_{\text{доп}}$ , параметры  $\theta$  уточняются путем минимизации  $\mathcal{L}(\theta)$  на новых данных. В этом случае физические ограничения позволяют сохранять корректность модели машинного обучения даже при недостатке данных.

Применение PINNs в цифровых двойниках предлагает несколько ключевых преимуществ.

1. *Гибкость моделирования.* Возможность объединения разрозненных данных (экспериментальных измерений, результатов численного моделирования) в единую согласованную модель. PINNs могут работать с частично наблюдаемыми системами и неполными физическими моделями.

2. *Обратные задачи.* Эффективное решение параметрических обратных задач, когда требуется определить неизвестные параметры системы  $\mathbf{p}$  по наблюдаемым данным:

$$\mathbf{p}^* = \underset{\mathbf{p} \in P}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^N \Omega(\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\tilde{x}_k, \Psi_{\mathbf{p}}(y_{k-1}, z_k)), z_k), \quad (12)$$

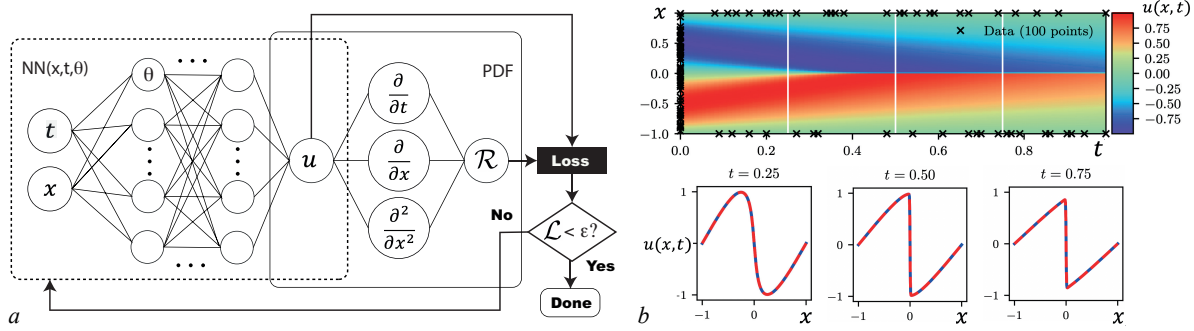


Рис. 4. *a* – Схема работы физически информированных нейронных сетей (PINNs) на примере уравнения Бюргерса. Нейронная сеть ( $\text{NN}(x, t, \theta)$ ) предсказывает решение  $u(x, t)$ , а физически информированная часть (PDF) вычисляет невязку уравнения Бюргерса:  $\mathcal{R}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Функция потерь  $\mathcal{L}$ , в соответствии с (10), включает ошибку на данных (начальные и граничные условия)  $\mathcal{L}_{\text{data}} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} (u(x_i, t_i) - u_i)^2$  и невязку уравнения  $\mathcal{L}_{\text{physics}} = \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} \mathcal{R}(x_j, t_j)^2$ . Производные вычисляются с помощью автоматического дифференцирования (на основе данных из работы [35]). *b* – Верхняя часть: Прогноз решения уравнения Бюргерса  $u(x, t)$  вместе с начальными и граничными обучающими данными. Использовано  $N_c = 10\,000$  точек коллокации, сгенерированных с помощью стратегии латинского гиперкуба [36]. Внизу: сравнение прогнозируемых и точных решений, соответствующих трем временным моментам, обозначенным белыми вертикальными линиями на верхней панели. Относительная ошибка (10) для этого случая составляет  $\mathcal{L} = 6.7 \times 10^{-4}$ . Обратим внимание, что эта погрешность примерно на два порядка ниже, чем та, о которой сообщалось в работе [37] по решению уравнений в частных производных с использованием гауссовых процессов на основе данных. Обучение модели заняло примерно 60 с на одной видеокарте NVIDIA Titan X GPU (на основе данных из [38]) (цвет онлайн)

Fig. 4. *a* – Schematic representation of PINNs using the Burgers equation as an example. The neural network ( $\text{NN}(x, t, \theta)$ ) predicts the solution  $u(x, t)$ , and the physically informed part (PDF) calculates the inconsistency of the Burgers equation:  $\mathcal{R}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . The loss function  $\mathcal{L}$  according to (10) includes an error on the data (initial and boundary conditions)  $\mathcal{L}_{\text{data}} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} (u(x_i, t_i) - u_i)^2$  and the equation mismatch  $\mathcal{L}_{\text{physics}} = \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} \mathcal{R}(x_j, t_j)^2$ . The derivatives are calculated using automatic differentiation (based on data from [35]). *b* – Top: Prediction of the solution to the Burgers equation  $u(x, t)$  together with the initial and boundary training data.  $N_c = 10,000$  collocation points generated using the Latin hypercube strategy [36] were used. Bottom: Comparison of the predicted and exact solutions corresponding to the three time points marked by white vertical lines in the top panel. The relative error (10) for this case is  $\mathcal{L} = 6.7 \times 10^{-4}$ . Note that this error is approximately two orders of magnitude lower than that reported in [37] for solving partial differential equations using data-driven Gaussian processes. Training the model took approximately 60 sec on a single NVIDIA Titan X GPU (based on data from [38]) (color online)

где  $\mathbf{p}^* \in P$  – искомые оптимальные параметры системы,  $\Omega : Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}^+$  – функционал невязки, определяемый формулой (5),  $\mathcal{F}\mathbf{p}$  – оператор эволюции состояния с параметрами  $\mathbf{p}$ ,  $\Psi_{\mathbf{p}}$  – механизм адаптации с параметрами  $\mathbf{p}$ ,  $\tilde{x}_k = \Phi(z_k, y_{k-1})$  – скорректированные входные параметры,  $z_{k=1}^N$  – последовательность наблюдений.

3. *Мультифизичность*. Естественное объединение уравнений из разных физических доменов (механика, теплопередача, электродинамика) в единую модель.

4. *Вычислительная эффективность*. После обучения PINN обеспечивает быстрое предсказание состояний системы без необходимости решения дифференциальных уравнений в частных производных в реальном времени.

5. *Интерпретируемость*. Использование PINN сохраняет физическую осмысленность прогнозов.

Несмотря на перспективность подхода, PINNs сталкиваются с рядом существенных ограничений. Во-первых, PINN характеризуется сложностью обучения: требуется баланс между данными и физическими ограничениями; выбор точек коллокации  $\{t_j\}_{j=1}^{N_c}$  и веса  $\lambda$  критичен для точности модели; имеются проблемы сходимости обучения при наличии множественных масштабов времени и пространства. Во-вторых, при обучении таких моделей мы сталкиваемся с высокими требованиями к вычислительным ресурсам при обучении для сложных многомерных систем, а также со сложностью верификации и валидации полученных моделей.

**3.3. Модели пониженного порядка в построении цифровых двойников.** При разработке цифровых двойников сложных динамических систем, описываемых уравнениями вида (6), часто возникает проблема вычислительной сложности. Полные модели, особенно основанные на уравнениях в частных производных, могут требовать значительных вычислительных ресурсов, что затрудняет их использование в режиме реального времени. В этом контексте модели пониженного порядка (Reduced Order Models, ROM) предлагают эффективный подход к снижению вычислительной нагрузки при сохранении ключевых физических свойств системы в рамках построения цифровых двойников [39].

Основная идея ROM заключается в проекции исходной высокоразмерной системы на подпространство существенно меньшей размерности. Рассмотрим полную модель, представленную в (1), где пространство состояний  $Y$  имеет размерность  $N$  (например, число узлов в конечно-элементной или конечно-сеточной дискретизации). Вместо работы непосредственно в  $Y$  мы ищем приближенное решение в подпространстве  $Q \subset Y$  размерности  $n \ll N$ :

$$y(t) \approx y_0 + \mathcal{U}q(t), \quad (13)$$

где  $y_0 \in Y$  — базовое состояние системы,  $\mathcal{U} : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$  — оператор проекции, а  $q(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор обобщенных координат. Такое представление позволяет переформулировать исходную систему (6) в терминах переменных  $q(t)$  с учетом (13):

$$\dot{q}(t) = \mathcal{U}^T F(x(t), y_0 + \mathcal{U}q(t)). \quad (14)$$

Эта редуцированная система сохраняет основные динамические характеристики оригинала, но требует на порядок меньше вычислительных ресурсов.

Интересно отметить, что ROM можно рассматривать как особый случай физически информированных моделей, обсуждавшихся ранее. В отличие от PINNs из раздела 3.2, где физические законы встраиваются через условия обучения (9), ROM непосредственно проецирует уравнения на подпространство. Однако современные гибридные подходы начинают сочетать оба метода, используя нейронные сети для построения нелинейных проекционных операторов  $\mathcal{U}$ .

На практике построение ROM включает два основных этапа. На подготовительном этапе обучения выполняется анализ полной модели: генерируется набор «снимков» состояний системы  $\{y_i\}_{i=1}^M$ , полученных при численном моделировании или экспериментальных измерениях, по которым строится базис  $\mathcal{U}$ .

Один из наиболее распространенных подходов к построению ROM основан на методе собственных ортогональных разложений (Proper Orthogonal Decomposition, POD) [40]. Этот метод позволяет выделить доминирующие моды динамики системы на основе анализа «снимков» её состояний  $\{y_i\}_{i=1}^M$ . Математически POD решает задачу минимизации:

$$\mathcal{U} = \operatorname{argmin}_{\mathcal{U}^T \mathcal{U} = \mathbf{I}} \sum_{i=1}^M \|y_i - \mathcal{U} \mathcal{U}^T y_i\|^2, \quad (15)$$

где  $\mathcal{U}$  — искомая ортонормированная матрица базисных векторов,  $\mathcal{U} \mathcal{U}^T$  — оператор проекции на подпространство,  $\mathbf{I}$  — единичная матрица.

Решение этой задачи сводится к сингулярному разложению матрицы снимков, где столбцы  $\mathcal{U}$  соответствуют главным собственным векторам ковариационной матрицы системы. Чем быстрее убывают сингулярные числа, тем эффективнее работает метод, позволяя существенно сократить размерность задачи.

Для периодических или квазипериодических систем эффективным подходом является метод гармонического баланса. В этом случае решение представляется в виде ряда Фурье:

$$y(t) \approx \sum_{k=-K}^K \hat{y}_k e^{\sqrt{-1}k\omega t}, \quad (16)$$

где  $\hat{y}_k$  — комплексные амплитуды гармоник,  $\omega$  — основная частота системы,  $K$  — число учитываемых гармоник.

Этот метод особенно часто используется для анализа установившихся колебательных режимов в механических и электротехнических системах. Редуцированная модель в этом случае оперирует коэффициентами Фурье  $\hat{y}_k$  вместо полного временного решения.

Однако современные подходы активно используют методы машинного обучения для построения метамоделей. Во-первых, это *регрессионные метамодел* (гауссовы процессы, RBF-сети), которые позволяют аппроксимировать зависимость между параметрами системы и её откликом, обучаясь на данных численных экспериментов. Регрессионные метамодел особенно эффективны, когда прямое решение полной модели требует значительных вычислительных ресурсов.

Во-вторых, *автоэнкодеры* (autoencoders) предоставляют нелинейный аналог POD, обучая нейронную сеть находить компактное представление состояний системы. Современные архитектуры автоэнкодеров позволяют достигать сжатия на порядки превосходящего классические методы при сопоставимой точности восстановления. Ключевое преимущество — способность сохранять неявные физические инварианты (например, симметрии или законы сохранения) даже без их явного задания.

Эти методы особенно ценны для систем со сложной нелинейной динамикой, где традиционные линейные методы проекции оказываются недостаточно точными. Их можно комбинировать с физически информированными подходами, обсуждавшимися в разделе 3.2, создавая гибридные модели, сочетающие данные и физические принципы.

В контексте цифрового двойника (1) применение ROM позволяет модифицировать оператор эволюции состояния:

$$\mathcal{F}_T : X \times Q \rightarrow Q, \quad Q \subset \mathbb{R}^n, \quad (17)$$

где  $X$  — пространство параметров,  $Q$  — подпространство пониженной размерности ( $n \ll N$ ), аппроксимирующее исходное пространство состояний полной модели.

Процесс построения и использования ROM включает две ключевые фазы. На этом этапе предварительных вычислений выполняются ресурсоемкие вычисления, необходимые для построения метамодел:

- генерация снимков полной модели: решение полной модели для репрезентативного набора параметров и начальных условий;
- построение базиса  $\mathcal{U}$ : с помощью методов сингулярного разложения, собственных разложений (POD) или других методов выделяются доминантные моды, формирующие подпространство;
- калибровка метамодел: настройка коэффициентов редуцированной системы для минимизации ошибки аппроксимации.

После построения базиса метамодел на этапе эксплуатации ROM позволяет:

- эффективное прогнозирование: решение редуцированной системы в подпространстве  $Q$  с существенно меньшими вычислительными затратами;
- реконструкция полного состояния: при необходимости полное состояние восстанавливается через линейную комбинацию базисных векторов  $\mathcal{U}$ .

Современные исследования в области ROM для цифровых двойников фокусируются на трех направлениях:

- адаптивные методы, автоматически обновляющие базис при изменении режимов работы системы;
- нелинейные обобщения традиционных линейных проекционных методов;
- гибридные подходы, сочетающие ROM с методами машинного обучения.

Эти разработки особенно актуальны для сложных технических систем, где требования к скорости вычислений сочетаются с необходимостью учета широкого диапазона рабочих режимов. Как показывает практика, грамотное сочетание ROM с другими подходами, рассмотренными в предыдущих разделах, позволяет создавать эффективные цифровые двойники, удовлетворяющие противоречивым требованиям точности и быстродействия.

**3.4. Глубокое обучение в построении цифровых двойников.** Современные методы машинного и глубокого обучения предлагают мощные инструменты для создания цифровых двойников, дополняя традиционные подходы, основанные на физических моделях. Эти методы особенно эффективны в случаях, когда система (1) содержит сложные нелинейности или когда полное физическое описание процессов невозможно или очень сложное.

Глубокие нейронные сети могут непосредственно аппроксимировать операторы эволюции  $\mathcal{F}$  и наблюдения  $\mathcal{G}$  из (1). Рассмотрим нейросетевую параметризацию оператора состояния:

$$\hat{\mathcal{F}}_{\theta} : X \times Y \rightarrow Y, \quad (18)$$

где  $\theta$  — обучаемые параметры сети. Обучение такой модели проводится минимизацией функционала, аналогичного (5), но с заменой физического оператора на нейросетевую:

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{k=1}^N |\hat{\mathcal{F}}_{\theta}(x_k, y_{k-1}) - y_k|^2 + \beta R(\theta). \quad (19)$$

Здесь  $R(\theta)$  — регуляризатор, обеспечивающий устойчивость решения, а  $\beta$  — параметр регуляризации, обычно малый.

Интересный подход, называемый нейронным дифференциальным уравнением, сочетает физические модели с машинным обучением. Например, можно модифицировать уравнение (6), добавив нейросетевой член, аппроксимирующий векторное поле:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) + \mathbf{F}_{\text{NN}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t); \theta), \quad (20)$$

где  $\mathbf{F}$  описывает известные физические законы (6), а  $\mathbf{F}_{\text{NN}}$  обучается для моделирования неизвестных эффектов. Такой подход сохраняет физическую интерпретируемость, одновременно повышая точность модели за счет учета неизвестных и слабо контролируемых факторов. В разделе 3.6 на рис. 6 представлен пример такой модели.

В реальных задачах часто возникает ситуация, когда мы можем наблюдать только выходные величины системы  $z_k \in Z$  (например, показания датчиков), в то время как полное внутреннее состояние  $y_k \in Y$  остается скрытым. Эта проблема известна как обучение при частичной наблюдаемости. В этом случае можно использовать подход, аналогичный (4), но с нейронной сетью  $\mathcal{N}_{\theta}$  для восстановления скрытых состояний. Уравнение

$$y_k = \mathcal{N}_{\theta}(z_k, y_{k-1}, x_k) \quad (21)$$

описывает рекуррентную модель, где  $z_k$  — текущее наблюдение,  $y_{k-1}$  — предыдущее оцененное состояние,  $x_k$  — текущее входное воздействие,  $\theta$  — параметры нейронной сети.

Обучение проводится методом обратного распространения ошибки, минимизируя расхождение между предсказанными и наблюдаемыми выходами. Процесс обучения включает следующие этапы.

1. *Прямой проход.* Для каждой пары  $(x_k, z_k)$  в обучающих данных:

- применяем нейросеть для последовательного предсказания состояний  $\hat{y}_k$ ;
- используем оператор наблюдения  $\mathcal{G}$  (из (1)) для получения предсказанных выходов  $\hat{z}_k = \mathcal{G}(\hat{y}_k)$ .

2. *Вычисление ошибки.* Сравниваем предсказанные выходы с реальными наблюдениями:

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{k=1}^N |z_k - \hat{z}_k|^2. \quad (22)$$

3. *Обратное распространение:*

- вычисляем градиенты  $\nabla_{\theta} \mathcal{L}$  через всю временную последовательность;
- обновляем параметры  $\theta$  методом градиентного спуска.

Ключевыми особенностями данного подхода являются, во-первых, возможность учитывать временные зависимости в данных за счет рекуррентной структуры алгоритма: во-вторых, возможность комбинации данных и моделей, используя известный оператор  $\mathcal{G}$  при обучении; в-третьих, универсальность подхода, которая позволяет учиться нейросети восстанавливать состояния без явной физической модели эволюции системы.

На практике такая схема особенно полезна для систем с неполным математическим описанием, задач диагностики и мониторинга и случаев, когда прямое измерение тех или иных переменных состояния невозможно.

Современные исследования сосредоточены на разработке архитектур, сочетающих преимущества физических моделей (6) с гибкостью глубокого обучения. Особый интерес представляют нейронные дифференциальные уравнения [41], трансформеры для временных рядов [42], методы обучения с небольшим количеством проб (few-shot learning) для быстрой адаптации [43]. Эти подходы открывают новые возможности для создания цифровых двойников сложных систем, где традиционные методы сталкиваются с ограничениями.

**3.5. Резервуарные вычисления для цифровых двойников.** Резервуарные вычисления (англ. Reservoir Computing, RC) представляют собой особый подход к обработке временных последовательностей, особенно эффективный для задач цифровых двойников, где требуется моделирование сложной динамики системы (6). Основная идея RC заключается в использовании фиксированной случайной динамической системы («резервуара») для преобразования входных данных в высокоразмерное пространство состояний с последующей линейной регрессией для получения выходного сигнала [44]. Отметим, что RC являются частными случаями рекуррентных нейронных сетей.

Математически RC описывается следующей системой уравнений:

$$\mathbf{r}_k = (1 - \alpha)\mathbf{r}_{k-1} + \alpha\sigma(\mathbf{W}_{\text{in}}\mathbf{u}_k + \mathbf{W}\mathbf{r}_{k-1}), \quad (23)$$

где  $\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^{N_r}$  — состояние резервуара в момент  $k$ ,  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{N_u}$  — входной сигнал (например,  $x_k$  или  $z_k$  из (3)),  $\mathbf{W}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{N_r \times N_u}$  — матрица входных весов (случайная, фиксированная),  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N_r \times N_r}$  — матрица связей резервуара (разреженная, случайная),  $\sigma(\cdot)$  — нелинейная функция активации (обычно гиперболический тангенс  $\tanh(\cdot)$ ),  $\alpha \in (0, 1]$  — параметр утечки.

Обучение RC-системы для цифрового двойника включает два этапа.

1. *Фаза резервуара:* подача входных данных  $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^T$  и сбор состояний  $\{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^T$ .
2. *Фаза регрессии:* решение задачи оптимизации для выходных весов  $\mathbf{W}_{\text{out}}$ :

$$\mathbf{W}_{\text{out}} = \arg \min_{\mathbf{W}_{\text{out}}} \sum_{k=1}^T \|\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_{\text{out}}\mathbf{r}_k\|^2 + \beta \|\mathbf{W}_{\text{out}}\|^2, \quad (24)$$

где  $\mathbf{y}_k$  — целевой выход (например,  $y_k$  или  $z_{k+1}$  из (4)),  $\beta \ll 1$  — коэффициент регуляризации.

Пример применения RC для создания цифровых двойников в условиях неполных данных представлен в работе [45]. Авторы исследовали возможность клонирования стохастических динамических систем, когда доступны для измерения лишь внешние воздействия и частичный отклик

системы, а внутренние переменные остаются скрытыми. Схематическое представление подхода на основе резервуарных вычислений для клонирования динамических систем при наличии скрытых переменных показан на рис. 5, а. RC состоит из трех слоев: входного слоя, скрытого резервуарного слоя и выходного слоя. Система испытывает внешние воздействия  $\xi(t)$  на дискретных временных интервалах  $t = k\tau$ , где  $\tau$  — интервал дискретизации, а  $k$  — дискретное время. Одновременно с этим реакция системы на это возбуждение регистрируется в тех же временных интервалах, что обеспечивает необходимые данные для обучения и прогнозирования. В результате входной сигнал резервуара (23) формируется как

$$\mathbf{u}_k = (\xi_t, \mathbf{z}_t, \xi_{t-\tau}, \mathbf{z}_{t-\tau}, \dots, \xi_{t-n\tau}, \mathbf{z}_{t-n\tau})^T, \quad (25)$$

где  $\mathbf{z}$  — наблюдаемые переменные реального объекта,  $n$  — число задержанных переменных, которые формируют  $n$  пар  $(\xi_{t-i\tau}, \mathbf{z}_{t-i\tau})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Число пар  $n$  является важным параметром, определяющим качество построения цифрового двойника при отсутствии полной информации о системе. Аналогичные подходы могут найти применение и для обнаружения скрытых или восстановления утраченных данных сложных систем [46, 47].

В работах [45, 48] были проведены эксперименты по построению цифрового двойника эрбиевого волоконного лазера, используемого в различных системах связи [49], экспериментальная реализация которого показана на рис. 5, б. В качестве внешнего воздействия  $\xi(t)$  использовалась шумовая накачка, которая приводила к генерации импульсов лазером, а в качестве измеряемой величины  $\mathbf{z}(t)$  — интенсивность лазерного излучения  $z(t)$ . При небольших интенсивностях шумовой накачки удалось достичь так называемого «сильного клонирования» с точным воспроизведением траекторий при использовании  $n = 3$  временных задержек в архитектуре RC. Соответствующие временные ряды интенсивности лазера и цифрового двойника, а также распределения их амплитуд показаны на рис. 5, с. При больших интенсивностях шумовой накачки  $\xi$  точное воспроизведение временных траекторий оказалось невозможным. Однако метод позволил достичь «слабого клонирования» — точного воспроизведения статистических характеристик системы при  $n = 9$

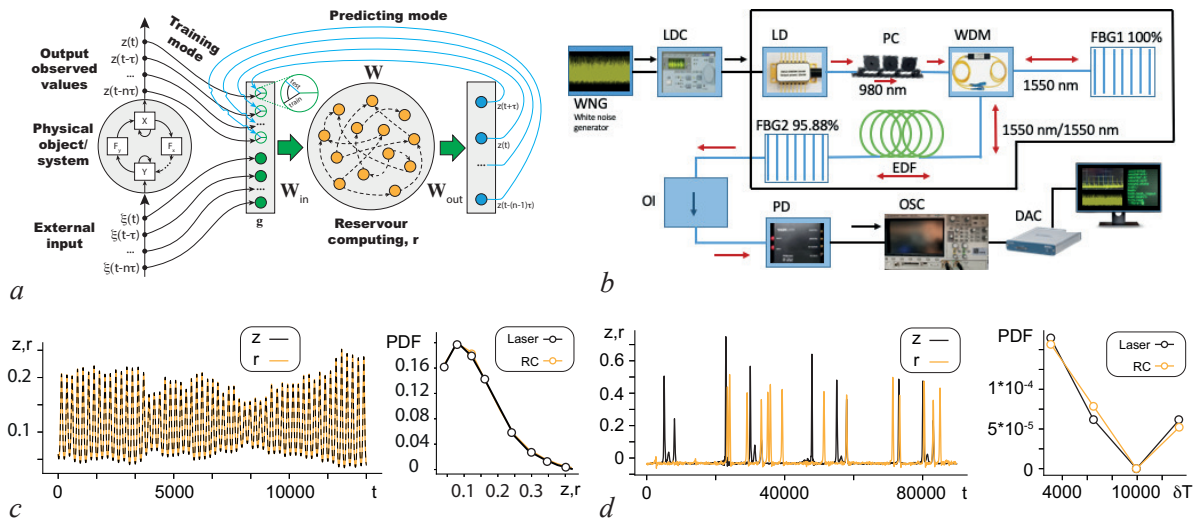


Рис. 5. Схематическое представление подхода резервуарных вычислений для клонирования динамических систем. а — Общая архитектура RC-модели. б — Экспериментальная схема эрбиевого волоконного лазера. с, д — Сравнение результатов сильного и слабого клонирования волоконного лазера (на основе данных из работ [45, 48]) (цвет онлайн)

Fig. 5. Schematic representation of the reservoir computing approach for cloning dynamic systems. а — General architecture of the RC model. б — Experimental setup of an erbium fiber laser. с, д — Comparison of the results of strong and weak cloning of a fiber laser (based on data from [45, 48]) (color online)

задержках, как показано на рис. 5, *d*. Видно, что последовательность импульсов не совпадает с последовательностью импульсов экспериментальной системы, однако распределения интервалов между импульсами  $\delta T$  для исходной системы и её RC-клона совпали с высокой точностью.

Полученные результаты имеют важное значение для разработки цифровых двойников реальных систем. Они показывают, что даже при отсутствии полной информации о внутренней динамике использование внешних возмущений в сочетании с методом резервуарных вычислений позволяет создавать либо точные копии системы, либо их статистические аналоги, которые возможно использовать при тестировании и разработках реальных систем. Оптимальное количество временных задержек в архитектуре RC (обычно не более 10) обеспечивает баланс между точностью моделирования и вычислительной сложностью, что особенно важно для работы в реальном времени.

Таким образом, RC имеет целый ряд преимуществ в качестве математического ядра цифровых двойников. Во-первых, это вычислительная эффективность. В отличие от полного обучения рекуррентных нейронных сетей, RC требует оптимизации только выходного слоя. Во-вторых, для RC не нужно очень много данных, так как данная архитектура демонстрирует высокую обобщающую способность даже при ограниченных данных. Наконец, RC очень эффективны для моделирования сложной динамики. Способность аппроксимировать нелинейные временные зависимости, характерные для (6), даже при неполноте всех данных делает резервуарные вычисления незаменимым инструментом для построения цифровых двойников сложных нелинейных процессов.

**3.6. Теория сложных сетей и графовые модели в цифровых двойниках.** Теория сложных сетей и методы анализа графов предоставляют мощный математический аппарат для построения цифровых двойников систем с распределенной структурой и сложными взаимодействиями между компонентами. В контексте формализма, заданного уравнениями (1)–(5), графовые цифровые модели позволяют компактно представить оператор эволюции состояния  $\mathcal{F}$  для систем, где пространство состояний  $Y$  имеет сетевую структуру. Типичными объектами такой природы являются различные транспортные и энергетические сети [50, 51], а также функциональные сети живых организмов, например, функциональные сети головного мозга [52], которые являются эффективным средством для построения цифровых двойников заболеваний головного мозга.

Пусть цифровой двойник описывает систему, состоящую из  $N$  взаимодействующих компонентов. Тогда её структуру можно представить ориентированным или неориентированным графом  $G = (V, E)$ , где  $V = \{v_i\}_{i=1}^N$  — множество вершин (компонентов системы), а  $E \subseteq V \times V$  — множество рёбер (взаимодействий между компонентами). Состояние системы в момент дискретного времени  $k$  задаётся как  $y_k = \{y_k^i\}_{i=1}^N$ , где  $y_k^i \in \mathbb{R}^d$  — состояние  $i$ -го компонента.

Динамика системы описывается сетевой версией уравнения (6):

$$\dot{y}^i(t) = F_i(x_i(t), y^i(t), \{y^j(t)\}_{j \in \mathcal{N}_i}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (26)$$

где  $\mathcal{N}_i = \{j | (v_j, v_i) \in E\}$  — множество соседей вершины  $v_i$  в графе  $G$ , а  $F_i$  — локальный оператор эволюции для  $i$ -го компонента, учитывающий его собственное состояние и состояния соседних узлов.

Для цифровых двойников городских систем и промышленных комплексов, а также сетей головного мозга особую ценность представляют методы анализа топологических свойств сети [53]:

- различные типы центральности вершин для выявления критически важных компонентов,
- алгебраическая связность графа для оценки устойчивости системы,
- свойства сегрегации и интеграции, вычисляемые через коэффициенты модулярности, кластеризации, эффективности и т. д. для выявления функциональных подсистем реального объекта.

Оператор наблюдения  $\mathcal{G}$  в (1) для сетевых систем часто имеет выборочный (разреженный) характер:

$$z_k = \{y_k^i\}_{i \in S}, \quad S \subset \{1, \dots, N\}, \quad S \ll N, \quad (27)$$

где  $S$  — множество наблюдаемых узлов. В этом случае задача восстановления полного состояния системы по ограниченным наблюдениям требует применения методов сетевой реконструкции и теории разреженного восстановления [54, 55], могут также применяться методы машинного обучения, например, РС [46, 56].

Перспективным направлением является сочетание графовых моделей с методами глубокого обучения, такими как графовые нейронные сети (англ. Graph Neural Networks, GNN) [57, 58]. В этом случае оператор эволюции  $\mathcal{F}$  в (1) параметризуется как GNN:

$$y_{k+1} = \text{GNN}(y_k, x_k, \mathbf{A}, \theta), \quad (28)$$

где  $\mathbf{A}$  — матрица смежности графа  $G$ , а  $\theta$  — параметры сети, обучаемые на ретроспективных данных. Такой подход особенно эффективен для цифровых двойников транспортных систем, энергетических сетей и социальных сетей, где топология взаимодействий играет ключевую роль.

Ярким примером применения GNN в медицине является работа [59], где цифровой двойник пациента строится как граф  $G = (V, E)$ , объединяющий данные от микро- (молекулярный) через мезо- (клетки) до макро- (отдельные органы и внешние факторы) уровня организации. На рис. 6 представлена графовая архитектура цифрового двойника пациента, основанная на объединении модели на основе ОДУ и GNN. Модель отражает многоуровневую организацию человеческого организма, где каждый компонент системы (гены, клетки, органы, внешние факторы) представлен в виде вершин графа  $V$ , а их взаимодействия — в виде множества направленных рёбер  $E$ . Модель на основе ОДУ [60] позволяет, во-первых, формализовать известные биофизические закономерности, а во-вторых, генерировать синтетические данные для обучения GNN. GNN прогнозирует динамику модели через обмен сообщениями (англ. message passing), благодаря которому каждая вершина обновляет своё состояние на основе информации от соседних вершин. Например, клеточный уровень получает данные о генной экспрессии и внешних воздействиях (инфекция SARS-CoV-2), а уровень органов интегрирует сигналы от клеток и корректирует физиологические параметры. Этот подход соответствует формализму уравнений (1)–(4), где оператор эволюции состояния  $\mathcal{F}(\cdot)$  реализован через GNN (28), а топология графа  $G$  кодирует биологические иерархии.

В рассматриваемой работе [59] модель в виде ОДУ использовалась для моделирования биохимических реакций гормонов, гемодинамики сердечных камер и влияния препаратов (ингибиторы АПФ). В свою очередь, GNN, благодаря использованию графового представления всех взаимосвязей в организме, во-первых, осуществляет интеграцию разнородных данных (молекулярный уровень (экспрессия генов) → клеточный уровень (метаболические пути) → уровень органов (физиологические параметры) и их взаимосвязь с внешними факторами) через механизм обмена сообщениями. Во-вторых, GNN оказывается эффективной для прогнозирования эмерджентных свойств системы, которые возникают только при взаимодействии компонентов системы, а также обнаружения точек бифуркации, где малые изменения вызывают качественный сдвиг. Например, GNN выявила эмерджентный эффект системной гиперкоагуляции и почечной дисфункции через анализ каскада взаимодействий: высокий уровень ACE2 в лёгких → нарушение регуляции ренин-ангиотензиновой системы → дисбаланс воспалительных цитокинов → одновременное повышение свёртываемости крови (через активацию PAI-1) и ухудшение функции почек (через снижение почечного кровотока), что невозможно предсказать, анализируя каждый компонент системы по отдельности.

Авторы демонстрируют, что такой подход позволяет не только прогнозировать динамику клинических параметров (например, артериального давления), но и моделировать кросс-тканевые взаимодействия, такие как влияние экспрессии генов в лёгких на воспалительные маркеры в крови.

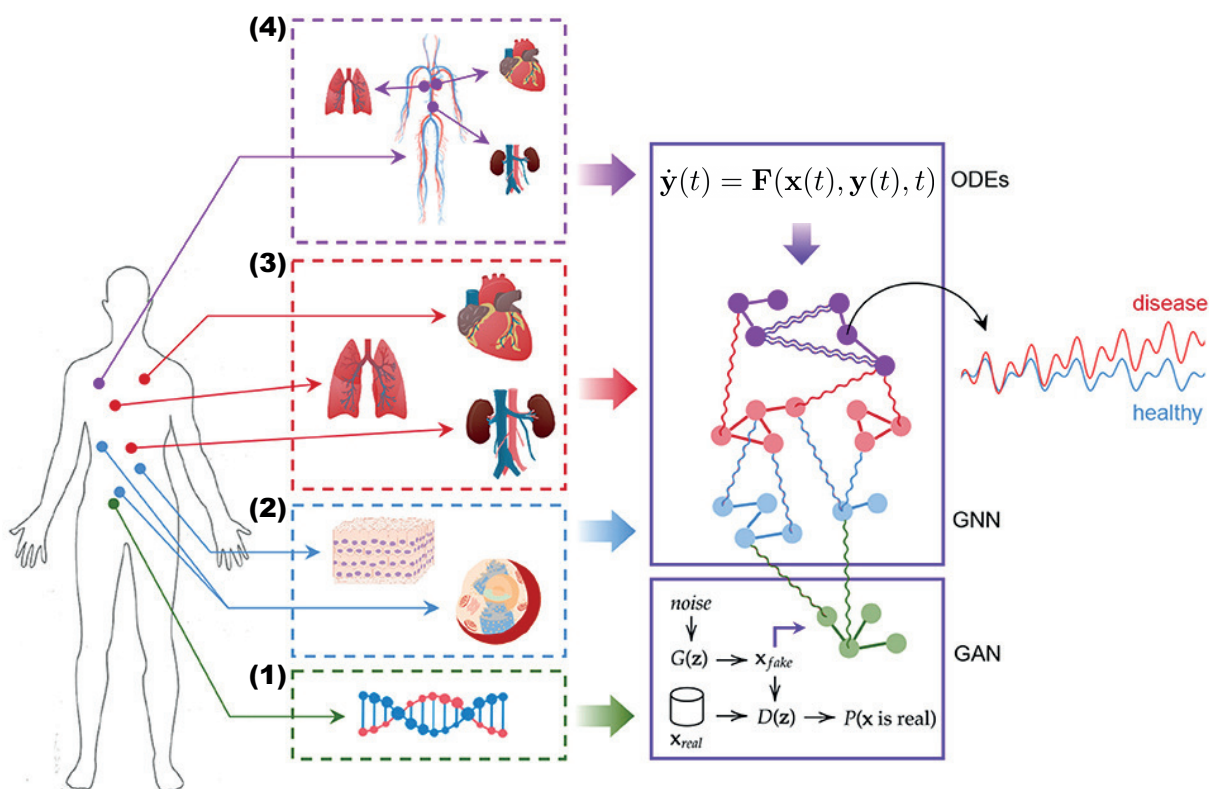


Рис. 6. Гибридная модель цифрового двойника пациента: ОДУ задают биофизические законы на локальном уровне, GNN интегрирует многоуровневые взаимодействия для прогнозирования системных эффектов, а GAN расширяет данные, моделируя редкие и критические состояния. Слева показана структура графа  $G$ . Множество вершин графа  $V$  (узлы сети, представленной справа) соответствуют четырем уровням: (1) транскрипционный уровень (гены и их экспрессия), (2) клеточный уровень (такие биологические процессы, как метаболизм и воспаление, а также внутриклеточные сигнальные пути), (3) уровень органов (сердце, лёгкие, почки и их физиологические параметры (давление в камерах сердца)), (4) уровень внешних факторов (диета, физическая активность, вирусные инфекции). Множество ребер  $E$  (связи между узлами сети) отражают причинно-следственные связи между уровнями, например, влияние экспрессии гена ACE2 в лёгких на уровень цитокинов в крови, воздействие высокого кровяного давления в сердце на функцию почек, модуляция клеточных процессов лекарствами (например, ингибиторами АПФ) и т. д. GAN-модуль (показан внизу) дополняет модель на основе GNN, генерируя реалистичные синтетические данные для редких клинических сценариев, что позволяет GNN обучаться на расширенном наборе патологических состояний и терапевтических вмешательств. Временные зависимости показывают результат прогноза для одного из узлов сети. Из работы [59]) (цвет онлайн)

Fig. 6. Hybrid model of patient's digital twin: ODEs specify biophysical laws at the local level, GNNs integrate multi-level interactions to predict systemic effects, and GANs expand data by simulating rare and critical states. The structure of graph  $G$  is shown on the left. The set of vertices  $V$  (nodes of the network shown in the center) corresponds to four levels: (1) the transcriptional level (genes and their expression), (2) cellular level (biological processes such as metabolism and inflammation, as well as intracellular signaling pathways), (3) organ level (heart, lungs, kidneys, and their physiological parameters (pressure in the heart chambers)), (4) external factors level (diet, physical activity, viral infections). The set of edges  $E$  (connections between network nodes) reflects causal relationships between levels, for example, the effect of ACE2 gene expression in the lungs on the level of cytokines in the blood, the effect of high blood pressure in the heart on kidney function, the modulation of cellular processes by drugs (e.g., ACE inhibitors), etc. The GAN module (shown below) complements the GNN-based model by generating realistic synthetic data for rare clinical scenarios, allowing the GNN to learn from an expanded set of pathological conditions and therapeutic interventions. Temporal dependencies show the forecast result for one of the network nodes. From [59]) (color online)

Ключевыми преимуществами графовой модели являются:

*Масштабируемость.* Легко добавлять новые узлы (например, дополнительные органы или гены).

*Интерпретируемость.* Врач-исследователь может проследить, как изменение в одном узле (например, приём лекарства) влияет на другие уровни.

*Интеграция данных.* Легко объединяет разнородные данные (ОМИКС-анализы, клинические показатели, внешние факторы).

*Синтетические данные.* Существует возможность генерации синтетических данных для редких патологических состояний с помощью генеративно-сопоставительных сетей (Generative Adversarial Network, GAN).

Подходы на основе теории сложных сетей и графовых представлений данных позволяют создавать цифровые двойники для сложных распределённых систем с различными внутренними взаимодействиями, сохраняя баланс между точностью моделирования и вычислительной эффективностью, что соответствует требованиям, заданным в (5) для цифровых двойников.

Перспективным направлением применения графовых моделей может стать создание цифровых двойников промышленных предприятий. Современные предприятия представляют собой сложные сетевые системы, в которых традиционные методы моделирования сталкиваются с принципиальными ограничениями, обусловленными неспособностью адекватно отражать многомерность, нелинейность и динамическую природу реальных процессов. Эти ограничения проявляются в упрощённом представлении взаимосвязей, игнорировании эмерджентного поведения, учёте временных задержек и обратных связей, а также в недостаточной адаптивности к изменяющимся внешним условиям и высокой размерности данных. Ключевым вызовом является интеграция разнородных данных от IoT-устройств, ERP- и MES-систем, которые характеризуются высокой размерностью и требуют методов машинного обучения для обработки [61, 62]. Кроме того, традиционные модели не учитывают сетевую топологию и иерархическую организацию предприятий, что затрудняет прогнозирование каскадных эффектов и оптимизацию в режиме реального времени. Всё это подчеркивает необходимость перехода к более совершенным подходам, таким как графовые цифровые двойники, которые объединяют физические принципы с методами искусственного интеллекта для создания динамических, адаптивных и масштабируемых моделей, способных к непрерывному обучению и поддержке принятия решений в условиях неопределённости [63]. Эта парадигма может быть также эффективна для построения цифровых двойников: (1) цепочек поставок, (2) транспортных сетей, и (3) внутрикорпоративной логистики, включая медицинские учреждения.

Указанные выше ограничения проявляются в невозможности учета эмерджентных свойств, возникающих из-за взаимодействия множества гетерогенных компонентов, организованных в виде многослойного динамического графа

$$G_E(t) = \left( V, \bigcup_{k=1}^K E_k(t), \bigcup_{k=1}^K W_k(t) \right), \quad (29)$$

где  $V = V_h \cup V_m \cup V_l$  объединяет человеческие ( $V_h$ ), материальные ( $V_m$ ) и логистические ( $V_l$ ) ресурсы, а каждый слой рёбер  $E_k$  соответствует определённому типу взаимодействий: товарные потоки ( $E_1$ ) с параметрами объёмов и сроков ( $W_1(t)$ ) для цепочек поставок, маршруты ( $E_2$ ) с пропускной способностью ( $W_2(t)$ ) для транспортных сетей, перемещения пациентов и медикаментов ( $E_3$ ) с временными задержками ( $W_3(t)$ ) для медицинских учреждений и т. д.

Центральным компонентом преодоления указанных ограничений является гибридная модель цифрового двойника, сочетающая законы системы (это могут быть физические законы, аналоги

законов сохранения, экономические принципы и т. д.) и корректировки на основе ИИ и анализа больших данных:

$$\dot{x}_i = f_i \left( x_i, u_i, \sum_{j \in N_i} \Phi_{ij}(w_{ij}, x_j) \right) + \varepsilon_{AI}(t), \quad (30)$$

где  $x(t)$  — вектор состояния системы (например, уровни запасов, загрузка узлов),  $f_i$  представляет законы системы, выраженные в функциональном виде, а  $\varepsilon_{AI}$  — корректировку от ИИ-модели, обученной на исторических данных, при этом, например, для цепочек поставок  $\Phi_{ij}$  кодирует транспортные издержки, а для больниц — совместимость медикаментов.

Критическими технологиями реализации графовых цифровых двойников выступают, во-первых, графовые нейронные сети для прогнозирования (28), во-вторых, методы динамической балансировки ресурсов с использованием оптимального управления для минимизации целевого функционала следующего вида:

$$\min_{u_i} \int_0^T [\alpha |x(t)|^2 + \beta |u(t)|^2] dt \quad \text{при ограничении} \quad \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (31)$$

где  $u(t)$  — управляющие воздействия,  $\mathbf{A}$  — матрица связей между компонентами системы (отражает топологию графа),  $\mathbf{B}$  — матрица влияния управлений на состояние, а система (30) линеаризована в окрестности текущей точки, и, в-третьих, спектральный анализ для обнаружения аномалий через вычисление критических параметров

$$\lambda_{\text{crit}} = \max \text{Re}(\text{eig}(\mathbf{M})), \quad \mathbf{M} = \mathbf{A} - \text{diag}(\mathbf{B}_u). \quad (32)$$

Здесь  $\mathbf{B}_u$  — вектор управляющих воздействий, применяемых к узлам (например, увеличение пропускной способности, коррекция маршрутов),  $\text{diag}(\mathbf{B}_u)$  — диагональная матрица, составленная из элементов  $\mathbf{B}_u$  и описывающая локальное усиление или ослабление узлов в силу управления (31). Таким образом,  $\mathbf{M}$  — модифицированная матрица связей, учитывающая влияние управлений на узлы. Параметр  $\lambda_{\text{crit}}$  оказывается критическим параметром, определяющим порог устойчивости системы. Его мониторинг позволяет, во-первых, обнаруживать аномалии (например, резкое увеличение  $\lambda_{\text{crit}}$  указывает на риск каскадного отказа) и, во-вторых, оценивать эффективность управлений  $u(t)$ : если  $\lambda_{\text{crit}}$  растет, управления не компенсируют дестабилизирующие факторы.

Перспективы развития направления связаны с применением квантовых алгоритмов для ускорения вычислений на крупномасштабных графах, что открывает новые возможности для моделирования и управления сложными сетевыми системами предприятия или логистическими цепочками поставок.

## 4. Применения цифровых двойников

**4.1. Промышленное применение цифровых двойников.** Цифровой двойник представляет собой одну из наиболее перспективных технологий цифровой трансформации промышленности, находящую применение на всех этапах жизненного цикла продукции. В промышленном контексте цифровые двойники позволяют компаниям перейти от реактивного к предиктивному и даже проактивному управлению процессами. Технология обеспечивает принципиально новые возможности для моделирования, анализа и оптимизации, становясь ключевым элементом концепций Индустрии 4.0 и умного производства [4]. Ключевую роль тут играют промышленные данные, которые благодаря цифровизации современного производства накапливаются и позволяют стать основой для создания цифровых двойников [61].

Широта применения цифровых двойников в промышленности поражает — от отдельных компонентов и оборудования до целых производственных линий и инфраструктурных объектов. Основная ценность технологии заключается в ее способности интегрировать данные из различных источников, применять сложные аналитические модели и предоставлять интуитивно понятные визуализации для поддержки принятия решений. В зависимости от этапа жизненного цикла продукта цифровые двойники решают различные задачи, демонстрируя особую эффективность в проектировании, производстве и обслуживании сложных технических систем, как систематизировано в табл. 2.

*Применение в проектировании.* На этапе проектирования цифровые двойники революционизируют традиционные подходы к созданию новых продуктов и систем [64]. Они позволяют

Таблица 2. Промышленное применение цифровых двойников на разных этапах жизненного цикла  
Table 2. Industrial application of digital twins at different stages of the life cycle

Основные применения	Ключевые преимущества
<b>Проектирование</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Итеративная оптимизация конструкций</li> <li>• Виртуальная проверка и валидация</li> <li>• Мультидисциплинарное моделирование</li> <li>• Обеспечение целостности данных</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Сокращение цикла проектирования</li> <li>• Выявление непредвиденных проблем на ранних стадиях</li> <li>• Интеграция данных для всех участников процесса</li> <li>• Создание цифровых нитей</li> </ul>
<b>Производство</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Мониторинг в реальном времени</li> <li>• Прогнозирование характеристик изделий</li> <li>• Управление производственными активами</li> <li>• Оптимизация технологических процессов</li> <li>• Взаимодействие «человек – робот»</li> <li>• Планирование производства</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Повышение качества продукции</li> <li>• Снижение производственных затрат</li> <li>• Гибкое реагирование на изменения</li> <li>• Предотвращение простоев оборудования</li> <li>• Улучшение эргономики рабочих мест</li> </ul>
<b>Эксплуатация</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Предиктивное техническое обслуживание</li> <li>• Диагностика неисправностей</li> <li>• Мониторинг состояния оборудования</li> <li>• Прогнозирование производительности</li> <li>• Виртуальные испытания</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Увеличение срока службы оборудования</li> <li>• Снижение затрат на обслуживание</li> <li>• Повышение безопасности эксплуатации</li> <li>• Оптимизация режимов работы</li> <li>• Удаленный мониторинг и управление</li> </ul>
<b>Утилизация</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Управление отходами электронного оборудования</li> <li>• Оптимизация процессов ремануфактуринга</li> <li>• Трассировка материалов для вторичной переработки</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Снижение экологического воздействия</li> <li>• Эффективное использование ресурсов</li> <li>• Сохранение знаний о продукте</li> </ul>

инженерам работать с виртуальными прототипами, которые точно отражают все характеристики будущего физического объекта. В отличие от традиционного САД-моделирования, цифровой двойник включает не только геометрические параметры, но и данные о материалах, нагрузках, температурных режимах и других критических факторах. Это дает возможность проводить комплексные мультифизические симуляции, выявляя потенциальные проблемы до начала физического производства.

Особенно ценным становится применение цифровых двойников в итеративном процессе оптимизации конструкций. Технология позволяет быстро тестировать сотни вариантов проектных решений, автоматически оценивая их по заданным критериям. Например, в аэрокосмической отрасли цифровые двойники используются для моделирования аэродинамических характеристик, распределения нагрузок и тепловых режимов летательных аппаратов [65]. В автомобилестроении они помогают оптимизировать компоновку узлов, снижая массу транспортного средства при сохранении прочностных характеристик [66]. Важно отметить, что цифровые двойники на этапе проектирования часто становятся основой для создания «цифровых нитей» (digital threads) — сквозных информационных потоков, сопровождающих продукт на всех последующих этапах его жизненного цикла [67].

*Применение в производстве.* В производственной сфере цифровые двойники трансформируют подходы к управлению и контролю технологических процессов [68]. Они создают виртуальное отражение всего производственного комплекса — от отдельных станков до целых цехов, позволяя в реальном времени отслеживать тысячи параметров. Такие системы могут автоматически выявлять отклонения в работе оборудования, прогнозировать возможные сбои и предлагать оптимальные корректирующие действия. Например, на автоматизированных линиях сборки автомобилей цифровые двойники помогают поддерживать стабильное качество продукции, оперативно реагируя на изменения в параметрах технологического процесса [66].

Особый интерес представляет применение цифровых двойников для аддитивного производства (3D-печати), где они позволяют контролировать процесс на микроуровне, предотвращая возникновение дефектов [69]. В гибких производственных системах цифровые двойники используются для виртуальной проверки программ ЧПУ перед их загрузкой на реальное оборудование, значительно снижая риск дорогостоящих ошибок. Еще одно перспективное направление — создание цифровых теней рабочих мест, которые анализируют эргономику и безопасность операций с учетом антропометрических данных конкретных сотрудников. По мере развития технологий IoT на базе 5G-коммуникации возможности цифровых двойников в производственной сфере продолжают расширяться, открывая путь к полностью автономным производствам.

*Применения на этапе эксплуатации.* На этапе эксплуатации цифровые двойники становятся мощным инструментом предиктивного обслуживания и удаленного мониторинга сложных технических систем. Они непрерывно получают данные с датчиков, установленных на физическом оборудовании, и сравнивают их с эталонными моделями работы. Это позволяет выявлять малейшие отклонения от нормы, которые могут свидетельствовать о начинающихся неисправностях. Например, в энергетике цифровые двойники турбин анализируют вибрации, температурные режимы и другие параметры, прогнозируя остаточный ресурс оборудования с точностью до нескольких сотен часов наработки [70].

В транспортной отрасли цифровые двойники используются для оптимизации графиков технического обслуживания самолетов, поездов и судов, учитывая их реальное состояние, а не регламентные сроки [71]. Особенно впечатляющие результаты достигаются при комбинации цифровых двойников с технологиями дополненной реальности (AR) — техники получают визуальные подсказки прямо на устройстве, видя «сквозь» конструкции и получая доступ к историческим данным по каждому узлу [72]. В нефтегазовой отрасли цифровые двойники трубопроводов и буровых установок помогают предотвращать аварии, моделируя различные сценарии эксплуатации

в сложных климатических условиях [73]. По мере развития технологий машинного обучения цифровые двойники начинают не только диагностировать, но и самостоятельно принимать решения о корректировке режимов работы оборудования для продления его ресурса.

Итак, эволюция цифровых двойников продолжает набирать обороты, постепенно стирая границы между физическим и цифровым мирами. Сегодня мы наблюдаем переход от отдельных изолированных решений к комплексным экосистемам взаимосвязанных цифровых двойников, охватывающих всю цепочку создания стоимости. Особенно перспективным выглядит направление «цифровых двойников продукта» (англ. Product Digital Twins), которые сопровождают изделие от момента проектирования до утилизации, накапливая уникальные данные о его эксплуатации и позволяя использовать эти знания для создания следующих поколений продукции [74]. По мере совершенствования технологий обработки данных и моделирования цифровые двойники будут играть все более важную роль в создании устойчивых, эффективных и безопасных промышленных систем будущего.

**4.2. Медицинские цифровые двойники.** Медицинские цифровые двойники находят применение в трех основных областях: профилактике заболеваний, лечении пациентов и разработке новых терапевтических методов, включая лекарственные средства и медицинские устройства [12, 75]. Рис. 7 иллюстрирует все три вышеуказанных направления.

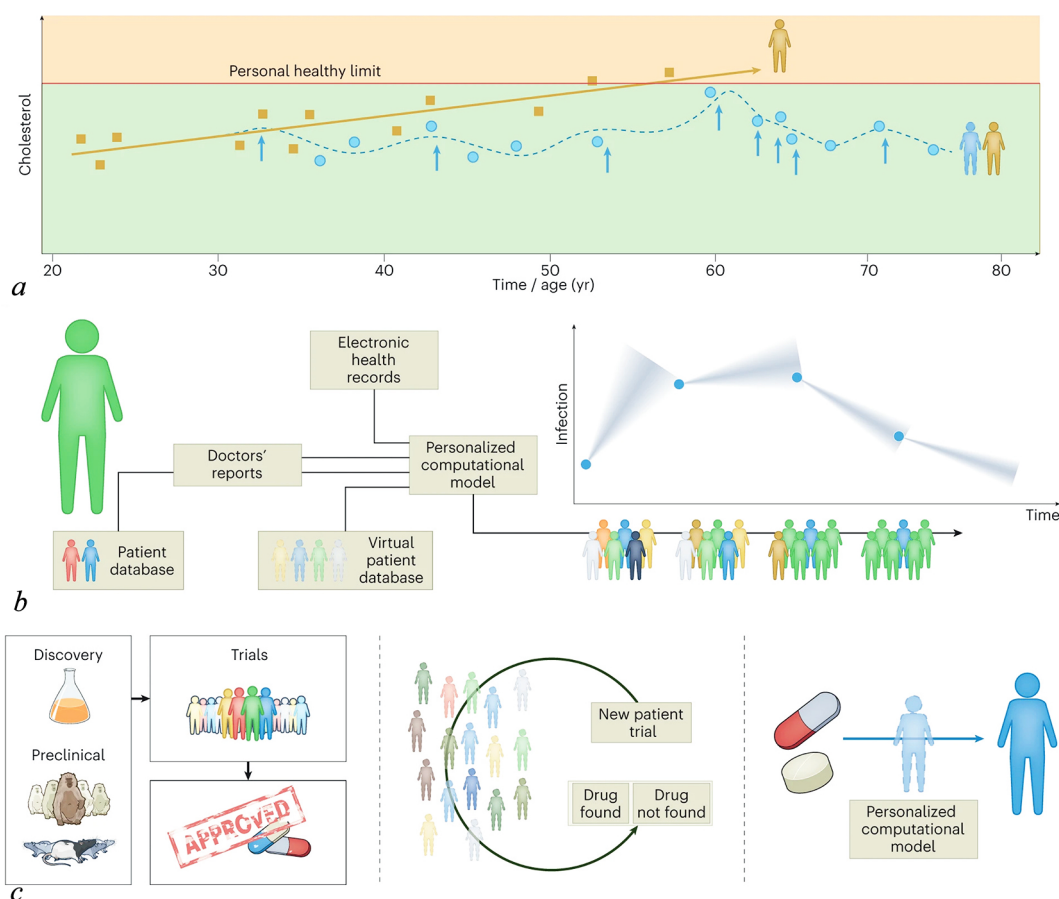


Рис. 7. Примеры применения цифровых двойников в медицине. *a* — Профилактика здоровых пациентов. *b* — Интенсивная терапия пациентов. *c* — Разработка новых терапевтических средств. Взято из работы [12] (цвет онлайн)

Fig. 7. Examples of digital twins applications in medicine. *a* — Prevention in healthy patients. *b* — Intensive care of patients. *c* — Development of new therapeutic agents. From Ref. [12] (color online)

Рис. 7, *a* показывает принцип использования медицинского цифрового двойника для поддержания здоровья. Для конкретного пациента (желтый цвет) определяется безопасный уровень холестерина с использованием генетической информации, семейного анамнеза и других данных. Желтая линия показывает динамику уровня холестерина у пациента с течением времени без лечения, где желтые квадраты обозначают ежегодные измерения. С другой стороны, цифровой двойник пациента (синий) прогнозирует траекторию и рекомендует периодические профилактические меры (синие стрелки), в результате чего уровень холестерина следует синей кривой.

Рис. 7, *b* демонстрирует пример использования цифрового двойника при поступлении в отделение интенсивной терапии пациента (зеленый). На входе пациент проходит обследование и получает первоначальное лечение от инфекции. Компьютерный алгоритм персонализирует соответствующую вычислительную модель заболевания вместе с информацией из базы данных эталонных пациентов, чтобы рекомендовать оптимальные меры. По мере проведения повторных измерений у пациента эталонная популяция уточняется, модель перекалибровывается для пациента в более поздние моменты времени, а рекомендации по оптимальному лечению уточняются. Конусы представляют вероятную траекторию развития инфекции, определенную цифровым двойником. Со временем и с увеличением количества точек данных о пациенте неопределенность в прогнозах уменьшается (конус становится уже), и последующие моменты времени для пациента становятся ближе к центру предыдущего конуса прогнозов. Улучшение набора параметров, описывающих пациента, отражается в соответствующей виртуальной когорте, которая описывает пациента в каждый момент времени и изображается как содержащая все больше зеленых субъектов, подобных пациенту.

Наконец, на рис. 7, *c* показано возможное использование медицинского цифрового двойника при разработке новых терапевтических средств. В настоящее время клинические испытания обычно включают использование животных и когорт пациентов (левая панель). С появлением цифровых двойников станет возможным сократить количество животных, используемых в доклинических испытаниях, и оптимизировать испытания на пациентах с помощью виртуальных пациентов. Их можно использовать для скрининга большого количества мишеней лекарственных препаратов и кандидатов в лекарственные препараты, а также для проведения первоначальных оптимизационных исследований с использованием большого количества цифровых двойников пациентов (средняя панель). Оптимальные режимы, дозы и комбинации лекарственных препаратов также могут быть определены с помощью медицинских цифровых двойников до введения лекарственных препаратов пациентам, что позволяет минимизировать побочные эффекты (правая панель).

Помимо этого, медицинские цифровые двойники могут способствовать сокращению использования животных в доклинических исследованиях, а также помогать преодолевать недостаточность больших данных в здравоохранении. Например, они позволяют формировать более репрезентативные когорты для клинических испытаний, учитывая недостаточную представленность отдельных групп населения, таких как этнические меньшинства или пациенты с редкими заболеваниями [20]. Кроме того, медицинские цифровые двойники могут снижать влияние социальных предубеждений на медицинские решения, предлагая модель-ориентированные системы поддержки принятия решений.

В контексте профилактической медицины цифровые двойники становятся инструментом перехода от лечения к предупреждению заболеваний [76]. Однако их широкое внедрение ограничено недостаточным пониманием критериев здоровья при высокой биологической вариабельности пациентов, что затрудняет создание точных прогностических моделей. Тем не менее этот аспект применения медицинских цифровых двойников является наиболее перспективным в долгосрочной перспективе, аналогично использованию цифровых двойников в промышленности для предиктивного обслуживания. В отличие от методов машинного обучения, предпочтение отдается механистическим моделям, позволяющим прогнозировать эффект конкретных вмешательств.

Наибольших успехов в применении медицинских цифровых двойников достигнуто в лечении пациентов с хроническими и критическими состояниями. Примером служат системы автоматизированной подачи инсулина для больных диабетом 1-го типа, основанные на моделях метаболизма глюкозы и алгоритмах замкнутого контроля. В условиях интенсивной терапии медицинские цифровые двойники используются как инструменты интеграции данных и поддержки принятия решений. Например, для лечения сепсиса и инсульта разрабатываются гибридные модели, сочетающие байесовские сети с экспертной логикой, что позволяет персонализировать терапию. Ключевой проблемой остается учет биологической гетерогенности пациентов, для чего предлагается комбинировать механистические модели с алгоритмами машинного обучения, адаптируя параметры под индивидуальные характеристики пациента.

Третье направление применения медицинских цифровых двойников — разработка новых терапевтических методов через виртуальные клинические испытания. Механистические модели, параметризованные на основе реальных данных, позволяют создавать виртуальные популяции пациентов, что особенно актуально для исследований редких заболеваний. Перспективным, но пока не реализованным подходом является создание точных цифровых реплик реальных пациентов, что соответствует промышленным стандартам использования цифровых двойников.

В работе [59] представлен прогресс в создании целостных цифровых двойников пациента с использованием GNN и GAN, как показано на рис. 6. Графовый подход, основанный на GNN, позволяет учитывать сложные нелинейные взаимодействия между генетическими факторами, метаболическими путями и физиологическими параметрами, что существенно повышает точность прогноза по сравнению с традиционными статистическими моделями. В частности, такой подход позволил прогнозировать системные эффекты SARS-CoV-2 инфекции, такие как одновременное развитие гиперкоагуляции и почечной дисфункции через анализ межорганных взаимодействий, и выявил критические пороговые значения (например, концентрации ANGII), при которых физиологическая адаптация переходит в патологическое ремоделирование. GAN вносят принципиально новое качество в медицинские цифровые двойники — способность синтезировать реалистичные мультиоматические профили для состояний, недостаточно представленных в реальных данных (например, экспрессия ACE2 в комбинации с диабетической нефропатией) [77]. Это позволяет преодолеть ключевое ограничение медицинских датасетов — недостаточность данных для редких, но клинически значимых паттернов заболеваний. В частности, в [59] представлены результаты моделирования редких клинических сценариев с помощью GAN, что особенно ценно для изучения осложнений у пациентов с коморбидностью (например, диабет + COVID-19).

Большие успехи в развитии медицинских цифровых двойников для персонализированной медицины достигнуты в онкологии и кардиологии. Так, цифровые двойники в онкологии открывают новые возможности для персонализированного лечения, позволяя моделировать прогрессирование опухоли и прогнозировать эффективность терапии. Они интегрируют генетические данные, клиническую историю и результаты визуализации, что особенно важно при агрессивных формах рака, таких как глиобластома, где цифровые двойники помогают точнее определять границы опухоли и планировать хирургическое вмешательство. Например, модели на основе дифференциальных уравнений, калиброванные с помощью МРТ, успешно прогнозируют рост опухоли молочной железы и реакцию на иммунотерапию. Однако остаются проблемы, включая недостаток данных и неполное понимание молекулярных механизмов различных подтипов рака, что ограничивает точность прогнозов.

В кардиологии медицинские цифровые двойники применяются для прогнозирования риска внезапной сердечной смерти и оптимизации лечения аритмий. Например, модели, созданные на основе МРТ пациентов после инфаркта, превосходят традиционные методы оценки риска, помогая определить необходимость имплантации дефибриллятора. Кроме того, цифровые двойники улучшают точность катетерной абляции, предсказывая оптимальные мишени для воздействия,

что снижает вероятность рецидивов [78]. Перспективным направлением является использование цифровых двойников при фибрилляции предсердий, где они позволяют планировать стратегии лечения и прогнозировать риск повторных госпитализаций [79]. Дальнейшее развитие технологии связано с интеграцией непрерывного мониторинга данных, что обеспечит актуальность цифровых двойников в реальном времени.

Наконец, вызывает интерес расширение концепции за рамки индивидуального пациента и переход к моделированию целых медицинских систем. Речь идет о разработке виртуальных копий не только физиологических процессов, но и организационных структур: например, цифрового двойника больницы, который имитирует потоки пациентов, работу отделений, использование оборудования и персонала в реальном времени [80–82]. Такие системные двойники позволяют проводить «что-если» анализ для оптимизации расписаний, распределения ресурсов, логистики экстренной помощи, управления запасами лекарств или планирования ремонтов, тем самым повышая общую эффективность, снижая затраты и улучшая доступность медицинской помощи. Например, в работе [83] описан цифровой двойник для применения в условиях оказания медицинской помощи в условиях чрезвычайных ситуаций. Кроме того, на уровне управленческих процессов возможно создание двойников для эпидемиологического прогнозирования, моделирования распространения заболеваний в популяции или оценки последствий внедрения новых медицинских протоколов в масштабах региона или всей системы здравоохранения. Таким образом, это направление знаменует переход от персонализированной медицины к предиктивному и оптимизированному управлению медицинскими организациями и отраслью в целом.

**4.3. Цифровые двойники в макроэкономике.** В работе [84] предложена концепция «цифрового двойника экономики» как инструмента для проектирования и оценки экономической политики. Автор демонстрирует, что традиционные макроэкономические модели, такие как динамические стохастические модели общего равновесия (англ. dynamically stochastic general equilibrium models, DSGE) [85], обладают значительными ограничениями из-за упрощенных допущений и неспособности учитывать сложность реальных экономических систем [86]. В качестве решения была предложена концепция цифрового двойника, основанного на комбинации метода экономической архитектуры, обеспечивающего структурную прозрачность, и агентного моделирования, позволяющего имитировать поведение разнородных экономических агентов. Результаты показывают, что такой подход способен более точно прогнозировать последствия политических решений, выявлять скрытые взаимосвязи и минимизировать риски за счет виртуального тестирования мер до их реализации.

Ключевым достижением исследования является разработка теоретической основы для создания междисциплинарной платформы, объединяющей экономику, информационные технологии и поведенческую науку. Автор [84] подчеркивает потенциал цифрового двойника в оптимизации политики, например, при оценке антикризисных мер или переходе к экономике замкнутого цикла, основанной на возобновлении ресурсов. Однако успешное внедрение концепции требует решения вопросов стандартизации моделей, доступа к макроэкономическим данным и обеспечения международной координации. Работа [84] открывает новые перспективы для экономического моделирования, сочетая реалистичность микрооснований с возможностями современных вычислительных технологий.

Развитие цифровых двойников чрезвычайно важно для обеспечения процессов планирования и принятия решений в сфере отраслевого управления и реализации государственной политики, в особенности в сфере высокотехнологичных отраслей. Применение больших языковых моделей (Large Language Models, LLM) [87] может позволить значительно повысить качество постановки и оцифровки стратегических целей и задач, оценки их реализуемости, прежде всего, за счет повышения оперативности и качества обработки широких массивов неструктурированной

информации. Это особенно важно в условиях дефицита достоверных данных и растущего тренда на всестороннее ограничение открытого доступа как к финансово-экономической, так и к производственно-технологической информации. В таких условиях необходимо уделять внимание возможностям адаптации моделей цифровых двойников не только на уровне отдельных предприятий, но и на уровне отраслей. Данный подход сопряжён с рядом методологических рисков и ограничений. К ним относятся: 1) склонность LLM к генерации правдоподобных, но фактически недостоверных утверждений («галлюцинации»), что может исказить выводы при работе с экономическими прогнозами; 2) низкая интерпретируемость решений, затрудняющая анализ причинно-следственных связей в экономических процессах; 3) зависимость качества результатов от репрезентативности и объёма обучающих данных, что особенно критично для динамичных и нестационарных экономических систем. Эти аспекты необходимо учитывать при интеграции LLM в системы принятия решений на макроуровне.

В России на сегодняшний день в электронной промышленности спроектирована базовая архитектура системы поддержки принятия решений [88], направленная на перевод отраслевого управления в режим цифровой интеллектуальной сетцентрической модели [89, 90]. Такая платформа мезоэкономического управления в формате «цифровой двойник электронной промышленности — цифровые двойники предприятий электронной промышленности» составит основу для стратегического планирования развития электронной промышленности посредством формирования необходимых отраслевых и межотраслевых балансов, структуры управления бизнес-процессами отрасли, территориального планирования, развития производительных сил и т. п.

#### **4.4. Цифровые двойники финансовых агентов на основе больших языковых моделей.**

Парадигма цифровых двойников получает новое мощное воплощение в области финансов и экономики с появлением больших языковых моделей. В то время как традиционные экономические модели (например, DSGE) оперируют агрегированными показателями и упрощёнными допущениями о поведении агентов, подход на основе LLM позволяет создавать цифровые двойники финансовых агентов — виртуальные модели, способные понимать финансовую терминологию, решать специализированные задачи, следовать инструкциям и, что наиболее важно, проводить сложные рассуждения в условиях неопределённости, используя мультимодальные данные (цифровые отчеты, экономические данные, политические новости и т. д.).

Ярким примером такого подхода является работа [91], где представлена методология Finance Domain-Adaptive Post-training (FinDAP) для доменной адаптации LLM в финансовой сфере. FinDAP — это целостный фреймворк для специализированной доработки LLM под задачи финансовой отрасли. В отличие от простого дообучения на финансовых текстах, FinDAP предлагает системный подход, который включает: FinCap — определение ключевых компетенций, которые должна иметь финансовая LLM; FinRec — рецепты обучения, которые совместно оптимизируют различные этапы дообучения; FinTrain — специально подобранные наборы данных для обучения; FinEval — комплексная система оценки результатов. По сути, FinDAP — это не просто метод дообучения, а полноценная методология создания экспертных LLM для финансов, которая учитывает особенности предметной области и обеспечивает сохранение полезных качеств исходной модели при приобретении специализированных финансовых знаний.

Авторы [91] выделяют четыре ключевые способности, которыми должен обладать финансовый цифровой двойник: понимание доменно-специфичных концепций (например, облигация, коэффициент Шарпа и т. д.), выполнение специализированных задач (например, оценка кредитоспособности, анализ настроений на рынке), способность к рассуждению для анализа финансовых отчетов и решения математических задач и, наконец, следование инструкциям для взаимодействия в диалоговом режиме, что критически важно для интеграции цифрового двойника в системы поддержки принятия решений.

Методология FinRec предлагает эффективный рецепт посттренинга LLM, который может быть интерпретирован как процесс «воспитания» цифрового двойника. Совместное непрерывное предобучение и инструктивная тонкая настройка позволяет цифровому двойнику одновременно усваивать новые знания из финансовых текстов и сохранять общие способности, избегая «катастрофического забывания». Это аналогично обучению специалиста, который углубляется в новую область, не теряя базовых навыков. Далее, выравнивание по предпочтениям с использованием методов FAP (Final Answer Preference) и SCP (Stepwise Corrective Preference) целенаправленно улучшает способность к рассуждениям. SCP, в частности, использует генеративную модель вознаграждения для идентификации и коррекции первой ошибки в цепочке рассуждений, обеспечивая тонкий, пошаговый контроль за «мышлением» цифрового двойника. Результирующая модель Llama-Fin, созданная по этой методологии, показывает высокую эффективность в выполнении широкого спектра финансовых задач — от анализа сентимента до сложных экзаменационных вопросов Chartered Financial Analyst (CFA), превосходя по многим показателям даже более крупные общие LLM.

Этот подход напрямую развивает идеи, заложенные в работе [84], обсуждаемой в разделе 4.3. Вместо создания единой монолитной модели экономики методология на основе LLM позволяет создавать популяцию высокореалистичных цифровых двойников отдельных экономических агентов (трейдеров, аналитиков, риск-менеджеров). Такие двойники, обладая способностью к рассуждению и работе с неструктурированными данными, могут формировать более реалистичные микрооснования для агентных моделей, непосредственно использоваться в системах поддержки принятия решений для анализа новостей, отчетов и рыночной конъюнктуры, а также служить основой для «виртуальных испытаний» финансовых стратегий и нормативных актов в смоделированной среде, населенной такими агентами.

Таким образом, интеграция специализированных LLM, таких как Llama-Fin, открывает путь к созданию нового поколения цифровых двойников в экономике — не как статических моделей-агрегаторов, а как динамических, рассуждающих и обучающихся виртуальных субъектов, чье коллективное поведение сможет с высокой точностью моделировать сложность реальных финансовых систем.

**4.5. Другие области применения цифровых двойников.** Применение цифровых двойников не ограничивается вышерассмотренными направлениями, они находят применение практически во всех направлениях деятельности, где возможна математическая формализация процессов или объектов. Рассмотрим кратко различные направления.

*Применение в архитектуре и строительстве.* Концепция цифровых двойников произвела революцию в архитектурно-строительной отрасли и развитии умных городов. Эти виртуальные копии физических объектов, постоянно обновляемые через потоки данных в реальном времени, открывают новые возможности для моделирования, мониторинга и оптимизации. В строительстве, как обсуждается в [92], цифровые двойники применяются на всех этапах жизненного цикла зданий — от проектирования до эксплуатации. В городском планировании, согласно [93], городские цифровые двойники интегрируют данные с IoT-устройств, BIM-моделей (Building Information Modeling — 3D-модель зданий с привязанными данными, где каждый элемент модели содержит не только геометрию, но и технические параметры (плотность, теплопроводность, материалы, стоимость и сроки изготовления, производители), функциональные связи (взаимодействие элементов здания: стена ↔ окно ↔ вентиляция, логистика строительства), динамические свойства (например, автоматический пересчет сметы при замене материала и т. д.) и геоинформационные системы (ГИС) для создания динамических моделей городских систем. Математический аппарат, лежащий в основе этих технологий, включает методы машинного обучения, численного моделирования и дискретной оптимизации.

Виртуальное проектирование с использованием цифровых двойников позволяет архитекторам создавать высокоточные модели зданий, учитывающие не только геометрические параметры, но и физические свойства материалов [92]. Для этого применяются методы конечных элементов и вычислительной гидродинамики, позволяющие прогнозировать поведение конструкций при различных нагрузках и климатических условиях. Например, инструмент для создания цифровых двойников в архитектурном проектировании Ph2D сочетает физические и цифровые прототипы, используя алгоритмы компьютерного зрения для преобразования ручных макетов в параметрические модели [94].

*Городские цифровые двойники.* В контексте умных городов цифровые двойники становятся мощным инструментом управления городской инфраструктурой [93]. Проект Virtual Singapore использует 3D-модели города, обогащенные данными IoT-сенсоров, для моделирования различных сценариев. Математической основой служат агентные модели для прогнозирования транспортных потоков и методы машинного обучения для анализа данных. В Дубае алгоритмы обучения с подкреплением оптимизируют работу светофоров, уменьшая заторы на дорогах.

Для моделирования энергетических городских сетей применяются методы кластерного анализа и регрессионные модели, обрабатывающие данные о потреблении энергии [95]. Методы теории сложных сетей и алгоритмы работы с графами помогают оптимизировать маршруты общественного транспорта и распределение коммунальных ресурсов [96]. Особое значение имеют методы обработки больших данных, такие как MapReduce и Spark, позволяющие анализировать терабайты информации с городских датчиков в реальном времени [97, 98].

*Энергетика.* В энергетике цифровые двойники играют ключевую роль в управлении умными сетями (smart grids) и оптимизации энергопотребления. Они позволяют моделировать и анализировать работу энергетических систем в режиме реального времени, что способствует повышению их эффективности и надежности [99]. Например, цифровые двойники используются для прогнозирования нагрузки на сеть, выявления потенциальных сбоев и планирования профилактических мероприятий [100]. В контексте возобновляемых источников энергии цифровые двойники помогают оптимизировать работу ветряных и солнечных электростанций, учитывая изменчивые погодные условия [101]. Кроме того, они применяются для моделирования сложных сценариев, таких как интеграция распределенных энергоресурсов в общую сеть [102]. Отдельным быстроразвивающимся направлением является применение цифровых двойников в управлении центрами обработки данных (ЦОД) [103], которые интегрируют данные о нагрузке на вычислительные узлы, температурном режиме в серверных залах, эффективности систем охлаждения (включая жидкостное) и энергопотреблении в реальном времени, прогнозируют отказы оборудования и планируют техническое обслуживание, что повышает отказоустойчивость и снижает энергопотребление (включая улучшение PUE — Power Usage Effectiveness) [104] и позволяет проводить сценарный анализ при изменении нагрузки и конфигурации инфраструктуры [105].

*Образование.* Цифровые двойники в образовании открывают новые возможности для персонализации обучения, улучшения педагогических процессов и управления образованием [106]. Внедрение технологий цифровых двойников позволяет создавать виртуальные модели студентов, которые учитывают их индивидуальные особенности, такие как уровень знаний, предпочтения и стиль обучения [107, 108]. Это способствует разработке адаптивных образовательных программ, которые автоматически подстраиваются под потребности каждого обучающегося [109, 110]. Например, в рамках массовых онлайн-курсов цифровые двойники помогают анализировать поведение студентов и оптимизировать учебные материалы в реальном времени [107]. Кроме того, цифровые двойники могут использоваться для автоматизированного мониторинга успеваемости и прогнозирования академических результатов, что позволяет преподавателям своевременно корректировать учебный процесс [111].

## Заключение

В данной работе проведен комплексный анализ цифровых двойников как перспективной технологии, объединяющей достижения теории сложности и искусственного интеллекта. Показано, что цифровые двойники — это не просто статические модели, а динамические адаптивные системы, способные к самообучению и прогнозированию в реальном времени. Основу их эффективности составляет синтез традиционных математических методов (дифференциальные уравнения, теория графов) и современных подходов машинного обучения (PINNs, GNN, резервуарные вычисления), что позволяет преодолеть ограничения классического моделирования при работе со сложными нелинейными системами.

Теоретический анализ демонстрирует, что цифровые двойники эффективно решают проблему управления сложными системами за счет сочетания методов нелинейной динамики и ИИ-алгоритмов. Разработанная математическая формализация цифрового двойника как динамической системы с адаптивными свойствами открывает новые возможности для прогнозирования поведения сложных объектов в условиях неопределенности. Особую ценность представляет использование гибридных подходов, сочетающих физические модели с методами глубокого обучения, что позволяет сохранить интерпретируемость результатов при работе с неполными данными.

Практические применения цифровых двойников, рассмотренные в работе, подтверждают их трансформационный потенциал в различных областях — от промышленности и медицины до управления городской инфраструктурой и макроэкономикой. Универсальность концепции цифровых двойников позволяет создавать эффективные решения как для технических систем, так и для биологических объектов, что особенно важно в контексте развития персонализированной медицины.

Перспективы развития цифровых двойников связаны с дальнейшей интеграцией методов теории сложности и искусственного интеллекта, что позволит создавать более точные и адаптивные виртуальные модели. Ключевыми направлениями будущих исследований должны стать разработка унифицированных стандартов для цифровых двойников, совершенствование методов их верификации и валидации, а также решение этических и правовых вопросов, связанных с их применением в чувствительных областях, таких как медицина и социальное управление. На основании развития этих направлений в перспективе вероятен переход от отдельных приложений к сквозным экосистемам, где цифровые двойники разных уровней взаимодействуют друг с другом, формируя «цифровые миры» для науки, промышленности и общества, что, вероятно, возможно реализовать через технологии ИИ-агентов как связующих элементов между отдельными цифровыми двойниками.

## Список литературы

1. *Boschert S., Rosen R.* Digital twin—the simulation aspect // In: Hehenberger P., Bradley D. (eds) *Mechatronic Futures*. Cham: Springer, 2016. P. 59–74. DOI: 10.1007/978-3-319-32156-1\_5.
2. *Hernández L. A., Hernández S.* Application of digital 3d models on urban planning and highway design // *WIT Transactions on the Built Environment*. 1997. Vol. 30. P. 391–402.
3. *Grievés M.* Digital twin: manufacturing excellence through virtual factory replication // White paper. 2014. 7 p.
4. *Lu Y.* Industry 4.0: A survey on technologies, applications and open research issues // *Journal of Industrial Information Integration*. 2017. Vol. 6. P. 1–10. DOI: 10.1016/j.jii.2017.04.005.
5. *Singh M., Fuenmayor E., Hinchy E. P., Qiao Y., Murray N., Devine D.* Digital twin: Origin to future // *Appl. Syst. Innov.* 2021. Vol. 4. P. 36. DOI: 10.3390/asi4020036.
6. *Bárkányi Á., Chovan T., Nemeth S., Abonyi J.* Modelling for digital twins—potential role of surrogate models // *Processes*. 2021. Vol. 9. P. 476. DOI: 10.3390/pr9030476.

7. *Sharma A., Kosasih E., Zhang J., Brintrup A., Calinescu A.* Digital twins: State of the art theory and practice, challenges, and open research questions // *Journal of Industrial Information Integration*. 2022. Vol. 30. P. 100383. DOI: 10.1016/j.jii.2022.100383.
8. *Juarez M. G., Botti V. J., Giret A. S.* Digital twins: Review and challenges // *ASME. J. Comput. Inf. Sci. Eng.* 2021. Vol. 21, no. 3. P. 030802. DOI: 10.1115/1.4050244.
9. *Безручко Б., Короновский А., Трубецков Д., Храмов А.* Путь в синергетику: Экскурс в десяти лекциях. М.: URSS, 2020. 304 с.
10. *Reifsnider K., Majumdar P.* Multiphysics stimulated simulation digital twin methods for fleet management // In: 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics, and materials conference. 8–11 April, 2013, Boston, Massachusetts. 2013. P. 1578. DOI: 10.2514/6.2013-1578.
11. *Rosen R., Von Wichert G., Lo G., Bettenhausen K. D.* About the importance of autonomy and digital twins for the future of manufacturing // *IFAC-PapersOnLine*. 2015. Vol. 48, no. 3. P. 567–572. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.06.141.
12. *Laubenbacher R., Mehrad B., Shmulevich I., Trayanova N.* Digital twins in medicine // *Nat. Comput. Sci.* 2024. Vol. 4, no. 3. P. 184–191. DOI: 10.1038/s43588-024-00607-6.
13. *Rathore M. M., Shah S. A., Shukla D., Bentafat E., Bakiras S.* The role of AI, machine learning, and big data in digital twinning: A systematic literature review, challenges, and opportunities // *IEEE Access*. 2021. Vol. 9. P. 32030–32052. DOI: 10.1109/access.2021.3060863.
14. *Birk W., Hostettler R., Razi M., Atta K., Tammia R.* Automatic generation and updating of process industrial digital twins for estimation and control - A review // *Front. Control. Eng.* 2022. Vol. 3. P. 954858. DOI: 10.3389/fcteg.2022.954858.
15. *Barricelli B. R., Casiraghi E., Fogli D.* A survey on digital twin: Definitions, characteristics, applications, and design implications // *IEEE Access*. 2019. Vol. 7. P. 167653–167671. DOI: 10.1109/access.2019.2953499.
16. *Vallée A.* Envisioning the future of personalized medicine: role and realities of digital twins // *J. Med. Internet Res.* 2024. Vol. 26. P. e50204. DOI: 10.2196/50204.
17. *VanDerHorn E., Mahadevan S.* Digital twin: Generalization, characterization and implementation // *Decision Support Systems*. 2021. Vol. 145. P. 113524. DOI: 10.1016/j.dss.2021.113524.
18. *LaGrange E.* Developing a digital twin: The roadmap for oil and gas optimization // In: SPE Offshore Europe Conference and Exhibition. 3–6 September 2019, Aberdeen, UK. SPE, 2019. P. SPE-195790-MS. DOI: 10.2118/195790-MS.
19. *Dihan M. S., Akash A. I., Tasneem Z., Das P., Das S. K., Islam M. R., Islam M. M., Badal F. R., Ali M. F., Ahamed M. H., Abhi S. H., Sarker S. K., Hasan M. M.* Digital twin: Data exploration, architecture, implementation and future // *Heliyon*. 2024. Vol. 10, no. 5. P. e26503. DOI: 10.1016/j.heliyon.2024.e26503.
20. *Карпов О. Э., Храмов А. Е.* Информационные технологии, вычислительные системы и искусственный интеллект в медицине. М.: ДПК Пресс, 2022. 480 с.
21. *Hramov A. E., Maksimenko V. A., Pisarchik A. N.* Physical principles of brain–computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states // *Physics Reports*. 2021. Vol. 918. P. 1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
22. *Lozano A. M., Lipsman N., Bergman H., Brown P., Chabardes S., Chang J. W., Matthews K., McIntyre C. C., Schlaepfer T. E., Schulder M., Temel Y., Volkmann J., Krauss J. K.* Deep brain stimulation: current challenges and future directions // *Nat. Rev. Neurol.* 2019. Vol. 15, no. 3. P. 148–160. DOI: 10.1038/s41582-018-0128-2.
23. *Карпов О. Э., Андриков Д. А., Максименко В. В., Храмов А. Е.* Прозрачный искусственный интеллект для медицины // *Врач и информационные технологии*. 2025. № 2. С. 4–11. DOI: 10.25881/18110193\_2022\_2\_4.
24. *Pisarchik A. N., Maksimenko V. A., Hramov A. E.* From novel technology to novel applications:

- Comment on “an integrated brain-machine interface platform with thousands of channels” by Elon Musk and Neuralink // *J. Med. Internet Res.* 2019. Vol. 21, no. 10. P. e16356. DOI: 10.2196/16356.
25. *Karpov O. E., Pitsik E. N., Kurkin S. A., Maksimenko V. A., Gusev A. V., Shusharina N. N., Hramov A. E.* Analysis of publication activity and research trends in the field of AI medical applications: Network approach // *Int. J. Environ. Res. Public Health.* 2023. Vol. 20, no. 7. P. 5335. DOI: 10.3390/ijerph20075335.
  26. *Grieves M., Vickers J.* Digital twin: Mitigating unpredictable, undesirable emergent behavior in complex systems // In: *Transdisciplinary Perspectives on Complex Systems: New Findings and Approaches.* Cham: Springer, 2016. P. 85–113. DOI: 10.1007/978-3-319-38756-7\_4.
  27. *Kadem M., Garber L., Abdelkhalek M., Al-Khazraji B. K., Keshavarz-Motamed Z.* Hemodynamic modeling, medical imaging, and machine learning and their applications to cardiovascular interventions // *IEEE Rev. Biomed. Eng.* 2022. Vol. 16. P. 403–423. DOI: 10.1109/rbme.2022.3142058.
  28. *Mulder M., Fresiello L., Donker D. W.* Computational models for hemodynamic management in critically ill patients: a systematic review // In: *Virtual Physiological Human Conference, VPH 2022.* 2022, Porto, Portugal.
  29. *Tuegel E.* The airframe digital twin: Some challenges to realization // In: *53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 20th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 14th AIAA.* 2012. P. 1812. DOI: 10.2514/6.2012-1812.
  30. *Lee J., Lapira E., Bagheri B., Kao H.-A.* Recent advances and trends in predictive manufacturing systems in big data environment // *Manufacturing Letters.* 2013. Vol. 1, no. 1. P. 38–41. DOI: 10.1016/j.mfglet.2013.09.005.
  31. *Zhang R., Wang F., Cai J., Wang Y., Guo H., Zheng J.* Digital twin and its applications: A survey // *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 2022. Vol. 123, no. 11. P. 4123–4136. DOI: 10.1007/s00170-022-10445-3.
  32. *Mihai S., Yaqoob M., Hung D. V., Davis W., Towakel P., Raza M., Karamanoglu M., Barn B., Shetve D., Prasad R. V., Venkataraman H., Trestian R., Nguyen H. X.* Digital twins: A survey on enabling technologies, challenges, trends and future prospects // *IEEE Communications Surveys and Tutorials.* 2022. Vol. 24, no. 4. P. 2255–2291. DOI: 10.1109/COMST.2022.3208773.
  33. *Rasheed A., San O., Kvamsdal T.* Digital twin: Values, challenges and enablers from a modeling perspective // *IEEE Access.* 2020. Vol. 8. P. 21980–22012. DOI: 10.1109/access.2020.2970143.
  34. *Aivaliotis P., Georgoulis K., Arkouli Z., Makris S.* Methodology for enabling digital twin concept using advanced physical-based modelling // *Procedia CIRP.* 2019. Vol. 81. P. 417–422. DOI: 10.1016/j.procir.2019.03.072.
  35. *Karniadakis G. E., Kevrekidis I. G., Lu L., Perdikaris P., Wang S., Yang L.* Physics-informed machine learning // *Nat. Rev. Phys.* 2021. Vol. 3, no. 6. P. 422–440. DOI: 10.1038/s42254-021-00314-5.
  36. *Iman R. L.* Latin Hypercube Sampling // In: *Melnick E.L., Everitt B.S. (eds) Encyclopedia of Quantitative Risk Analysis and Assessment.* NY: Wiley, 2008. DOI: 10.1002/9780470061596.risk0299.
  37. *Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E.* Numerical gaussian processes for time-dependent and nonlinear partial differential equations // *SIAM Journal on Scientific Computing.* 2018. Vol. 40, no. 1. P. A172–A198. DOI: 10.1137/17M1120762.
  38. *Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.* Physics informed deep learning (part i): Data-driven solutions of nonlinear partial differential equations // *arXiv:1711.10561.* arXiv Preprint, 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1711.10561.
  39. *Hartmann D., Herz M., Wever U.* Model order reduction a key technology for digital twins // In:

- Keiper W., Milde A., Volkwein S. (eds) Reduced-Order Modeling (ROM) for Simulation and Optimization. Cham: Springer, 2018. P. 167–179. DOI: 10.1007/978-3-319-75319-5\_8.
40. *Liang Y. C., Lee H. P., Lim S. P., Lin W. Z., Lee K. H., Wu C. G.* Proper orthogonal decomposition and its applications—part i: Theory // *Journal of Sound and vibration*. 2002. Vol. 252, no. 3. P. 527–544. DOI: 10.1006/jsvi.2001.4041.
  41. *Oh Y., Kam S., Lee J., Lim D.-Y., Kim S., Bui A.* Comprehensive review of neural differential equations for time series analysis // *arXiv:2502.09885*. arXiv Preprint, 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2502.09885.
  42. *Ahmed S., Nielsen I. E., Tripathi A., Siddiqui S., Ramachandran R. P., Rasool G.* Transformers in time-series analysis: A tutorial // *Circuits Syst. Signal Process*. 2023. Vol. 42, no. 12. P. 7433–7466. DOI: 10.1007/s00034-023-02454-8.
  43. *Song Y., Wang T., Cai P., Mondal S. K., Sahoo J. P.* A comprehensive survey of few-shot learning: Evolution, applications, challenges, and opportunities // *ACM Computing Surveys*. 2023. Vol. 55, no. 13s. P. 1–40. DOI: 10.1145/3582688.
  44. *Nakajima K., Fischer I.* Reservoir Computing. Singapore: Springer, 2021. 458 p. DOI: 10.1007/978-981-13-1687-6.
  45. *Andreev A. V., Pisarchik A. N., Kulagin N., Jaimes-Reátegui R., Huerta-Cuellar G., Badarin A. A., Hramov A. E.* Stochastic cloning of dynamical systems with hidden variables // *Phys. Rev. E*. 2025. Vol. 112, no. 1. P. 015303. DOI: 10.1103/dynj-xqrm.
  46. *Badarin A. A., Andreev A. V., Klinshov V., Antipov V., Hramov A. E.* Hidden data recovery using reservoir computing: Adaptive network model and experimental brain signals // *Chaos*. 2024. Vol. 34, no. 10. P. 103121. DOI: 10.1063/5.0223184.
  47. *Badarin A. A., Klinshov V., Smelov P., Andreev A. V.* Reservoir computing reconstructs blood-oxygen-level-dependent signals: whole-brain modeling study // *Eur. Phys. J. Spec. Top*. 2024. Vol. 234. P. 4497–4504. DOI: 10.1140/epjs/s11734-025-01702-z.
  48. *Hramov A. E., Kulagin N., Pisarchik A. N., Andreev A. V.* Strong and weak prediction of stochastic dynamics using reservoir computing // *Chaos*. 2025. Vol. 35, no. 3. P. 033140. DOI: 10.1063/5.0252908.
  49. *Pisarchik A. N., Kir'yanov A. V., Barmenkov Y. O., Jaimes-Reátegui R.* Dynamics of an erbium-doped fiber laser with pump modulation: theory and experiment // *J. Opt. Soc. Am. B*. 2005. Vol. 22, no. 10. P. 2107–2114. DOI: 10.1364/JOSAB.22.002107.
  50. *Масленников О. В., Некоркин В. И.* Адаптивные динамические сети // *УФН*. 2017. Т. 187, № 7. С. 745–756. DOI: 10.3367/UFNr.2016.10.037902.
  51. *Guze S.* Graph theory approach to the vulnerability of transportation networks // *Algorithms*. 2019. Vol. 12, no. 12. P. 270. DOI: 10.3390/a12120270.
  52. *Храмов А. Е., Фролов Н. С., Максименко В. А., Куркин С. А., Казанцев В. Б., Писарчик А. Н.* Функциональные сети головного мозга: от восстановления связей до динамической интеграции // *УФН*. 2021. Т. 191. С. 614–650. DOI: 10.3367/UFNr.2020.06.038807.
  53. *Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.-U.* Complex networks: Structure and dynamics // *Physics Reports*. 2006. Vol. 424, no. 4–5. P. 175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009.
  54. *Pereira T., dos Santos E. R., van Strien S.* Robust reconstruction of sparse network dynamics // *Nonlinearity*. 2025. Vol. 38, no. 5. P. 055031. DOI: 10.1088/1361-6544/add3b0.
  55. *Marques E. C., Maciel N., Naviner L., Cai H., Yang J.* A review of sparse recovery algorithms // *IEEE Access*. 2018. Vol. 7. P. 1300–1322. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2886471.
  56. *Andreev A. V., Badarin A. A., Maximenko V. A., Hramov A. E.* Forecasting macroscopic dynamics in adaptive Kuramoto network using reservoir computing // *Chaos*. 2022. Vol. 32, no. 10. P. 103126. DOI: 10.1063/5.0114127.

57. Corso G., Stark H., Jegelka S., Jaakkola T., Barzilay R. Graph neural networks // *Nat. Rev. Methods Primers*. 2024. Vol. 4, no. 1. P. 17. DOI: 10.1038/s43586-024-00294-7.
58. Ferriol-Galmés M., Suárez-Varela J., Paillissé J., Shi X., Xiao S., Cheng X., Barlet-Ros P., Cabellos-Aparicio A. Building a digital twin for network optimization using graph neural networks // *Computer Networks*. 2022. Vol. 217. P. 109329. DOI: 10.1016/j.comnet.2022.109329.
59. Barbiero P., Vinas Torne R., Lió P. Graph representation forecasting of patient's medical conditions: toward a digital twin // *Front Genet*. 2021. vol. 12. P. 652907. DOI: 10.3389/fgene.2021.652907.
60. Barbiero P., Lió P. The computational patient has diabetes and a covid // *arXiv:2006.06435*. arXiv Preprint, 2020. 37 p. DOI: 10.48550/arXiv.2006.06435.
61. Дождев В., Шантаев Е., Дараселия Л., Храмов А. Интегрированный подход к обеспечению качества промышленных данных для решений на основе искусственного интеллекта // *Автоматизация в промышленности*. 2025. Т. 6. С. 4–12.
62. Hramov A. E., Pisarchik A. V. Big data management and quality evaluation for the implementation of AI technologies in smart manufacturing // *Appl. Sci*. 2025. Vol. 15, no. 22. P. 11905. DOI: 10.3390/app152211905.
63. Wasi A. T., Anik M. A., Rahman A., Hoque M. I., Islam M., Ahsan M. M. A theoretical framework for graph-based digital twins for supply chain management and optimization // *arXiv:2504.03692*. arXiv Preprint, 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2504.03692.
64. Javaid M., Haleem A., Suman R. Digital twin applications toward industry 4.0: A review // *Cognitive Robotics*. 2023. Vol. 3. P. 71–92. DOI: 10.1016/j.cogr.2023.04.003.
65. Li L., Aslam S., Wileman A., Perinpanayagam S. Digital twin in aerospace industry: A gentle introduction // *IEEE Access*. 2021. Vol. 10. P. 9543–9562. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3136458.
66. Chandrasekaran M., Rajesh P. Conceptualisation of digital twin-enabled new product design framework for the automotive industry // *Journal of Engineering Design*. 2025. Vol. 37, no. 3. P. 612–652. DOI: 10.1080/09544828.2025.2504852.
67. Zhang Q., Liu J., Chen X. A literature review of the digital thread: Definition, key technologies, and applications // *Systems*. 2024. Vol. 12, no. 3. P. 70. DOI: 10.3390/systems12030070.
68. Jiang Y., Yin S., Li K., Luo H., Kaynak O. Industrial applications of digital twins // *Philos Trans A Math Phys Eng Sci*. 2021. Vol. 379, no. 2207. P. 20200360. DOI: 10.1098/rsta.2020.0360.
69. Zhang L., Chen X., Zhou W., Cheng T., Chen L., Guo Z., Han B., Lu L. Digital twins for additive manufacturing: a state-of-the-art review // *Appl. Sci*. 2020. Vol. 10, no. 23. P. 8350. DOI: 10.3390/app10238350.
70. Xu T., Zhang X., Sun W., Wang B. Intelligent operation and maintenance of wind turbines gearboxes via digital twin and multi-source data fusion // *Sensors*. 2025. Vol. 25, no. 7. P. 1972. DOI: 10.3390/s25071972.
71. Werbińska-Wojciechowska S., Giel R., Winiarska K. Digital twin approach for operation and maintenance of transportation system—systematic review // *Sensors*. 2024. Vol. 24, no. 18. P. 6069. DOI: 10.3390/s24186069.
72. Pandey P. K., Pandey P. K., Mahajan S., Paul J., Iyer S. Digital twin and virtual reality, augmented reality, and mixed reality // In: *Digital Twins for Smart Cities and Villages*. Elsevier, 2025. P. 273–293. DOI: 10.1016/B978-0-443-28884-5.00013-0.
73. Wanasinghe T. R., Wroblewski L., Petersen B. K., Gosine R. G., James L. A., De Silva O., Mann G. K., Warriar P. J. Digital twin for the oil and gas industry: Overview, research trends, opportunities, and challenges // *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. P. 104175–104197. DOI: 10.1109/access.2020.2998723.
74. Leng J., Liu Q., Ye S., Jing J., Wang Y., Zhang C., Zhang D., Chen X. Digital twin-driven rapid reconfiguration of the automated manufacturing system via an open architecture model // *Robotics*

- and Computer-Integrated Manufacturing. 2020. Vol. 63. P. 101895. DOI: 10.1016/j.rcim.2019.101895.
75. *Armeni P., Polat I., De Rossi L. M., Diaferia L., Meregalli S., Gatti A.* Digital twins in healthcare: is it the beginning of a new era of evidence-based medicine? A critical review // *J. Pers. Med.* 2022. Vol. 12, no. 8. P. 1255. DOI: 10.3390/jpm12081255.
  76. *Kamel Boulos M. N., Zhang P.* Digital twins: from personalised medicine to precision public health // *J. Pers. Med.* 2021. Vol. 11, no. 8. P. 745. DOI: 10.3390/jpm11080745.
  77. *Yi X., Walia E., Babyn P.* Generative adversarial network in medical imaging: A review // *Med. Image Anal.* 2019. Vol. 58. P. 101552. DOI: 10.1016/j.media.2019.101552.
  78. *Sel K., Osman D., Zare F., Masoumi Shahrababak S., Brattain L., Hahn J. O., Inan O. T., Mukkamala R., Palmer J., Paydarfar D., Pettigrew R. I., Quyyumi A. A., Telfer B., Jafari R.* Building digital twins for cardiovascular health: From principles to clinical impact // *J. Am. Heart Assoc.* 2024. Vol. 13, no. 19. P. e031981. DOI: 10.1161/JAHA.123.031981.
  79. *Karakasis P., Antoniadis A. P., Theofilis P., Vlachakis P. K., Milaras N., Patoulias D., Karamitsos T., Fragakis N.* Digital twin models in atrial fibrillation: Charting the future of precision therapy? // *J. Pers. Med.* 2025. Vol. 15, no. 6. P. 256. DOI: 10.3390/jpm15060256.
  80. *Faisal S. M., Ishrat M., Khan W.* Digital Twins in Healthcare: Revolutionizing Patient Care and Medical Operations // In: *Digital Twins for Smart Cities and Urban Planning*. Boca Raton: CRC Press, 2025. P. 69–89.
  81. *Elkefi S., Onur A.* Digital twins for managing health care systems: rapid literature review // *J. Med. Internet Res.* 2022. Vol. 24, no. 8. P. e37641. DOI: 10.2196/37641.
  82. *Karakra A., Fontanili F., Lamine E., Lamothe J.* A discrete event simulation-based methodology for building a digital twin of patient pathways in the hospital for near real-time monitoring and predictive simulation // *Digital Twin.* 2022. Vol. 2. P. 1. DOI: 10.12688/digitaltwin.17454.1.
  83. *Карнов О. Э., Андриков Д. А., Замятин М. Н., Осипов А. В., Кильник А. И., Багаев Г. А., Максачук А. П., Храмов А. Е.* Перспективы и ограничения использования технологий искусственного интеллекта в системе поддержки принятия решений службы медицины катастроф. Врач и информационные технологии // *Врач и информационные технологии.* 2025. № 4. С. 6–15. DOI: 10.25881/18110193\_2025\_4\_6.
  84. *Pobuda P.* The digital twin of the economy: Proposed tool for policy design and evaluation // *Real-World Economics Review.* 2020. Vol. 94. P. 140–149.
  85. *Mankiw N. G.* The macroeconomist as scientist and engineer // *Journal of Economic Perspectives.* 2006. Vol. 20, no. 4. P. 29–46. DOI: 10.1257/jep.20.4.29.
  86. *Stiglitz J. E.* Where modern macroeconomics went wrong // *Oxford Review of Economic Policy.* 2018. Vol. 34, no. 1–2. P. 70–106.
  87. *Naveed H., Khan A. U., Qiu S., Saqib M., Anwar S., Usman M., Akhtar N., Barnes N., Mian A.* A comprehensive overview of large language models // *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology.* 2025. Vol. 16, no. 5. P. 1–72. DOI: 10.1145/3744746.
  88. *Шнак В. В.* Инвентаризация электроники–фундамент прорыва в лидеры // *Russian Technological Journal.* 2025. Т. 13, № 4. С. 135–148. DOI: 10.32362/2500-316X-2025-13-4-135-148.
  89. *Шнак В. В.* Формирование организационно-управленческой модели реализации «Стратегии развития электронной промышленности Российской Федерации на период до 2030 года» // *Вестник Челябинского государственного университета.* 2021. № 3(449). С. 10–23. DOI: 10.47475/1994-2796-2021-10302.
  90. *Шнак В. В.* Основы мультиагентной планово-логистической модели управления воспроизводственным циклом отрасли в режиме «онлайн» // *Фундаментальные исследования.* 2022. Т. 3. С. 146–155. DOI: 10.17513/fr.43229.

91. *Ke Z., Ming Y., Nguyen X.-P., Xiong C., Joty S.* Demystifying domain-adaptive post-training for financial llms // arXiv:2501.04961. arXiv Preprint, 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2501.04961.
92. *Omrany H., Al-Obaidi K. M., Husain A., Ghaffarianhoseini A.* Digital twins in the construction industry: a comprehensive review of current implementations, enabling technologies, and future directions // Sustainability. 2023. Vol. 15, no. 14. P. 10908. DOI: 10.3390/su151410908.
93. *Mazzetto S.* A review of urban digital twins integration, challenges, and future directions in smart city development // Sustainability. 2024. Vol. 16, no. 19. P. 8337. DOI: 10.3390/su16198337.
94. *Liu W., Lv Y., Wang Q., Sun B., Han D.* A systematic review of the digital twin technology in buildings, landscape and urban environment from 2018 to 2024 // Buildings. 2024. Vol. 14, no. 11. P. 3475. DOI: 10.3390/buildings14113475.
95. *Hsu D.* Comparison of integrated clustering methods for accurate and stable prediction of building energy consumption data // Applied Energy. 2015. Vol. 160. P. 153–163. DOI: 10.1016/j.apenergy.2015.08.126.
96. *Jia G.-L., Ma R.-G., Hu Z.-H.* Urban transit network properties evaluation and optimization based on complex network theory // Sustainability. 2019. Vol. 11, no. 7. P. 2007. DOI: doi.org/10.3390/su11072007.
97. *Silva B. N., Khan M., Jung C., Seo J., Muhammad D., Han J., Yoon Y., Han K.* Urban planning and smart city decision management empowered by real-time data processing using big data analytics // Sensors. 2018. Vol. 18, no. 9. P. 2994. DOI: 10.3390/s18092994.
98. *Ang L.-M., Seng K. P., Zungeru A. M., Ijearu G. K.* Big sensor data systems for smart cities // IEEE Internet of Things Journal. 2017. Vol. 4, no. 5. P. 1259–1271. DOI: 10.1109/JIOT.2017.2695535.
99. *Yu X., Xue Y.* Smart grids: A cyber–physical systems perspective // Proceedings of the IEEE. 2016. Vol. 104, no. 5. P. 1058–1070. DOI: 10.1109/JPROC.2015.2503119.
100. *Brosinsky C., Westermann D., Krebs R.* Recent and prospective developments in power system control centers: Adapting the digital twin technology for application in power system control centers // In: 2018 IEEE international energy conference (ENERGYCON). 2018, Limassol, Cyprus. IEEE, 2018. P. 1–6. DOI: 10.1109/ENERGYCON.2018.8398846.
101. *Joseph A., Cvetković M., Palensky P.* Predictive mitigation of short term voltage instability using a faster than real-time digital replica // In: 2018 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conference Europe (ISGT-Europe). 2018, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina. IEEE, 2018. P. 1–6. DOI: 10.1109/ISGTEurope.2018.8571803.
102. *Mohamed N., Al-Jaroodi J., Lazarova-Molnar S.* Leveraging the capabilities of industry 4.0 for improving energy efficiency in smart factories // IEEE Access. 2019. Vol. 7. P. 18008–18020. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2897045.
103. *Буторова А. С., Борисов В. И., Сергеев А. П., Ронкин М. В., Бобаков В. С., Иванов С. С., Поляков С. О., Игнатков К. А., Чернышов Ю. Ю., Скороходов А. В., Манжуров А. И.* Прогностические модели инженерных систем центров обработки данных на основе искусственного интеллекта: обзор архитектур и датасетов // Траектория исследований - человек, природа, технологии. 2025. Т. 3, № 15. С. 3–18. DOI: 10.56564/27825264\_2025\_3\_3.
104. *Zhu H., Lin B.* Digital twin-driven energy consumption management of integrated heat pipe cooling system for a data center // Applied Energy. 2024. Vol. 373. P. 123840. DOI: 10.1016/j.apenergy.2024.123840.
105. *Yuan H., Zhang Z., Yang D., Xue T., Wen D., Yao G.* An intelligent thermal management strategy for a data center prototype based on digital twin technology // Applied Sciences. 2025. Vol. 15, no. 14. P. 7675.
106. *Стриханов М. Н., Трубецков Д. И., Короновский А. А., Шараевский Ю. П., Храмов А. Е.* Высшая школа России с позиций нелинейной динамики (проблемы, оценки, модели). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 192 с.

107. Yu H., Miao C., Leung C., White T.J. Towards AI-powered personalization in MOOC learning // NPJ Sci Learn. 2017. Vol. 2, no. 1. p. 15. DOI: 10.1038/s41539-017-0016-3.
108. Grubov V.V., Khramova M.V., Goman S., Badarin A.A., Kurkin S.A., Andrikov D.A., Pitsik E., Antipov V., Petushok E., Brusinskii N., Bukina T.V., Fedorov A.A., Hramov A.E. Open-loop neuroadaptive system for enhancing student's cognitive abilities in learning // IEEE Access. 2024. Vol. 12. P. 49034–49049. DOI: 10.1109/access.2024.3383847.
109. Букина Т., Храмова М., Куркин С., Андриков Д., Гоман С., Дедков А., Храмов А. Нейрообразовательный программный рекомендательный сервис как инструмент персонализации образовательного процесса // Информатика и образование. 2024. Т. 39, № 5. С. 50–62. DOI: 10.32517/0234-0453-2024-39-5-50-62.
110. Федоров А., Куркин С., Храмова М., Храмов А. Нейротехнологии и искусственный интеллект как ключевые факторы кастомизации жизненно-образовательного маршрута // Информатика и образование. 2023. Т. 38, № 3. С. 5–15. DOI: 10.32517/0234-0453-2023-38-3-5-15.
111. Peng H., Ma S., Spector J.M. Personalized adaptive learning: an emerging pedagogical approach enabled by a smart learning environment // Smart Learn. Environ. 2019. Vol. 6, no. 1. P. 9. DOI: 10.1186/s40561-019-0089-y.

## References

1. Boschert S, Rosen R. Digital twin—the simulation aspect. In: Hehenberger P, Bradley D, editors. Mechatronic Futures. Cham: Springer; 2016. P. 59–74. DOI: 10.1007/978-3-319-32156-1\_5.
2. Hernández LA, Hernández S. Application of digital 3d models on urban planning and highway design. WIT Transactions on the Built Environment. 1997;30:391–402.
3. Grieves M. Digital twin: manufacturing excellence through virtual factory replication. White paper; 2014. 7 p.
4. Lu Y. Industry 4.0: A survey on technologies, applications and open research issues. Journal of Industrial Information Integration. 2017;6:1–10. DOI: 10.1016/j.jii.2017.04.005.
5. Singh M, Fuenmayor E, Hinchy EP, Qiao Y, Murray N, Devine D. Digital twin: Origin to future. Appl. Syst. Innov. 2021;4:36. DOI: 10.3390/asi4020036.
6. Bárkányi Á, Chovan T, Nemeth S, Abonyi J. Modelling for digital twins—potential role of surrogate models. Processes. 2021;9:476. DOI: 10.3390/pr9030476.
7. Sharma A, Kosasih E, Zhang J, Brintrup A, Calinescu A. Digital twins: State of the art theory and practice, challenges, and open research questions. Journal of Industrial Information Integration. 2022;30:100383. DOI: 10.1016/j.jii.2022.100383.
8. Juarez MG, Botti VJ, Giret AS. Digital twins: Review and challenges. ASME. J. Comput. Inf. Sci. Eng. 2021;21(3):030802. DOI: 10.1115/1.4050244.
9. Bezruchko B, Koronovskii A, Trubetskoy D, Hramov A. The Path to Synergetics: An Excursion in Ten Lectures. M.: URSS, 2020. 304 p. (in Russian).
10. Reifsnider K, Majumdar P. Multiphysics stimulated simulation digital twin methods for fleet management. In: 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics, and materials conference. 8–11 April, 2013, Boston, Massachusetts. 2013. P. 1578. DOI: 10.2514/6.2013-1578.
11. Rosen R, Von Wichert G, Lo G, Bettenhausen KD. About the importance of autonomy and digital twins for the future of manufacturing. IFAC-PapersOnLine. 2015;48(3):567–572. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.06.141.
12. Laubenbacher R, Mehrad B, Shmulevich I, Trayanova N. Digital twins in medicine. Nat. Comput. Sci. 2024;4(3):184–191. DOI: 10.1038/s43588-024-00607-6.
13. Rathore MM, Shah SA, Shukla D, Bentafat E, Bakiras S. The role of AI, machine learning, and big data in digital twinning: A systematic literature review, challenges, and opportunities. IEEE Access. 2021;9:32030–32052. DOI: 10.1109/access.2021.3060863.

14. Birk W, Hostettler R, Razi M, Atta K, Tammia R. Automatic generation and updating of process industrial digital twins for estimation and control - A review. *Front. Control. Eng.* 2022;3:954858. DOI: 10.3389/fcteg.2022.954858.
15. Barricelli BR, Casiraghi E, Fogli D. A survey on digital twin: Definitions, characteristics, applications, and design implications. *IEEE Access.* 2019;7:167653–167671. DOI: 10.1109/access.2019.2953499.
16. Vallée A. Envisioning the future of personalized medicine: role and realities of digital twins. *J. Med. Internet Res.* 2024;26:e50204. DOI: 10.2196/50204.
17. VanDerHorn E, Mahadevan S. Digital twin: Generalization, characterization and implementation. *Decision Support Systems.* 2021;145:113524. DOI: 10.1016/j.dss.2021.113524.
18. LaGrange E. Developing a digital twin: The roadmap for oil and gas optimization. In: *SPE Offshore Europe Conference and Exhibition. 3–6 September 2019, Aberdeen, UK.* SPE; 2019. P. SPE-195790-MS. DOI: 10.2118/195790-MS.
19. Dihan MS, Akash AI, Tasneem Z, Das P, Das SK, Islam MR, Islam MM, Badal FR, Ali MF, Ahamed MH, Abhi SH, Sarker SK, Hasan MM. Digital twin: Data exploration, architecture, implementation and future. *Heliyon.* 2024;10(5):e26503. DOI: 10.1016/j.heliyon.2024.e26503.
20. Karpov OE, Hramov AE. *Information Technologies, Computing Systems, and Artificial Intelligence in Medicine.* M.: DPK Press; 2022. 480 p.
21. Hramov AE, Maksimenko VA, Pisarchik AN. Physical principles of brain–computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states. *Physics Reports.* 2021;918:1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
22. Lozano AM, Lipsman N, Bergman H, Brown P, Chabardes S, Chang JW, Matthews K, McIntyre CC, Schlaepfer TE, Schulder M, Temel Y, Volkmann J, Krauss JK. Deep brain stimulation: current challenges and future directions. *Nat. Rev. Neurol.* 2019;15(3):148–160. DOI: 10.1038/s41582-018-0128-2.
23. Karpov OE, Andrikov DA, Maksimenko VV, Hramov AE. Transparent artificial intelligence for medicine. *Medical Doctor and Information Technologies.* 2025;(2):4–11 (in Russian). DOI: 10.25881/18110193\_2022\_2\_4.
24. Pisarchik AN, Maksimenko VA, Hramov AE. From novel technology to novel applications: Comment on “an integrated brain-machine interface platform with thousands of channels” by Elon Musk and Neuralink. *J. Med. Internet Res.* 2019;21(10):e16356. DOI: 10.2196/16356.
25. Karpov OE, Pitsik EN, Kurkin SA, Maksimenko VA, Gusev AV, Shusharina NN, Hramov AE. Analysis of publication activity and research trends in the field of AI medical applications: Network approach. *Int. J. Environ. Res. Public Health.* 2023;20(7):5335. DOI: 10.3390/ijerph20075335.
26. Grieves M, Vickers J. Digital twin: Mitigating unpredictable, undesirable emergent behavior in complex systems. In: *Transdisciplinary Perspectives on Complex Systems: New Findings and Approaches.* Cham: Springer; 2016. P. 85–113. DOI: 10.1007/978-3-319-38756-7\_4.
27. Kadem M, Garber L, Abdelkhalek M, Al-Khazraji BK, Keshavarz-Motamed Z. Hemodynamic modeling, medical imaging, and machine learning and their applications to cardiovascular interventions. *IEEE Rev. Biomed. Eng.* 2022;16:403–423. DOI: 10.1109/rbme.2022.3142058.
28. Mulder M, Fresiello L, Donker DW. Computational models for hemodynamic management in critically ill patients: a systematic review. In: *Virtual Physiological Human Conference, VPH 2022.* 2022, Porto, Portugal.
29. Tuegel E. The airframe digital twin: Some challenges to realization. In: *53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 20th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 14th AIAA.* 2012. P. 1812. DOI: 10.2514/6.2012-1812.
30. Lee J, Lapira E, Bagheri B, Kao H-A. Recent advances and trends in predictive manufacturing systems in big data environment. *Manufacturing Letters.* 2013;1(1):38–41. DOI: 10.1016/j.mfglet.2013.09.005.

31. Zhang R, Wang F, Cai J, Wang Y, Guo H, Zheng J. Digital twin and its applications: A survey. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 2022;123(11):4123–4136. DOI: 10.1007/s00170-022-10445-3.
32. Mihai S, Yaqoob M, Hung DV, Davis W, Towakel P, Raza M, Karamanoglu M, Barn B, Shetve D, Prasad RV, Venkataraman H, Trestian R, Nguyen HX. Digital twins: A survey on enabling technologies, challenges, trends and future prospects. *IEEE Communications Surveys and Tutorials.* 2022;24(4):2255–2291. DOI: 10.1109/COMST.2022.3208773.
33. Rasheed A, San O, Kvamsdal T. Digital twin: Values, challenges and enablers from a modeling perspective. *IEEE Access.* 2020;8:21980–22012. DOI: 10.1109/access.2020.2970143.
34. Aivaliotis P, Georgoulas K, Arkouli Z, Makris S. Methodology for enabling digital twin concept using advanced physical-based modelling. *Procedia CIRP.* 2019;81:417–422. DOI: 10.1016/j.procir.2019.03.072.
35. Karniadakis GE, Kevrekidis IG, Lu L, Perdikaris P, Wang S, Yang L. Physics-informed machine learning. *Nat. Rev. Phys.* 2021;3(6):422–440. DOI: 10.1038/s42254-021-00314-5.
36. Iman RL. Latin Hypercube Sampling. In: Melnick EL, Everitt BS, editors. *Encyclopedia of Quantitative Risk Analysis and Assessment.* NY: Wiley; 2008. DOI: 10.1002/9780470061596.risk0299.
37. Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis GE. Numerical gaussian processes for time-dependent and nonlinear partial differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing.* 2018;40(1):A172–A198. DOI: 10.1137/17M1120762.
38. Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G. Physics informed deep learning (part i): Data-driven solutions of nonlinear partial differential equations. *arXiv:1711.10561.* arXiv Preprint; 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1711.10561.
39. Hartmann D, Herz M, Wever U. Model order reduction a key technology for digital twins. In: Keiper W, Milde A, Volkwein S, editors. *Reduced-Order Modeling (ROM) for Simulation and Optimization.* Cham: Springer; 2018. P. 167–179. DOI: 10.1007/978-3-319-75319-5\_8.
40. Liang YC, Lee HP, Lim SP, Lin WZ, Lee KH, Wu CG. Proper orthogonal decomposition and its applications—part i: Theory. *Journal of Sound and vibration.* 2002;252(3):527–544. DOI: 10.1006/jsvi.2001.4041.
41. Oh Y, Kam S, Lee J, Lim D-Y, Kim S, Bui A. Comprehensive review of neural differential equations for time series analysis. *arXiv:2502.09885.* arXiv Preprint; 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2502.09885.
42. Ahmed S, Nielsen IE, Tripathi A, Siddiqui S, Ramachandran RP, Rasool G. Transformers in time-series analysis: A tutorial. *Circuits Syst. Signal Process.* 2023;42(12):7433–7466. DOI: 10.1007/s00034-023-02454-8.
43. Song Y, Wang T, Cai P, Mondal SK, Sahoo JP. A comprehensive survey of few-shot learning: Evolution, applications, challenges, and opportunities. *ACM Computing Surveys.* 2023;55(13s):1–40. DOI: 10.1145/3582688.
44. Nakajima K, Fischer I. *Reservoir Computing.* Singapore: Springer; 2021. 458 p. DOI: 10.1007/978-981-13-1687-6.
45. Andreev AV, Pisarchik AN, Kulagin N, Jaimes-Reátegui R, Huerta-Cuellar G, Badarin AA, Hramov AE. Stochastic cloning of dynamical systems with hidden variables. *Phys. Rev. E.* 2025;112(1):015303. DOI: 10.1103/dynj-xqrm.
46. Badarin AA, Andreev AV, Klinshov V, Antipov V, Hramov AE. Hidden data recovery using reservoir computing: Adaptive network model and experimental brain signals. *Chaos.* 2024;34(10):103121. DOI: 10.1063/5.0223184.
47. Badarin AA, Klinshov V, Smelov P, Andreev AV. Reservoir computing reconstructs blood-oxygen-level-dependent signals: whole-brain modeling study. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2024;234:4497–4504. DOI: 10.1140/epjs/s11734-025-01702-z.

48. Hramov AE, Kulagin N, Pisarchik AN, Andreev AV. Strong and weak prediction of stochastic dynamics using reservoir computing. *Chaos*. 2025;35(3):033140. DOI: 10.1063/5.0252908.
49. Pisarchik AN, Kir'yanov AV, Barmenkov YO, Jaimes-Reátegui R. Dynamics of an erbium-doped fiber laser with pump modulation: theory and experiment. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2005;22(10):2107–2114. DOI: 10.1364/JOSAB.22.002107.
50. Maslennikov OV, Nekorkin VI. Adaptive dynamical networks. *Phys. Usp*. 2017;60:694–704. DOI: 10.3367/UFNe.2016.10.037902.
51. Guze S. Graph theory approach to the vulnerability of transportation networks. *Algorithms*. 2019;12(12):270. DOI: 10.3390/a12120270.
52. Hramov AE, Frolov NS, Maksimenko VA, Kurkin SA, Kazantsev VB, Pisarchik AN. Functional networks of the brain: from connectivity restoration to dynamic integration. *Phys. Usp*. 2021;64:584–616. DOI: 10.3367/UFNe.2020.06.038807.
53. Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang D-U. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*. 2006;424(4–5):175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009.
54. Pereira T, dos Santos ER, van Strien S. Robust reconstruction of sparse network dynamics. *Nonlinearity*. 2025;38(5):055031. DOI: 10.1088/1361-6544/add3b0.
55. Marques EC, Maciel N, Naviner L, Cai H, Yang J. A review of sparse recovery algorithms. *IEEE Access*. 2018;7:1300–1322. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2886471.
56. Andreev AV, Badarin AA, Maximenko VA, Hramov AE. Forecasting macroscopic dynamics in adaptive Kuramoto network using reservoir computing. *Chaos*. 2022;32(10):103126. DOI: 10.1063/5.0114127.
57. Corso G, Stark H, Jegelka S, Jaakkola T, Barzilay R. Graph neural networks. *Nat. Rev. Methods Primers*. 2024;4(1):17. DOI: 10.1038/s43586-024-00294-7.
58. Ferriol-Galmés M, Suárez-Varela J, Paillissé J, Shi X, Xiao S, Cheng X, Barlet-Ros P, Cabellos-Aparicio A. Building a digital twin for network optimization using graph neural networks. *Computer Networks*. 2022;217:109329. DOI: 10.1016/j.comnet.2022.109329.
59. Barbiero P, Vinas Torne R, Lió P. Graph representation forecasting of patient's medical conditions: toward a digital twin. *Front Genet*. 2021;12:652907. DOI: 10.3389/fgene.2021.652907.
60. Barbiero P, Lió P. The computational patient has diabetes and a covid. *arXiv:2006.06435*. *arXiv Preprint*; 2020. 37 p. DOI: 10.48550/arXiv.2006.06435.
61. Dozhdev V, Shantaev E, Daraseliia L, Hramov A. An integrated approach to ensuring the quality of industrial data for AI-based solutions. *Industrial Automation*. 2025;6:4–12.
62. Hramov AE, Pisarchik AV. Big data management and quality evaluation for the implementation of AI technologies in smart manufacturing. *Appl. Sci*. 2025;15(22):11905. DOI: 10.3390/app152211905.
63. Wasi AT, Anik MA, Rahman A, Hoque MI, Islam M, Ahsan MM. A theoretical framework for graph-based digital twins for supply chain management and optimization. *arXiv:2504.03692*. *arXiv Preprint*; 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2504.03692.
64. Javaid M, Haleem A, Suman R. Digital twin applications toward industry 4.0: A review. *Cognitive Robotics*. 2023;3:71–92. DOI: 10.1016/j.cogr.2023.04.003.
65. Li L, Aslam S, Wileman A, Perinpanayagam S. Digital twin in aerospace industry: A gentle introduction. *IEEE Access*. 2021;10:9543–9562. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3136458.
66. Chandrasekaran M, Rajesh P. Conceptualisation of digital twin-enabled new product design framework for the automotive industry. *Journal of Engineering Design*. 2025;37(3):612–652. DOI: 10.1080/09544828.2025.2504852.
67. Zhang Q, Liu J, Chen X. A literature review of the digital thread: Definition, key technologies, and applications. *Systems*. 2024;12(3):70. DOI: 10.3390/systems12030070.

68. Jiang Y, Yin S, Li K, Luo H, Kaynak O. Industrial applications of digital twins. *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2021;379(2207):20200360. DOI: 10.1098/rsta.2020.0360.
69. Zhang L, Chen X, Zhou W, Cheng T, Chen L, Guo Z, Han B, Lu L. Digital twins for additive manufacturing: a state-of-the-art review. *Appl. Sci.* 2020;10(23):8350. DOI: 10.3390/app10238350.
70. Xu T, Zhang X, Sun W, Wang B. Intelligent operation and maintenance of wind turbines gearboxes via digital twin and multi-source data fusion. *Sensors.* 2025;25(7):1972. DOI: 10.3390/s25071972.
71. Werbińska-Wojciechowska S, Giel R, Winiarska K. Digital twin approach for operation and maintenance of transportation system—systematic review. *Sensors.* 2024;24(18):6069. DOI: 10.3390/s24186069.
72. Pandey PK, Pandey PK, Mahajan S, Paul J, Iyer S. Digital twin and virtual reality, augmented reality, and mixed reality. In: *Digital Twins for Smart Cities and Villages.* Elsevier; 2025. P. 273–293. DOI: 10.1016/B978-0-443-28884-5.00013-0.
73. Wanasinghe TR, Wroblewski L, Petersen BK, Gosine RG, James LA, De Silva O, Mann GK, Warriar PJ. Digital twin for the oil and gas industry: Overview, research trends, opportunities, and challenges. *IEEE Access.* 2020;8:104175–104197. DOI: 10.1109/access.2020.2998723.
74. Leng J, Liu Q, Ye S, Jing J, Wang Y, Zhang C, Zhang D, Chen X. Digital twin-driven rapid reconfiguration of the automated manufacturing system via an open architecture model. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing.* 2020;63:101895. DOI: 10.1016/j.rcim.2019.101895.
75. Armeni P, Polat I, De Rossi LM, Diaferia L, Meregalli S, Gatti A. Digital twins in healthcare: is it the beginning of a new era of evidence-based medicine? A critical review. *J. Pers. Med.* 2022;12(8):1255. DOI: 10.3390/jpm12081255.
76. Kamel Boulos MN, Zhang P. Digital twins: from personalised medicine to precision public health. *J. Pers. Med.* 2021;11(8):745. DOI: 10.3390/jpm11080745.
77. Yi X, Walia E, Babyn P. Generative adversarial network in medical imaging: A review. *Med. Image Anal.* 2019;58:101552. DOI: 10.1016/j.media.2019.101552.
78. Sel K, Osman D, Zare F, Masoumi Shahrabak S, Brattain L, Hahn JO, Inan OT, Mukkamala R, Palmer J, Paydarfar D, Pettigrew RI, Quyyumi AA, Telfer B, Jafari R. Building digital twins for cardiovascular health: From principles to clinical impact. *J. Am. Heart Assoc.* 2024;13(19):e031981. DOI: 10.1161/JAHA.123.031981.
79. Karakasis P, Antoniadis AP, Theofilis P, Vlachakis PK, Milaras N, Patoulas D, Karamitsos T, Fragakis N. Digital twin models in atrial fibrillation: Charting the future of precision therapy? *J. Pers. Med.* 2025;15(6):256. DOI: 10.3390/jpm15060256.
80. Faisal SM, Ishrat M, Khan W. Digital Twins in Healthcare: Revolutionizing Patient Care and Medical Operations. In: *Digital Twins for Smart Cities and Urban Planning.* Boca Raton: CRC Press; 2025. P. 69–89.
81. Elkefi S., Onur A. Digital twins for managing health care systems: rapid literature review. *J. Med. Internet Res.* 2022;24(8):e37641. DOI: 10.2196/37641.
82. Karakra A, Fontanili F, Lamine E, Lamothe J. A discrete event simulation-based methodology for building a digital twin of patient pathways in the hospital for near real-time monitoring and predictive simulation. *Digital Twin.* 2022;2:1. DOI: 10.12688/digitaltwin.17454.1.
83. Karpov OE, Andrikov DA, Zamyatin MN, Osipov AV, Kilnik AI, Bagaev GA, Maksachuk AP, Hramov AE. Prospects and limitations of artificial intelligence technologies in the decision support system of the disaster medicine service. *Medical Doctor and Information Technologies.* 2025;(4):6–15. DOI: 10.25881/18110193\_2025\_4\_6.
84. Pobuda P. The digital twin of the economy: Proposed tool for policy design and evaluation. *Real-World Economics Review.* 2020;94:140–149.
85. Mankiw NG. The macroeconomist as scientist and engineer. *Journal of Economic Perspectives.* 2006;20(4):29–46. DOI: 10.1257/jep.20.4.29.

86. Stiglitz JE. Where modern macroeconomics went wrong. *Oxford Review of Economic Policy*. 2018;34(1–2):70–106.
87. Naveed H, Khan AU, Qiu S, Saqib M, Anwar S, Usman M, Akhtar N, Barnes N, Mian A. A comprehensive overview of large language models. *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*. 2025;16(5):1–72. DOI: 10.1145/3744746.
88. Shpak VV. Electronics inventory as the foundation of a breakthrough into global leadership. *Russian Technological Journal*. 2025;13(4):135–148. DOI: 10.32362/2500-316X-2025-13-4-135-148.
89. Shpak VV. Formation of an organizational and managerial model for implementing the Strategy for the Development of the Russian Federation’s Electronic Industry for the Period up to 2030. *Bulletin of the Chelyabinsk State University*. 2021;(3(449)):10–23. DOI: 10.47475/1994-2796-2021-10302.
90. Shpak VV. Fundamentals of a multi-agent planning and logistics model for managing the reproductive cycle of an industry online. *Fundamental Research*. 2022;3:146–155. DOI: 10.17513/fr.43229.
91. Ke Z, Ming Y, Nguyen X-P, Xiong C, Joty S. Demystifying domain-adaptive post-training for financial llms. arXiv:2501.04961. arXiv Preprint; 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2501.04961.
92. Omrany H, Al-Obaidi KM, Husain A, Ghaffarianhoseini A. Digital twins in the construction industry: a comprehensive review of current implementations, enabling technologies, and future directions. *Sustainability*. 2023;15(14):10908. DOI: 10.3390/su151410908.
93. Mazzetto S. A review of urban digital twins integration, challenges, and future directions in smart city development. *Sustainability*. 2024;16(19):8337. DOI: 10.3390/su16198337.
94. Liu W, Lv Y, Wang Q, Sun B, Han D. A systematic review of the digital twin technology in buildings, landscape and urban environment from 2018 to 2024. *Buildings*. 2024;14(11):3475. DOI: 10.3390/buildings14113475.
95. Hsu D. Comparison of integrated clustering methods for accurate and stable prediction of building energy consumption data. *Applied Energy*. 2015;160:153–163. DOI: 10.1016/j.apenergy.2015.08.126.
96. Jia G-L, Ma R-G, Hu Z-H. Urban transit network properties evaluation and optimization based on complex network theory. *Sustainability*. 2019;11(7):2007. DOI: doi.org/10.3390/su11072007.
97. Silva BN, Khan M, Jung C, Seo J, Muhammad D, Han J, Yoon Y, Han K. Urban planning and smart city decision management empowered by real-time data processing using big data analytics. *Sensors*. 2018;18(9):2994. DOI: 10.3390/s18092994.
98. Ang L-M, Seng KP, Zungeru AM, Ijamaru GK. Big sensor data systems for smart cities. *IEEE Internet of Things Journal*. 2017;4(5):1259–1271. DOI: 10.1109/JIOT.2017.2695535.
99. Yu X, Xue Y. Smart grids: A cyber–physical systems perspective. *Proceedings of the IEEE*. 2016;104(5):1058–1070. DOI: 10.1109/JPROC.2015.2503119.
100. Brosinsky C, Westermann D, Krebs R. Recent and prospective developments in power system control centers: Adapting the digital twin technology for application in power system control centers. In: 2018 IEEE international energy conference (ENERGYCON). 2018, Limassol, Cyprus. IEEE; 2018. P. 1–6. DOI: 10.1109/ENERGYCON.2018.8398846.
101. Joseph A, Cvetković M, Palensky P. Predictive mitigation of short term voltage instability using a faster than real-time digital replica. In: 2018 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conference Europe (ISGT-Europe). 2018, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina. IEEE; 2018. P. 1–6. DOI: 10.1109/ISGTEurope.2018.8571803.
102. Mohamed N, Al-Jaroodi J, Lazarova-Molnar S. Leveraging the capabilities of industry 4.0 for improving energy efficiency in smart factories. *IEEE Access*. 2019;7:18008–18020. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2897045.
103. Butorova AS, Borisov VI, Sergeev AP, Ronkin MV, Bobakov VS, Ivanov SS, Polyakov SO,

- Ignatkov KA, Chernyshov YuYu, Skorokhodov AV, Manzhurov AI. Predictive models of engineering systems of data centers based on artificial intelligence: an overview of architectures and datasets. *Research Trajectory - Human, Nature, Technology*. 2025;(3(15)):3–18. DOI:10.56564/27825264\_2025\_3\_3.
104. Zhu H, Lin B. Digital twin-driven energy consumption management of integrated heat pipe cooling system for a data center. *Applied Energy*. 2024;373:123840. DOI: 10.1016/j.apenergy.2024.123840.
  105. Yuan H, Zhang Z, Yang D, Xue T, Wen D, Yao G. An intelligent thermal management strategy for a data center prototype based on digital twin technology. *Applied Sciences*. 2025;15(14):7675.
  106. Strikhanov MN, Trubetskov DI, Koronovskii AA, Sharaevskii YuP, Hramov AE. Higher Education in Russia from the Perspective of Nonlinear Dynamics (Problems, Assessments, and Models). М.: Fizmatlit; 2007. 192 p.
  107. Yu H, Miao C, Leung C, White TJ. Towards AI-powered personalization in MOOC learning. *NPJ Sci Learn*. 2017;2(1):15. DOI: 10.1038/s41539-017-0016-3.
  108. Grubov VV, Khramova MV, Goman S, Badarin AA, Kurkin SA, Andrikov DA, Pitsik E, Antipov V, Petushok E, Brusinskii N, Bukina TV, Fedorov AA, Hramov AE. Open-loop neuroadaptive system for enhancing student’s cognitive abilities in learning. *IEEE Access*. 2024;12:49034–49049. DOI: 10.1109/access.2024.3383847.
  109. Bukina T, Hramova M, Kurkin S, Andrikov D, Goman S, Dedkov A, Hramov A. Neuroeducational software recommendational service as a tool for personalizing the educational process. *Informatics and Education*. 2024;39(5):50–62. DOI: 10.32517/0234-0453-2024-39-5-50-62.
  110. Fedorov AA, Kurkin SA, Khramova M V, Hramov AE. Neurotechnology and artificial intelligence as key factors in the customization of the lifelong learning route. *Informatics and Education*. 2023;38(3):5–15. DOI: 10.32517/0234-0453-2023-38-3-5-15.
  111. Peng H, Ma S, Spector JM. Personalized adaptive learning: an emerging pedagogical approach enabled by a smart learning environment. *Smart Learn. Environ*. 2019;6(1):9. DOI: 10.1186/s40561-019-0089-y.



*Андреев Андрей Викторович* — родился в Энгельсе (1993). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика» (2015). Кандидат физико-математических наук (2020). Ведущий научный сотрудник НИИ прикладного ИИ и цифровых решений РЭУ им. Г. В. Плеханова, Москва.

Россия, 115054 Москва, Стремянный переулок, 36  
 Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова  
 E-mail: andreevandre1993@gmail.com  
 ORCID: 0000-0001-6642-4517  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 933583



*Дараселия Леван Шотаевич* — родился в Сухуми (1984). Окончил военно-юридический факультет Военного университета Министерства обороны РФ по специальности «Юриспруденция» (2006). Первый заместитель генерального директора ФГАУ «Цифровые промышленные технологии» (Москва).

Россия, 127018 Москва, ул. Суцёвский Вал, 18  
 ФГАУ «Цифровые промышленные технологии»  
 E-mail: L.Daraseliya@cit.gov.ru



*Дождёв Владимир Святославич* — родился в Москве (1989). Окончил Московский городской университет управления правительства Москвы (2011). Директор Департамента цифровых технологий Министерства промышленности и торговли Российской Федерации.

Россия, 125039 Москва, Пресненская наб., д. 10, стр. 2  
Министерство промышленности и торговли Российской Федерации  
E-mail: dozhdevvs@minprom.gov.ru



*Шендерюк-Жидков Александр Владимирович* — родился в Калининграде (1982). Окончил с отличием экономический факультет Калининградского государственного университета по специальности «Финансы и кредит» (2004). Сенатор, член Совета Федерации Федерального Собрания Российской Федерации от Калининградской области, первый зампред Комитета по бюджету и финансовым рынкам Совета Федерации, доктор h. c. БФУ им. И. Канта.

Россия, 103426 Москва, ул. Б. Дмитровка, 26  
Совет Федерации Федерального Собрания Российской Федерации  
E-mail: a.shenderyuk@yandex.ru  
ORCID: 0009-0006-3206-8124  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1210392



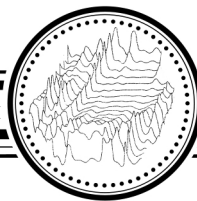
*Шпак Василий Викторович* — родился в Куйбышеве (1977). Окончил Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева (национальный исследовательский университет) по специальности «Экономика и управление» (2000) и Самарский юридический институт Федеральной службы исполнения наказаний по специальности «Юриспруденция» (2012). Кандидат экономических наук (2016). Заместитель министра промышленности и торговли Российской Федерации.

Россия, 125039 Москва, Пресненская наб., д. 10, стр. 2  
Министерство промышленности и торговли Российской Федерации  
E-mail: shpakvv@minprom.gov.ru



*Храмов Александр Евгеньевич* — родился в Саратове (1974). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика и электроника» (1996). Доктор физико-математических наук (2005, СГУ), профессор (2008), член-корреспондент РАН (2025). Главный научный сотрудник ФГАУ «Цифровые промышленные технологии» (Москва). С 2025 года — директор Научно-исследовательского института прикладного искусственного интеллекта и цифровых решений Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова

Россия, 115054 Москва, Стремянный переулок, 36  
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова  
Россия, 127018 Москва, ул. Сущёвский Вал, 18  
ФГАУ «Цифровые промышленные технологии»  
E-mail: hramov.ae@rea.ru  
ORCID: 0000-0003-2787-2530  
AuthorID (eLibrary.Ru): 34834



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3)

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003216

## Eliminating transverse vibrations on an elastic beam using absorbers

A. E. Kudratov<sup>1</sup>, R. S. Khudazarov<sup>2</sup>✉, O. O. Yuldosheva<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Samarkand State Pedagogical Institute, Uzbekistan

<sup>2</sup>Joint Belarusian-Uzbek Intersectoral Institute of Applied Technical Qualifications, Tashkent, Uzbekistan

<sup>3</sup>Tashkent Institute of Chemical Technology, Uzbekistan

E-mail: a\_qudratov1985@mail.ru, ✉nurali\_e@mail.ru, parizodaxondamir@gmail.com

Received 10.01.2026, accepted 23.03.2026, available online 24.03.2026, published 29.05.2026

**Abstract.** The purpose of this study is to investigate the optimization of parameters of an elastic beam equipped with dynamic vibration absorbers under transverse oscillations. Special attention is given to improving the efficiency of vibration suppression by selecting optimal system parameters, as well as analyzing the influence of mass ratio and installation positions of the absorbers. *Methods.* The problem is formulated within the framework of classical beam theory. The solution of transverse vibration equations is obtained using the Bubnov–Galerkin method, which allows reducing the governing partial differential equations to a system of ordinary differential equations. Additionally, the vertical tangents method is applied to determine optimal tuning conditions of dynamic vibration absorbers based on amplitude–frequency characteristics. For the case of multiple absorbers, the method of expansion in eigenfunctions (natural modes) is used to construct approximate analytical solutions. *Results.* Analytical expressions describing the damping efficiency of transverse vibrations are obtained. It is shown how the optimal parameters of dynamic absorbers depend on the mass ratio and their spatial configuration along the beam. The study demonstrates that the use of two parallel-installed dynamic absorbers significantly improves vibration suppression over a wider frequency range. The amplitude–frequency characteristics of the system are analyzed, and optimal tuning parameters are identified for various boundary conditions. *Conclusion.* The proposed approach provides an effective framework for optimizing vibration control systems in elastic beams. The combined use of the Bubnov–Galerkin method and the vertical tangents method ensures high accuracy and computational efficiency. The obtained results can be applied in engineering design of structures requiring enhanced vibration suppression.

**Keywords:** elastic beam, Laplace operator, bending moment, dynamic vibration absorber, transverse vibrations, amplitude–frequency response.

**For citation:** Kudratov AE, Khudazarov RS, Yuldosheva OO. Eliminating transverse vibrations on an elastic beam using absorbers. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3):420–431. DOI: 10.18500/0869-6632-003216

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Подавление поперечных колебаний упругой балки с использованием динамических поглотителей

А. Э. Кудратов<sup>1</sup>, Р. С. Худазаров<sup>2</sup>✉, О. О. Юлдошева<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Самаркандский государственный педагогический институт, Узбекистан

<sup>2</sup>Совместный Белорусско-Узбекский межотраслевой институт прикладных технических квалификаций в городе Ташкенте, Узбекистан

<sup>3</sup>Ташкентский химико-технологический институт, Узбекистан

E-mail: a\_qudratov1985@mail.ru, ✉nurali\_e@mail.ru, parizodaxondamir@gmail.com

Поступила в редакцию 10.01.2026, принята к публикации 23.03.2026,

опубликована онлайн 24.03.2026, опубликована 29.05.2026

**Аннотация.** Целью данной работы является исследование задачи оптимизации параметров упругой балки с динамическими гасителями колебаний при поперечных вибрациях. Особое внимание уделяется повышению эффективности подавления колебаний за счёт оптимального подбора параметров системы, а также анализу влияния массового отношения и расположения гасителей вдоль балки. **Методы.** Постановка задачи выполнена в рамках классической теории упругих балок. Для решения уравнений поперечных колебаний используется метод Бубнова–Галёркина, позволяющий свести исходную краевую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Дополнительно применяется метод вертикальных касательных для определения оптимальных параметров настройки динамических гасителей на основе анализа амплитудно-частотных характеристик. В случае системы с несколькими гасителями решение строится с использованием метода разложения по формам собственных колебаний. **Результаты.** Получены аналитические зависимости, характеризующие эффективность демпфирования поперечных колебаний балки. Установлено влияние массового отношения и положения динамических гасителей на их оптимальные параметры. Показано, что использование двух параллельно установленных динамических гасителей позволяет существенно расширить диапазон эффективного подавления колебаний. Проведён анализ амплитудно-частотных характеристик системы и определены оптимальные параметры настройки при различных граничных условиях. **Заключение.** Предложенный подход является эффективным инструментом для оптимизации систем виброзащиты упругих балок. Совместное применение метода Бубнова–Галёркина и метода вертикальных касательных обеспечивает высокую точность и вычислительную эффективность. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании инженерных конструкций с повышенными требованиями к снижению вибраций.

**Ключевые слова:** упругая балка, оператор Лапласа, изгибающий момент, динамический гаситель колебаний, поперечные колебания, амплитудно-частотная характеристика.

**Для цитирования:** Kudratov A. E., Khudazarov R. S., Yuldosheva O. O. Eliminating transverse vibrations on an elastic beam using absorbers [Кудратов А. Э., Худазаров Р. С., Юлдошева О. О. Подавление поперечных колебаний упругой балки с использованием динамических поглотителей] // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 3. С. 420–431. DOI: 10.18500/0869-6632-003216. EDN: WCVTIS

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Introduction

Modern development of engineering and technology requires the design of elastic beams with economical and low material consumption. In this context, problems associated with transverse vibrations of elastic beams often arise. Insufficient investigation of methods for solving transverse vibration problems leads to the necessity of introducing additional design modifications during the stages of design, construction, and commissioning. This, in turn, results in increased development time or changes in the main performance characteristics of the product, thereby reducing the consumer properties of elastic beams [1–4].

Numerous scientific studies are devoted to the problem of vibration suppression in systems with distributed parameters using dynamic vibration absorbers. It has been shown in [5, 6] that when a dynamic vibration absorber is attached to a beam, an additional natural frequency of the system appears.

This frequency is close to the partial natural frequency of the absorber and, depending on the system parameters, may be lower than, higher than, or equal to the absorber's partial frequency.

Experimental investigations [7] present a comparative analysis of beam vibrations with two dynamic vibration absorbers symmetrically positioned relative to the beam ends. In this case, the governing differential equations of motion are nonlinear and require the application of appropriate analytical and numerical solution methods.

In works [8], nonlinear vibration problems of a beam with a dynamic vibration absorber are analyzed, taking into account elastic–damping properties of the hysteresis type under harmonic excitation. Solutions of the governing equations are obtained in the form of transfer functions.

The dynamics of nonlinear oscillatory systems [9], as well as their stability [10], have been extensively studied. Based on the above, it follows that the investigation of beam vibrations and vibration suppression remains a relevant problem in modern mechanics. This article focuses on the optimization of system parameters during steady-state vibrations of a beam equipped with two dynamic vibration absorbers.

A vibration control device is presented in [11], consisting of compression and tension springs operating jointly to resist vertical and horizontal loads caused by permanent, temporary, and seismic actions. In addition to absorbing vertical and horizontal loads, the device is capable of restoring the span structure to its initial position after seismic excitation. Furthermore, it eliminates resonance effects without increasing construction costs for the span, supports, or foundations and does not complicate installation conditions.

## 1. Proposed methodology, experiments and results

In the present study, the objective is to suppress transverse vibrations of an elastic beam using dynamic vibration absorbers (DVAs). An algorithm describing the sequence of operations required to achieve the desired dynamic properties is developed based on a systematic set of procedures. Fig. 1 illustrates the algorithm of operations and the main stages of the proposed technical process.

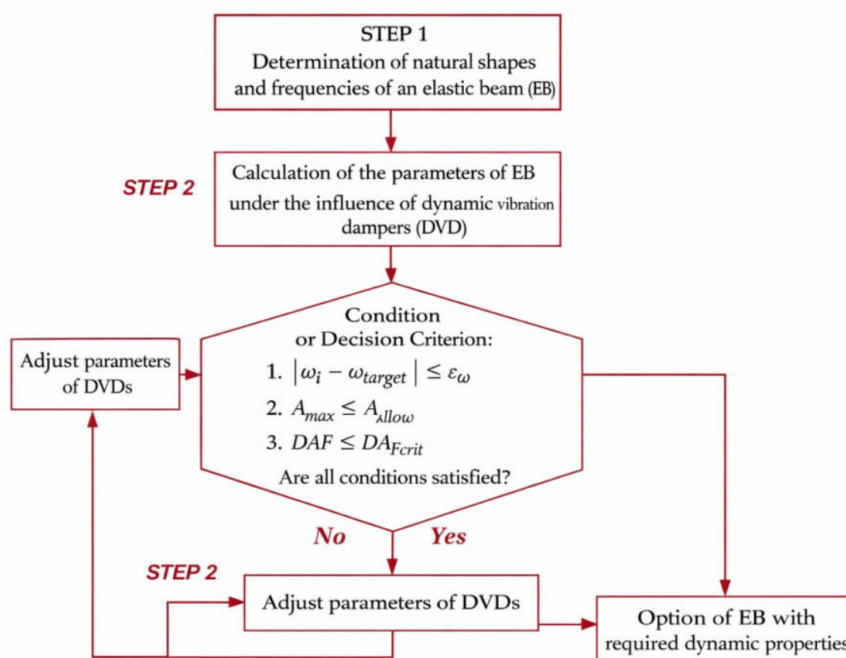


Fig. 1. Algorithm of operations and stages of the technical process

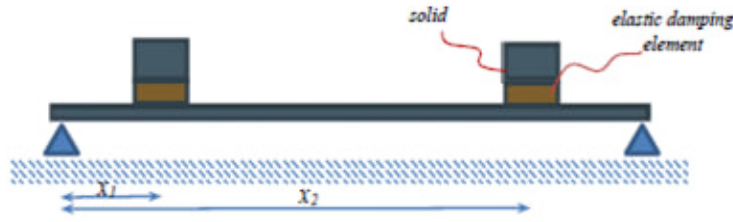


Fig. 2. Design diagram of an elastic beam (EB) with two dynamic vibration absorbers (DVAs)

The solution to the problem of transverse vibrations of a beam with two parallel-installed dynamic vibration absorbers is considered using the method of series expansion in vibration modes. This approach is particularly convenient for optimizing the parameters of dynamic vibration absorbers for various types of beam vibrations under different boundary conditions, especially when repeated calculations of the amplitude–frequency characteristics (AFC) of the system are required.

The results of the studies cited above confirm that, for sufficiently large vibration decrement of the material of the elastic–damping element of the dynamic vibration absorber (DVA), the nonlinearity of the internal resistance characteristics of the beam material has a negligible effect on the beam vibrations and on the determination of the optimal parameters of the DVA.

Consider a beam of length  $l$ , width  $b$ , and height  $h$ , rigidly fixed to a vibrating base. The motion of the base is prescribed along the  $Oz$  axis. Dynamic vibration absorbers are installed at points of the beam with coordinates  $x_1$  and  $x_2$  [12–14] (Fig. 2).

## 2. Analysis of experiments and research results

We write the governing differential equations of motion of an elastic beam with two dynamic vibration absorbers (DVAs) under kinematic excitation in the following form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_1 R_1 \delta(x - x_1) \zeta_1 - c_2 R_2 \delta(x - x_2) \zeta_2 &= -\rho F \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \\ m_1 \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial t^2} + m_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} + c_1 R_1 \zeta_1 &= -m_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \\ m_2 \frac{\partial^2 w(x_2, t)}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial t^2} + c_2 R_2 \zeta_2 &= -m_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Here,  $M$  denotes the bending moment; the terms involving the Dirac delta functions represent the interaction forces between the beam and the dynamic vibration absorbers. In particular, the absorber force acts as a concentrated transverse force applied at the installation points  $x = x_1$  and  $x = x_2$ .  $\rho$  is the material density;  $F$  is the cross-sectional area of the beam;  $w(x, t)$  is the transverse deflection of the beam;  $w_0(t)$  is the prescribed displacement of the vibrating base;  $w(x_1, t)$  and  $w(x_2, t)$  are the beam displacements at the DVA installation points;  $c_1$  and  $c_2$  are the stiffness coefficients of the elastic–damping elements of the DVAs;  $m_1$  and  $m_2$  are the absorber masses;  $\zeta_1$  and  $\zeta_2$  denote the relative displacements of the DVAs with respect to the beam;  $\delta(x - x_1)$  and  $\delta(x - x_2)$  are the Dirac delta functions indicating the locations of the dynamic vibration absorbers;  $x_1$  and  $x_2$  are the coordinates of the DVA installation points.

$$R_1 = 1 + (-\nu_1 + j\nu_2) [D_0 + g_1(\zeta_{1rel})]. \quad (2)$$

$$R_2 = 1 + (-\theta_1 + j\theta_2) [E_0 + g_2(\zeta_{2rel})]. \quad (3)$$

Here,  $j^2 = -1$ ,  $\nu_1, \nu_2, \theta_1, \theta_2$  are coefficients determined by the dissipative properties of the materials, and  $g_1(\zeta_{1rel}), g_2(\zeta_{2rel})$  denote the vibration decrements [15].

$$g_1(\zeta_{1rel}) = \sum_{K_1=1}^{r_1} D_{K_1} \zeta_{1rel}^{K_1}. \quad (4)$$

$$g_2(\zeta_{2rel}) = \sum_{K_2=1}^{r_2} E_{K_2} \zeta_{2rel}^{K_2}. \quad (5)$$

The parameters  $D_0, D_1, \dots, D_{r_1}, E_0, E_1, \dots, E_{r_2}$  are material-dependent parameters of the elastic elements of dynamic absorbers and are determined experimentally [8]. The relationship between the normal stress  $\sigma_n$  and the relative strain  $\xi_{rel}$  is given as follows [9].

$$\sigma_n = E \left( 1 + (-\eta_1 + j\eta_2) [C_0 + f(\xi_{rel})] \right) \xi_{rel}. \quad (6)$$

Here,  $E$  is the modulus of elasticity of the rod material;  $\eta_1, \eta_2$  are coefficients determined by the dissipative properties of the materials; and  $f(\xi_{rel})$  denotes the vibration decrement of the rod, which can be expressed as follows:

$$f(\xi_{rel}) = \sum_{j_1=1}^{r_3} C_{j_1} \xi_{rel}^{j_1}. \quad (7)$$

Here,  $C_0, C_1, \dots, C_{r_3}$  are experimentally determined coefficients of the hysteresis loop that characterize the nonlinear dissipative properties of the rod material. In this study, the coefficients  $C_0, C_1, C_2, C_3$  are adopted from the model proposed by Pisarenko and Boginich [8].

For the relative strain, the following expression is written:

$$\xi_{rel} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z, \quad (8)$$

here, the  $z$ -axis is directed along the cross section of the rod.

We calculate the bending moment acting on the cross section of the rod:

$$M = 2b \int_0^{h/2} \sigma_n z dz = EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[ 1 + C_0(-\eta_1 + j\eta_2) + \frac{24}{h^3}(-\eta_1 + j\eta_2) \int_0^{h/2} f(\xi_{rel}) z^2 dz \right], \quad (9)$$

here,  $J = \frac{bh^3}{12}$  is the second moment of area;  $b$  is the width of the rod, and  $h$  is the height (thickness) of the rod.

Substituting the obtained expression for the bending moment into the first equation of system (1), we obtain the following system of differential equations:

As a result, the system of differential equations takes the form

$$\begin{aligned} EJ [1 + C_0(-\eta_1 + j\eta_2)] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{24}{h^3} EJ (-\eta_1 + j\eta_2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^{h/2} f(\xi_{rel}) z^2 dz \right] + \\ + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_1 R_1 \delta(x - x_1) \zeta_1 - c_2 R_2 \delta(x - x_2) \zeta_2 = -\rho F \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \\ m_1 \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial t^2} + m_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} + c_1 R_1 \zeta_1 = -m_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \\ m_2 \frac{\partial^2 w(x_2, t)}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial t^2} + c_2 R_2 \zeta_2 = -m_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

To solve system (10), the displacement of the rod is represented in the following form:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) q_i(t). \quad (11)$$

Here,  $q_i(t)$  is a function of time, while  $u_i(x)$  represents the mode shape (eigenfunction) of the rod and satisfies the following equation:

$$EJ \frac{d^4 u_i(x)}{dx^4} - \rho F p_i^2 u_i(x) = 0. \quad (12)$$

Here,  $p_i$  denotes the natural frequency of the rod.

Substituting solution (11) into system (10) and taking relation (12) into account, after the corresponding transformations we obtain

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \left( \left( \ddot{q}_i + [1 + C_0(-\eta_1 + j\eta_2)] p_i^2 q_i \right) u_i + \right. \\ & \left. + \frac{3EJ}{\rho F} (-\eta_1 + j\eta_2) q_i \sum_{j_1=1}^{r_3} C_{j_1} q_{ia}^{j_1} \frac{j_1^{h_{j_1}}}{2^{j_1} (j_1 + 3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \int_0^{h/2} z^2 f(\xi_{rel}) dz \right) \right) - \\ & \quad - \frac{c_1}{\rho F} \zeta_1 R_1 \delta(x - x_1) - \frac{c_2}{\rho F} \zeta_2 R_2 \delta(x - x_2) = -W_0, \quad (13) \\ & \sum_{i=1}^{\infty} u_{i1} \ddot{q}_i + \ddot{\zeta}_1 + n_1^2 R_1 \zeta_1 = -W_0, \\ & \sum_{i=1}^{\infty} u_{i2} \ddot{q}_i + \ddot{\zeta}_2 + n_2^2 R_2 \zeta_2 = -W_0, \end{aligned}$$

here,

$$W_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

is the base acceleration.

In the particular case, the dynamic absorbers are assumed to be linear, i.e.,  $v_1 = v_2 = \theta_1 = \theta_2 = 0$ . Using the Bubnov–Galerkin method for the first equation of system (13) and employing the orthogonality condition of the functions  $u_i(x)$ , we obtain the following system of differential equations:

After performing the corresponding transformations, the system of equations is reduced to the following form:

$$\begin{aligned} & \ddot{q}_i + [1 + (-\eta_1 + j\eta_2) N_i] p_i^2 q_i - \mu_1 \mu_{0i} n_1^2 u_{i1} \zeta_1 - \mu_2 \mu_{0i} n_2^2 u_{i2} \zeta_2 = -d_i W_0. \\ & u_{i1} \ddot{q}_i + \ddot{\zeta}_1 + n_1^2 \zeta_1 = -W_0; \quad (14) \\ & u_{i2} \ddot{q}_i + \ddot{\zeta}_2 + n_2^2 \zeta_2 = -W_0, \end{aligned}$$

where  $p_i$  is the natural frequency of the beam; the dimensionless mass ratios are defined as

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{m_1}{m_s}, & \mu_2 &= \frac{m_2}{m_s}, \\ \mu_{0i} &= \frac{l}{d_{2i}}, & d_i &= \frac{d_{1i}}{d_{2i}}, \end{aligned}$$

with

$$d_{1i} = \int_0^l u_i(x) dx, \quad d_{2i} = \int_0^l u_i^2(x) dx,$$

where

$$m_s = \rho Fl,$$

$$N_i = C_0 + \frac{3EJ\mu_{0i}}{m_s p_i^2} \sum_{j_1=1}^{r_3} C_{j_1} q_{ia}^{j_1} \frac{h^{j_1}}{2^{j_1}(j_1+3)} G_{ij_1},$$

$$G_{ij_1} = \int_0^l u_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^{j_1} \right) dx,$$

is the mass of the beam;  $m_1$  and  $m_2$  are the masses of the dynamic vibration absorbers;  $u_i(x)$  are the natural vibration modes of the beam;  $W_0$  denotes the base acceleration. The modal shape functions at the installation points of the absorbers are given by

$$u_{i1} = u_i(x_1), \quad u_{i2} = u_i(x_2),$$

where  $x_1$  and  $x_2$  are the coordinates of the DVA installation points.

The natural frequencies of the dynamic vibration absorbers are defined as

$$n_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}},$$

where  $c_1$  and  $c_2$  are the stiffness coefficients of the elastic elements of the absorbers.

The base displacement is denoted by  $w_0(t)$ , and the corresponding base acceleration is defined as

$$W_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}.$$

In the case of harmonic excitation, the base acceleration is assumed in the form

$$W_0 = w_b \cos(\omega t),$$

where  $w_b$  is the amplitude of the base acceleration and  $\omega$  is the excitation frequency.

We seek steady-state solutions of the system in the following form:

$$\begin{aligned} q_{mi}(t) &= a_{mi}(t) \cos(\omega t + \alpha_{mi}(t)), \\ \zeta_1(t) &= b_1(t) \cos(\omega t + \beta_1(t)), \\ \zeta_2(t) &= b_2(t) \cos(\omega t + \beta_2(t)). \end{aligned} \quad (15)$$

Substituting these expressions into the governing differential equations of motion and assuming that the coefficients vary slowly with time, we obtain the following system of averaged (normal) equations for the system under consideration:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{mi} &= \frac{1}{2\omega} \left[ d_i w_b \sin \alpha_{mi} - a_{mi} p_i^2 \eta_2 N_i + l_{1,i} n_1^2 b_1 \sin \phi_1 + l_{2,i} n_2^2 b_2 \sin \phi_2 \right], \\ \dot{\alpha}_{mi} &= \frac{1}{2a_{mi}\omega} \left[ d_i w_b \cos \alpha_{mi} + a_{mi} p_i^2 (1 - \eta_1 N_i) - a_{mi} \omega^2 - l_{1,i} n_1^2 b_1 \cos \phi_1 - l_{2,i} n_2^2 b_2 \cos \phi_2 \right], \\ \dot{b}_1 &= \frac{1}{2\omega} \left[ (1 - d_i u_{i1}) w_b \sin \beta_1 - l_{2,i} n_2^2 u_{i1} b_2 \sin \phi_3 - u_{i1} p_i^2 a_{mi} \sin \phi_1 \right], \\ \dot{\beta}_1 &= \frac{1}{2b_1\omega} \left[ (1 - d_i u_{i1}) w_b \cos \beta_1 + b_1 n_1^2 T_{i,6} - b_1 \omega^2 + l_{2,i} n_2^2 u_{i1} b_2 \cos \phi_3 - u_{i1} p_i^2 a_{mi} \cos \phi_1 \right], \\ \dot{b}_2 &= \frac{1}{2\omega} \left[ (1 - d_i u_{i2}) w_b \sin \beta_2 - l_{1,i} n_1^2 u_{i2} b_1 \sin \phi_3 - u_{i2} p_i^2 a_{mi} \sin \phi_2 \right], \\ \dot{\beta}_2 &= \frac{1}{2b_2\omega} \left[ (1 - d_i u_{i2}) w_b \cos \beta_2 + b_2 n_2^2 T_{i,7} - b_2 \omega^2 + l_{1,i} n_1^2 u_{i2} b_1 \cos \phi_3 - u_{i2} p_i^2 a_{mi} \cos \phi_2 \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \beta_1 - \alpha_{mi}, & \phi_2 &= \beta_2 - \alpha_{mi}, & \phi_3 &= \beta_2 - \beta_1, \\ l_{1,i} &= \mu_1 \mu_{0i} u_{i1}, & l_{2,i} &= \mu_2 \mu_{0i} u_{i2}.\end{aligned}$$

From the system of equations (16), putting zeros instead of the derivatives on the left-hand side, we obtain the stationary solutions in the following form:

$$\begin{aligned}|q_{mi}| &= |a_{mi}| = \sqrt{\frac{(B_1(\omega))^2 + (B_2(\omega))^2}{(B_3(\omega))^2 + (B_4(\omega))^2}} w_b, \\ |\zeta_1| &= |b_1| = \sqrt{\frac{(B_5(\omega))^2 + (B_6(\omega))^2}{(B_3(\omega))^2 + (B_4(\omega))^2}} w_b, \\ |\zeta_2| &= |b_2| = \sqrt{\frac{(B_7(\omega))^2 + (B_8(\omega))^2}{(B_3(\omega))^2 + (B_4(\omega))^2}} w_b.\end{aligned}\tag{17}$$

The coefficients  $A_k$  ( $k = 1, \dots, 18$ ) are determined as follows:

$$\begin{aligned}B_1(\omega) &= d_i \omega^4 - A_1 \omega^2 + A_2, & B_2(\omega) &= -A_3 \omega^2 + A_4, \\ B_3(\omega) &= -\omega^6 + A_5 \omega^4 - A_6 \omega^2 + A_7, \\ B_4(\omega) &= A_8 \omega^4 - A_9 \omega^2 + A_{10}, \\ B_5(\omega) &= (1 - d_i u_{i1}) \omega^4 - A_{11} \omega^2 + A_{12}, \\ B_6(\omega) &= -A_{13} \omega^2 + A_{14}, \\ B_7(\omega) &= (1 - d_i u_{i2}) \omega^4 - A_{15} \omega^2 + A_{16}, \\ B_8(\omega) &= -A_{17} \omega^2 + A_{18}, \\ A_1 &= n_1^2 T_{i,1} + n_2^2 T_{i,2}, & A_2 &= n_1^2 n_2^2 T_{i,3}, & A_3 &= 0, & A_4 &= 0, \\ A_5 &= p_i^2 (1 - \eta_1 N_i) + n_1^2 T_{i,6} + n_2^2 T_{i,7}, \\ A_6 &= (n_1^2 + n_2^2) p_i^2 (1 - \eta_1 N_i) + n_1^2 n_2^2 T_{i,8}, \\ A_7 &= n_1^2 n_2^2 p_i^2 (1 - \eta_1 N_i), & A_8 &= p_i^2 \eta_2 N_i, \\ A_9 &= (n_1^2 + n_2^2) p_i^2 \eta_2 N_i, & A_{10} &= n_1^2 n_2^2 p_i^2 \eta_2 N_i, \\ A_{11} &= p_i^2 (1 - \eta_1 N_i) + T_{i,4} n_2^2, & A_{12} &= n_2^2 p_i^2 (1 - \eta_1 N_i), \\ A_{13} &= p_i^2 \eta_2 N_i, & A_{14} &= n_2^2 p_i^2 \eta_2 N_i, \\ A_{15} &= p_i^2 (1 - \eta_1 N_i) + n_1^2 T_{i,5}, & A_{16} &= n_1^2 p_i^2 (1 - \eta_1 N_i), \\ A_{17} &= p_i^2 \eta_2 N_i, & A_{18} &= n_1^2 p_i^2 \eta_2 N_i.\end{aligned}$$

The auxiliary coefficients  $T_{i,j}$  are given by

$$\begin{aligned}T_{i,1} &= d_i + \mu_{0i} \mu_1 u_{i1}, & T_{i,2} &= d_i + \mu_{0i} \mu_2 u_{i2}, \\ T_{i,3} &= d_i + \mu_{0i} (\mu_1 u_{i1} + \mu_2 u_{i2}), \\ T_{i,4} &= 1 + \mu_{0i} \mu_2 u_{i2} (u_{i2} - u_{i1}) - d_i u_{i1}, \\ T_{i,5} &= 1 + \mu_{0i} \mu_1 u_{i1} (u_{i1} - u_{i2}) - d_i u_{i2}, \\ T_{i,6} &= 1 + \mu_{0i} \mu_1 u_{i1}^2, & T_{i,7} &= 1 + \mu_{0i} \mu_2 u_{i2}^2, \\ T_{i,8} &= 1 + \mu_{0i} (\mu_1 u_{i1}^2 + \mu_2 u_{i2}^2).\end{aligned}$$

### 3. Results of numerical studies

Numerical analysis is performed to determine the first eigenmode in two separate cases. First, a numerical analysis is carried out by varying the mass ratios  $\mu_1$  and  $\mu_2$ , ( $\mu = \mu_1 = \mu_2$ ) which represent the ratios of the masses of the dynamic vibration absorbers to the mass of the beam. Second, based on the obtained relationships, the amplitude–frequency characteristics (AFC) of the system are constructed, and approximate optimal locations for installing the dynamic vibration absorbers are determined.

In the study of the motion of a rod equipped with dynamic vibration dampers, the choice of the damper mass plays a crucial role. In this work, the ratios of the dynamic damper masses to the mass of the rod are considered (Fig. 3). For each case, the corresponding amplitude–frequency characteristic is presented. In the first case, a mass ratio of 0.05 is selected (red curve); in the second case, a ratio of 0.04 is chosen (blue curve); and in the third case, a ratio of 0.03 is considered (yellow curve).

The obtained graphs show that decreasing the damper mass, together with increasing the excitation frequency, leads to a noticeable shift of the stable and unstable regions of the system. At the same time, an increase in the mass of the dynamic vibration damper reduces the resonant frequency of the system and decreases the vibration amplitudes. As the damper mass grows, the resonance peak becomes lower; at a certain damper mass the vibration amplitude reaches a minimum, which is taken as the principal criterion for selecting the optimal damper mass. At this optimal mass, resonance is suppressed most effectively and the overall vibration level of the system is minimized.

When the installation points of the dynamic vibration dampers are shifted symmetrically along the length of the rod without changing their masses, the dominant stability region varies depending on the excitation frequency (Fig. 4). In the first case, the dampers are installed at the points  $l/3$  and  $2l/3$  (red curve); in the second case, at the points  $l/4$  and  $3l/4$  (blue curve); in the third case, at the points  $l/5$  and  $4l/5$  (yellow curve); and in the fourth case, at the points  $l/6$  and  $5l/6$  (black curve).

An analysis of the obtained graphs shows that, as the installation points of the dynamic vibration dampers are moved symmetrically away from the center of the rod, the stability regions tend to approach each other.

Fig. 5 presents the amplitude–frequency characteristics of the system for a fixed mass ratio  $\mu = 0.04$ . The calculations are performed for different installation locations of the dynamic vibration dampers, which are arranged symmetrically with respect to the center of the rod. The damper positions correspond to the coordinate pairs  $l/3$  and  $2l/3$  (red curve),  $l/4$  and  $3l/4$  (blue curve),  $l/5$  and  $4l/5$  (yellow curve), and  $l/6$  and  $5l/6$  (black curve).

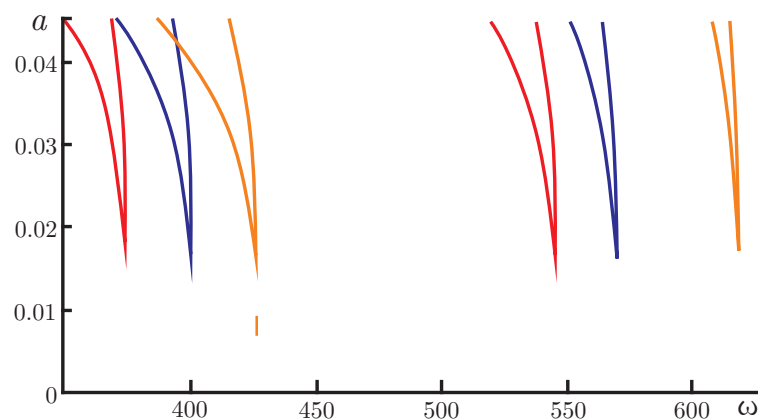


Fig. 3. Amplitude–frequency characteristics of a rod with a dynamic vibration damper (DVD) for different values of the mass ratio  $\mu = m/m_s = 0.05, 0.04, 0.03$ , corresponding to the first eigenmode  $u_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$  ( $i = 1$ ), with  $p_1 = 470.517 \text{ s}^{-1}$  and different installation coordinates of the DVD (color online)

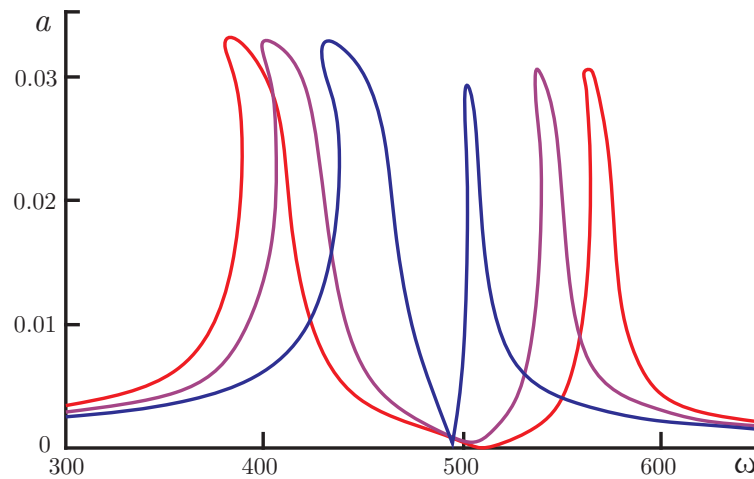


Fig. 4. Amplitude–frequency characteristics (AFCs) for a mass ratio of  $\mu = 0.04$  at different installation locations of the dynamic vibration dampers:  $l/3$  and  $2l/3$  (red curve),  $l/5$  and  $4l/5$  (black curve), and  $l/12$  and  $11l/12$  (blue curve) (color online)

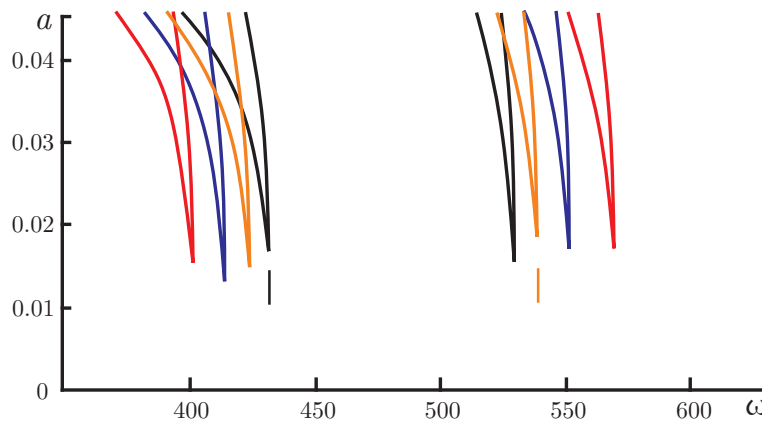


Fig. 5. Amplitude–frequency characteristics of the system for  $\mu = 0.04$  (color online)

It can be observed that a symmetric displacement of the damper installation points away from the rod center significantly affects the amplitude–frequency response of the system and leads to noticeable changes in the location of the stability regions.

A horizontal displacement of the system leads to a significant shift in the resonant frequencies while preserving the overall vibration pattern. This makes it possible to control the resonance regions without altering the dynamic stability of the system. Consequently, varying the installation positions of the dynamic vibration dampers along the beam provides an effective and convenient approach for optimizing resonant frequencies and controlling vibrations.

### Conclusion

The problem of optimizing transverse vibrations of an elastic beam with two parallel-installed dynamic vibration dampers equipped with elastic elements under harmonic base excitation has been investigated. A systematic approach for determining the optimal installation parameters of dynamic vibration dampers for an elastic beam has been developed, taking into account the amplitude–frequency characteristics associated with transverse vibrations.

Numerical analyses of the system vibrations were carried. Numerical investigations demonstrate that the dynamic response of the beam can be effectively controlled by adjusting two key parameters: the mass ratios of the dynamic vibration dampers and their installation positions along the beam. Proper selection of these parameters leads to a significant reduction in vibration amplitudes and a controlled shift of resonant frequencies toward a desired operating range, thereby improving the overall dynamic stability of the system. As a result, the system attains dynamic stability, enhanced protection against resonance, and improved energy efficiency.

## References

1. Lee C-M, Goverdovskiy VN. Vibration Protection Systems with Negative and Quasi-Zero Stiffness: Developmental Trends and Theory Baseline. In: Vibration Protection Systems: Negative and Quasi-Zero Stiffness, ch. 2. Cambridge: Cambridge University Press; 2021. P. 25–51. DOI: 10.1017/9781108874540.004.
2. Perepelkin EE, Sadovnikov BI, Inozemtseva NG, Klimenko MV. Investigation of the dynamics of transverse oscillations of a vertical rod under gravity, friction, and thermal expansion. *Progress in Nuclear Energy*. 2024;177:105419. DOI: 10.1016/j.pnucene.2024.105419.
3. Cubero D, Renzoni F. Vibrational mechanics in higher dimension: Tuning potential landscapes. *Phys. Rev. E*. 2021;103:032203. DOI: 10.1103/PhysRevE.103.032203.
4. Hua Yu, Xie W, Xie J. Novel rod–sprung–mass model to investigate characteristics of building structural vibration induced by railways. *Journal of Building Engineering*. 2024;97:110889. DOI: 10.1016/j.jobe.2024.110889.
5. Zainulabidin MH, Jaini N. Vibration analysis of a rod structure attached with a dynamic vibration absorber. *Applied Mechanics and Materials*. 2013;315:315–319. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.315.315.
6. Shpachuk V, Rubanenko A, Vashchenko Y, Beketov O. Influence of mechanical and structural parameters of the rod with mass damper on the natural frequencies of transverse vibrations. *Municipal Economy of Cities. Serial: Technical Sciences and Architecture*. 2017;1(134):2–7 (in Russian).
7. Dusmatov OM. *Modeling the Dynamics of Vibroprotection Systems*. Tashkent: Fan Publishing House; 1997. 168 p.
8. Pisarenko GS., Boginich OE. *Oscillations of Kinetically Excited Mechanical Systems with Allowance for Energy Dissipation*. Kiev: Naukova Dumka; 1981. 220 p. (in Russian).
9. Pisarenko GS, Yakovlev AP, Matveev VV. *Vibration-Absorbing Properties of Structural Materials*. Kyiv: Naukova Dumka; 1971. 375 p. (in Russian).
10. Mirsaidov M, Mamasoliev K. Contact interactions of multi-layer plates with a combined base. *AIP Conference Proceedings*. 2022;2637(1):050001. DOI: 10.1063/12.0013538.
11. Khodjabekov MU, Buranov KhM, Qudratov AE. Modal mass and stiffness of hysteresis type elastic dissipative characteristic plate. *AIP Conference Proceedings*. 2022;2637(1):050004. DOI: 10.1063/5.0118292.
12. Mirsaidov MM, Dusmatov OM, Khodjabekov MU. Stability of nonlinear vibrations of plate protected from vibrations. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;1921:012097. DOI: 10.1088/1742-6596/1921/1/012097.
13. Mirsaidov M, Dusmatov O, Khodjabekov M. Stability of nonlinear vibrations of elastic plate and dynamic absorber in random excitations. *E3S Web of Conferences*. 2023;410:03014. DOI: 10.1051/e3sconf/202341003014.
14. Dusmatov O, Buranov Kh, Absalomov T. On nonlinear vibrations of an elastic rod with a dynamic damper. *Proceedings of the International Conference on Modern Problems of Mathematics. Physics and Information Technology*. Tashkent; 2004. P. 156–158.

15. Pavlovsky MA, Rijkov LM, Yakovenko VB, Dusmatov OM. Nonlinear Problems of Dynamics of Vibro-Protected System. Kiev: Tekhnika; 1997. 204 p. (in Russian).



*Кудратов Анвар Эргашевич* — родился в 1985 году в Каттакурганском районе Самаркандской области Республики Узбекистан. Окончил бакалавриат (2010) и магистратуру (2014) Самаркандского государственного университета по специальности «Теория вероятностей и математическая статистика». В 2021–2023 гг. обучался в базовой докторантуре Самаркандского государственного архитектурно-строительного университета (специальность «Механика деформируемого твердого тела»). Работал учителем математики, ассистентом кафедры теоретической и прикладной механики; с 2024 г. — преподаватель кафедры математики Самаркандского государственного педагогического института.

Узбекистан, Самарканд, ул. Спитаменшох, 166  
Самаркандский государственный педагогический институт  
E-mail: a\_qudratov1985@mail.ru  
ORCID: 0009-0000-3121-8676



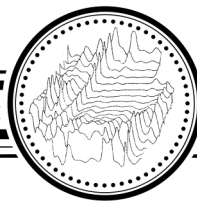
*Худазаров Равшан Сапарович* — родился в Хазараспском районе Хорезмской области Республики Узбекистан. Окончил Ташкентский областной государственный педагогический институт (1994). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Механика деформируемого твердого тела» (2010).

Узбекистан, 100000 Ташкент, ул. Карамурат, 1  
Совместный Белорусско-Узбекский межотраслевой институт  
прикладных технических квалификаций в городе Ташкенте  
E-mail: nurali\_e@mail.ru  
ORCID: 0009-0000-5717-0666



*Юлдошева Озода Олимжоновна* — окончила бакалавриат (2011) и магистратуру (2013) по направлению «Математика» Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека. Работала ассистентом кафедры высшей математики Бухарского государственного технического университета (2017–2025). С 2025 года по настоящее время работает ассистентом кафедры высшей математики Ташкентского химико-технологического института. Автор более 10 научных статей, опубликованных в республиканских и международных научных журналах.

Узбекистан, 100011 Ташкент, ул. Навои, 32  
Ташкентский химико-технологический институт  
E-mail: parizodaxondamir@gmail.com  
ORCID: 0009-0008-5820-0618



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3)

Научная статья  
УДК 534.11

DOI: 10.18500/0869-6632-003214  
EDN: VNVCSZ

### Частоты колебаний цепного маятника в модели со слабой нелинейностью

Е. А. Дегилевич<sup>1</sup>✉, А. С. Смирнов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия

E-mail: ✉degilevichegor@gmail.com, smirnov.alexey.1994@gmail.com

Поступила в редакцию 11.01.2026, принята к публикации 25.01.2026,

опубликована онлайн 15.02.2026, опубликована 29.05.2026

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — построить аналитическое решение по определению поправок к частотам колебаний цепного маятника для исходной модели с распределенными параметрами и для стержневой конечномерной модели с сосредоточенными параметрами в зависимости от амплитуды колебаний; проверить сходимость решения из конечномерной модели к решению из распределенной модели при увеличении количества сегментов, из которых состоит модель. **Методы.** Для описания колебательного движения цепного маятника при наличии слабой нелинейности применялся аналитический подход на основе асимптотических методов, включающий использование уравнения гармонического баланса. Конечномерная модель представляет собой стержневую схему с произвольным числом инерционных стержней, шарнирно связанных между собой. В качестве численных экспериментов с конечномерной моделью были проведены симуляции ее свободных колебаний методами многотельной динамики, а также осуществлено интегрирование матричного уравнения ее движения при наличии коллинеарного управления, позволяющего разгонять систему по формам колебаний. **Результаты.** Выведены формулы для вычисления частот колебаний распределенной и конечномерной моделей цепного маятника при учете слабой нелинейности в зависимости от номера частоты, амплитуды колебаний и количества стержней для конечномерной модели. Показана сходимость поправочных коэффициентов из конечномерной модели цепного маятника к значениям аналогичных коэффициентов из распределенной модели при возрастании количества стержней. Построены графические иллюстрации результатов расчетов для наглядной оценки моделей и их сопоставления. **Заключение.** На основе полученных формул и графиков определено, что стержневая конечномерная схема пригодна для описания поведения цепного маятника при наличии слабой нелинейности. При колебаниях системы в рамках этой модели на низшей частоте достаточно порядка десяти стержней для корректного описания и математического моделирования цепного маятника. В случае более сложного движения по второй или третьей форме колебаний потребуется использовать не меньше тридцати стержней для обеспечения достаточной плавности форм колебаний.

**Ключевые слова:** цепной маятник, слабая нелинейность, частоты колебаний, распределенная модель, конечномерная модель, многомерные системы.

**Для цитирования:** Дегилевич Е. А., Смирнов А. С. Частоты колебаний цепного маятника в модели со слабой нелинейностью // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 3. С. 432–452. DOI: 10.18500/0869-6632-003214. EDN: VNVCSZ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Oscillation frequencies of a chain pendulum in a model with weak nonlinearity

E. A. Degilevich<sup>1</sup>✉, A. S. Smirnov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS, St. Petersburg, Russia

<sup>2</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

E-mail: ✉degilevichegor@gmail.com, smirnov.alexey.1994@gmail.com

Received 11.01.2026, accepted 25.01.2026, available online 15.02.2026, published 29.05.2026

**Abstract.** The purpose of this study is to derive an analytical solution for determining corrections to the oscillation frequencies of a chain pendulum for the initial distributed-parameter model and the rod finite-dimensional model with concentrated parameters, depending on the oscillation amplitude. Check the convergence of the solution from the finite-dimensional model to the solution from the distributed model as the number of segments that make up the model increases. **Methods.** To describe the oscillatory motion of a chain pendulum in the presence of weak nonlinearity, an analytical approach based on asymptotic methods was used, including the harmonic balance equation. The finite-dimensional model is a rod system with an arbitrary number of inertial rods, pivotally connected to each other. As numerical experiments with a finite-dimensional model, simulations of its free oscillations were carried out using multibody dynamics methods, and the integration of the matrix equation of its motion was also carried out in the presence of collinear control, which allows the system to be accelerated according to the oscillation modes. **Results.** Formulas are derived for calculating the oscillation frequencies of distributed model and finite-dimensional model of a chain pendulum, accounting for weak nonlinearity, in the dependence of the frequency number, oscillation amplitude, and the number of rods for the finite-dimensional model. The convergence of correction factors from the finite-dimensional model of a chain pendulum to the values of similar coefficients from the distributed model is demonstrated as the number of rods increases. Graphical illustrations of the calculation results are plotted for visual evaluation and comparison of the models. **Conclusion.** Based on the obtained formulas and graphs, it was determined that the rod finite-dimensional model is suitable for describing the behavior of a chain pendulum in the presence of weak nonlinearity. In the case of system oscillations in this model at the lowest frequency, the order of ten rods is sufficient for the correct description and mathematical modeling of a chain pendulum. In the case of more complex motion according to the second or third oscillation mode, at least thirty rods are required to ensure sufficient smoothness of the oscillation modes.

**Keywords:** chain pendulum, weak nonlinear, oscillation frequencies, distributed model, finite-dimensional model, multidimensional systems.

**For citation:** Degilevich EA, Smirnov AS. Oscillation frequencies of a chain pendulum in a model with weak nonlinearity. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3):432–452. DOI: 10.18500/0869-6632-003214

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Введение

Исследованию модели цепного маятника (ЦМ), с помощью которого можно описывать поведение цепей, тросов, канатов, тяжелых нитей, посвящено значительное число работ [1–5]. В частности, особый интерес представляет динамический анализ ЦМ по определению частот колебаний, когда ЦМ входит в виде конструктивной единицы в самые разнообразные механизмы и сооружения. Так, например, еще на этапе проектирования анализ частот колебаний троса перегрузочного крана может митигировать риски нежелательных колебаний, вызванных ветровым резонансом [6] или качкой на волнах, если кран располагается на судне. В настоящее время появляются работы, целью которых выступает определение оптимальных методов и алгоритмов для численной симуляции динамики цепных систем. Так, в работе [7] проводится моделирование троса перегрузочного крана методом интегрирования Верле с переменным числом сегментов, позволяющим адаптивно подбирать число разбиений троса в зависимости от режима работы крана с сохранением необходимой точности. В работе [8] изучается динамика ЦМ, подвешенного на козловом кране. Цепь моделируется как непрерывный однородный трос без трения с применением метода аппроксимации Ритца. Также уделяется особое внимание управлению и стабилизации

вертикального ЦМ, представляющего собой последовательное соединение жестких звеньев, соединенных сферическими шарнирами [9, 10].

Отдельный интерес представляет изучение нелинейных колебаний ЦМ, поскольку в случае раскачки цепей и тросов от ветра и сейсмике опор амплитуды колебаний могут быть достаточно велики, что уже не позволит производить расчеты при помощи теории малых колебаний. Существуют работы по анализу нелинейных колебаний трехзвенного маятника [11], однако вместе с тем аналитическое исследование нелинейных колебаний многозвенных маятников и цепных систем в случае, когда число их звеньев достаточно велико или стремится к бесконечности, а поведение системы может описываться моделями как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами, представлено недостаточно полно. Основной целью настоящего исследования и является устранение этого пробела, а именно, оно посвящено определению поправочных слагаемых в выражениях для частот нелинейных колебаний ЦМ.

Для проверки результатов аналитического расчета распределенной модели целесообразно также провести частотный анализ с применением конечномерных моделей, которые себя успешно зарекомендовали при анализе цепей [12, 13]. Аналитическое решение для конечномерных моделей ЦМ с применением стержневой схемы строится по схожему асимптотическому подходу, что и для распределенной модели. Помимо аналитического решения, в настоящем исследовании для моделирования и симуляций свободных колебаний ЦМ с учетом нелинейности применяется программный комплекс MSC Adams, который отлично себя проявляет в задачах, связанных с моделированием многотельных систем. Возможность оценки статики, кинематики и динамики делает MSC Adams эффективным инструментом, применяемым как в инженерном деле, так и в научной деятельности. Так, в работах [14, 15] данное программное обеспечение позволило описать поведение троса в системе цепных канатных дорог в квазистатике и смоделировать систему цепного привода контейнера с хорошим совпадением с экспериментальными данными. Также для проверки результатов аналитического расчета следует воспользоваться еще одной численной процедурой, осуществив интегрирование матричного уравнения движения системы при наличии коллинеарного управления, позволяющего разгонять систему по формам ее колебаний в отдельности с плавным дрейфом как частоты, так и самой формы колебаний по мере перехода из линейной области в нелинейную, что востребовано в робототехнике и биомеханике [11, 16].

## 1. Аналитическое определение поправочных коэффициентов

**1.1. Распределенная модель.** Рассмотрим распределенную модель ЦМ (рис. 1, а) длины  $L$  с массой  $M = \rho L$ , где  $\rho$  – погонная плотность. Уравнения движения системы имеют вид [17]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[ T \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right] + \rho g, \quad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial v}{\partial s} \right), \quad (1)$$

где  $s$  – координата вдоль цепи, отсчитываемая от ее верхнего конца;  $u(s, t)$  и  $v(s, t)$  – проекции вектора перемещения точки цепи с координатой  $s$  в момент времени  $t$  на оси  $x$  и  $y$  соответственно;  $g$  – ускорение свободного падения;  $T$  – усилие в цепи. При этом также имеет место условие связи

$$\left( 1 + \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 = 1, \quad (2)$$

которое можно сразу записать в форме, удобной для последующих действий:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

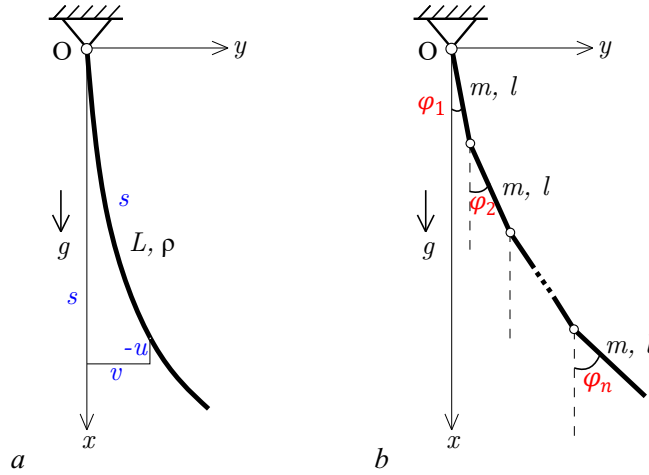


Рис. 1. Модели цепного маятника: *a* – распределенная модель; *b* – конечномерная модель  
 Fig. 1. Chain pendulum models: *a* – distributed model; *b* – finite-dimensional model

Известно, что в рамках линейной модели формы колебаний ЦМ будут [18]:

$$V_n(s) = J_0 \left( \lambda_n \sqrt{1 - \frac{s}{L}} \right), \quad (4)$$

где корни  $\lambda_n$  определяются из частотного уравнения  $J_0(\lambda) = 0$  [17, 18].

Определим частоты слабонелинейных колебаний ЦМ при движении системы по каждой из форм колебаний  $V_n$  в отдельности. При этом рассмотрение модели со слабой нелинейностью означает учет влияния наиболее значимых нелинейных слагаемых, имеющих третий порядок малости. В рамках поставленной задачи приближенное решение представим в форме

$$v(s, t) = AV_n(s) \cos \psi, \quad \psi = \tilde{k}_n(A)t + \theta, \quad (5)$$

где  $A$  – величина, которая характеризует амплитуды колебаний всех точек ЦМ в поперечном направлении,  $\psi$  – полная фаза колебаний,  $\theta$  – начальная фаза колебаний,  $\tilde{k}_n$  – частота колебаний в модели со слабой нелинейностью, зависящая от амплитуды. Ясно, что здесь уже необходимо учитывать и вертикальное перемещение, которым нельзя пренебрегать, как это делается в линейной модели. Далее необходимо определить зависимости частот  $\tilde{k}_n$  от  $A$ , которые отличаются от частот малых колебаний  $k_n$  за счет поправочных коэффициентов, вызванных нелинейными факторами. Искомые поправки могут быть найдены из уравнения гармонического баланса [19] по конкретной форме колебаний  $V_n(s)$ , которое записывается в виде

$$\int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi \int_0^L V_n(s) \left[ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right] ds = 0. \quad (6)$$

Для упрощения дальнейшего исследования введем в рассмотрение следующие безразмерные величины:

$$\tau = k_0 t, \quad z = \sqrt{1 - \frac{s}{L}}, \quad N = \frac{T}{\rho g L}, \quad \xi = \frac{u}{L}, \quad \eta = \frac{v}{L}, \quad a = \frac{A}{L}, \quad (7)$$

где  $k_0 = \sqrt{g/L}$  – частота колебаний математического маятника длиной  $L$ . Стоит пояснить физический смысл введенных параметров:  $\tau$  – безразмерное время,  $z$  – безразмерная координата,

$N$  – безразмерное усилие,  $\xi$  и  $\eta$  – безразмерные поперечное и вертикальное перемещения соответственно,  $a$  – безразмерная амплитуда колебаний. С учетом (7) уравнения (1) примут более удобный вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = 1 + \frac{1}{2z} \frac{\partial}{\partial z} \left[ N \left( \frac{1}{2z} \frac{\partial \xi}{\partial z} - 1 \right) \right], \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = \frac{1}{4z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{N}{z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right). \quad (8)$$

В случае малых колебаний величина  $\xi$  имеет более высокий порядок малости по сравнению с  $\eta$ , так как подъем цепи сильно меньше в сравнении с поперечным отклонением. С целью построения решения для модели со слабой нелинейностью будем считать, что  $\eta$  имеет первый порядок малости, а  $\xi$ , как нетрудно понять, будет иметь второй порядок малости. Из условия связи (3) найдем тогда с требуемой точностью

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{4z} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2. \quad (9)$$

Решение (5), с учетом (7), в безразмерном виде теперь примет следующий вид:

$$\eta(a, z, \psi) = aV_n(z) \cos \psi = aJ_0(\lambda_n z) \cos \psi, \quad \psi = \tilde{p}_n(a)\tau + \theta, \quad (10)$$

где было учтено выражение для форм колебаний ЦМ согласно (4), а также введены безразмерные частоты нелинейных колебаний  $\tilde{p}_n = \tilde{k}_n/k_0$ . Из (10) также следует, что величина  $a$  равна безразмерной амплитуде колебаний концевой точки ЦМ  $s = L$ , то есть  $z = 0$ . Подставим выражение для  $\eta$  согласно (10) в формулу (9), вследствие чего получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{4z} a^2 \lambda_n^2 J_1^2(\lambda_n z) \cos^2 \psi. \quad (11)$$

Проинтегрируем уравнение (11), воспользовавшись соотношением

$$\int \frac{J_1^2(\lambda_n z)}{z} dz = -\frac{1}{2} [J_0^2(\lambda_n z) + J_1^2(\lambda_n z)] + C, \quad C = \text{const}, \quad (12)$$

где  $C$  – константа интегрирования, и принимая во внимание граничное условие  $\xi = 0$  при  $z = 1$ , отвечающее закрепленному концу ЦМ  $s = 0$ . В результате получим

$$\xi(a, z, \psi) = \frac{1}{8} a^2 \lambda_n^2 [J_1^2(\lambda_n) - J_0^2(\lambda_n z) - J_1^2(\lambda_n z)] \cos^2 \psi. \quad (13)$$

Сравнивая (10) и (13), можно удостовериться, что  $\xi$  в самом деле имеет второй порядок малости по  $a$ , тогда как  $\eta$  имеет первый порядок малости.

Обратимся теперь к вычислению безразмерного усилия  $N$ . Будем полагать его равным  $N = N_0 + S$ , где  $N_0$  – усилие в линейной модели, которое не зависит от амплитуды колебаний ЦМ,  $S$  – малая добавка, возникающая при учете нелинейности и имеющая, как несложно показать, второй порядок малости по  $a$ . Подставим выражение для  $N$  в первое уравнение (8) и, опуская все нелинейные слагаемые, получим

$$0 = 1 - \frac{1}{2z} \frac{\partial N_0}{\partial z}, \quad N_0 = z^2, \quad (14)$$

где учтено, что  $N_0 = 0$  на свободном конце ЦМ при  $z = 0$ . Теперь удержим в первом уравнении (8) слагаемые второго порядка малости по  $a$  и получим для определения  $S$  следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial S}{\partial z} = -2z \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial \xi}{\partial z} \right). \quad (15)$$

Для определения  $S$  необходимо проинтегрировать уравнение (15). Отметим, что второе слагаемое в правой части уравнения (15) само по себе является производной некоторой функции по  $z$ , поэтому остается вычислить интеграл только от первого слагаемого, которое, согласно формуле (13), примет вид

$$-2z \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = \frac{1}{8} a^2 \lambda_n^4 z [J_1^2(\lambda_n) - J_0^2(\lambda_n z) - J_1^2(\lambda_n z)] \cos 2\psi. \quad (16)$$

Воспользовавшись табличными интегралами из [20] с учетом условия  $S = 0$  при  $z = 0$ , получим после ряда преобразований следующее выражение:

$$S = \frac{1}{16} a^2 \lambda_n^2 [J_1^2(\lambda_n z) + \cos 2\psi ((1 - 2\lambda_n^2 z^2) J_1^2(\lambda_n z) + z^2 \lambda_n^2 J_1^2(\lambda_n) - 2z^2 \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n z) + 2\lambda_n z J_0(\lambda_n z) J_1(\lambda_n z))] . \quad (17)$$

Из (17) следует, что величина  $S$  действительно имеет второй порядок малости по  $a$ , как этого и следовало ожидать.

Переходя далее к вычислению частот нелинейных колебаний, запишем уравнение гармонического баланса (6) в безразмерной форме:

$$\int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi \int_0^1 V_n(z) \left[ z \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{N}{z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \right] dz = 0. \quad (18)$$

Очевидно, что поправка в выражении для частоты колебаний, ввиду учета слабой нелинейности, должна иметь второй порядок малости по  $a$ . В силу сказанного будем разыскивать частоту колебаний в следующем виде:

$$\tilde{p}_n(a) = p_n(1 + \gamma_n a^2), \quad (19)$$

где  $\gamma_n$  — искомый поправочный коэффициент, подлежащий вычислению из уравнения (18), а  $p_n = \lambda_n/2$  — безразмерные частоты при малых колебаниях ЦМ [18]. Найдем выражение в квадратных скобках в уравнении гармонического баланса (18) с точностью до величин третьего порядка малости по  $a$ :

$$\left[ \dots \right] = -az V_n(z) p_n^2 (1 + 2\gamma_n a^2) \cos \psi - \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \left( z \frac{dV_n}{dz} \right) a \cos \psi - Q, \quad (20)$$

где введено следующее обозначение для величины  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{S}{z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right), \quad (21)$$

имеющей третий порядок малости по  $a$ . Принимая во внимание, что форма колебаний ЦМ  $V_n$  (4) удовлетворяет дифференциальному уравнению [21]

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left( z \frac{dV_n}{dz} \right) + 4p_n^2 V_n = 0, \quad (22)$$

можно упростить выражение (20) до более простого вида:

$$\left[ \dots \right] = -2z \gamma_n V_n(z) a^3 p_n^2 \cos \psi - Q. \quad (23)$$

Подставляя выражение (23) в уравнение гармонического баланса (18), получим следующую формулу для поправочного коэффициента  $\gamma_n$ :

$$\gamma_n = -\frac{1}{a^3 p_n^2 J_1^2(\lambda_n) \pi} \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi \int_0^1 V_n(z) Q dz. \quad (24)$$

Для упрощения повторного интеграла, стоящего в правой части (24), необходимо учесть, что величина  $Q$ , согласно (21), является производной некоторой функции по  $z$ , а значит, для вычисления интеграла целесообразно воспользоваться правилом интегрирования по частям:

$$\int_0^1 V_n(z) Q dz = \frac{1}{4} \lambda_n a \cos \psi \left[ S \frac{J_1(\lambda_n z)}{z} J_0(\lambda_n z) \Big|_0^1 - \lambda_n \int_0^1 S \frac{J_1^2(\lambda_n z)}{z} dz \right], \quad (25)$$

где учтено, что  $\partial \eta / \partial z = a \lambda_n J_1(\lambda_n z) \cos \psi$ . Первое слагаемое в квадратных скобках в выражении (25) равно нулю, так как  $S = 0$  при  $z = 0$ , а функция  $J_1(\lambda_n z)/z$  имеет конечный предел при  $z \rightarrow 0$ , тогда как при  $z = 1$  имеем  $J_0(\lambda_n) = 0$ . Следовательно, выражение (24) примет вид

$$\gamma_n = \frac{1}{a^2 J_1^2(\lambda_n) \pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi \int_0^1 S \frac{J_1^2(\lambda_n z)}{z} dz, \quad (26)$$

где учтено, что  $p_n = \lambda_n/2$ . Наконец, остается подставить выражение для  $S$  согласно (17) в формулу (26) и вычислить интеграл по  $d\psi$ . После ряда преобразований запишем окончательное выражение для поправочного коэффициента  $\gamma_n$  в виде

$$\gamma_n = \frac{\lambda_n^2}{16 J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 F(z) dz, \quad (27)$$

где функция  $F(z)$  имеет следующее представление:

$$F(z) = J_1^2(\lambda_n z) \left[ \frac{3}{2} \frac{J_1^2(\lambda_n z)}{z} - z \lambda_n^2 J_1^2(\lambda_n z) + \lambda_n J_0(\lambda_n z) J_1(\lambda_n z) - z \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n z) + \frac{1}{2} z \lambda_n^2 J_1^2(\lambda_n) \right]. \quad (28)$$

Невзирая на весьма громоздкую структуру функции (28), определенный интеграл в формуле (27) может быть легко вычислен с помощью численных процедур. В результате находим значения поправочного коэффициента для первых трех частот колебаний:

$$\gamma_1 = -0.04999, \quad \gamma_2 = -3.129, \quad \gamma_3 = -17.74. \quad (29)$$

Стоит обратить внимание, что все поправочные коэффициенты  $\gamma_n$  отрицательны, а значит, согласно выражению (19) частоты колебаний убывают с увеличением амплитуд колебаний. Более того, вклад поправочных слагаемых возрастает с увеличением номера частоты.

**1.2. Конечномерная модель.** Перейдем теперь к анализу конечномерной модели рассматриваемого ЦМ, которая состоит из  $n$  стержней, соединенных шарнирно, а значит, эта модель обладает  $n$  степенями свободы (рис. 1, б). В качестве обобщенных координат будем рассматривать углы отклонения стержней  $\varphi_k$  от вертикали. Каждый стержень имеет длину  $l = L/n$ , массу

$m = \rho L/n$  и момент инерции  $J = ml^2/12$  относительно своего центра масс. Все стержни соединены друг с другом шарнирно, что обеспечивает гибкость, которая характерна для классической модели ЦМ.

Для составления уравнений кинетической и потенциальной энергии запишем координаты центров масс  $k$ -го стержня:

$$x_k = \frac{l}{2} \cos \varphi_k + l \sum_{i=1}^{k-1} \cos \varphi_i, \quad y_k = \frac{l}{2} \sin \varphi_k + l \sum_{i=1}^{k-1} \sin \varphi_i. \quad (30)$$

Потенциальная энергия силы тяжести  $k$ -го стержня, с учетом (30), будет

$$\Pi_k = -mgx_k = -mgl \left( \frac{1}{2} \cos \varphi_k + \sum_{i=1}^{k-1} \cos \varphi_i \right). \quad (31)$$

Выражение для суммарной потенциальной энергии, с учетом (31), для нелинейной модели тогда примет вид

$$\Pi(\boldsymbol{\varphi}) = -mgl \sum_{i=1}^n \left( n - i + \frac{1}{2} \right) \cos \varphi_i. \quad (32)$$

При вычислении кинетической энергии промежуточные выкладки оказываются несколько сложнее в сравнении с потенциальной энергией, что отчасти связано с необходимостью учитывать как поступательную, так и вращательную составляющую при движении каждого стержня. Дифференцируя выражения (30) по времени, получим

$$\dot{x}_k = -\frac{l}{2} \sin \varphi_k \dot{\varphi}_k - l \sum_{i=1}^{k-1} \sin \varphi_i \dot{\varphi}_i, \quad \dot{y}_k = \frac{l}{2} \cos \varphi_k \dot{\varphi}_k + l \sum_{i=1}^{k-1} \cos \varphi_i \dot{\varphi}_i. \quad (33)$$

Тогда выражение кинетической энергии для  $k$ -го стержня примет вид

$$T_k = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_k^2 + \frac{1}{2} m v_k^2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\varphi}_k^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2), \quad (34)$$

где первое слагаемое характеризует энергию вращения стержня вокруг его центра масс, а второе слагаемое — поступательное движение центра масс стержня со скоростью  $v_k$ . С учетом (33) выражение (34) можно привести к виду

$$T_k = \frac{1}{2} ml^2 \left[ \frac{1}{3} \dot{\varphi}_k^2 + \dot{\varphi}_k \sum_{i=1}^{k-1} \cos(\varphi_i - \varphi_k) \dot{\varphi}_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \right]. \quad (35)$$

Тогда суммарную кинетическую энергию для многомерной стержневой схемы ЦМ можно записать в матричном виде:

$$T(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi}) \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (36)$$

где  $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi})$  — симметричная матрица инерционных коэффициентов нелинейной модели, а ее элементы  $\tilde{a}_{ij}(\boldsymbol{\varphi})$  с учетом (35) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} i = j : \quad \tilde{a}_{ii} &= ml^2 \left( n - i + \frac{1}{3} \right), \\ i \neq j : \quad \tilde{a}_{ij} &= ml^2 \left( n - r + \frac{1}{2} \right) \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad r = \max(i, j). \end{aligned} \quad (37)$$

В случае малых колебаний вблизи положения равновесия при  $\varphi_k = 0$  можно провести аппроксимацию. В формуле для потенциальной энергии (32) положим  $\cos \varphi_i \approx 1 - \varphi_i^2/2$ , а в выражении для кинетической энергии (37) запишем  $\cos(\varphi_j - \varphi_i) \approx 1$ , что будет гарантировать удержание лишь слагаемых второго порядка малости по обобщенным координатам и скоростям в выражениях для потенциальной и кинетической энергий соответственно. Следовательно, выражения кинетической и потенциальной энергии стержневой системы в квадратичной аппроксимации будут

$$T(\dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \Pi(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}, \quad (38)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  — матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов соответственно, а  $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$  — столбец обобщенных координат. С учетом вышесказанного элементы матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} i = j: \quad a_{ii} &= ml^2 \left( n - i + \frac{1}{3} \right), \quad c_{ii} = mgl \left( n - i + \frac{1}{2} \right), \\ i \neq j: \quad a_{ij} &= ml^2 \left( n - r + \frac{1}{2} \right), \quad r = \max(i, j), \quad c_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Возвращаясь к исследованию нелинейных колебаний ЦМ, запишем уравнение Лагранжа второго рода [2] для многомерного случая в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varphi}}. \quad (40)$$

Подставляя (36) и (32) в (40), приведем уравнение движения многомерной стержневой системы к следующей записи [12, 22]:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi}) \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \tilde{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varphi}) = 0, \quad (41)$$

где введены новые столбцы:

$$\tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\varphi}) \dot{\boldsymbol{\varphi}}^2, \quad \tilde{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{C} \sin \boldsymbol{\varphi}. \quad (42)$$

В формулах (42) для удобства записи введены следующие столбцы:  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 = [\dot{\varphi}_1^2, \dot{\varphi}_2^2, \dots, \dot{\varphi}_n^2]^T$ ,  $\sin \boldsymbol{\varphi} = [\sin \varphi_1, \sin \varphi_2, \dots, \sin \varphi_n]^T$ . При этом элементы симметричной матрицы  $\mathbf{C}$  линейной модели приведены в (39), а матрица  $\tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\varphi})$  является кососимметричной, причем ее элементы с учетом (37) можно записать в виде

$$\tilde{h}_{ij} = ml^2 \left( n - r + \frac{1}{2} \right) \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad r = \max(i, j). \quad (43)$$

Разложим в ряды Тейлора по  $\boldsymbol{\varphi}$  столбец  $\sin \boldsymbol{\varphi}$ , а также матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi})$  и  $\tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\varphi})$ , и удержим в этих разложениях лишь те слагаемые, которые потребуются для последующих вычислений:

$$\sin \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{6} \boldsymbol{\varphi}^3 + \dots, \quad \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{A} + \check{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi}) + \dots, \quad \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\varphi}) = \check{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\varphi}) + \dots, \quad (44)$$

где снова для удобства записи введен столбец  $\boldsymbol{\varphi}^3 = [\varphi_1^3, \varphi_2^3, \dots, \varphi_n^3]^T$ . При этом элементы симметричной матрицы  $\mathbf{A}$  линейной модели приведены в (39), а для записи элементов матриц  $\check{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi})$  и  $\check{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\varphi})$  обратимся к формулам (37) и (43), в результате чего получим

$$\begin{aligned} i = j: \quad \check{a}_{ii}(\boldsymbol{\varphi}) &= 0, \quad \check{h}_{ii}(\boldsymbol{\varphi}) = 0, \\ i \neq j: \quad \check{a}_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) &= -\frac{1}{2} ml^2 \left( n - r + \frac{1}{2} \right) (\varphi_i - \varphi_j)^2, \quad r = \max(i, j), \\ \check{h}_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) &= ml^2 \left( n - r + \frac{1}{2} \right) (\varphi_i - \varphi_j). \end{aligned} \quad (45)$$

Из (45) следует, что матрица  $\check{H}(\varphi)$  имеет первый порядок малости, а матрица  $\check{A}(\varphi)$  – второй порядок. Подставим теперь (44) в (41) и перенесем все нелинейные по  $\varphi$  слагаемые в правую часть. В результате получим так называемое уравнение первого приближения [23]:

$$\mathbf{A}\ddot{\varphi} + \mathbf{C}\varphi = \mathbf{F}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}), \quad (46)$$

где в структуре функции  $\mathbf{F}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$  отражены все необходимые нелинейные слагаемые, а именно:

$$\mathbf{F}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = -\check{A}(\varphi)\ddot{\varphi} - \check{H}(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6}\mathbf{C}\varphi^3. \quad (47)$$

Из (47) следует, что столбец  $\mathbf{F}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$  ожидаемо имеет третий порядок малости, поэтому будем трактовать его как столбец вынуждающих сил, который действует на линейную систему [19].

Разыскивать решение уравнения (47) будем в виде колебаний по одной из форм колебаний  $\Phi_s$  линейной системы:

$$\varphi = \Phi_s \alpha \cos \psi, \quad \psi = \tilde{k}_s(\alpha)t + \theta, \quad (48)$$

где  $\alpha$  уже является величиной, которая характеризует амплитуду колебаний по  $s$ -й форме.

Частота нелинейных колебаний с порядковым номером  $s$  принимается в виде

$$\tilde{k}_s(\alpha) = k_s(1 + \beta_s \alpha^2), \quad (49)$$

где, как и прежде, вносится поправка, имеющая второй порядок малости по  $\alpha$ . Поправочный коэффициент  $\beta_s$  определяется из уравнения гармонического баланса [19] по рассматриваемой форме  $\Phi_s$ :

$$\int_0^{2\pi} \Phi_s^T (\mathbf{A}\ddot{\varphi} + \mathbf{C}\varphi - \mathbf{F}) \cos \psi d\psi = 0, \quad (50)$$

которое нужно выполнить с необходимой точностью. Определим с учетом (48) столбцы обобщенных скоростей и ускорений с точностью до третьего порядка малости по  $\alpha$ :

$$\dot{\varphi} = -\Phi_s \alpha k_s \sin \psi (1 + \beta_s \alpha^2), \quad \ddot{\varphi} = -\Phi_s \alpha k_s^2 \cos \psi (1 + 2\beta_s \alpha^2). \quad (51)$$

Введем в рассмотрение безразмерные частоты колебаний линейной модели  $p_s = k_s/k_0$ , где  $k_0 = \sqrt{g/L}$ . С учетом (48) и (51) вычислим выражение, фигурирующее в (50):

$$\mathbf{A}\ddot{\varphi} + \mathbf{C}\varphi = \frac{1}{n} mgl [n\mathbf{C}_0 - p_s^2 \mathbf{A}_0 (1 + 2\beta_s \alpha^2)] \Phi_s \alpha \cos \psi, \quad (52)$$

где учтено, что  $l = L/n$ , и введены безразмерные матрицы инерционных  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}/(ml^2)$  и квазиупругих  $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}/(mgl)$  коэффициентов линейной модели, элементы которых, с учетом (39), будут

$$\begin{aligned} i = j : \quad a_{0ii} &= n - i + \frac{1}{3}, \quad c_{0ii} = n - i + \frac{1}{2}, \\ i \neq j : \quad a_{0ij} &= n - r + \frac{1}{2}, \quad r = \max(i, j), \quad c_{0ij} = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Стоит отметить, что для поиска собственных частот малых колебаний рассматриваемой стержневой системы достаточно подставить матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов в частотное уравнение, которое в размерном и безразмерном варианте соответственно будет иметь вид

$$\det(\mathbf{C} - k_s^2 \mathbf{A}) = 0, \quad \det(n\mathbf{C}_0 - p_s^2 \mathbf{A}_0) = 0. \quad (54)$$

При этом форма колебаний  $\Phi_s$  удовлетворяет следующему уравнению [21]:

$$(n\mathbf{C}_0 - p_s^2\mathbf{A}_0)\Phi_s = 0, \quad (55)$$

поэтому выражение (52) можно упростить до вида

$$\mathbf{A}\ddot{\Phi} + \mathbf{C}\Phi = -\frac{2}{n}mgl\beta_s p_s^2 \mathbf{A}_0 \Phi_s \alpha^3 \cos \psi. \quad (56)$$

Для определения столбца  $\mathbf{F}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$  с точностью до третьего порядка малости по  $\alpha$  достаточно подставить в (47) выражения

$$\varphi = \Phi_s \alpha \cos \psi, \quad \dot{\varphi} = -\Phi_s \alpha k_s \sin \psi, \quad \ddot{\varphi} = -\Phi_s \alpha k_s^2 \cos \psi, \quad (57)$$

после чего получим

$$\mathbf{F} = \frac{1}{n}mgl \left[ p_s^2 \check{\mathbf{A}}_0 \Phi_s \cos^3 \psi - p_s^2 \check{\mathbf{H}}_0 \Phi_s^2 \cos \psi \sin^2 \psi + \frac{n}{6} \mathbf{C}_0 \Phi_s^3 \cos^3 \psi \right] \alpha^3, \quad (58)$$

где введены условные обозначения  $\Phi_s^2$  и  $\Phi_s^3$ , подразумевающие столбцы квадратов и кубов элементов форм колебаний соответственно. Также в рассмотрение добавлены безразмерные матрицы  $\check{\mathbf{A}}_0 = \check{\mathbf{A}}/(ml^2)$  и  $\check{\mathbf{H}}_0 = \check{\mathbf{H}}/(ml^2)$ , элементы которых, с учетом (45), будут

$$\begin{aligned} i = j: \quad \check{a}_{0ii} &= 0, \quad \check{h}_{0ii} = 0, \\ i \neq j: \quad \check{a}_{0ij} &= -\frac{1}{2} \left( n - r + \frac{1}{2} \right) (\Phi_{is} - \Phi_{js})^2, \quad r = \max(i, j), \\ \check{h}_{0ij} &= \left( n - r + \frac{1}{2} \right) (\Phi_{is} - \Phi_{js}), \end{aligned} \quad (59)$$

причем здесь  $\Phi_{is}$  и  $\Phi_{js}$  — соответствующие элементы столбца  $\Phi_s$ . Для дальнейших действий необходимо ввести нормировочный коэффициент  $N_s = \Phi_s^T \mathbf{A}_0 \Phi_s$ , а также использовать интегралы:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \psi \sin^2 \psi d\psi = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^4 \psi d\psi = \frac{3\pi}{4}. \quad (60)$$

Подставим формулы (56) и (58) в уравнение гармонического баланса (50) и, учитывая соотношения (60), после ряда преобразований получим итоговую формулу для  $\beta_s$ :

$$\beta_s = \frac{1}{8N_s p_s^2} \Phi_s^T \left( p_s^2 \check{\mathbf{H}}_0 \Phi_s^2 - 3p_s^2 \check{\mathbf{A}}_0 \Phi_s - \frac{n}{2} \mathbf{C}_0 \Phi_s^3 \right). \quad (61)$$

Формула (61) позволяет определить поправочный коэффициент в выражении для конкретной частоты при заданном количестве стержней.

Для возможности сравнения результатов, полученных в рамках конечномерной и распределенной моделей, необходимо связать величину  $\alpha$ , характеризующую угловые амплитуды колебаний стержней в первой из этих моделей, с безразмерной амплитудой поперечных колебаний концевой точки ЦМ  $a = A/L$  во второй модели. Для этого запишем горизонтальную координату нижнего конца ЦМ в рамках конечномерной стержневой модели:

$$y_L = l \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i. \quad (62)$$

Полагая, что  $\sin \varphi_i \approx \varphi_i$ , подставим в (62) решение (48) и после вычисления безразмерной амплитуды колебаний с учетом того, что  $L = nl$ , получим

$$a = \kappa_s \alpha, \quad \kappa_s = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \Phi_{is} \right|, \quad (63)$$

где введен коэффициент пересчета  $\kappa_s$  для связи угловой и трансляционной амплитуд колебаний. Остается лишь провести обезразмеривание формулы для частоты нелинейных колебаний ЦМ (49) традиционным образом с учетом (63):

$$\tilde{p}_s(a) = p_s(1 + \gamma_s a^2), \quad \gamma_s = \frac{\beta_s}{\kappa_s^2}. \quad (64)$$

Завершая разговор о построении приближенного аналитического решения, следует отметить, что как для исходной распределенной модели, так и для конечномерной модели ЦМ формы колебаний с ростом амплитуд также начинают постепенно отличаться от своего линейного варианта, усложняя при этом свой характер [11]. Исследование дрейфа форм колебаний по мере увеличения амплитуд представляет отдельную задачу и выходит за рамки настоящего исследования, однако он и не сказывается на полученных выражениях (19) и (64) для частот колебаний в рамках модели со слабой нелинейностью, отражаясь только при нахождении частот колебаний в следующем приближении.

## 2. Численные эксперименты по определению частот нелинейных колебаний

### 2.1. Моделирование свободных колебаний в программном комплексе MSC Adams.

С целью проверки аналитических расчетов, выполненных в предыдущем разделе, рассмотрим конечномерную модель ЦМ и проведем численные симуляции с применением специального программного комплекса MSC Adams для моделирования многотельной динамики. Рассматриваемая модель состоит из 20 шарнирно соединенных стержней. Отметим, что данного количества стержней вполне достаточно для анализа низших частот колебаний модели ЦМ с распределенной массой с точки зрения сходимости результатов [24].

Для организации колебаний системы на нужной частоте предлагается задать начальное положение конечномерного ЦМ в соответствии с интересующей нас формой колебаний. Начальные значения углов  $\varphi_k$  берутся в соответствии со столбцом  $\Phi_s$ , который вычисляется из уравнения (55). Варьируя величину  $\alpha$ , можно получить желаемое начальное отклонение нижнего конца и в дальнейшем сопоставить результаты с аналитическими расчетами, применив формулы (63) и (64). Примеры отклоненных положений конечномерной модели с 20 стержнями для первых трех форм колебаний приведены на рис. 2. Отметим, что задание начальных отклонений, в соответствии с формами малых колебаний, позволяет получить адекватные результаты только при не сильно больших амплитудах по аналогии с тем, как это делалось выше при построении приближенного аналитического решения, где оно, согласно (48), также разыскивалось в виде колебаний по одной из форм линейной модели.

После проведения серии симуляций свободных колебаний конечномерной модели ЦМ с варьированием начальных амплитуд для каждой из трех рассматриваемых форм колебаний определяются периоды колебаний как усредненное значение времени между соседними максимумами, минимумами и точками прохождения через нуль при одинаковом направлении движения для выборки из нескольких десятков поперечных колебаний нижнего конца цепи, а далее при каждой конкретной амплитуде по найденному значению для периода вычисляется и частота колебаний.

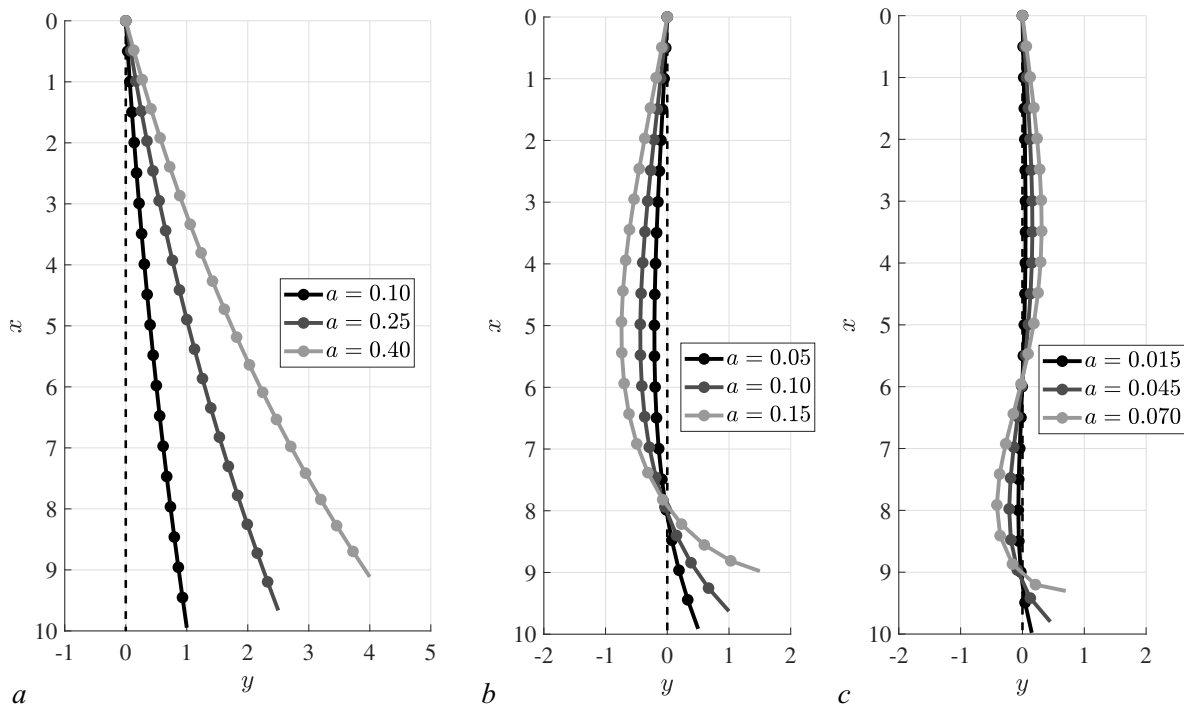


Рис. 2. Начальное положение двадцатистержневой модели для симуляции свободных колебаний в MSC Adams при разных амплитудах: *a* – первая форма колебаний; *b* – вторая форма колебаний; *c* – третья форма колебаний

Fig. 2. The initial position of the twenty-rod model for simulating free oscillations in MSC Adams at different amplitudes: *a* – the first oscillation mode; *b* – the second oscillation mode; *c* – the third oscillation mode

**2.2. Моделирование управляемого разгона системы под действием коллинеарного управления.** В качестве второго подхода к проведению численного эксперимента для вычисления частот колебаний ЦМ с учетом нелинейности предлагается провести симуляции не свободных, а управляемых движений под действием надлежащим образом выбранного закона управления. Для определения отсчетного положения двадцатистержневой модели ЦМ необходимо задать начальные углы  $\varphi_k$  на основе столбца  $\Phi_s$ , как и в предыдущем подходе, однако начальная амплитуда  $\alpha$  должна быть достаточно малой, чтобы колебания можно было считать малыми. Далее следует организовать управляемое движение с постепенным нарастанием полной энергии  $E = T + \Pi$  в системе с применением коллинеарного закона управления [11]. Предлагаемое управляющее воздействие формируется пропорционально обобщенным импульсам системы и действует по всем степеням свободы. Основная ценность данного управления заключается в возможности осуществлять плавный разгон колебаний системы с малых и до достаточно больших амплитуд, переводя систему в область нелинейных колебаний по исходной форме колебаний, которая при этом также будет некоторым образом дрейфовать [16]. В отличие от уравнения движения системы (41), которое описывает свободные колебания, для учета коллинеарного управления в правой части этого уравнения должно появиться слагаемое, отвечающее управляющим воздействиям:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\varphi)\ddot{\varphi} + \tilde{\mathbf{B}}(\varphi, \dot{\varphi}) + \tilde{\mathbf{C}}(\varphi) = \mathbf{R}, \quad (65)$$

где  $\mathbf{R}$  – столбец обобщенных управляющих сил, который в случае коллинеарного управления представляется в виде

$$\mathbf{R} = \mu \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \mu \tilde{\mathbf{A}}(\varphi) \dot{\varphi}, \quad (66)$$

где  $\mu$  — положительный коэффициент усиления, который целесообразно выбирать достаточно малой величиной для обеспечения медленного разгона конечномерного ЦМ. Для выхода на режим, отвечающего конкретной амплитуде колебаний, необходимо задаться целевым значением полной энергии системы  $E_*$ , достигая которого раскочка ЦМ будет прекращаться, а система продолжит далее свободные колебания на требуемой форме, которые будут отвечать заданному уровню энергии. Таким образом, коэффициент усиления  $\mu$  следует принять в виде

$$\mu(E) = \begin{cases} \text{const}, & E < E_*, \\ 0, & E \geq E_*. \end{cases} \quad (67)$$

Для интегрирования уравнения управляемого движения (65) можно применить универсальный решатель ode89 в программной среде MATLAB. Задаваясь интересующими нас формами колебаний  $\Phi_s$  и перебирая целевые уровни энергии  $E_*$ , необходимо осуществить серию расчетов, а затем провести обработку результатов с определением периода колебаний и амплитуды колебаний конечной точки ЦМ, чтобы после обезразмеривания можно было построить требуемые зависимости  $\tilde{p}_s(a)$ .

### 3. Обсуждение результатов расчетов и их сопоставление

Точные значения первых трех безразмерных частот колебаний  $p_s$  при малых колебаниях ЦМ в рамках распределенной модели равны [18]:

$$p_1 = 1.202, \quad p_2 = 2.760, \quad p_3 = 4.327. \quad (68)$$

Проверим сначала сходимость частот малых колебаний конечномерной стержневой модели к частотам малых колебаний распределенной модели (68) с ростом количества стержней. Для вычисления частот колебаний конечномерной модели обратимся ко второму частотному уравнению (54), куда следует подставить необходимые матрицы, элементы которых определяются по формулам (53). Зависимости первых трех частот малых колебаний стержневой модели ЦМ от количества стержней  $n$  приведены на рис. 3, где пунктиром нанесены значения частот

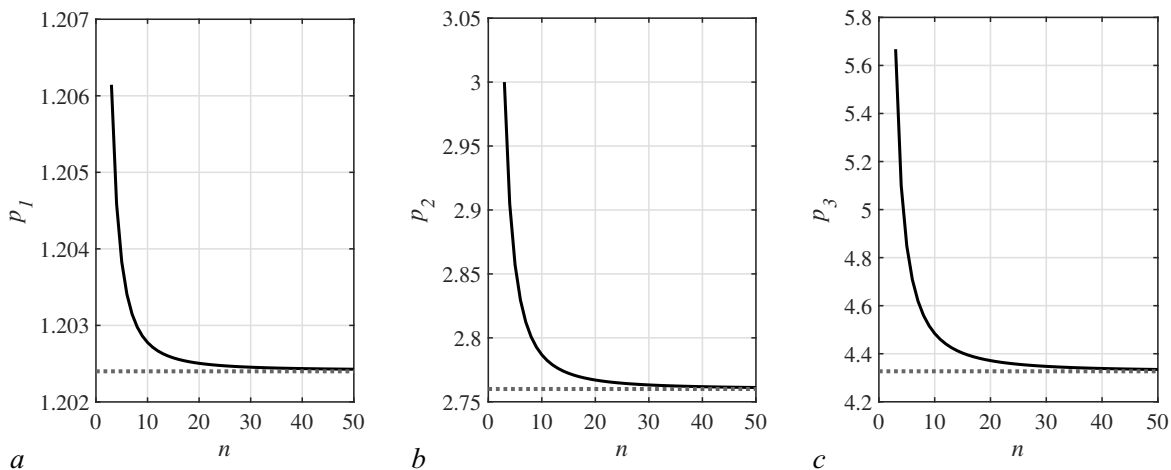


Рис. 3. Безразмерные частоты малых колебаний в зависимости от количества стержней в модели:  $a$  — первая частота;  $b$  — вторая частота;  $c$  — третья частота

Fig. 3. Dimensionless frequencies of small oscillations depending the rods number in the model:  $a$  — the first frequency;  $b$  — the second frequency;  $c$  — the third frequency

распределенной модели. Видно, что стержневая модель дает оценку сверху для частот распределенной модели ЦМ, причем с ростом  $n$  наблюдается монотонная сходимость результатов конечномерной модели к соответствующим значениям из распределенной модели. Все сказанное является первым успешным этапом по сравнению частот.

Вторым этапом является сравнение поправочных коэффициентов к частотам нелинейных колебаний. Для вычисления поправочных коэффициентов  $\gamma_s$  конечномерной стержневой схемы следует обратиться к формулам (61) и (64). На рис. 4 приведены графики значений поправочных коэффициентов  $\gamma_s$  в зависимости от числа стержней  $n$ , из которых состоит конечномерная модель ЦМ, а также пунктиром нанесены значения  $\gamma_s$  из распределенной модели согласно (29). Отметим, что значения поправочных коэффициентов приведены в узком диапазоне, чтобы можно было наглядно увидеть сходимость к соответствующим значениям из распределенной модели с ростом  $n$ . Так, значения  $\gamma_2$  приведены, начиная с  $n = 3$ , а значения  $\gamma_3$  приведены, начиная с  $n = 5$ , поскольку при меньших значениях  $n$  абсолютные значения  $\gamma_2$  и особенно  $\gamma_3$  слишком велики, что весьма уменьшает информационную насыщенность графиков. Стоит отметить, что приведенные на рис. 4 зависимости монотонно возрастают с ростом  $n$ , стремясь в пределе к значениям (29) из распределенной модели, как этого и следовало ожидать. При этом значение  $\gamma_1$  даже при относительно малом количестве стержней дает хорошее приближение к аналогичному значению из распределенной модели ЦМ, в то время как для адекватного приближения величин  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  потребуется использовать более 30 стержней в конечномерной модели.

Следует подчеркнуть, что, помимо стержневой схемы, интерес представляет еще и гантельная схема, которая несколько проще в сравнении со стержневой с точки зрения построения аналитического решения. Если для рассмотренной в настоящем исследовании стержневой схемы структурным звеном является однородный стержень, обладающий массой  $m$  и моментом инерции  $J = ml^2/12$  относительно его центра масс, то в гантельной схеме таким звеном является гантель, представляющая собой безынерционный стержень с двумя точечными массами  $m/2$  на его концах, так что в данной схеме в структуре кинетической энергии будут присутствовать только слагаемые, отвечающие за поступательное движение точечных масс. При этом потенциальная энергия для

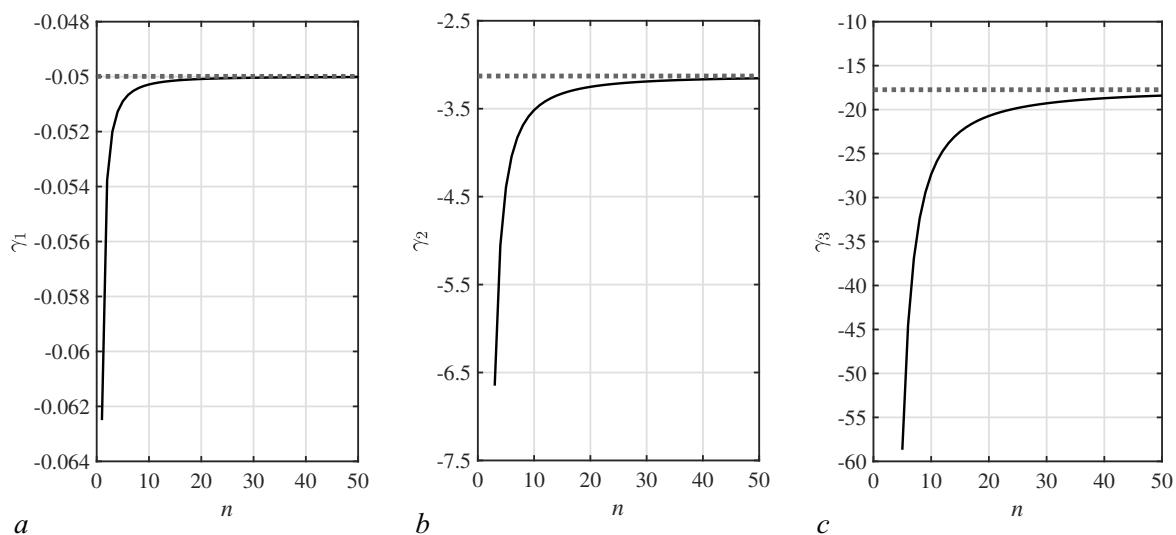


Рис. 4. Поправочные коэффициенты в зависимости от количества стержней в модели:  $a$  — для первой частоты;  $b$  — для второй частоты;  $c$  — для третьей частоты

Fig. 4. Correction factors depending on the rods number in the model:  $a$  — for the first frequency;  $b$  — for the second frequency;  $c$  — for the third frequency

гантельной схемы описывается той же формулой (32), а выражение для элементов матрицы инерционных коэффициентов  $\tilde{\mathbf{A}}$ , согласно [21], будет

$$\tilde{a}_{ij} = ml^2 \left( n - r + \frac{1}{2} \right) \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad r = \max(i, j). \quad (69)$$

Как несложно заметить, элементы (37) и (69) отличаются лишь на главной диагонали матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Следуя аналогичному подходу, можно вычислить и поправочные коэффициенты в выражениях для частот нелинейных колебаний и для гантельной схемы. Построим графики относительной погрешности для значений  $\gamma_s$  в сравнении со значениями из распределенной модели (29) при рассмотрении гантельной и стержневой схем. Результаты расчетов погрешностей для величин  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  приведены на рис. 5–7 соответственно.

Из рис. 5 и 6 следует, что с ростом  $n$  значения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  гантельной схемы быстрее приближаются к соответствующему значению из распределенной модели в сравнении со стержневой схемой, однако они делают это немонотонно, пересекая значение из распределенной модели, после чего отдаляются от него, но затем снова начинают приближаться к нему. В случае третьей частоты колебаний (рис. 7) значение  $\gamma_3$  из стержневой схемы приближается к значению из распределенной модели с ростом  $n$  быстрее, чем для гантельной схемы, до момента  $n = 17$ , а далее значения

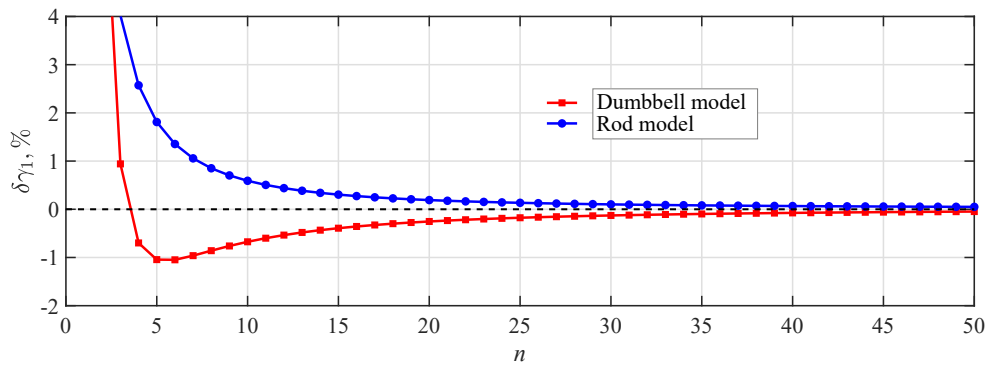


Рис. 5. Погрешность поправочного коэффициента в выражении для первой частоты колебаний конечномерных моделей в зависимости от числа звеньев (цвет онлайн)

Fig. 5. The error of the correction factor in the expression for the first oscillation frequency of finite-dimensional models depending on the links number (color online)

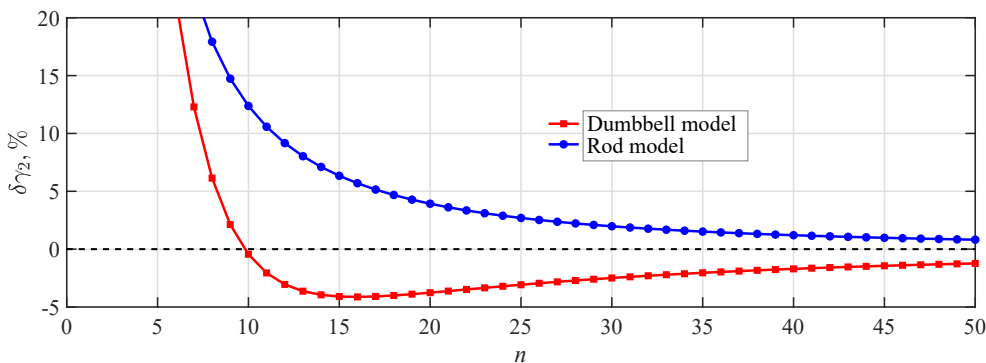


Рис. 6. Погрешность поправочного коэффициента в выражении для второй частоты колебаний конечномерных моделей в зависимости от числа звеньев (цвет онлайн)

Fig. 6. The error of the correction factor in the expression for the second oscillation frequency of finite-dimensional models depending on the links number (color online)

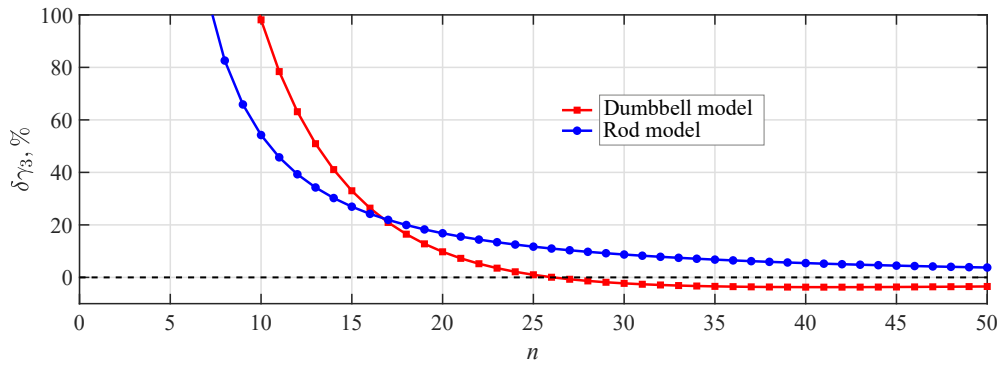


Рис. 7. Погрешность поправочного коэффициента в выражении для третьей частоты колебаний конечномерных моделей в зависимости от числа звеньев (цвет онлайн)

Fig. 7. The error of the correction factor in the expression for the third oscillation frequency of finite-dimensional models depending on the links number (color online)

гантельной схемы начинают приближаться к значению из распределенной модели быстрее, но аналогично первым двум поправочным коэффициентам вновь пересекают это значение. Исходя из данного анализа, можно заключить, что количественно гантельная и стержневая схемы дают схожие поправочные коэффициенты при относительно малом количестве звеньев, однако с точки зрения качества стержневая модель является более предпочтительной, поскольку сохраняет монотонность при сходимости решения и имеет меньшую погрешность при больших значениях  $n$ .

Возвращаясь к аналитическому решению (64), построенному на основе асимптотического метода для стержневой конечномерной модели ЦМ с учетом слабой нелинейности, сопоставим его с результатами численных экспериментов, описанных ранее. С этой целью построим графики зависимости первых трех безразмерных частот нелинейных колебаний  $\tilde{p}_s$  в зависимости от безразмерной амплитуды  $a$  по обозначенным формулам для случая  $n = 20$ , которые приведены на рис. 8 сплошными линиями. Также на рис. 8 нанесены результаты численных экспериментов: во-первых, симуляции свободных колебаний двадцатистержневой модели ЦМ в программном комплексе MSC Adams и, во-вторых, численного интегрирования уравнения управляемого движения (65) под действием коллинеарного управления для вывода двадцатистержневой схемы на заданный

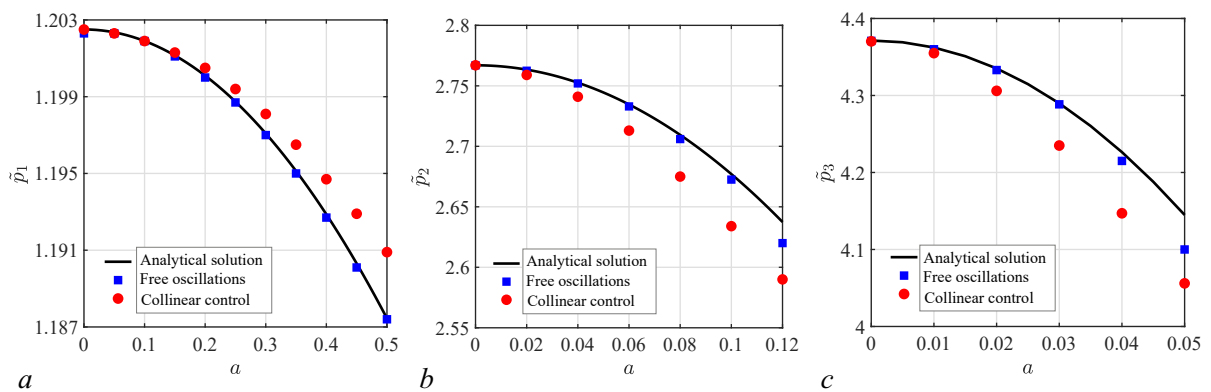


Рис. 8. Зависимость частоты нелинейных колебаний от амплитуды:  $a$  — первая частота колебаний;  $b$  — вторая частота колебаний;  $c$  — третья частота колебаний (цвет онлайн)

Fig. 8. Dependence of the frequency of nonlinear oscillations on the amplitude:  $a$  — the first oscillation frequency;  $b$  — the second oscillation frequency;  $c$  — the third oscillation frequency (color online)

уровень энергии путем разгона системы по нужной форме колебаний с применением программной среды MATLAB.

Видно, что для первой частоты колебаний (рис. 8, *a*) результаты численных экспериментов оказываются близки к аналитически найденной зависимости даже при весьма существенных амплитудах колебаний. Для второй (рис. 8, *b*) и третьей (рис. 8, *c*) частот колебаний максимальные значения рассматриваемых амплитуд  $a$  принимаются меньшими в сравнении с тем, что было для первой частоты колебаний, что связано со спецификой отвечающих им форм колебаний (см. рис. 2). Здесь также наблюдается достаточно хорошее соответствие аналитических зависимостей и результатов, полученных при помощи численных экспериментов. Следует отметить, что расхождение аналитически полученного решения с результатами симуляции свободных колебаний в программном комплексе MSC Adams оказывается ощутимо меньшим по сравнению с результатами численного моделирования управляемого разгона системы под действием коллинеарного управления. Это можно объяснить тем, что при симуляции свободных колебаний движение задается по формам малых колебаний, что, как было сказано выше, достаточно для того, чтобы уловить изменение частоты колебаний в рамках модели со слабой нелинейностью, которая и исследуется аналитическим путем, тогда как эксперимент по моделированию управляемых движений осуществляется с использованием точной нелинейной модели без каких-либо аппроксимаций.

### Заключение

В настоящей работе на базе асимптотических методов было построено аналитическое решение по вычислению поправочных коэффициентов в выражениях для частот колебаний ЦМ как в рамках распределенной модели, так и в рамках многомерной стержневой схемы при учете слабой нелинейности. Полученные значения коэффициентов оказались отрицательными, что говорит о том, что частоты колебаний убывают с ростом амплитуды колебаний, причем с увеличением номера частоты поправочные коэффициенты по модулю возрастают. Была проверена сходимость поправочных коэффициентов при увеличении количества стержней в конечномерной модели к результатам из распределенной модели. При относительном малом количестве сегментов стержневая схема отлично соотносится с распределенной моделью при нелинейных колебаниях на первой частоте. В случае колебаний на второй и третьей частотах потребуется несколько десятков сегментов для корректного описания нелинейного движения. При этом проведенные численные эксперименты позволили проверить корректность выведенных аналитических формул.

Также в рамках исследования было проведено сравнение поправочных коэффициентов в стержневой и гантельной схемах. Несмотря на количественную схожесть значений, стержневую модель можно считать более предпочтительной для моделирования ЦМ, поскольку графики сходимости представляют собой монотонные кривые, в то время как для гантельной схемы наблюдаются немонотонные зависимости с пересечением точного значения. Стремление поправочных коэффициентов в выражениях для частот колебаний в рамках конечномерных моделей к аналогичным значениям из распределенной модели подтверждает возможность применения моделей с сосредоточенными параметрами для описания систем с распределенными параметрами, что часто требуется в инженерных изысканиях с применением вычислительных программ для построения математических моделей и проведения симуляций. С другой стороны, это также говорит и о том, что и распределенные модели применимы для аналитического описания многозвенных цепных систем, которые, несмотря на свою дискретность, могут описываться как непрерывные объекты. Возможность применения конечномерных моделей открывает для исследователей и инженеров перспективу проведения компьютерных симуляций с более сложными механизмами, где ЦМ может выступать в качестве конструктивного звена.

## Список литературы

1. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
3. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
4. Irvine H. M., Caughey T. K. The linear theory of free vibrations of a suspended cable // Proc. A. 1974. Vol. 341, no. 1626. P. 299–315. DOI: 10.1098/rspa.1974.0189.
5. Bailey H. Motion of a hanging chain after the free end is given an initial velocity // Am. J. Phys. 2000. Vol. 68, iss. 8. P. 764–767. DOI: 10.1119/1.19539.
6. Golebiowska I., Peszynski K. Cable vibration caused by wind // EPJ Web of Conferences. 2018. Vol. 180. P. 02031. DOI: 10.1051/epjconf/201818002031.
7. Тютюных А. А., Тютюных Е. А. Моделирование троса методом интегрирования Верле с переменным числом сегментов // В сб.: Автоматизированные системы управления и информационные технологии. Материалы всероссийской научно-технической конференции в 2-х томах. 08–10 июня 2022 г., Пермь, Россия. Пермь: Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 2022. С. 272–278.
8. Tiefenbacher M., Jakubek S., Kozek M. Modeling and identification of a chain pendulum // In: Proceedings of the International Symposium on Models and Modeling Methodologies in Science and Engineering. 2011. In the context of The 2nd International Multi-Conference on Complexity, Informatics and Cybernetics: IMCIC 2011. 27–30 March, 2011, Orlando, Florida, USA.
9. Lee T., Leok M., McClamroch N. H. Dynamics and control of a chain pendulum on a cart // In: 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2012, Maui, HI, USA. P. 2502–2508. DOI: 10.1109/CDC.2012.6427059.
10. Hoshino T., Kawai H., Furuta K. Stabilization of the triple spherical inverted pendulum - A simultaneous design approach // Autommatisierungstechnik. 2000. Vol. 48. P. 577–587. DOI: 10.1524/auto.2000.48.12.577.
11. Смирнов А. С., Булов С. А., Дегилевич Е. А. Построение и анализ нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника асимптотическими методами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, № 4. С. 598–610. DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-4-598-610.
12. Tenreiro Machado J. A., Lopes A. M. The N-link pendulum: Embedding nonlinear dynamics into the multidimensional scaling method // Chaos, Solitons and Fractals. 2016. Vol. 89. P. 130–138. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.10.013.
13. Klaycham K., Nguantud P., Athisakul C., Chucheeprakul S. Free vibration analysis of large sag catenary with application to catenary jumper // Ocean Systems Engineering. 2020. Vol. 10, iss. 1. P. 67–86.
14. Mwappe C. J., Hong T. S., Wu W. B. Static studies of a steel chain ropeway section using Msc Adams // Advanced Materials Research. 2011. Vol. 328–330. P. 1031–1036. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031.
15. Suwanjurnrat C., Suwannahong W., Thongkom S. Implementation of multi-body dynamics simulation for the conveyor chain drive system // MATEC Web Conf. 2017. Vol. 95. P. 06006. DOI: 10.1051/mateconf/20179506006.
16. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями нелинейных механических систем на основе принципов биодинамики // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 4. С. 11–19.
17. Ламб Г. Теоретическая механика. М.: ОНТИ, 1936. Т. 3. 292 с.
18. Verbin Y. Boundary conditions and modes of the vertically hanging chain // Eur. J. Phys. 2015. Vol. 36. P. 015005. DOI: 10.1088/0143-0807/36/1/015005.
19. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Физматгиз, 1958. 408 с.

20. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. 800 с.
21. *Смирнов А. С., Дегилевич Е. А.* Колебания цепных систем. Санкт-Петербург: Политех-Пресс, 2021. 246 с.
22. *Формальский А. М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012. 232 с.
23. *Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О.* Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 432 с.
24. *McCreesh J. P., Goodfellow T. L., Seville A. H.* Vibrations of a hanging chain of discrete links // *Am. J. Phys.* 1975. Vol. 43. P. 646–648. DOI: 10.1119/1.10103.

## References

1. Merkin DR. Introduction to the Mechanics of Flexible Thread. M.: Nauka; 1980. 240 p. (in Russian).
2. Lurie AI. Analytical Mechanics. NY: Springer; 2002. 864 p.
3. Timoshenko SP. Oscillations in Engineering. 2nd ed. M.: Nauka; 1967. 444 p.
4. Irvine HM, Caughey TK. The linear theory of free vibrations of a suspended cable. *Proc. A.* 1974;341(1626):299–315. DOI: 10.1098/rspa.1974.0189.
5. Bailey H. Motion of a hanging chain after the free end is given an initial velocity. *Am. J. Phys.* 2000;68(8):764–767. DOI: 10.1119/1.19539.
6. Golebiowska I, Peszynski K. Cable vibration caused by wind. *EPJ Web of Conferences.* 2018;180: 02031. DOI: 10.1051/epjconf/201818002031.
7. Tyutyunikh AA, Tyutyunikh EA. Modeling of a cable using Verlet integration with a variable number of segments. In: Automated Control Systems and Information Technologies. Materials of the All-Russian Scientific and Technical Conference. 08–10 June 2022, Perm, Russia. Perm: Perm National Research Polytechnic University Publishing; 2022. P. 272–278 (in Russian).
8. Tiefenbacher M, Jakubek S, Kozek M. Modeling and Identification of a Chain Pendulum. In: Proceedings of the International Symposium on Models and Modeling Methodologies in Science and Engineering. 2011. In the context of The 2nd International Multi-Conference on Complexity, Informatics and Cybernetics: IMCIC 2011. 27–30 March, 2011, Orlando, Florida, USA.
9. Lee T, Leok M, McClamroch NH. Dynamics and control of a chain pendulum on a cart. In: 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2012, Maui, HI, USA. P. 2502–2508. DOI: 10.1109/CDC.2012.6427059.
10. Hoshino T, Kawai H, Furuta K. Stabilization of the triple spherical inverted pendulum – A simultaneous design approach. *Automatisierungstechnik.* 2000;48:577–587. DOI: 10.1524/auto.2000.48.12.577.
11. Smirnov AS, Bulov SA, Degilevich EA. Construction and analysis of nonlinear oscillation modes of a three-link pendulum by asymptotic methods. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics.* 2024;24(4):598–610 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-4-598-610.
12. Tenreiro Machado JA, Lopes AM. The N-link pendulum: Embedding nonlinear dynamics into the multidimensional scaling method. *Chaos, Solitons and Fractals.* 2016;89:130–138. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.10.013.
13. Klaycham K, Nguantud P, Athisakul C, Chucheepsakul S. Free vibration analysis of large sag catenary with application to catenary jumper. *Ocean Systems Engineering.* 2020;10(1):67–86.
14. Mwape CJ, Hong TS, Wu WB. Static Studies of a steel chain ropeway section using Msc Adams. *Advanced Materials Research.* 2011;328–330:1031–1036. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031.
15. Suvanjumrat C, Suwannahong W, Thongkom S. Implementation of multi-body dynamics simulation for the conveyor chain drive system. *MATEC Web Conf.* 2017;95:06006. DOI: 10.1051/mateconf/20179506006.

16. Smirnov AS, Smolnikov BA. Resonance oscillations control of the non-linear mechanical systems based on the principles of biodynamics. *Mechanical Engineering and Engineering Education*. 2017;(4):11–19.
17. Lamb H. *Higher Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press; 1929. 292 p.
18. Verbin Y. Boundary conditions and modes of the vertically hanging chain. *Eur. J. Phys.* 2015;36: 015005. DOI: 10.1088/0143-0807/36/1/015005.
19. Bogolyubov NN, Mitropolskiy YuA. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. M: GIFML; 1958. 408 p. (in Russian).
20. Watson GN. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge: Cambridge University Press; 1944. 800 p.
21. Smirnov AS, Degilevich EA. *Oscillations of Chain Systems*. St. Petersburg: Polytech-Press; 2021. 246 p. (in Russian).
22. Formalskii AM. *Motion Control for Unstable Objects*. M.: Fizmatlit; 2012. 232 p. (in Russian).
23. Ganiev RF, Kononenko VO. *Vibrations of Solids*. M.: Nauka; 1976. 432 p. (in Russian).
24. McCreesh JP, Goodfellow TL, Seville AH. Vibrations of a hanging chain of discrete links. *Am. J. Phys.* 1975;43:646–648. DOI: 10.1119/1.10103.



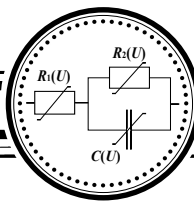
*Дегилевич Егор Алексеевич* — родился в Санкт-Петербурге (1998). Окончил с отличием Физико-механический институт Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого по направлению «Прикладная механика» (2022). В настоящее время обучается в аспирантуре Института проблем машиноведения РАН. Научные интересы — теоретическая механика, теория колебаний, динамика машин, математическое моделирование. Опубликовал более 10 научных статей и 1 книгу по указанным направлениям.

Россия, 199178 Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61  
 Институт проблем машиноведения Российской академии наук  
 E-mail: degilevichegor@gmail.com  
 ORCID: 0000-0003-0142-4561  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1076938



*Смирнов Алексей Сергеевич* — родился в Санкт-Петербурге (1994). Окончил с отличием Институт прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого по направлению «Прикладная механика» (2017). Кандидат физико-математических наук (2025, СПбГУ). В настоящее время работает в Высшей школе механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого в должности доцента и в лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения РАН в должности старшего научного сотрудника. Научные интересы — аналитическая механика, теория колебаний, динамика твердого тела, устойчивость равновесия и движения, оптимизация и управление в механике. Опубликовал более 120 научных статей и 3 книги по указанным направлениям.

Россия, 199178 Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61  
 Институт проблем машиноведения Российской академии наук  
 Россия, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29  
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
 E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com  
 ORCID: 0000-0002-6148-0322  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 947771



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3)

Научная статья  
УДК 532.516, 532.517, 517.928

DOI: 10.18500/0869-6632-003218  
EDN: XDAPZK

### О динамике гидромеханической системы с вязкой жидкостью, совершающей прямолинейное движение

*В. Л. Сенницкий*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: sennitskii@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.01.2026, принята к публикации 28.03.2026,

опубликована онлайн 2.04.2026, опубликована 29.05.2026

**Аннотация.** Целью работы является обнаружение и изучение особенностей динамики гидромеханической системы, реализующихся в присутствии периодических воздействий, не имеющих выделенного направления в пространстве, при совершении жидкой частью системы простейшего, прямолинейного движения. **Методы.** Используются аналитические методы исследования уравнений движения твердых тел и краевых задач для уравнения Навье–Стокса. **Результаты.** Поставлена и решена новая задача о движении гидромеханической системы при внешних нестационарных воздействиях. Система состоит из вязкой жидкости и трех твердых тел — стенки, пластины и проницаемой для жидкости мембраны. Стенка совершает заданное движение. Пластина и мембрана подвергаются внешним силовым воздействиям; движение данных тел подлежит определению. К присутствующим в постановке задачи существенным новым моментам относятся, в частности, возможность совершения жидкостью только прямолинейного движения, а также то, что движение мембраны не является заданным. **Заключение.** Полученные результаты могут использоваться в научном поиске подходов к управлению гидромеханическими системами.

**Ключевые слова:** вязкая жидкость, твердые тела, периодические по времени воздействия, выделенное направление в пространстве, эффекты среднего движения.

**Для цитирования:** Сенницкий В. Л. О динамике гидромеханической системы с вязкой жидкостью, совершающей прямолинейное движение // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 3. С. 453–462. DOI: 10.18500/0869-6632-003218. EDN: XDAPZK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## On the dynamics of a hydro-mechanical system with a viscous liquid fulfilling a straightforward motion

V. L. Sennitskii

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: sennitskii@yandex.ru

*Received 25.01.2026, accepted 28.03.2026, available online 2.04.2026, published 29.05.2026*

**Abstract.** The *purpose* of the work is the discovery and the study of peculiarities of the dynamics of a hydro-mechanical system under the presence of periodic influences possessing no predominant direction in space under the performance a straightforward motion by the liquid part of the system. *Methods.* The analytical investigational methods for the equations of solid bodies motion and boundary problems for Navier–Stokes equation are used. *Results.* A new problem on the hydro-mechanical system motion under external non-stationary influences is formulated and solved. The system consists of a viscous liquid and three solid bodies that are a wall, a plate and a membrane which is permeable for the liquid. The wall fulfils a prescribed motion. The plate and the membrane are free. Important new circumstances in the formulation of the problem in particular are the possibility for the liquid to realize only a straightforward motion and that the motion of the membrane is not prescribed. *Conclusion.* The obtained results can be used in a scientific search of ways to control hydro-mechanical systems.

**Keywords:** viscous liquid, solid bodies, periodic in time influences, predominant direction in space, effects of average motion.

**For citation:** Sennitskii VL. On the dynamics of a hydro-mechanical system with a viscous liquid fulfilling a straightforward motion. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(3):453–462. DOI: 10.18500/0869-6632-003218

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

В настоящей работе продолжено изучение динамики гидромеханических систем при периодических по времени воздействиях, начатое в работах [1–5] (см. также [6, 7]). Результаты исследований в данном направлении обладают фундаментальным и прикладным содержанием. Современное состояние исследований адекватно характеризуется, в частности, работами [8–11].

Динамика гидромеханической системы в общем случае является нелинейной. Задачи с вязкой жидкостью представляют собой задачи повышенной сложности, которая резко возрастает при увеличении числа свободных частей гидромеханической системы (частей системы, движение которых не задано, подлежит определению).

В данной работе рассмотрена задача о движении системы, состоящей из вязкой жидкости и трех твердых тел, два из которых являются свободными. Обнаружены новые особенности динамики свободных частей гидромеханической системы — жидкости и свободных твердых тел.

### 1. Постановка задачи

Имеется гидромеханическая система, движение которой подлежит определению. Система состоит из вязкой несжимаемой жидкости и трех абсолютно твердых тел — стенки  $\eta$ , однородной пластины  $\xi$  и проницаемой для жидкости однородной мембраны  $\chi$  (рис. 1). Движение гидромеханической системы рассматривается относительно инерциальной прямоугольной системы координат  $X, Y, Z$ . Стенка  $\eta$  ограничена плоскостью  $Y = 0$ . Пластина  $\xi$  ограничена плоскостями  $Y = L$  и  $Y = L'$  ( $L > 0$ ,  $L' > L$  — постоянные). Мембрана  $\chi$  ограничена плоскостями  $Y = H$  и  $Y = H'$ . Стенка  $\eta$  совершает заданное поступательное движение вдоль оси  $X$ . Мембрана  $\chi$  совершает заданное поступательное движение вдоль оси  $Y$ . Координаты  $H$ ,  $H'$  и скорость  $U_{\eta e_1}$  стенки  $\eta$

периодически с периодом  $T$  изменяются со временем  $t$  ( $0 < H < H' < L$ ;  $H' - H = \Delta H$  – постоянная;  $H = \bar{H} + \tilde{H} \sin(2\pi t/T)$ ;  $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0\}$ ;  $U_\eta = \tilde{U}_\eta \sin(2\pi t/T + \varphi)$ ;  $\tilde{H} \geq 0$ ,  $\bar{H} > \tilde{H}$ ,  $\tilde{U}_\eta \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  – параметры). Толщина  $\Delta H$  мембраны  $\chi$  пренебрежимо мала по сравнению с расстояниями  $H$  и  $L - H'$ . Ввиду этого мембрана  $\chi$  рассматривается как материальная плоскость  $\chi: X = H$ . Движение стенки  $\eta$  вдоль оси  $X$  и движение мембраны  $\chi$  вдоль оси  $Y$  характеризуются отсутствием выделенного направления в пространстве. Жидкость заполняет области  $\Omega_\eta: 0 < Y < H$ ,  $\Omega_\xi: H < Y < L$  ( $-\infty < X < \infty$ ,  $-\infty < Z < \infty$ ).

Пластина  $\xi$  и мембрана  $\chi$  подвергаются (или не подвергаются) заданным внешним периодическим воздействиям, не имеющим выделенного направления в пространстве. Пластина, жидкость и мембрана совершают движение вдоль оси  $X$ . Пластина  $\xi$  и жидкость движутся со скоростями соответственно  $U_\xi \mathbf{e}_1$  и  $V \mathbf{e}_1$ ; полная скорость мембраны  $\chi$  составляет  $W \mathbf{e}_1 + (dH/dt) \mathbf{e}_2$  ( $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0\}$ ). Скорости  $U_\xi$ ,  $V$ ,  $W$  подлежат определению. В отсутствие движения стенки  $\eta$ , пластины  $\xi$  и движения мембраны  $\chi$  вдоль оси  $X$  жидкость в областях  $\Omega_\eta$ ,  $\Omega_\xi$  покоится.

Требуется определить периодическое по времени движение гидромеханической системы (свободных частей системы – жидкости, пластины  $\xi$  и мембраны  $\chi$ ).

Пусть  $\tau = t/T$ ;  $y = Y/L$ ;  $h = H/L$ ;  $\bar{h} = \bar{H}/L$ ;  $\varepsilon = \tilde{H}/L$ ;  $u_\eta = TU_\eta/L = \tilde{u}_\eta \sin(2\pi\tau + \varphi)$ ;  $u_\xi = TU_\xi/L$ ;  $v = TV/L = v(\tau, y)$ ;  $w = TW/L$ ;  $\rho$  и  $\nu$  – соответственно плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости;  $P$  – давление в жидкости;  $p = T^2 P/(\rho L^2) = p(\tau, y)$ ;  $Re = L^2/(\nu T)$  – число Рейнольдса;  $\xi^*$  – твердое тело, часть пластины  $\xi$ , которая определяется соотношениями:  $X^* < X < X^* + D_X$ ,  $L < Y < L'$ ,  $Z^* < Z < Z^* + D_Z$  ( $X^*$ ,  $Z^*$ ,  $D_X > 0$ ,  $D_Z > 0$  – постоянные);  $m_\xi$  – масса тела  $\xi^*$ ;  $\chi^*$  – твердое тело, часть мембраны  $\chi$ , которая определяется соотношениями:  $X^* < X < X^* + D_X$ ,  $Y = H$ ,  $Z^* < Z < Z^* + D_Z$ ;  $m_\chi$  – масса тела  $\chi^*$ ;  $F_\xi \mathbf{e}_1$  – внешняя сила, действующая на тело  $\xi^*$ ;  $f_\xi = T^2 F_\xi/(m_\xi L) = (\hat{f}_\xi/Re) \sin(2\pi\tau + \psi_\xi)$  ( $\hat{f}_\xi \geq 0$ ,  $0 \leq \psi_\xi < 2\pi$  – параметры);  $F_\chi \mathbf{e}_1$  – внешняя сила, действующая на тело  $\chi^*$ ;  $f_\chi = T^2 F_\chi/(m_\chi L) = (\hat{f}_\chi/Re) \sin(2\pi\tau + \psi_\chi)$  ( $\hat{f}_\chi \geq 0$ ,  $0 \leq \psi_\chi < 2\pi$  – параметры);  $\kappa_\xi = \rho D_X D_Z L/m_\xi$ ;  $G_\xi \mathbf{e}_1$  – сила, действующая на тело  $\xi^*$  со стороны жидкости;  $g_\xi = T^2 G_\xi/(m_\xi L) = -(\kappa_\xi/Re)(\partial v/\partial y)|_{y=1}$ ;  $\kappa_\chi = \rho D_X D_Z L/m_\chi$ ;  $G_\chi \mathbf{e}_1$  – сила, действующая на тело  $\chi^*$  со стороны жидкости;  $g_\chi = T^2 G_\chi/(m_\chi L) = (\kappa_\chi/Re)[(\partial v/\partial y)|_{y=h+0} - (\partial v/\partial y)|_{y=h-0}]$ .

Задачу о движении гидромеханической системы составляют уравнения движения тел  $\xi$ ,  $\chi$  (тел  $\xi^*$ ,  $\chi^*$ ), уравнение Навье–Стокса и условия на границах областей  $\Omega_\eta$ ,  $\Omega_\xi$ :

$$\frac{du_\xi}{d\tau} = f_\xi + g_\xi, \quad (1)$$

$$\frac{dw}{d\tau} = f_\chi + g_\chi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad \text{в } \Omega_\eta, \Omega_\xi, \quad (3)$$

$$v = u_\eta \quad \text{при } y = 0, \quad (4)$$

$$v = w \quad \text{при } y = h - 0, \quad y = h + 0, \quad (5)$$

$$v = u_\xi \quad \text{при } y = 1. \quad (6)$$

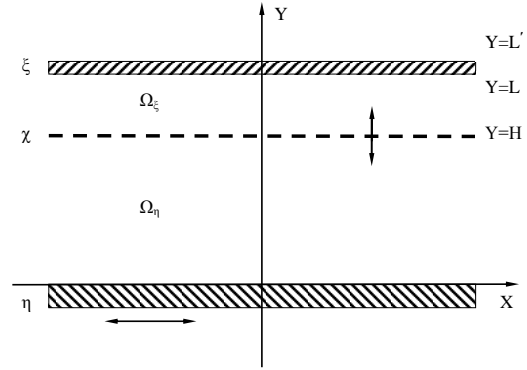


Рис. 1. Гидромеханическая система

Fig. 1. The hydro-mechanical system

## 2. Решение задачи

Из (1)–(6) следует

$$p = c_\eta \quad \text{в} \quad \Omega_\eta, \quad p = c_\xi \quad \text{в} \quad \Omega_\xi \quad (7)$$

( $c_\eta, c_\xi$  – функции  $\tau$ );

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{в} \quad \Omega_\eta, \quad (8)$$

$$v = u_\eta \quad \text{при} \quad y = 0, \quad v = w \quad \text{при} \quad y = h - 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{в} \quad \Omega_\xi, \quad (10)$$

$$v = w \quad \text{при} \quad y = h + 0, \quad v = u_\xi \quad \text{при} \quad y = 1, \quad (11)$$

$$\frac{du_\xi}{d\tau} = f_\xi - \frac{\kappa_\xi}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad (12)$$

$$\frac{dw}{d\tau} = f_\chi + \frac{\kappa_\chi}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=h+0} - \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=h-0} \right). \quad (13)$$

Будем рассматривать задачу (8)–(13) при малых по сравнению с единицей значениях  $\varepsilon$ . Применим метод разложения по степеням малого параметра [12, 13]. Предположим, что

$$v \sim v_0 + \varepsilon v_1, \quad u_\xi \sim u_0 + \varepsilon u_1, \quad w \sim w_0 + \varepsilon w_1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14)$$

Согласно (8)–(14) в  $\varepsilon^N$ -приближении ( $N = 0, 1$ ) имеем

$$\frac{\partial v_N}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_N}{\partial y^2} \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}_\eta, \quad (15)$$

$$v_N = (1 - N)u_\eta \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (16)$$

$$v_N = (1 - N)w_0 + N \left[ w_1 - (\sin 2\pi\tau) \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] \quad \text{при} \quad y = \bar{h} - 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_N}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_N}{\partial y^2} \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}_\xi, \quad (18)$$

$$v_N = (1 - N)w_0 + N \left[ w_1 - (\sin 2\pi\tau) \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] \quad \text{при} \quad y = \bar{h} + 0, \quad (19)$$

$$v_N = u_N \quad \text{при} \quad y = 1, \quad (20)$$

$$\frac{du_N}{d\tau} = (1 - N) \left[ f_\xi - \frac{\kappa_\xi}{Re} \frac{\partial v_0}{\partial y} \Big|_{y=1} \right] - N \frac{\kappa_\xi}{Re} \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw_N}{d\tau} = & (1 - N) \left[ f_\chi + \frac{\kappa_\chi}{Re} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}+0} - \frac{\partial v_0}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}-0} \right) \right] + \\ & + N \frac{\kappa_\chi}{Re} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}+0} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}-0} + (\sin 2\pi\tau) \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \Big|_{y=\bar{h}+0} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \Big|_{y=\bar{h}-0} \right) \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{\Omega}_\eta, \bar{\Omega}_\xi$  – области соответственно  $0 < y < \bar{h}, \bar{h} < y < 1$  ( $-\infty < X < \infty, -\infty < Z < \infty$ ).

Пусть  $N = 0$ . Сделаем в (15)–(22) подстановку

$$v_0 = \text{Real}(\tilde{v}_0 e^{2\pi i\tau}), \quad u_0 = \text{Real}(\tilde{u}_0 e^{2\pi i\tau}), \quad w_0 = \text{Real}(\tilde{w}_0 e^{2\pi i\tau}), \quad (23)$$

где  $\tilde{v}_0$  – функция  $y$ ;  $\tilde{u}_0$ ,  $\tilde{w}_0$  – постоянные. Используя полученные в результате этого соотношения, определим задачу

$$\frac{d^2\tilde{v}_0}{dy^2} = q^2\tilde{v}_0 \quad \text{для } 0 < y < \bar{h}, \quad (24)$$

$$\tilde{v}_0 = -i\tilde{u}_\eta e^{i\varphi} \quad \text{при } y = 0, \quad (25)$$

$$\tilde{v}_0 = \tilde{w}_0 \quad \text{при } y = \bar{h} - 0, \quad (26)$$

$$\frac{d^2\tilde{v}_0}{dy^2} = q^2\tilde{v}_0 \quad \text{для } \bar{h} < y < 1, \quad (27)$$

$$\tilde{v}_0 = \tilde{w}_0 \quad \text{при } y = \bar{h} + 0, \quad (28)$$

$$\tilde{v}_0 = \tilde{u}_0 \quad \text{при } y = 1, \quad (29)$$

$$q^2\tilde{u}_0 = -i\hat{f}_\xi e^{i\psi_\xi} - \kappa_\xi \frac{d\tilde{v}_0}{dy} \Big|_{y=1}, \quad (30)$$

$$q^2\tilde{w}_0 = -i\hat{f}_\chi e^{i\psi_\chi} + \kappa_\chi \left( \frac{d\tilde{v}_0}{dy} \Big|_{y=\bar{h}+0} - \frac{d\tilde{v}_0}{dy} \Big|_{y=\bar{h}-0} \right). \quad (31)$$

Здесь  $q = (1+i)\sqrt{\pi Re}$ .

Решение уравнения (24), удовлетворяющее условиям (25), (26), имеет вид

$$\tilde{v}_0 = \frac{\tilde{w}_0 \operatorname{sh} qy - i\tilde{u}_\eta e^{i\varphi} \operatorname{sh} q(\bar{h} - y)}{\operatorname{sh} q\bar{h}}. \quad (32)$$

Решение уравнения (27), удовлетворяющее условиям (28), (29), имеет вид

$$\tilde{v}_0 = \frac{\tilde{u}_0 \operatorname{sh} q(y - \bar{h}) + \tilde{w}_0 \operatorname{sh} q(1 - y)}{\operatorname{sh} q(1 - \bar{h})}. \quad (33)$$

Используя (30)–(33), получим

$$\tilde{u}_0 = A_u (B_u \tilde{w}_0 + D(\hat{f}_\xi/Re)e^{i\psi_\xi}), \quad \tilde{w}_0 = A_w (B_w \tilde{u}_0 + C\tilde{u}_\eta e^{i\varphi} + D(\hat{f}_\chi/Re)e^{i\psi_\chi}), \quad (34)$$

где

$$A_u = \frac{\operatorname{sh} q(1 - \bar{h})}{\kappa_\xi \operatorname{ch} q(1 - \bar{h}) + q \operatorname{sh} q(1 - \bar{h})}, \quad B_u = \frac{\kappa_\xi}{\operatorname{sh} q(1 - \bar{h})},$$

$$A_w = \frac{\operatorname{sh} q\bar{h} \operatorname{sh} q(1 - \bar{h})}{\kappa_\chi \operatorname{sh} q + q \operatorname{sh} q\bar{h} \operatorname{sh} q(1 - \bar{h})}, \quad B_w = \frac{\kappa_\chi}{\operatorname{sh} q(1 - \bar{h})}, \quad C = -\frac{i\kappa_\chi}{\operatorname{sh} q\bar{h}}, \quad D = -\frac{q}{2\pi}.$$

Из (34) следует

$$\tilde{u}_0 = \alpha_u (\hat{f}_\xi/Re)e^{i\psi_\xi} + \beta_u (\hat{f}_\chi/Re)e^{i\psi_\chi} + \gamma_u \tilde{u}_\eta e^{i\varphi},$$

$$\tilde{w}_0 = \alpha_w (\hat{f}_\xi/Re)e^{i\psi_\xi} + \beta_w (\hat{f}_\chi/Re)e^{i\psi_\chi} + \gamma_w \tilde{u}_\eta e^{i\varphi}. \quad (35)$$

Здесь

$$\alpha_u = A_u DQ; \quad \beta_u = A_u B_u A_w DQ; \quad \gamma_u = A_u B_u A_w CQ;$$

$$\alpha_w = A_u A_w B_w DQ; \quad \beta_w = A_w DQ; \quad \gamma_w = A_w CQ$$

( $Q = 1/(1 - A_u B_u A_w B_w)$ ).

Пусть  $N = 1$ . Согласно (22), (32), (33) имеем

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \frac{\kappa_\chi}{Re} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}+0} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}-0} \right). \quad (36)$$

Представим условия (17), (19) в виде

$$v_1 = w_1 + \frac{1}{2} \text{Imag} \left[ \frac{d\tilde{v}_0}{dy} \left( 1 - e^{4\pi i \tau} \right) \right] \quad \text{при } y = \bar{h} - 0, \quad y = \bar{h} + 0. \quad (37)$$

Произведем усреднение (15), (16), (18), (20), (21), (36), (37) по безразмерному времени  $\tau$ . Представим полученные в результате этого уравнения и условия в виде

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} = 0 \quad \text{в } \bar{\Omega}_\eta, \quad (38)$$

$$\bar{v} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (39)$$

$$\bar{v} = \bar{w} + \frac{1}{2} \text{Imag} \left( \frac{d\tilde{v}_0}{dy} \right) \quad \text{при } y = \bar{h} - 0, \quad (40)$$

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} = 0 \quad \text{в } \bar{\Omega}_\xi, \quad (41)$$

$$\bar{v} = \bar{u} \quad \text{при } y = 1, \quad (42)$$

$$\bar{v} = \bar{w} + \frac{1}{2} \text{Imag} \left( \frac{d\tilde{v}_0}{dy} \right) \quad \text{при } y = \bar{h} + 0, \quad (43)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dy} \Big|_{y=1} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dy} \Big|_{y=\bar{h}-0} = \frac{d\bar{v}}{dy} \Big|_{y=\bar{h}+0}. \quad (45)$$

Здесь  $\bar{v} = \langle v_1 \rangle$ ;  $\bar{u} = \langle u_1 \rangle$ ;  $\bar{w} = \langle w_1 \rangle$  ( $\langle \dots \rangle = \int_\tau^{\tau+1} \dots d\tau'$  — оператор усреднения по  $\tau$ ).

Задача (15)–(22) имеет решение

$$\begin{aligned} v_1 &= \bar{v} + \tilde{v} = \bar{v} + \text{Real}(\tilde{v}_1 e^{4\pi i \tau}), \\ u_1 &= \bar{u} + \tilde{u} = \bar{u} + \text{Real}(\tilde{u}_1 e^{4\pi i \tau}), \quad w_1 = \bar{w} + \tilde{w} = \bar{w} + \text{Real}(\tilde{w}_1 e^{4\pi i \tau}), \end{aligned} \quad (46)$$

где  $\tilde{v}_1$  — функция  $y$ ;  $\tilde{u}_1, \tilde{w}_1$  — постоянные;  $\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{w}$  — решение задачи

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \quad \text{в } \Omega_\eta, \quad \Omega_\xi, \quad (47)$$

$$\tilde{v} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (48)$$

$$\tilde{v} = \tilde{w} - \frac{1}{2} \text{Imag} \left( \frac{d\tilde{v}_0}{dy} e^{4\pi i \tau} \right) \quad \text{при } y = \bar{h} - 0, \quad y = \bar{h} + 0, \quad (49)$$

$$\tilde{v} = \tilde{u} \quad \text{при } y = 1, \quad (50)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = -\frac{\kappa_\xi}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \Big|_{y=1}, \quad (51)$$

$$\frac{d\tilde{w}}{d\tau} = \frac{\kappa_\chi}{Re} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}+0} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \Big|_{y=\bar{h}-0} \right). \quad (52)$$

Отметим, что решение  $\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{w}$  задачи (47)–(52) в отношении дальнейшего рассмотрения никакой сколь-нибудь существенной значимостью не обладает.

Из (38)–(40) следует

$$\bar{v} = A_\eta y \quad \text{для} \quad 0 \leq y \leq \bar{h} - 0, \quad (53)$$

где

$$A_\eta = \frac{1}{\bar{h}}(\bar{w} + D_-) \quad \left( D_- = \frac{1}{2} \text{Imag} \left( \frac{d\tilde{v}_0}{dy} \Big|_{y=\bar{h}-0} \right) \right).$$

Из (41)–(43) следует

$$\bar{v} = A_\xi y + B \quad \text{для} \quad \bar{h} + 0 \leq y \leq 1, \quad (54)$$

где

$$A_\xi = \frac{1}{1 - \bar{h}}(\bar{u} - \bar{w} - D_+), \quad B = \frac{1}{1 - \bar{h}}(-\bar{h}\bar{u} + \bar{w} + D_+) \quad \left( D_+ = \frac{1}{2} \text{Imag} \left( \frac{d\tilde{v}_0}{dy} \Big|_{y=\bar{h}+0} \right) \right).$$

Используя (44), (45), (53), (54), получим

$$\bar{v} = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq y \leq \bar{h} - 0, \quad (55)$$

$$\bar{v} = \bar{u} \quad \text{для} \quad \bar{h} + 0 \leq y \leq 1, \quad (56)$$

$$\bar{u} = D_+ - D_-, \quad (57)$$

$$\bar{w} = -D_-. \quad (58)$$

Формулами

$$v = v_0 + \varepsilon v_1, \quad u_\xi = u_0 + \varepsilon u_1, \quad w = w_0 + \varepsilon w_1 \quad (59)$$

и (7), (23), (32), (33), (35), (46), (55)–(58) определяется приближенное решение задачи (1)–(6). Данное решение, в частности, свидетельствует о наличии эффекта, состоящего в том, что (на фоне колебаний) свободные части гидромеханической системы — жидкость, пластина  $\xi$  и мембрана  $\chi$  — совершают стационарное движение.

### 3. Среднее движение системы

Рассмотрим вопрос о среднем по времени движении жидкости, пластины  $\xi$  и мембраны  $\chi$ . Используя (23), (32), (33), (35), (46), (55)–(59), найдем

$$\langle \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}_\eta, \quad (60)$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \varepsilon(D_+ - D_-)\mathbf{e}_1 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}_\xi, \quad (61)$$

$$\langle u_\xi \rangle = \varepsilon(D_+ - D_-), \quad \langle w \rangle = -\varepsilon D_-. \quad (62)$$

Соотношения (60)–(62) выполняются для любых значений числа Рейнольдса  $Re > 0$ .

Отметим, что в среднем по времени жидкость в области  $\bar{\Omega}_\eta$  покоится, скорость жидкости в области  $\bar{\Omega}_\xi$  совпадает со скоростью пластины — вне зависимости от скорости стенки и внешних воздействий на свободные твердые части гидромеханической системы.

Пусть значения  $Re$  малы по сравнению с единицей. Используя (61), (62), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \left( \varepsilon \frac{\hat{f}_\chi}{2\kappa_\chi} \cos \psi_\chi \right) \mathbf{e}_1 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}_\xi \quad \text{при} \quad Re \rightarrow 0, \quad (63)$$

$$\langle u_\xi \rangle \sim \varepsilon \frac{\hat{f}_\chi}{2\kappa_\chi} \cos \psi_\chi, \quad \langle w \rangle \sim \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\hat{f}_\xi}{\kappa_\xi} \cos \psi_\xi + \frac{\hat{f}_\chi}{\kappa_\chi} \cos \psi_\chi \right) \quad \text{при} \quad Re \rightarrow 0. \quad (64)$$

Формулы (63), (64) свидетельствуют о том, что при малых значениях  $Re$  среднее по времени движение рассматриваемых свободных частей гидромеханической системы (жидкости в области  $\bar{\Omega}_\xi$ , пластины  $\xi$ , мембраны  $\chi$ ) не зависит от заданного движения стенки  $\eta$ ; наличие или отсутствие среднего движения данных свободных частей системы определяется только внешними воздействиями на свободные твердые части системы («управляющими параметрами»  $\hat{f}_\xi, \psi_\xi, \hat{f}_\chi, \psi_\chi$ ).

Согласно (63), (64) на фоне колебаний имеет место, в частности, следующее.

1. Если  $\hat{f}_\xi \cos \psi_\xi = 0, \hat{f}_\chi \cos \psi_\chi = 0$ , то гидромеханическая система находится в состоянии покоя.
2. Если  $\hat{f}_\xi \cos \psi_\xi = 0, \hat{f}_\chi \cos \psi_\chi \neq 0$ , то жидкость в области  $\bar{\Omega}_\xi$ , пластина  $\xi$  и мембрана  $\chi$  совершают движение с одной и той же скоростью — «как одно целое»; при  $\cos \psi_\chi > 0$  данное движение происходит в направлении, совпадающем с направлением оси  $X$ ; при  $\cos \psi_\chi < 0$  — в направлении, противоположном направлению оси  $X$ .
3. Если  $\hat{f}_\xi \cos \psi_\xi \neq 0, \hat{f}_\chi \cos \psi_\chi = 0$ , то жидкость в области  $\bar{\Omega}_\xi$  и пластина  $\xi$  покоятся, мембрана  $\chi$  движется: при  $\cos \psi_\xi > 0$  в направлении, совпадающем с направлением оси  $X$ , при  $\cos \psi_\xi < 0$  в направлении, противоположном направлению оси  $X$ .
4. Если  $\hat{f}_\xi \cos \psi_\xi \neq 0, \hat{f}_\chi \cos \psi_\chi \neq 0$ , то:
  - а) при  $\cos \psi_\xi > 0, \cos \psi_\chi > 0$  жидкость в области  $\bar{\Omega}_\xi$ , пластина  $\xi$  и мембрана  $\chi$  совершают движение в направлении, совпадающем с направлением оси  $X$ ; мембрана обгоняет жидкость и пластину;
  - б) при  $\cos \psi_\xi < 0, \cos \psi_\chi < 0$  жидкость в области  $\bar{\Omega}_\xi$ , пластина  $\xi$  и мембрана  $\chi$  совершают движение в направлении, противоположном направлению оси  $X$ ; мембрана обгоняет жидкость и пластину;
  - в) при  $\cos \psi_\xi > 0, (\hat{f}_\xi/\kappa_\xi) \cos \psi_\xi + (\hat{f}_\chi/\kappa_\chi) \cos \psi_\chi = 0$  жидкость в области  $\bar{\Omega}_\xi$  и пластина  $\xi$  совершают движение в направлении, противоположном направлению оси  $X$ , мембрана  $\chi$  покоится;
  - г) при  $\cos \psi_\xi < 0, (\hat{f}_\xi/\kappa_\xi) \cos \psi_\xi + (\hat{f}_\chi/\kappa_\chi) \cos \psi_\chi = 0$  жидкость в области  $\bar{\Omega}_\xi$  и пластина  $\xi$  совершают движение в направлении, совпадающем с направлением оси  $X$ , мембрана  $\chi$  покоится;
  - д) при  $\cos \psi_\xi > (\kappa_\xi/\kappa_\chi)(\hat{f}_\chi/\hat{f}_\xi), \cos \psi_\chi < 0$  жидкость в области  $\bar{\Omega}_\xi$  и пластина  $\xi$  совершают движение в направлении, противоположном направлению оси  $X$ , мембрана  $\chi$  движется в направлении, совпадающем с направлением оси  $X$ ;
  - е) при  $\cos \psi_\xi < 0, \cos \psi_\chi > (\kappa_\chi/\kappa_\xi)(\hat{f}_\xi/\hat{f}_\chi)$  жидкость в области  $\bar{\Omega}_\xi$ , пластина  $\xi$  и мембрана  $\chi$  совершают движение в направлении, совпадающем с направлением оси  $X$ , мембрана отстает от жидкости и пластины.

Найденным решением задачи (1)–(6) и формулами (60)–(64) определяется многообразие особенностей динамики представленной гидромеханической системы с вязкой жидкостью, совершающей прямолинейное движение.

В числе нетривиальных моментов, касающихся рассмотренного движения системы, заслуживает быть выделенным эффект, способный казаться «абсолютно алогичным», состоящий в том, что (согласно (64)) движение пластины не зависит от оказываемого на нее внешнего силового воздействия.

### Заключение

В данной работе поставлена и решена новая задача о движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью при периодических по времени воздействиях. В рассмотренной задаче жидкость способна совершать только простейшее, прямолинейное движение. Тем не менее динамика

системы характеризуется наличием ряда существенных особенностей, таких как имеющие место на фоне колебаний неподвижность жидкости в области  $\bar{\Omega}_\eta$ , движение жидкости в области  $\bar{\Omega}_\xi$  и (свободной) пластины  $\xi$  с одной и той же скоростью, а также других (обнаруженных в работе) эффектов, представляющих самостоятельный интерес и демонстрирующих управляющие возможности периодических воздействий, не имеющих выделенного направления в пространстве.

Полученные результаты могут использоваться, в частности, в научном поиске методов организации заданной динамики гидромеханических систем.

### Список литературы

1. Челомей В. Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Доклады АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
2. Сенницкий В. Л. О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 1985. Т. 26, № 5. С. 19–23.
3. Сенницкий В. Л. Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // Прикл. мех. техн. физ. 1986. Т. 27, № 4. С. 31–36.
4. Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л. О движении тела в вибрирующей жидкости // Доклады АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
5. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. О движении твердого тела в вибрирующей жидкости // В кн.: Конвективные течения. Пермь: Издательство Пермского педагогического института, 1987. С. 61–71.
6. Сенницкий В. Л. Движение включений в колеблющейся жидкости // Сибирский физический журнал. 1995. № 4. С. 18–26.
7. Сенницкий В. Л. Парадоксальное движение жидкости // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2017. № 8. С. 28–33. DOI: 10.17513/mjprfi.11753.
8. Власова О. А., Козлов В. Г., Козлов Н. В. Динамика тяжелого тела, находящегося во вращающейся кювете с жидкостью, при модуляции скорости вращения // Прикл. мех. техн. физ. 2018. Т. 59, № 2. С. 39–49. DOI: 10.15372/PMTF20180105.
9. Карпунин И. Э., Козлов В. Г. Осцилляционная динамика границы раздела жидкостей в радиальной ячейке Хеле–Шоу // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 3. С. 62–73.
10. Сенницкий В. Л. Эффекты вращательного движения жидкости между криволинейными стенками // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 219–232. DOI: 10.18500/0869-6632-003155.
11. Сенницкий В. Л. О структуре течения вязкой жидкости при периодических воздействиях, не имеющих выделенного направления в пространстве // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 531–544. DOI: 10.18500/0869-6632-003163.
12. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 352 с.
13. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М: ГИФ-МЛ, 1958. 408 с.

### References

1. Chelomei VN. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. Sov. Phys. Doklady. 1983;270(1): 62–67 (in Russian).
2. Sennitskii VL. Motion of a circular cylinder in a vibrating liquid. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1985;26(5):620–623. DOI: 10.1007/BF00915307.
3. Sennitskii VL. Motion of a sphere in fluid caused by vibrations of another sphere. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1986;27:501–505. DOI: 10.1007/BF00910190.

4. Lugovtsov BA, Sennitskii VL. Motion of a body in a vibrating liquid. *Sov. Phys. Doklady*. 1986;289(2):314–317 (in Russian).
5. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Cherepanov AA. On the motion of a solid body in a vibrating fluid. In: *Convective Flows*. Perm: Perm. Ped. Institute Publishing; 1987. P. 61–71 (in Russian).
6. Sennitskii VL. The motion of inclusions in an oscillating liquid. *Siberian Physical Journal*. 1995;(4):18–26 (in Russian).
7. Sennitskii VL. Paradoxical motion of a liquid. *International Journal of Applied and Fundamental Research*. 2017;(8):28–33 (in Russian). DOI: 10.17513/mjpf.11753.
8. Vlasova OA, Kozlov VG, Kozlov NV. Lift force acting on a heavy solid in a rotating liquid-filled cavity with a time-varying rotation rate. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2018;59:219–228. DOI: 10.1134/S0021894418020050.
9. Karpunin IE, Kozlov VG. Oscillational dynamics of the separation boundary of liquids in a HeleShaw radial cell. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 2023;64(3):62–73. DOI: 10.15372/PMTF202215190 (in Russian).
10. Sennitskii VL. Effects of a rotational motion of a liquid between curvilinear walls. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(2):219–232. DOI: 10.18500/0869-6632-003155.
11. Sennitskii VL. On the structure of a viscous liquid flow under periodic influences which have no predominant direction in space. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):531–544. DOI: 10.18500/0869-6632-003163.
12. Krilov NM, Bogolyubov NN. *Introduction in Non-Linear Mechanics*. Moscow-Ijevsk: NITs RKhD; 2004. 352 p. (in Russian).
13. Bogolyubov NN, Mitropolskii YA. *Asimptotic methods in the theory of non-linear oscillations*. M.: GIF-ML, 1958. 408 p. (in Russian).



*Сенницкий Владимир Леонидович* — родился в 1950 году. Окончил физический факультет Новосибирского государственного университета (НГУ, 1972) и аспирантуру НГУ (1975). С 1975 года работает в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН, в настоящее время — в должности старшего научного сотрудника. Доктор физико-математических наук (1995). Имеет ученые звания старшего научного сотрудника (механика жидкости, газа и плазмы, 1992) и доцента (общая физика, 1994). Награжден дипломом Министерства образования и науки Российской Федерации «За научное руководство студенческой работой, отмеченной медалью «За лучшую научную студенческую работу» по итогам открытого конкурса на лучшую работу студентов по естественным, техническим и гуманитарным наукам в вузах Российской Федерации» (2009). Область научных интересов: самодвижение тел в жидкости; нетривиальная динамика гидромеханических систем.

Россия, 630090 Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15  
 Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН  
 E-mail: sennitskii@yandex.ru  
 ORCID: 0009-0006-5131-2858  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 2024



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003217  
EDN: WSMBBS

## Нахождение связей трех взаимодействующих биологических осцилляторов методом моделирования фазовой динамики

О. Е. Дик

Институт физиологии им. И. П. Павлова РАН, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: [✉ dickviola@gmail.com](mailto:dickviola@gmail.com)

Поступила в редакцию 17.02.2026, принята к публикации 28.03.2026,  
опубликована онлайн 2.04.2026, опубликована 29.05.2026

**Аннотация.** Цель настоящей работы — выявление связей трех взаимодействующих биологических осцилляторов с помощью метода моделирования фазовой динамики и определение зависимости влияния патологического состояния на конфигурации однонаправленных тройных связей этих систем. **Методы.** Для решения задачи выявления взаимосвязей применен метод моделирования фазовой динамики слабосвязанных систем. В качестве характеристик взаимосвязи между системами использованы оценки матрицы связности трехосцилляторной сети. **Результаты.** Проведена проверка правильности выявления связей для модели трёх хаотических осцилляторов Ресслера с известными направленными связями и выявлена возможность появления дополнительного влияния одного осциллятора на другой или совместного влияния двух осцилляторов на третий при увеличении силы связи. Для экспериментальных временных рядов, соответствующих флуктуациям дыхательного ритма, кривым variability артериального давления и variability интервалов нейрональной активности продолговатого мозга, выявлено влияние патологического состояния на появление дополнительных связей в тройных взаимодействиях осцилляторов нервной, дыхательной и сердечно-сосудистой систем. **Заключение.** Применение метода моделирования фазовой динамики для оценки характеристик взаимосвязи между тремя взаимодействующими биологическими осцилляторами показало важность влияния физиологического состояния на оценку преимущественного влияния одного осциллятора на другой.

**Ключевые слова:** фазовая динамика, три связанные системы, связность, биологические осцилляторы.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке государственного финансирования, выделенного Институту физиологии им. И. П. Павлова РАН (№ 1021062411784-3-3.1.8).

**Для цитирования:** Дик О. Е. Нахождение связей трех взаимодействующих биологических осцилляторов методом моделирования фазовой динамики // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 3. С. 463–480. DOI: 10.18500/0869-6632-003217. EDN: WSMBBS

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Finding connections between three interacting biological oscillators using phase dynamics modeling

O. E. Dick

Pavlov Institute of Physiology of Russian Academy of Science, St. Petersburg, Russia  
E-mail: [✉dickviola@gmail.com](mailto:dickviola@gmail.com)

Received 17.02.2026, accepted 28.03.2026, available online 2.04.2026, published 29.05.2026

**Abstract.** The *purpose* of this work was to identify couplings between three interacting biological oscillators using phase dynamics modeling and to determine the influence of a pathological condition on the configuration of unidirectional triplewise couplings in these systems. *Methods.* To identify these couplings, we used phase dynamics modeling for weakly coupled systems. Estimates of the connectivity matrix of the three-oscillator network were used to characterize the interconnections between the systems. *Results.* We verified the accuracy of identifying couplings for a model of three chaotic Rössler oscillators with known directional couplings. We also identified the possibility of additional influence of one oscillator on another, or the combined influence of two oscillators on a third, with increasing coupling strength. For experimental time series corresponding to respiratory rate fluctuations, blood pressure variability curves, and variability of neuronal activity intervals in the medulla oblongata, we identified the influence of a pathological condition on the emergence of additional couplings in triple interactions between oscillators in the nervous, respiratory, and cardiovascular systems. *Conclusion.* The application of phase dynamics modeling to assess the characteristics of the coupling between three interacting biological oscillators demonstrated the importance of physiological state in assessing the predominant influence of one oscillator over another.

**Keywords:** phase dynamics, three coupled systems, couplings, biological oscillators.

**Acknowledgements.** This work was supported by state funding allocated to the Pavlov Institute of Physiology of the Russian Academy of Sciences (No. 1021062411784-3-3.1.8).

**For citation:** Dick OE. Finding connections between three interacting biological oscillators using phase dynamics modeling. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(3):463–480. DOI: 10.18500/0869-6632-003217

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Выявление управляющих функциональных взаимодействий между системами, имеющими сложную топологию связности, представляет собой актуальную задачу, решение которой важно для определения механизмов функционирования анализируемых систем. Эти задачи широко применяются для выявления климатологических взаимосвязей [1, 2], для исследования процессов передачи информации в нейронных сетях различных областей мозга [3–5], для анализа взаимосвязей сигналов сердечно-сосудистой и дыхательной систем [6, 7], а также для анализа взаимодействия сердечно-сосудистой, дыхательной и нервной систем [8, 9].

Изучаемые парные взаимодействия между двумя системами могут быть функционально ненаправленными и синхронными, а могут быть направленными, например, двунаправленными (когда обе системы влияют друг на друга) или однонаправленными (когда одна система влияет на другую). В этом случае применяются методы анализа двумерных временных рядов, генерируемые анализируемыми системами, в частности, методы, основанные на реконструкции фазовой динамики. Однако в реальных приложениях необходимо применять методы, рассчитанные на многомерный анализ временных рядов, для определения связности большего количества анализируемых систем.

Как правило, структура связи многомерных систем определяется с помощью попарного анализа. Для этой цели было разработано множество методов, таких как вычисление нелинейных индексов причинности Грейнджера [10], показателей на основе пространства состояний [11],

условной взаимной информации [12], энтропии переноса [13], мер, основанных на фазовой динамике [14] и условных вероятностях рекуррентности [15].

Однако парный анализ часто недостаточен для выявления более сложных взаимодействий между временными рядами [16, 17]. В работах [18, 19] предложены методы тройного анализа для определения направленной связности малой сети систем посредством реконструкции фазовой динамики из многомерных временных рядов. Сравнивая функции связи всех возможных триплетов осцилляторов, авторы продемонстрировали возможность надежного определения направленности существующих связей, доказав это на небольших сетях осцилляторов ван дер Поля с известной направленностью связей и периодическими незашумленными сигналами и продемонстрировав возможность идентификации дополнительных связей, отсутствующих в исходной системе, что связано с увеличением силы связи [18, 19].

Известно, что направленность парных связей двух экспериментально зарегистрированных сигналов, генерируемых биологическими осцилляторами, может зависеть от функционального состояния в норме или при его нарушении [8, 9]. В работе [5] на основе метода моделирования фазовой динамики выявлено изменение направленности парных связей между низкочастотными электроэнцефалографическими (ЭЭГ) сигналами различных областей мозга при повышении уровня стресса у здоровых испытуемых за счет решения стрессогенных когнитивных задач. В работе [4] также выявлено изменение направленности парных связей между ЭЭГ-сигналами различных областей мозга во время приступа эпилепсии у пациентов со сниженным уровнем сознания.

Актуальной задачей является выявление влияния нарушения функциональных состояний на направленность связей между одновременно экспериментально зарегистрированными сигналами трех биологических осцилляторов, то есть нахождение конфигураций тройных связей между дыхательной, сердечно-сосудистой и нервной системами.

Целью данной работы является выявление связей трех взаимодействующих биологических осцилляторов с помощью метода моделирования фазовой динамики и определение зависимости влияния патологического состояния на конфигурации однонаправленных тройных связей этих осцилляторов.

В первой части работы для проверки правильности определения структуры связи трехосцилляторной сети применена модель трёх хаотических осцилляторов Ресслера с известными однонаправленными связями. Во второй части работы для анализируемых данных использованы флуктуации дыхательного ритма (RES), кривые вариабельности артериального давления (BPV) и вариабельности нейрональной активности (NAV) продолговатого мозга крыс, полученные и подробно описанные в работах [8, 20] для двух групп крыс (контрольной группы и группы с патологическим состоянием в форме экспериментально вызванного колита).

Для каждой группы проанализированы 15 временных рядов BPV, NAV, RES длительностью 55 секунд и содержащих 55000 значений. Эти временные ряды извлечены из одновременно зарегистрированных колебаний артериального давления, дыхания и нейрональной активности, зарегистрированной с помощью электрода, погруженного в область ретикулярной формации продолговатого мозга, обусловленной тем, что именно в этой области находятся нейроны, связанные с патологией кишечника. Временные ряды BPV и NAV являются последовательностями временных интервалов между локальными максимумами исходных данных нейрональной активности и артериального давления; аппроксимированы кубическими сплайнами с удалением нелинейных трендов и полосовой фильтрацией с основными частотами, близкими к частоте дыхательного ритма.

В предыдущих работах [8, 20] эти данные были использованы для выявления фазовой синхронизации между попарными временными рядами, а в работах [9, 21] для определения направленности влияния сигналов одной системы на другую и выяснения изменения характеристик взаимосвязи во время болевого воздействия.

## 1. Методика

Определение связности основано на применении модели фазовой динамики взаимодействующих систем. Для сигналов, генерируемых этими системами, сначала вычисляются мгновенные фазы  $\phi_k(t)$ , а затем создается модель фазовой динамики, определяющая приращения мгновенных фаз на временном интервале  $\tau$  [14]:

$$\Delta\phi_k(t) = \phi_k(t + \tau) - \phi_k(t) = F_k(\phi_X(t), \phi_Y(t), \phi_Z(t)), \quad k = X, Y, Z. \quad (1)$$

В настоящей работе сначала для каждого сигнала (например, сигнала  $x(t)$ ) оценивались мгновенные протофазы  $\Theta_X(t)$  с помощью синхросжатого вейвлетного преобразования с комплексной вейвлетной функцией Морле [22]:

$$SWT(f, t) = \frac{1}{\Delta f} \sum_{f_k} W(f_k, t) f_k^{3/2} \Delta f_k, \quad (2)$$

где  $\Delta f_k = f_k - f_{k-1}$ ,  $f_k = (k/n)F_s$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $F_s$  — частота дискретизации сигнала  $x(t)$ ,  $n$  — количество частот  $f$ , используемых в вычислении  $W(f, t)$ :

$$W(f, t) = f \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \exp(-0.5(t' - t)^2 f^2) \exp(-2\pi i(t' - t)f) dt'. \quad (3)$$

Применение вейвлет-преобразования приводит к полосовой фильтрации  $x(t)$  и созданию аналитического сигнала  $s(t) = A(t) \exp(i\Theta(t))$  вокруг частоты  $f$ . Например, определение мгновенных фаз на основе вейвлетного преобразования для фиксированного временного масштаба применено в работах [23, 24]: для выявления климатологических взаимосвязей.

Вычисление протофаз основано на нахождении частотных компонент сигнала решением задачи условной оптимизации поиска среди всех кривых гребней тех  $f_r(t)$ , для которых коэффициенты синхросжатого вейвлетного преобразования  $SWT(f, t)$  максимальны, что соответствует минимуму функции [25]:

$$P(f_r) = - \int SWT(f_r(t), t)^2 dt + 0.01 \int [(df_r(t)/dt)^2 + (df_r^2(t)/d^2t)^2] dt. \quad (4)$$

На основе определенного гребня  $f_r(t)$  мгновенная частота  $f(t)$  и мгновенная протофаза  $\Theta(t)$  анализируемого сигнала определяются:

$$f(t) = f_r(t), \quad \Theta(t) = \arg | SWT(f_r(t), t) |. \quad (5)$$

Преобразование полученной протофазы  $\Theta(t)$  в истинную развернутую фазу  $\phi(t)$ , увеличивающуюся на  $2\pi$  за каждый полный оборот радиуса-вектора, осуществляется по методу [26]:

$$\phi = \Theta + 2 \sum \text{Im} [S_n(\exp(in\Theta - 1)/n)], \quad (6)$$

где

$$S_n = 1/N \sum_{j=1}^N \exp(in\Theta_j). \quad (7)$$

Глобальный вейвлетный спектр, задающий усредненное распределение энергии синхросжатого вейвлетного спектра по частотам на временном интервале  $[t_1, t_2]$ , определяется

$$E(f) = f \int_{t_1}^{t_2} | SWT(f, t) |^2 dt. \quad (8)$$

Далее в виде ряда Фурье задаются функции связности для всех трех определенных фаз [27]:

$$F_k(\phi_X(t), \phi_Y(t), \phi_Z(t)) = \sum_{l_X, l_Y, l_Z} A_{X, l_Y, l_Z}^{(k)} \exp(i(l_X \phi_X(t) + l_Y \phi_Y + l_Z \phi_Z)). \quad (9)$$

Эти функции описывают различные варианты взаимодействий [18]. Для нахождения коэффициентов  $A_{X, l_Y, l_Z}^{(k)}$  находятся минимумы функций:

$$S_j^2 = 1/(N - \tau) \sum_{i=1}^{N-\tau} ((\phi_k(t_i + \tau) - \phi_k(t_i)) - F_k(\phi_X(t), \phi_Y(t), \phi_Z(t)))^2, \quad k = X, Y, Z. \quad (10)$$

В соответствии с работами [14, 27], в качестве  $\tau$  мы использовали значения, равные меньшему из характерных периодов колебаний анализируемых сигналов, и значения  $l_k = 3, k = X, Y, Z$ , так как усложнение фазовой модели повышает возможность определения ложных связей [28]. То есть для экспериментальных данных использовались значения  $\tau$ , равные меньшему из характерных периодов колебаний RES, BPV, NAV в узкополосном диапазоне частот [1.2, 2.4] Гц, и порядок разложения  $l_k = 3, k = RES, BPV, NAV$ .

В работах [18, 19] предложено вычислять частичные нормы функций связи, количественно определяющие направленность связи. Парное действие осциллятора  $j$  на осциллятор  $k$  определяется компонентами функций  $F_k(\phi_X(t), \phi_Y(t), \phi_Z(t))$ , которые зависят только от фаз  $\phi_k(t)$  и  $\phi_j(t)$ . Частичная норма  $N_{j \rightarrow k}$  для парной связи вычисляется по формуле [18]:

$$N_{j \rightarrow k}^2 = \sum_{l_k, l_j=0} |A_{0, \dots, 0, l_k, 0, \dots, 0, l_k, 0, \dots}|^2. \quad (11)$$

Совместное действие осцилляторов  $j$  и  $m$  на осциллятор  $k$  определяется членами перекрестной связи, содержащими три фазы  $\phi_k(t), \phi_j(t), \phi_m(t)$  [18]:

$$N_{j, m \rightarrow k}^2 = \sum_{l_k, l_j=0, l_m=0} |A_{0, \dots, 0, l_k, 0, \dots, 0, l_k, 0, \dots, l_m, 0, \dots}|^2. \quad (12)$$

Вычисленные частичные нормы записываются как элементы матрицы  $C$ , определяющей структуру связности трехосцилляторной сети:

$$\begin{pmatrix} C(X, X) & C(X, Y) & C(X, Z) \\ C(Y, X) & C(Y, Y) & C(Y, Z) \\ C(Z, X) & C(Z, Y) & C(Z, Z) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Недиагональные элементы  $C(k, j)$  этой матрицы представляют частичные нормы  $N_{j \rightarrow k}$ , полученные по формуле (11). Диагональные элементы  $C(k, k)$  определяют частичные нормы  $N_{j, m \rightarrow k}$ , вычисленные по формуле (12). Например, максимальное значение элемента  $C(X, Y) = N_{Y \rightarrow X}$  матрицы определяет однонаправленную связь  $Y \rightarrow X$ . Максимальное значение члена перекрестной связи, определяемого элементом  $C(X, X) = N_{Y, Z \rightarrow X}$ , задает совместное влияние осцилляторов  $Y$  и  $Z$  на осциллятор  $X$  [18].

Оценка направленности связи между взаимодействующими осцилляторами проводилась для данных в несинхронном режиме, для которых показатель синхронизации между анализируемыми  $x(t)$  и  $y(t)$ , вычисляемый в скользящем окне шириной  $\Delta t$  и сдвигом, равным интервалу дискретизации, по формуле [29]:

$$\rho = |1/N \sum_{j=1}^k \exp(2\pi i(\phi_X(t + j\Delta t/N) - \phi_Y(t + j\Delta t/N)))|, \quad (14)$$

меньше 0.6.

Для оценки статистической значимости вычисленных максимальных элементов  $C(i, j)$  матрицы связи  $C$  мы применили статистический тест с созданием 100 суррогатных временных рядов. Суррогатные данные генерировались для каждого анализируемого сигнала методом, основанным на рекуррентности [30]. Нулевая гипотеза заключалась в том, что анализируемые сигналы имеют независимые рекуррентные структуры, приводящие к отсутствию возможных вариантов связности. Обозначим  $M = C(i, j)$  для исходного сигнала. Величина  $M_{\text{sur}_k}$  вычислялась для суррогатов  $X_{\text{sur}_k}$ ,  $Y_{\text{sur}_k}$  и  $Z_{\text{sur}_k}$ . Затем проверялось соответствие нормальному распределению соответствующих значений  $M_{\text{sur}}$  и 95%-й квантиль этого распределения  $Z = |M - \overline{M_{\text{sur}}}/\sigma_{\text{sur}}| > 1.96$ , при выполнении которого значение  $C(i, j)$  считалось статистически значимым ( $\overline{M_{\text{sur}}}$  – среднее и  $\sigma_{\text{sur}}$  – стандартное отклонение). То есть нулевая гипотеза об отсутствии связи между исходными временными рядами отвергалась при значении тестовой статистики  $Z > 1.96$ , и вычисленное значение элемента  $C(i, j)$  матрицы связи считалось статистически значимым.

## 2. Результаты

**2.1. Определение конфигурации связей для трех хаотических осцилляторов.** Проанализируем компоненты  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$  трех однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера ( $X$ ,  $Y$  и  $Z$ ):

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 - x_3, \\
 \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + ax_2 + \mu_{YX}(y_2 - x_2) + \mu_{ZX}(z_2 - x_2) + \mu_{XX}y_2z_2, \\
 \frac{dx_3}{dt} &= b + x_3(x_1 - c), \\
 \frac{dy_1}{dt} &= -(1 + v)y_2 - y_3, \\
 \frac{dy_2}{dt} &= (1 + v)y_1 + ay_2 + \mu_{XY}(x_2 - y_2) + \mu_{ZY}(z_2 - y_2) + \mu_{YY}x_2z_2, \\
 \frac{dy_3}{dt} &= b + y_3(y_1 - c), \\
 \frac{dz_1}{dt} &= -(1 - v)z_2 - z_3, \\
 \frac{dz_2}{dt} &= (1 - v)z_1 + az_2 + \mu_{XZ}(x_2 - z_2) + \mu_{YZ}(y_2 - z_2) + \mu_{ZZ}x_2y_2, \\
 \frac{dz_3}{dt} &= b + z_3(z_1 - c)
 \end{aligned} \tag{15}$$

с параметрами  $a = 0.16$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 8.5$ , задающими хаотический режим, с параметром  $v = 0.08$  рассогласования частот и параметрами линейных  $\mu_{jk}$  и нелинейных связей  $\mu_{kk}$ . Уравнения (15) проинтегрированы с использованием метода Рунге–Кутты с шагом 0.003 с и временем интегрирования 6000 с и удалением первых 50000 точек как возможного переходного процесса.

Вариант однонаправленных связей, для которых осциллятор  $X$  является общим управляющим для  $Y$  и  $Z$ , а осциллятор  $Y$  является посредником получения информации от осциллятора  $X$  и передачи информации осциллятору  $Z$  ( $X \rightarrow Y$ ,  $Y \rightarrow Z$ ,  $X \rightarrow Z$ ), параметры линейных связей  $\mu_{XY} = \mu_{YZ} = \mu_{XZ} = 0.07$  и параметр нелинейной связи  $X, Y \rightarrow Z$   $\mu_{ZZ} = 0.03$ , представлен на рис. 1. Остальные значения параметров связи для этого варианта равны нулю.

На рис. 1 изображены короткие фрагменты анализируемых временных рядов  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  (синие кривые) и фрагменты действительной части восстановленных комплексных аналитических временных рядов, полученных с помощью синхросжатого вейвлет-преобразования исходных временных рядов в полосе частот  $[0.12, 0.2]$  Гц (черные кривые) (рис. 1,  $a-c$ ), а также спектры Фурье для исходных временных рядов (рис. 1,  $d-f$ ) и глобальные вейвлетные спектры для

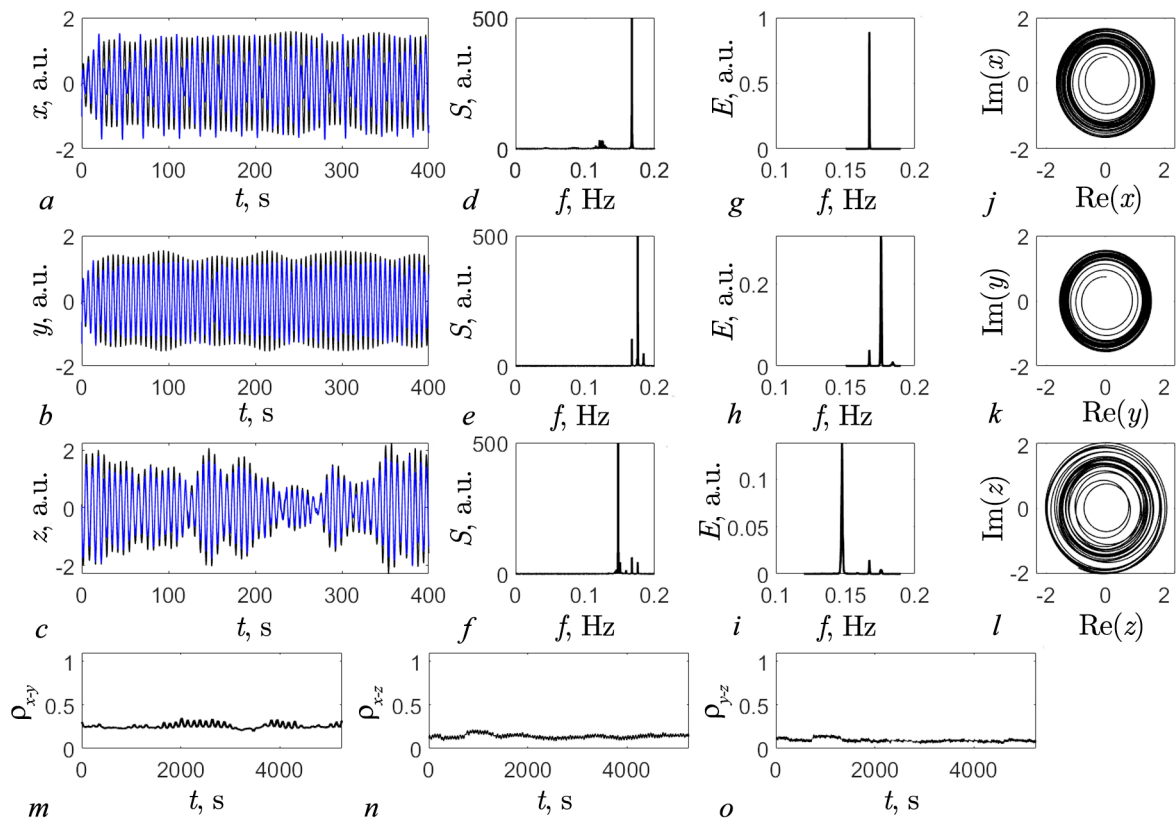


Рис. 1. Фрагменты временных рядов  $x(t), y(t), z(t)$ .  $a-c$  – Исходные временные ряды (синие кривые), восстановленные аналитические временные ряды (черные кривые),  $d-f$  – спектры Фурье для исходных временных рядов,  $g-i$  – вейвлетные спектры для восстановленных временных рядов,  $j-l$  – траектории восстановленных временных рядов на комплексной плоскости,  $m-o$  – показатели фазовой синхронизации  $\rho_{x-y}(t), \rho_{x-z}(t), \rho_{y-z}(t)$  (цвет онлайн)

Fig. 1. Fragments of time series  $x(t), y(t), z(t)$ .  $a-c$  – Original time series (blue curves), reconstructed analytical time series (black curves),  $d-f$  – Fourier spectra for the original time series,  $g-i$  – wavelet spectra for the reconstructed time series,  $j-l$  – trajectories of the reconstructed time series on the complex plane,  $m-o$  – phase synchronization indices  $\rho_{x-y}(t), \rho_{x-z}(t), \rho_{y-z}(t)$  (color online)

восстановленных временных рядов (рис. 1,  $g-i$ ). Траектории восстановленных временных рядов на комплексной плоскости (рис. 1,  $j-l$ ) показывают, что для этих восстановленных рядов происходит вращение радиус-вектора вокруг начала координат, так что мгновенные фазы этих рядов могут быть хорошо определены [29]. Показатели фазовой синхронизации между анализируемыми  $x(t)$  и  $y(t)$ ,  $x(t)$  и  $z(t)$ , и  $z(t)$  и  $y(t)$  меньше 0.5, поэтому эти ряды соответствуют несинхронным режимам.

Значения элементов матрицы связи  $C$ , определяющей структуру связности трех осцилляторов Ресслера, то есть частичных норм реконструированных функций связи, для различных конфигураций модели представлены на рис. 2. Максимальные значения элементов матрицы связи показаны в прямоугольниках жирным цветом и соответствуют направленным связям, указанным стрелками.

В первом варианте конфигурации, в котором осциллятор  $Z$  управляется  $X$  и  $Y$ , а осциллятор  $Y$  управляется  $X$ , получены максимальные элементы  $C(Z, X) = N_{X \rightarrow Z} = 0.027$ ,  $C(Z, Y) = N_{Y \rightarrow Z} = 0.026$ ,  $C(Y, X) = N_{X \rightarrow Y} = 0.011$ , определяющие связи  $X \rightarrow Z$ ,  $X \rightarrow Y$  и  $Y \rightarrow Z$  (рис. 2,  $a$ ) для параметров линейных связей  $\mu_{XY} = \mu_{YZ} = \mu_{XZ} = 0.05$  и нулевых параметров нелинейных связей. Все остальные элементы матрицы связи на два порядка меньше. Увеличение

силы связи ( $\mu_{XY} = \mu_{YZ} = \mu_{XZ} = 0.07$ ) привело к повышению значений максимальных элементов  $C(Z, X) = N_{X \rightarrow Z} = 0.046$ ,  $C(Z, Y) = N_{Y \rightarrow Z} = 0.050$ ,  $C(Y, X) = N_{X \rightarrow Y} = 0.019$  и появлению члена дополнительной связи  $C(Z, Z) = N_{X, Y \rightarrow Z} = 0.018$  (рис. 2, b). Эта дополнительная связь совместного влияния осцилляторов  $X$  и  $Y$  на осциллятор  $Z$  отмечена штрихпунктирной стрелкой. Наличие нелинейной связи осцилляторов  $X$  и  $Y$  с параметром  $\mu_{ZZ} = 0.03$  при тех же значениях параметров  $\mu_{XY} = \mu_{YZ} = \mu_{XZ} = 0.07$  привело также к возникновению дополнительной связи  $(X, Y \rightarrow Z)$  за счет элемента  $C(Z, Z) = N_{X, Y \rightarrow Z} = 0.014$  (рис. 2, c).

Для второго варианта конфигурации осциллятор  $Y$  является посредником получения информации от осциллятора  $X$  и передачи информации осциллятору  $Z$ , ( $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z$ ) при наличии параметров линейных связей  $\mu_{XY} = \mu_{YZ} = 0.05$  и параметра нелинейной связи  $\mu_{ZZ} = 0.03$  осцилляторов  $X$  и  $Y$  (рис. 2, d), что соответствует максимальным элементам матрицы связи  $C(Y, X) = N_{X \rightarrow Y} = 0.018$ ,  $C(Z, Y) = N_{Y \rightarrow Z} = 0.034$ ,  $C(Z, Z) = N_{X, Y \rightarrow Z} = 0.011$ . Увеличение силы связи ( $\mu_{XY} = \mu_{YZ} = 0.07$ ) и сохранение нелинейной связи  $\mu_{ZZ} = 0.03$  осцилляторов  $X$  и  $Y$  позволило выявить дополнительную косвенную связь между осцилляторами  $X$  и  $Z$  (отмеченную штрихпунктирной стрелкой) за счет появления элемента матрицы  $C(Z, X) = N_{X, Z \rightarrow Z} = 0.014$  (рис. 2, e).

Для третьего варианта конфигурации осциллятор  $Y$  одновременно управляет осцилляторами  $X$  и  $Z$ , а осциллятор  $Z$  управляет  $X$  ( $Y \rightarrow X, Y \rightarrow Z, Z \rightarrow X$ ) с большими значениями параметров линейных связей  $\mu_{YX} = \mu_{YZ} = \mu_{ZX} = 0.08$  (рис. 2, f). Также, кроме прямых связей с максимальными элементами матрицы связи  $C(X, Y) = N_{Y \rightarrow X} = 0.025$ ,  $C(X, Z) = N_{Z \rightarrow X} = 0.037$ ,  $C(Z, Y) = N_{Y \rightarrow Z} = 0.028$ , наблюдается наличие связи  $(Y, Z \rightarrow X)$  за счет элемента  $C(X, X) = N_{Y, Z \rightarrow X} = 0.017$  (рис. 2, f). То есть значительная сила линейных связей снова привела к появлению дополнительного влияния осцилляторов  $Y$  и  $Z$  на осциллятор  $X$ .

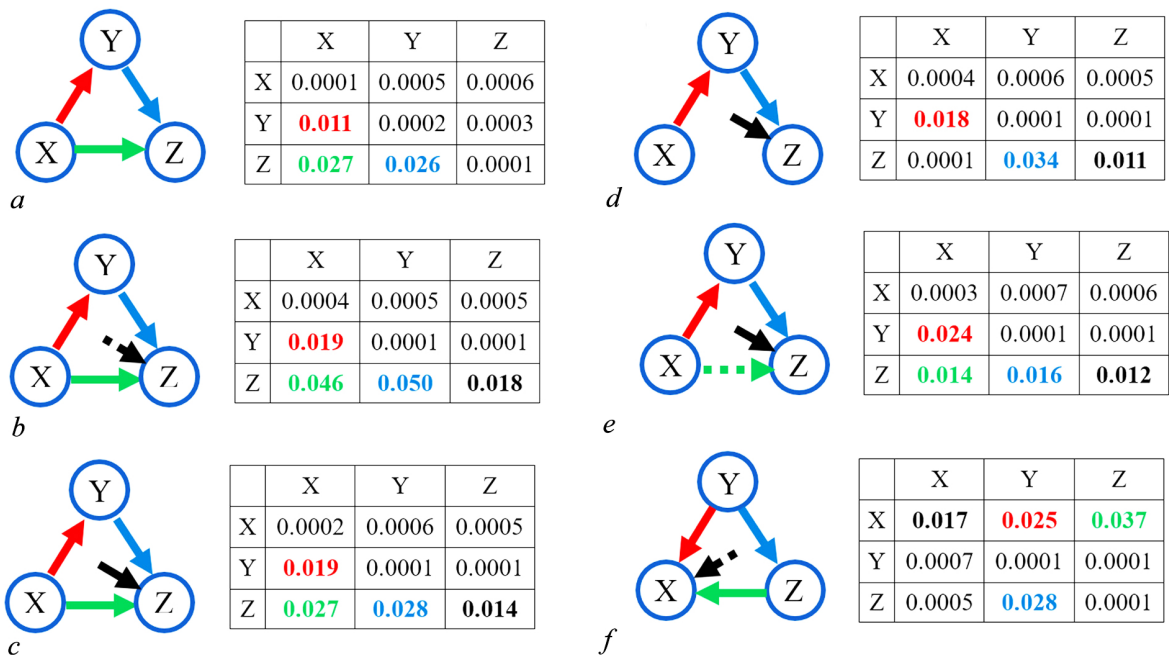


Рис. 2. Варианты конфигурации трех связанных осцилляторов Ресслера (a-f) и элементы матрицы связи, обозначенные жирным цветом, соответствуют цвету стрелки, указывающей направление связи. Косвенные связи и дополнительные связи влияния двух осцилляторов на третий отмечены штрихпунктирными стрелками (цвет онлайн)

Fig. 2. Configurations of three coupled Rössler oscillators (a-f) and the coupling matrix elements, shown in bold, correspond to the color of the arrow indicating the coupling direction. Indirect connections and additional connections of the influence of two oscillators on the third are indicated by dashed-dotted arrows (color online)

Дополнительное влияние двух осцилляторов на третий считается возможным, если диагональные элементы матрицы связи больше, чем заданное (10%) значение от максимальных значений недиагональных элементов матрицы, определяющих направленность прямых связей [18, 19]. Такого типа примеры выявлены для трех незашумленных периодических осцилляторов ван дер Поля. Авторы показали, что не очень слабая попарная связь может привести к дополнительным связям в сети фазовых осцилляторов [18, 19].

**2.2. Определение конфигурации связей трех взаимодействующих биологических осцилляторов.** В качестве  $X, Y, Z$  для элементов матрицы связи в данной секции мы будем рассматривать временные ряды RES, BPV и NAV, то есть применять матрицу в виде

$$\begin{matrix} C(\text{RES}, \text{RES}) & C(\text{RES}, \text{BPV}) & C(\text{RES}, \text{NAV}) \\ C(\text{BPV}, \text{RES}) & C(\text{BPV}, \text{BPV}) & C(\text{BPV}, \text{NAV}) \\ C(\text{NAV}, \text{RES}) & C(\text{NAV}, \text{BPV}) & C(\text{NAV}, \text{NAV}). \end{matrix} \quad (16)$$

На рис. 3 представлены короткие фрагменты колебаний дыхательной системы (RES) (рис. 3, *a*), вариабельности артериального давления (BPV) (рис. 3, *b*) и вариабельности нейрональной активности (NAV) продолговатого мозга крыс (рис. 3, *c*). Штрихпунктирные кривые обозначают исходные временные ряды, сплошные кривые представляют действительную

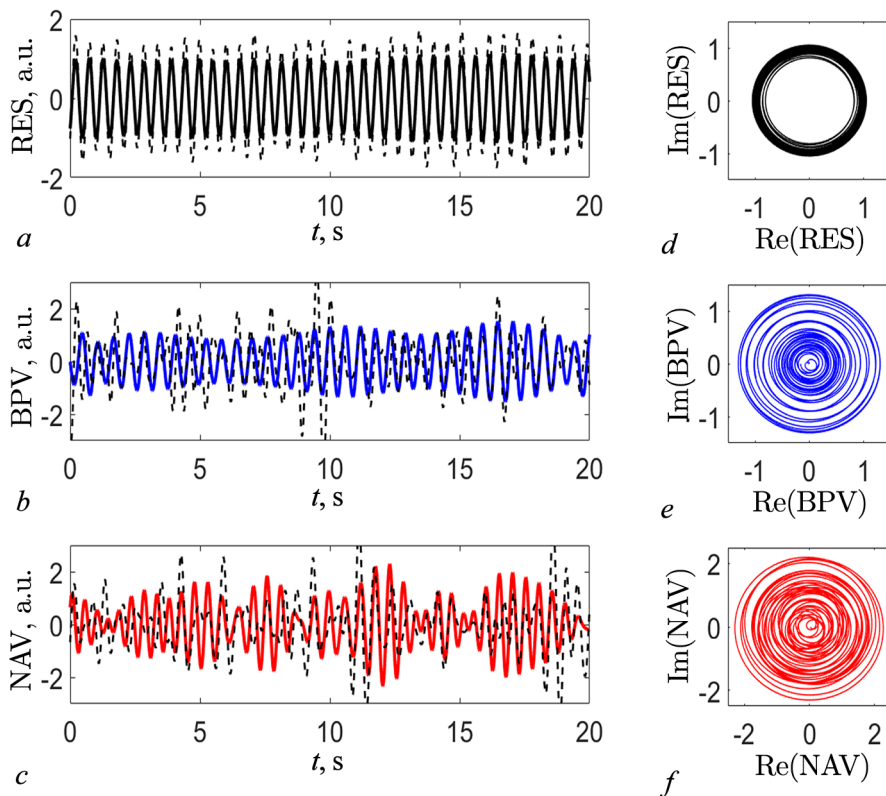


Рис. 3. Фрагменты временных рядов RES, BPV, NAV. *a-c* — Исходные временные ряды (штрихпунктирные кривые), восстановленные аналитические временные ряды (сплошные кривые), *d-f* — траектории восстановленных временных рядов RES, BPV и NAV на комплексной плоскости (цвет онлайн)

Fig. 3. Fragments of time series RES, BPV, NAV. *a-c* — Original time series (dash-dotted curves), reconstructed analytical time series (solid curves), *d-f* — trajectories of the reconstructed time series RES, BPV and NAV on the complex plane (color online)

часть восстановленных комплексных аналитических временных рядов, полученных с помощью синхросжатого вейвлет-преобразования исходных временных рядов в узкополосном диапазоне [1.2, 2.4] Гц с основными частотами BPV и NAV, близкими к частоте дыхательного ритма. Эти временные ряды нормализованы, чтобы иметь нулевое среднее значение и единичное стандартное отклонение. Траектории восстановленных рядов RES, BPV и NAV на комплексной плоскости (рис. 3, *d-f*) с вращением радиус-вектора вокруг начала координат указывают на возможность правильного определения мгновенных фаз [31].

Рис. 4 иллюстрирует характеристики временных рядов RES, BPV и NAV для крысы А из контрольной группы. Глобальные вейвлетные спектры  $E(f)$  для восстановленных временных рядов RES, BPV, NAV (рис. 4, *a-c*) имеют максимумы с основными частотами  $f = 1.32$  Гц для RES,  $f = 1.94$  Гц для BPV и  $f = 2.31$  Гц для NAV (рис. 4, *a-c*).

Показатели фазовой синхронизации  $\rho_{RES-BPV}(t) < 0.6$ ,  $\rho_{BPV-NAV}(t) < 0.6$ ,  $\rho_{RES-NAV}(t) < 0.6$ , что свидетельствует об отсутствии фазовой синхронизации между дыхательными колебаниями (RES) и вариабельностью артериального давления (BPV), между BPV и вариабельностью нейронной активности (NAV) и между временными рядами NAV и RES (рис. 4, *d-f*).

На рис. 4 представлены также значения элементов матрицы связи, для которой максимальные элементы  $C(BPV, RES) = N_{RES \rightarrow BPV} = 0.543$  и  $C(NAV, RES) = N_{RES \rightarrow NAV} = 0.628$  определяют наличие двух прямых связей  $RES \rightarrow BPV$  и  $RES \rightarrow NAV$ . Значения остальных элементов матрицы связей на порядок меньше, то есть полученные результаты соответствуют варианту конфигурации, в котором колебания дыхательной системы оказывают влияние на вариабельность сердечно-сосудистой и нервной систем.

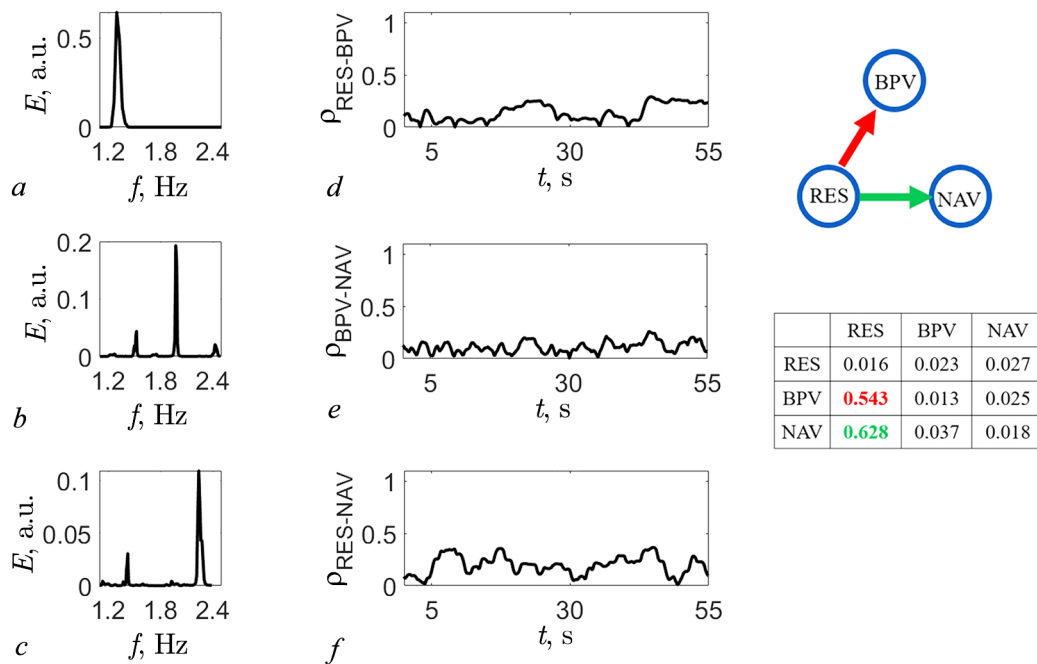


Рис. 4. Характеристики RES, BPV и NAV для крысы А из контрольной группы и элементы матрицы связи для варианта конфигурации  $RES \rightarrow BPV$ ,  $RES \rightarrow NAV$ . *a-c* – Глобальные вейвлетные спектры  $E(f)$  для восстановленных временных рядов RES, BPV, NAV, *d-f* – зависимости от времени показателей фазовой синхронизации  $\rho_{RES-BPV}(t)$ ,  $\rho_{BPV-NAV}(t)$ ,  $\rho_{RES-NAV}(t)$  (цвет онлайн)

Fig. 4. RES, BPV and NAV characteristics for rat A from the control group and the elements of the coupling matrix for the configuration  $RES \rightarrow BPV$ ,  $RES \rightarrow NAV$ . *a-c* – Global wavelet spectra  $E(f)$  for reconstructed time series RES, BPV, NAV, *d-f* – time dependence of phase synchronization indicators  $\rho_{RES-BPV}(t)$ ,  $\rho_{BPV-NAV}(t)$ ,  $\rho_{RES-NAV}(t)$  (color online)

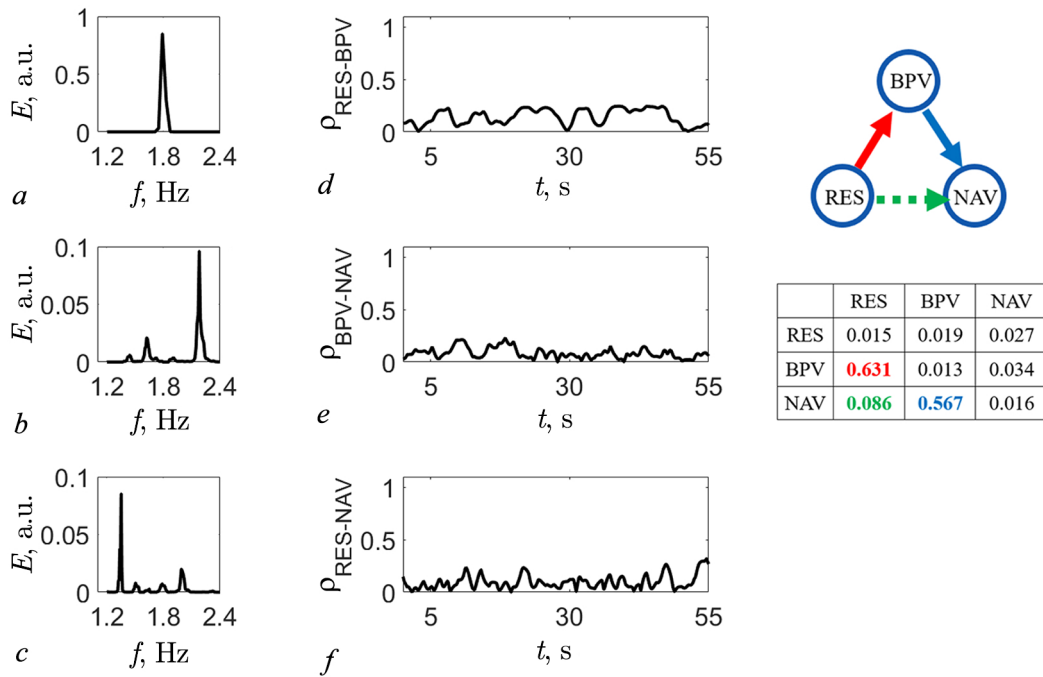


Рис. 5. Характеристики RES, BPV и NAV для крысы В из группы с колитом (цвет онлайн)

Fig. 5. RES, BPV, and NAV characteristics for rat B from the colitis group (color online)

Рис. 5 демонстрирует характеристики временных рядов RES, BPV и NAV для крысы В из группы с колитом. Максимумы глобальных вейвлетных спектров  $E(f)$  соответствуют основным частотам  $f = 1.76$  Гц для RES,  $f = 2.26$  Гц для BPV и  $f = 1.28$  Гц для NAV (рис. 5, *a-c*). Фазовая синхронизация между временными рядами отсутствует  $\rho_{RES-BPV}(t) < 0.6$ ,  $\rho_{BPV-NAV}(t) < 0.6$ ,  $\rho_{RES-NAV}(t) < 0.6$  (рис. 5, *d-f*).

Значения максимальных элементов матрицы связи равны  $C(BPV, RES) = N_{RES \rightarrow BPV} = 0.631$  и  $C(NAV, BPV) = N_{BPV \rightarrow NAV} = 0.567$ , что соответствует наличию двух прямых связей  $RES \rightarrow BPV$  и  $BPV \rightarrow NAV$ , то есть варианту конфигурации, в котором вариабельность артериального давления является посредником получения информации от осциллятора дыхательной системы и передачи информации нейронам продолговатого мозга.

Однако элемент матрицы связи  $C(NAV, RES) = N_{RES \rightarrow NAV} = 0.086 > 0.1C(NAV, BPV)$  указывает на наличие дополнительной косвенной связи между NAV и RES (отмеченной штрихпунктирной стрелкой), поскольку эта связь считается возможной, если определенный элемент матрицы связи больше, чем заданное (10%) значение от максимальных значений элементов матрицы, определяющих направленность прямых связей [18].

На рис. 6 показаны характеристики временных рядов RES, BPV и NAV для крысы С из группы с колитом. Вейвлетные спектры  $E(f)$  для восстановленных временных рядов RES, BPV, NAV (рис. 6, *a-c*) характеризуются максимумами с основными частотами  $f = 1.83$  Гц для RES,  $f = 1.52$  Гц для BPV и  $f = 2.06$  Гц для NAV (рис. 6, *a-c*). Фазовой синхронизации между анализируемыми временными рядами нет  $\rho_{RES-BPV}(t) < 0.6$ ,  $\rho_{BPV-NAV}(t) < 0.6$ ,  $\rho_{RES-NAV}(t) < 0.6$  (рис. 6, *d-f*).

Максимальными элементами матрицы связи являются  $C(NAV, RES) = N_{RES \rightarrow NAV} = 0.738$ ,  $C(BPV, RES) = N_{RES \rightarrow BPV} = 0.413$ ,  $C(NAV, BPV) = N_{BPV \rightarrow NAV} = 0.617$ , определяющие наличие трех прямых связей  $RES \rightarrow NAV$ ,  $RES \rightarrow BPV$  и  $BPV \rightarrow NAV$ . Но выявлено также

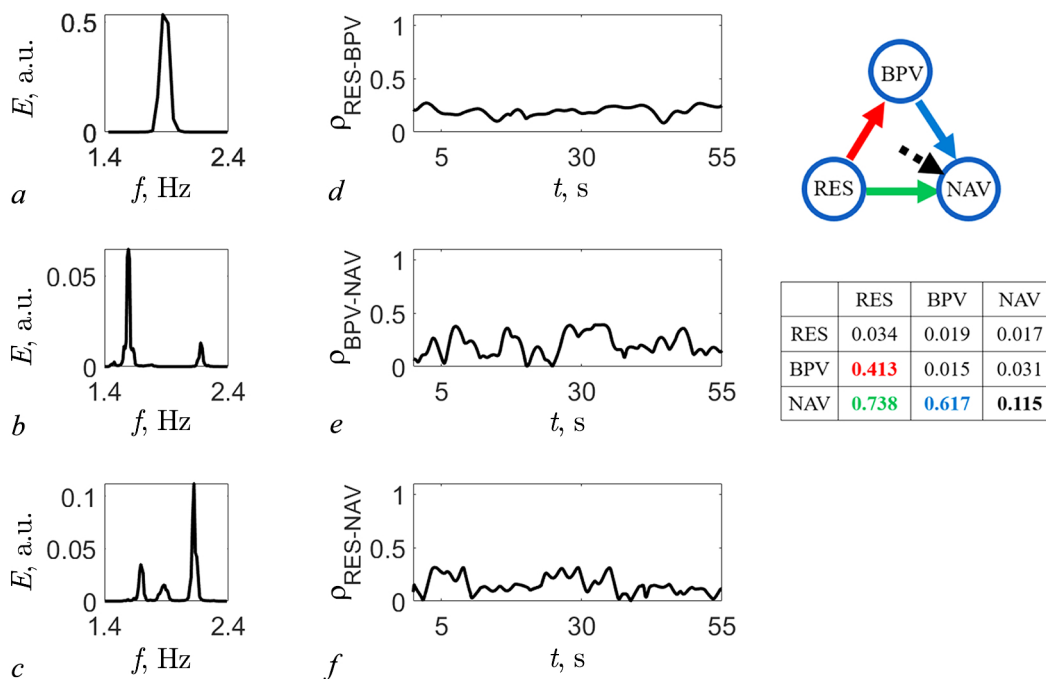


Рис. 6. Характеристики RES, BPV и NAV для крысы С из группы с колитом (цвет онлайн)

Fig. 6. RES, BPV, and NAV characteristics for rat B from the colitis group (color online)

дополнительное влияние BPV и RES на NAV за счет члена  $C(\text{NAV}, \text{NAV}) = N_{\text{BPV}, \text{RES} \rightarrow \text{NAV}} = 0.115 > 0.1C(\text{RES}, \text{BPV})$ , превышающего 10% значение среди недиагональных элементов матрицы, определяющих направленность прямых связей. В связи с этим данным, представленным на рис. 6, соответствует вариант конфигурации, в котором наблюдается одновременное совместное действие дыхательных колебаний и вариабельности артериального давления на вариабельность нейронной активности нейронов продолговатого мозга. На рис. 6 на это указывает дополнительная стрелка от центра между RES и BPV к NAV, обозначающая наличие дополнительной связи между анализируемыми временными рядами.

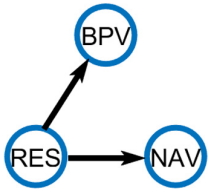
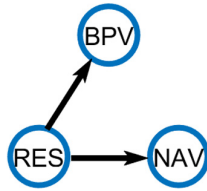
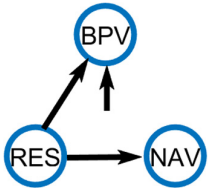
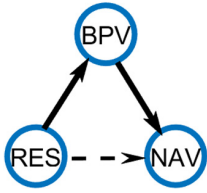
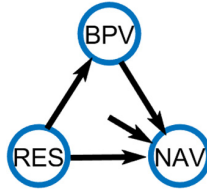
В Таблице представлены усредненные максимальные значения элементов матрицы связи  $C$  для полученных вариантов конфигураций связи временных рядов RES, BPV и NAV и количество статистически значимых данных для контрольной группы и группы с колитом. Усреднение проведено по числу статистически значимых вариантов конфигурации, указанных в Таблице.

Использование суррогатов временных рядов RES, BPV и NAV подтвердило статистическую значимость вычисленных максимальных значений элементов матрицы связи, поскольку вычисленные значения статистики  $Z_{C(i,j)}$ ,  $i, j = \text{RES}, \text{BPV}, \text{NAV}$  больше, чем 1.96 для указанных в Таблице количестве анализируемых временных рядов, что подтверждает, что полученные значения статистически значимы с 95%-м уровнем значимости.

Для контрольной группы выявлены с подтвержденной статистической значимостью различные варианты конфигурации связей для 6 и 7 данных из 15 соответственно. Средние значения максимальных элементов матрицы связи для первого варианта конфигурации ( $\text{RES} \rightarrow \text{BPV}$  и  $\text{RES} \rightarrow \text{NAV}$ ), в котором дыхательная система оказывает влияние на вариабельность сердечно-сосудистой и нервной систем, равны  $C(\text{BPV}, \text{RES}) = N_{\text{RES} \rightarrow \text{BPV}} = 0.58 \pm 0.07$  и  $C(\text{NAV}, \text{RES}) = N_{\text{RES} \rightarrow \text{NAV}} = 0.69 \pm 0.09$ , а для второго варианта конфигурации ( $\text{RES} \rightarrow \text{NAV}$ ,  $\text{RES} \rightarrow \text{BPV}$  и  $\text{BPV} \rightarrow \text{NAV}$ ), в котором, кроме этих связей, вариабельность сердечно-сосудистой

Таблица. Усредненные максимальные значения элементов матрицы связи  $C$  для вариантов конфигураций временных рядов RES, BPV и NAV и количество статистически значимых данных для контрольной группы и группы с колитом

Table. Average maximum values of the elements of the connection matrix  $C$  for the variants of the RES, BPV and NAV time series configurations and the number of statistically significant data for the control group and the group with colitis

Контрольная группа			
Вариант			
Количество данных	6 из 15		7 из 15
Элементы матрицы связи	$C(\text{BPV}, \text{RES})=0.58\pm 0.07$ $C(\text{NAV}, \text{RES})=0.69\pm 0.09$		$C(\text{BPV}, \text{RES})=0.64\pm 0.07$ $C(\text{NAV}, \text{RES})=0.47\pm 0.06$ $C(\text{NAV}, \text{BPV})=0.56\pm 0.07$
Группа с колитом			
Вариант			
Количество данных	2 из 15	5 из 15	6 из 15
Элементы матрицы связи	$C(\text{BPV}, \text{RES})=0.71\pm 0.09$ $C(\text{NAV}, \text{RES})=0.53\pm 0.07$ $C(\text{BPV}, \text{BPV})=0.13\pm 0.02$	$C(\text{BPV}, \text{RES})=0.66\pm 0.08$ $C(\text{NAV}, \text{BPV})=0.53\pm 0.06$ $C(\text{NAV}, \text{RES})=0.11\pm 0.03$	$C(\text{BPV}, \text{RES})=0.45\pm 0.07$ $C(\text{NAV}, \text{RES})=0.76\pm 0.09$ $C(\text{NAV}, \text{BPV})=0.55\pm 0.08$ $C(\text{NAV}, \text{NAV})=0.14\pm 0.03$

оказывает еще влияние на вариабельность активности нервной системы, средние значения максимальных элементов равны  $C(\text{NAV}, \text{RES}) = N_{\text{RES} \rightarrow \text{NAV}} = 0.47 \pm 0.06$ ,  $C(\text{NAV}, \text{BPV}) = N_{\text{BPV} \rightarrow \text{NAV}} = 0.56 \pm 0.07$  и  $C(\text{BPV}, \text{RES}) = N_{\text{RES} \rightarrow \text{BPV}} = 0.64 \pm 0.07$ .

Для группы с экспериментальным колитом обнаружены видоизмененные варианты: первый ( $\text{RES} \rightarrow \text{NAV}$ ,  $\text{RES} \rightarrow \text{BPV}$  и  $\text{RES}, \text{NAV} \rightarrow \text{BPV}$ ) и второй ( $\text{RES} \rightarrow \text{NAV}$ ,  $\text{RES} \rightarrow \text{BPV}$ ,  $\text{BPV} \rightarrow \text{NAV}$  и  $\text{RES}, \text{BPV} \rightarrow \text{NAV}$ ) с подтвержденной статистической значимостью для 2 и 6 данных из 15 соответственно, и дополнительный третий вариант конфигурации ( $\text{RES} \rightarrow \text{BPV}$ ,  $\text{BPV} \rightarrow \text{NAV}$  и  $\text{RES} \rightarrow \text{NAV}$ ) с подтвержденной статистической значимостью выявлен для 5 данных из 15 (Таблица).

Средние значения максимальных элементов матрицы связи для первого видоизмененного варианта равны  $C(\text{BPV}, \text{RES}) = N_{\text{RES} \rightarrow \text{BPV}} = 0.71 \pm 0.09$ ,  $C(\text{NAV}, \text{RES}) = N_{\text{RES} \rightarrow \text{NAV}} = 0.53 \pm 0.07$  и  $C(\text{BPV}, \text{BPV}) = N_{\text{NAV}, \text{RES} \rightarrow \text{BPV}} = 0.13 \pm 0.02$ . Наличие члена связи  $C(\text{BPV}, \text{BPV})$ , большего, чем 10% от максимальных значений недиагональных элементов матрицы связи, свидетельствует о том, что в данном случае существует совместное влияние дыхательных колебаний и вариабельности нейрональной активности нейронов продолговатого мозга на вариабельность артериального давления.

Для второго видоизмененного варианта конфигурации для группы с колитом статистически значимые средние значения максимальных элементов матрицы связи равны  $C(\text{BPV}, \text{RES}) = N_{\text{RES} \rightarrow \text{BPV}} = 0.45 \pm 0.07$ ,  $C(\text{NAV}, \text{RES}) = N_{\text{RES} \rightarrow \text{NAV}} = 0.76 \pm 0.09$ ,  $C(\text{NAV}, \text{BPV}) = N_{\text{BPV} \rightarrow \text{NAV}} = 0.55 \pm 0.08$  и  $C(\text{NAV}, \text{NAV}) = N_{\text{BPV}, \text{RES} \rightarrow \text{NAV}} = 0.14 \pm 0.03$ . В связи с этим в этом варианте конфигурации имеется член связи  $C(\text{NAV}, \text{NAV})$ , величина которого больше, чем 10% от максимальных значений недиагональных элементов матрицы связи. Это подтверждает наличие совместного влияния колебаний дыхательной системы и вариабельности артериального давления на вариабельность нейрональной активности нейронов продолговатого мозга.

Средние значения максимальных элементов матрицы связи для третьего варианта конфигурации равны  $C(\text{BPV}, \text{RES}) = N_{\text{RES} \rightarrow \text{BPV}} = 0.66 \pm 0.08$ ,  $C(\text{NAV}, \text{BPV}) = N_{\text{BPV} \rightarrow \text{NAV}} = 0.53 \pm 0.06$ ,  $C(\text{NAV}, \text{RES}) = N_{\text{RES} \rightarrow \text{NAV}} = 0.11 \pm 0.03 > 0.1C(\text{NAV}, \text{BPV})$ , указывающие на наличие дополнительной косвенной связи между NAV и RES [18].

Таким образом, в отличие от данных, извлеченных из биологических осцилляторов контрольной группы здоровых крыс, для группы крыс с патологическим состоянием в форме экспериментально вызванного колита определены дополнительные связи между временными рядами, полученными на основании одновременно зарегистрированных колебаний сердечно-сосудистой, нервной и дыхательной систем. Это может быть связано с большей парной связью по сравнению с временными рядами, полученными для контрольной группы, что, как известно, может привести к дополнительным связям в сети фазовых осцилляторов [18].

### Заключение

Цель исследования состояла в применении метода моделирования фазовой динамики для выявления направленности связей временных рядов, извлеченных из физиологических ритмов трех взаимодействующих биологических систем, и зависимости влияния патологического состояния в форме экспериментально вызванного колита на конфигурации однонаправленных тройных связей этих систем.

Этот метод, предварительно примененный к модели трёх осцилляторов Ресслера с параметрами линейных и нелинейных связей, позволил подтвердить правильность выявления прямых связей для модели трёх слабохаотических осцилляторов и выявить возможность появления дополнительного влияния одного осциллятора на другой или совместного влияния двух осцилляторов на третий при увеличении силы связи так же, как ранее это было подтверждено для незашумленных ритмических осцилляторов ван дер Поля [18, 19].

Используя этот метод и оценку статистической значимости полученных данных для временных рядов, соответствующих флуктуациям дыхательного ритма, кривым вариабельности артериального давления и вариабельности интервалов нейрональной активности продолговатого мозга крыс, мы выявили возможность определять наличие статистически значимых вариантов связей в трехосцилляторной сети нервной, дыхательной и сердечно-сосудистой систем.

Для меньшего количества данных с экспериментальным колитом установлено также наличие члена перекрестной связи, подтверждающей совместное действие колебаний дыхания и вариабельности нейрональной активности на вариабельность артериального давления.

Выявлено влияние патологического состояния в форме экспериментально вызванного колита на появление дополнительных связей в тройных взаимодействиях этих временных рядов. Примерно в половине данных для патологического состояния, связанного с колитом, выявлено наличие совместного влияния флуктуаций дыхания и вариабельности артериального давления на вариабельность интервалов нейрональной активности нейронов продолговатого мозга. Для меньшего количества данных с экспериментальным колитом установлено также совместное действие колебаний дыхания и вариабельности нейрональной активности на вариабельность артериального давления.

Наблюдаемое увеличение связности систем в состоянии колита может быть обусловлено тем, что усиление взаимодействия между ритмами биологических систем во время возникновения патологического состояния рассматривается как защитный и адаптивный механизм, направленный на устранение функциональной недостаточности.

## Список литературы

1. *Мохов И. И., Смирнов Д. А., Наконечный П. И., Козленко С. С., Куртс Ю.* Взаимосвязь явлений Эль-Ниньо/Южное колебание и индийского муссона // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48, № 1. С. 56–66.
2. *Runge J., Heitzig J., Petoukhov V., Kurths J.* Escaping the curse of dimensionality in estimating multivariate transfer entropy // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 108, iss. 25. P. 258701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.258701.
3. *Sysoeva M. V., Sitnikova E., Sysoev I. V., Bezruchko B. P., van Luijelaar G.* Application of adaptive nonlinear Granger causality: Disclosing network changes before and after absence seizure onset in a genetic rat model // J. Neuroscience Methods. 2014. Vol. 226. P. 33–41. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2014.01.028.
4. *Навроцкая Е. В., Караваяев А. С., Шинкин М. В., Боровкова Е. И., Безручко Б. П.* Адаптация метода анализа связанности на основе моделирования фазовой динамики к сигналам ЭЭГ во время эпилептического приступа у пациентов в состоянии комы // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2022. Т. 22, № 1. С. 4–14. DOI: 10.18500/1817-3020-2022-22-1-4-14.
5. *Prokhorov M. D., Borovkova E. I., Hramkov A. N., Dubinkina E. S., Ponomarenko V. I., Ishbulatov Y. M., Kurbako A. V., Karavaev A. S.* Changes in the power and coupling of infra-slow oscillations in the signals of EEG leads during stress-inducing cognitive tasks // Appl. Sci. 2023. Vol. 13, iss. 14. P. 8390. DOI: 10.3390/app13148390.
6. *Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Bespyatov A. B., Bodrov M. B., Gridnev V. I.* Deriving main rhythms of the human cardiovascular system from the heartbeat time series and detecting their synchronization // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. Vol. 23, iss. 4. P. 1429–1438. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.06.041.
7. *Kiselev A. R., Mironov S. A., Karavaev A. S., Kulminskiy D. D., Skazkina V. V., Borovkova E. I., Shvartz V. A., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* A comprehensive assessment of cardiovascular autonomic control using photoplethysmograms recorded from the earlobe and fingers // Physiol. Meas. 2016. Vol. 37, no. 4. P. 580–595. DOI: 10.1088/0967-3334/37/4/580.
8. *Dick O. E., Glazov A. L.* Revealing the coupling directionality and synchronization between time series from physiological data by analysis of joint recurrences // Chaos, Solitons and Fractals. 2023. Vol. 173. P. 113768. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113768.
9. *Дик О. Е., Глазов А. Л.* Определение направленности связи между временными рядами, выделенными из биологических данных крыс, методом моделирования фазовой динамики периодических процессов // ЖТФ. 2023. Т. 93, № 10. С. 1520–1528. DOI: 10.61011/JTF.2023.10.56291.144-23.
10. *Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M.* Analyzing multiple nonlinear time series with extended Granger causality // Phys. Lett. A. 2004. Vol. 324, iss. 1. P. 26–35. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.02.032.
11. *Quiroga R. Q., Arnhold J., Grassberger P.* Learning driver-response relationships from synchronization patterns // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61, iss. 5. P. 5142–5148. DOI: 10.1103/PhysRevE.61.5142.
12. *Vejmelka M., Paluš M.* Inferring the directionality of coupling with conditional mutual information // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77, iss. 2. P. 026214. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.026214.
13. *Stramaglia S., Faes L., Cortes J. M., Marinazzo D.* Disentangling high-order effects in the transfer entropy. Phys. Rev. Res. 2024. Vol. 6, iss. 3. P. L032007. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.6.L032007.

14. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S.* Detecting direction of coupling in interacting oscillators // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64, iss. 4. P. 045202. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.045202.
15. *Romano M. C., Thiel M., Kurths J., Grebogi C.* Estimation of the direction of the coupling by conditional probabilities of recurrence // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76, iss. 3. P. 036211. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.036211.
16. *Rosenblum M., Pikovsky A.* Inferring connectivity of an oscillatory network via the phase dynamics reconstruction // *Front. Netw. Physiol.* 2023. Vol. 3. P. 1298228. DOI: 10.3389/fnetp.2023.1298228.
17. *Friston K. J.* Functional and effective connectivity: a review // *Brain Connect.* 2011. Vol. 1, iss. 1. P. 13. DOI: 10.1089/brain.2011.0008.
18. *Kralemann B., Pikovsky A., Rosenblum M.* Reconstructing phase dynamics of oscillator networks // *Chaos.* 2011. Vol. 21, iss. 2. P. 025104. DOI: 10.1063/1.3597647.
19. *Kralemann B., Pikovsky A., Rosenblum M.* Reconstructing effective phase connectivity of oscillator networks from observations // *New J. Phys.* 2014. Vol. 16. P. 085013. DOI: 10.1088/1367-2630/16/8/085013.
20. *Дук О. Е.* Анализ синхронизации между временными рядами, полученными от анестезированных крыс во время болевого воздействия // *Известия вузов. ПНД.* 2024. Т. 32, № 2. С. 209–222. DOI: 10.18500/0869-6632-003093.
21. *Дук О. Е.* Применение методов моделирования фазовой динамики и рекуррентности для оценки характеристик взаимосвязи между физиологическими ритмами // *Известия вузов. ПНД.* 2025. Т. 33, № 3. С. 381–398. DOI: 10.18500/0869-6632-003165.
22. *Daubechies I., Lu J., Wu H. T.* Synchrosqueezed wavelet transforms: An empirical mode decomposition-like tool // *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 2011. Vol. 30. P. 243–261. DOI: 10.1016/j.acha.2010.08.002.
23. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Исследование взаимного влияния процессов Эль-Ниньо - Южное колебание и Северо-Атлантического и Арктического колебаний нелинейными методами // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана.* 2006. Т. 42, № 5. С. 650–667.
24. *Mokhov I. I., Smirnov D. A.* El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices // *Geophysical Research Letters.* 2006. Vol. 33, iss. 3. P. L03708. DOI: 10.1029/2005GL024557.
25. *Thakur G., Brevdo E., Fučkar N. S., Wu H.-T.* The synchrosqueezing algorithm for time-varying spectral analysis: robustness properties and new paleoclimate applications // *Signal Process.* 2013. Vol. 93, no. 5. P. 1079–1094. DOI: 10.1016/j.sigpro.2012.11.029.
26. *Kralemann B., Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A., Mrowka R.* Phase dynamics of coupled oscillators reconstructed from data // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77, iss. 6. P. 66205. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.066205.
27. *Smirnov D. A., Bezruchko B. P.* Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68, iss. 4. P. 046209. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.046209.
28. *Смирнов Д. А., Бодров М. Б., Безручко Б. П.* Оценка связанности между осцилляторами по временным рядам путем моделирования фазовой динамики: пределы применимости метода // *Известия вузов. ПНД.* 2004. Т. 12, № 6. С. 79–92. DOI: 10.18500/0869-6632-2004-12-6-79-92.
29. *Tass P., Rosenblum M. G., Weule J., Kurths J., Pikovsky A., Volkmann J., Schnitzler A., Freund H.-J.* Detection of n:m phase locking from noisy data: application to magnetoencephalography // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, iss. 15. P. 3291–3294. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.3291.
30. *Thiel M., Romano M. C., Kurths J., Rolfs M., Kliegl R.* Generating surrogates from recurrences // *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2008. Vol. 366, no. 1865. P. 545–557. DOI: 10.1098/rsta.2007.2109.
31. *Ponomarenko V. I., Karavaev A. S., Borovkova E. I., Hramkov A. N., Kiselev A. R., Prokhorov M. D., Penzel T.* Decrease of coherence between the respiration and parasympathetic control of the heart rate with aging // *Chaos.* 2021. Vol. 31. P. 073105. DOI: 10.1063/5.0056624.

## References

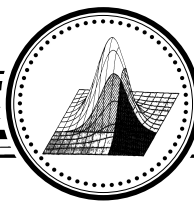
1. Mokhov II, Kozlenko SS, Smirnov DA, Nakonechny PI, Kurths J. Relationship between El-Niño/Southern oscillation and the Indian monsoon. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2012;48(1):47–56.
2. Runge J, Heitzig J, Petoukhov V, Kurths J. Escaping the curse of dimensionality in estimating multivariate transfer entropy. *Phys. Rev. Lett.* 2012;108(25):258701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.258701.
3. Sysoeva MV, Sitnikova E, Sysoev IV, Bezruchko BP, van Luijtelaar G. Application of adaptive nonlinear Granger causality: Disclosing network changes before and after absence seizure onset in a genetic rat model. *J. Neuroscience Methods*. 2014;226:33–41. DOI:10.1016/j.jneumeth.2014.01.028.
4. Navrotskaya EV, Karavaev AS, Sinkin MV, Borovkova EI, Bezruchko BP. Adaptation of the method of coupling analysis based on phase dynamics modeling to EEG signals during an epileptic seizure in comatose patients. *Izvestiya of Saratov University. Physics*. 2022;22(1):4–14. DOI: 10.18500/1817-3020-2022-22-1-4-14.
5. Prokhorov MD, Borovkova EI, Hramkov AN, Dubinkina ES, Ponomarenko VI, Ishbulatov YM, Kurbako AV, Karavaev AS. Changes in the power and coupling of infra-slow oscillations in the signals of EEG leads during stress-inducing cognitive tasks. *Appl. Sci.* 2023;13(14):8390. DOI: 10.3390/app13148390.
6. Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Bespyatov AB, Bodrov MB, Gridnev VI. Deriving main rhythms of the human cardiovascular system from the heartbeat time series and detecting their synchronization. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2005;23(4):1429–1438. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.06.041.
7. Kiselev AR, Mironov SA, Karavaev AS, Kulminskiy DD, Skazkina VV, Borovkova EI, Shvartz VA, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. A comprehensive assessment of cardiovascular autonomic control using photoplethysmograms recorded from the earlobe and fingers. *Physiol. Meas.* 2016;37(4):580–595. DOI: 10.1088/0967-3334/37/4/580.
8. Dick OE, Glazov AL. Revealing the coupling directionality and synchronization between time series from physiological data by analysis of joint recurrences. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2023;173:113768. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113768.
9. Dik OE, Glazov AL. Determination of the directionality of the relationship between time series extracted from biological data of rats using the method of modeling the phase dynamics of periodic processes. *Tech. Phys.* 2023;93(10):1520–1528. DOI: 10.61011/JTF.2023.10.56291.144-23.
10. Chen Y, Rangarajan G, Feng J, Ding M. Analyzing multiple nonlinear time series with extended Granger causality. *Phys. Lett. A*. 2004;324(1):26–35. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.02.032.
11. Quiroga RQ, Arnhold J, Grassberge P. Learning driver-response relationships from synchronization patterns. *Phys. Rev. E*. 2000;61(5):5142–5148. DOI: 10.1103/PhysRevE.61.5142.
12. Vejmelka M, Paluš M. Inferring the directionality of coupling with conditional mutual information. *Phys. Rev. E*. 2008;77(2):026214. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.026214.
13. Stramaglia S, Faes L, Cortes JM, Marinazzo D. Disentangling high-order effects in the transfer entropy. *Phys. Rev. Res.* 2024;6(3):L032007. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.6.L032007.
14. Rosenblum MG, Pikovsky AS. Detecting direction of coupling in interacting oscillators. *Phys. Rev. E*. 2001;64(4):045202. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.045202.
15. Romano MC, Thiel M, Kurths J, Grebogi C. Estimation of the direction of the coupling by conditional probabilities of recurrence. *Phys. Rev. E*. 2007;76(3):036211. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.036211.
16. Rosenblum M, Pikovsky A. Inferring connectivity of an oscillatory network via the phase dynamics reconstruction. *Front. Netw. Physiol.* 2023;3:1298228. DOI: 10.3389/fnetp.2023.1298228.
17. Friston KJ. Functional and effective connectivity: a review. *Brain Connect.* 2011;1(1):13. DOI: 10.1089/brain.2011.0008.

18. Kralemann B, Pikovsky A, Rosenblum M. Reconstructing phase dynamics of oscillator networks. *Chaos*. 2011;21(2):025104. DOI: 10.1063/1.3597647.
19. Kralemann B, Pikovsky A, Rosenblum M. Reconstructing effective phase connectivity of oscillator networks from observations. *New J. Phys.* 2014;16:085013. DOI: 10.1088/1367-2630/16/8/085013.
20. Dick OE. Analysis of synchronization between time series obtained from anesthetized rats during pain exposure. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(2):209–222. DOI: 10.18500/0869-6632-003093.
21. Dick OE. Application of phase dynamics and recurrence modeling methods to assess the characteristics of the relationship between physiological rhythms. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(3):381–398. DOI: 10.18500/0869-6632-003165.
22. Daubechies I, Lu J, Wu HT. Synchrosqueezed wavelet transforms: An empirical mode decomposition-like tool. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 2011;30:243–261. DOI: 10.1016/j.acha.2010.08.002.
23. Mokhov II, Smirnov DA. A study of the mutual influence of the El Niño-Southern Oscillation and the North Atlantic and Arctic Oscillation processes using nonlinear methods. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2006;42(5):598–614.
24. Mokhov II, Smirnov DA. El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices. *Geophysical Research Letters*. 2006;33:L03708. DOI: 10.1029/2005GL024557
25. Thakur G, Brevdo E, Fučkar NS, Wu H-T. The synchrosqueezing algorithm for time-varying spectral analysis: robustness properties and new paleoclimate applications. *Signal Process.* 2013;93(5):1079–1094. DOI: 10.1016/j.sigpro.2012.11.029.
26. Kralemann B, Cimponeriu L, Rosenblum M, Pikovsky A, Mrowka R. Phase dynamics of coupled oscillators reconstructed from data. *Phys. Rev. E*. 2008;77(6):66205.
27. Smirnov DA, Bezruchko BP. Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series. *Phys. Rev. E*. 2003;68(4):046209. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.046209.
28. Smirnov DA, Bodrov MB, Bezruchko BP. Estimation of coupling between oscillators from time series via phase dynamics modeling: limits of method’s applicability. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2004;12(6):79–92. DOI: 10.18500/0869-6632-2004-12-6-79-92.
29. Tass P, Rosenblum MG, Weule J, Kurths J, Pikovsky A, Volkman J, Schnitzler A, Freund H-J. Detection of n:m phase locking from noisy data: application to magnetoencephalography. *Phys. Rev. Lett.* 1998;81(15):3291–3294. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.3291.
30. Thiel M, Romano MC, Kurths J, Rolf M., Kliegl R. Generating surrogates from recurrences. *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2008;366:545–557. DOI: 10.1098/rsta.2007.2109.
31. Ponomarenko VI, Karavaev AS, Borovkova EI, Hramkov AN, Kiselev AR, Prokhorov MD, Penzel T. Decrease of coherence between the respiration and parasympathetic control of the heart rate with aging. *Chaos*. 2021;31:073105. DOI: 10.1063/5.0056624.



*Дик Ольга Евгеньевна* — родилась в Междуреченске (1962). Окончила физический факультет Ленинградского государственного университета по направлению «Биофизика» (1985). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальностям «Биофизика» (1992, МГУ) и диссертацию на соискание учёной степени доктора биологических наук по специальностям «Физиология» (2018, ФИН РАН). С 1988 года работает в лаборатории «Физиология interoцепции» Института физиологии им. И. П. Павлова РАН. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, нелинейная динамика. Опубликовала свыше 90 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 199034 Санкт-Петербург, наб. Макарова, 6  
 Институт физиологии им. И. П. Павлова РАН  
 E-mail: dickviola@gmail.com  
 ORCID: 0000-0001-5056-1779  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 17280



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2026. Т. 34, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2026;34(3)

Научная статья  
УДК 530.182.1

DOI: 10.18500/0869-6632-003213  
EDN: VJZWZL

### Локализованные решения уравнения $\varphi^4$ в модели с тремя одинаковыми точечными примесями

М. И. Фахретдинов<sup>✉</sup>, Е. Г. Екомасов

Уфимский университет науки и технологий, Россия  
E-mail: ✉ fmi106tf@gmail.com, ekomasov@gmail.com

Поступила в редакцию 20.11.2025, принята к публикации 10.02.2026,  
опубликована онлайн 15.02.2026, опубликована 29.05.2026

**Аннотация.** Цель. В настоящей работе исследуются коллективные динамические эффекты в неинтегрируемой модели  $\varphi^4$  с тремя идентичными точечными притягивающими примесями. Изучается процесс возбуждения и последующая эволюция долгоживущих локализованных колебаний (примесных мод), инициированных прохождением кинка через систему примесей. Методы. Исследование проводится с использованием комбинированного подхода, сочетающего аналитические методы и прямое численное моделирование. В рамках аналитического рассмотрения, основанного на методе коллективных переменных для малых амплитуд колебаний, выведена система связанных линейных дифференциальных уравнений, описывающая динамику трех осцилляторов. Результаты. Решение этой системы позволило определить спектр коллективных возбуждений, состоящий из трех различных частот нормальных мод. Проанализирована зависимость этих частот от расстояния между примесями, показано их расщепление при малых расстояниях между примесями и асимптотическое слияние в частоту одиночной примеси при увеличении расстояния между примесями. Численное решение исходного нелинейного уравнения в частных производных подтвердило существование трех мод и позволило детально изучить их динамику. Установлено, что в зависимости от начальной скорости кинка и расстояния между примесями могут быть возбуждены различные типы колебаний: первая мода (синфазные колебания), вторая мода (колебания крайних волн в противофазе при неподвижной центральной) и третья мода, характеризующаяся противофазным движением центральной примеси относительно крайних. Обнаружено, что вторая и третья обладают пороговым характером локализации: они вносят вклад в динамику лишь при достижении критического расстояния, когда их частота опускается ниже величины  $\sqrt{2}$ . Сравнение аналитических и численных результатов показало хорошее количественное совпадение для больших расстояний и систематическое расхождение для малых, обусловленное нелинейностью потенциала. Заключение. Результаты работы демонстрируют, что введение третьей примеси приводит к качественному усложнению динамики системы, что открывает возможности для управления нелинейными волнами в средах с несколькими примесями.

**Ключевые слова:** кинк, бризер, уравнение  $\varphi^4$ , примесные моды, численное моделирование.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания, соглашение # 075-03-2024-123/1 от 15.02.2024, тема # 324-21.

**Для цитирования:** Фахретдинов М. И., Екомасов Е. Г. Локализованные решения уравнения  $\varphi^4$  в модели с тремя одинаковыми точечными примесями // Известия вузов. ПНД. 2026. Т. 34, № 3. С. 481–492. DOI: 10.18500/0869-6632-003213. EDN: VJZWZL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Localized solutions of the $\varphi^4$ equation in a model with three identical point impurities

M. I. Fakhretdinov<sup>✉</sup>, E. G. Ekomasov

Ufa University of Science and Technology, Russia  
E-mail: <sup>✉</sup>fmi106tf@gmail.com, ekomasoveg@gmail.com

Received 20.11.2025, accepted 10.02.2026, available online 15.02.2026, published 29.05.2026

**Abstract.** *Purpose.* In this paper, we investigate collective dynamic effects in a non-integrable  $\varphi^4$  model with three identical point-like attractive impurities. We study the excitation process and subsequent evolution of long-lived localized oscillations (impurity modes) initiated by the passage of a kink through the impurity system. *Methods.* The study is conducted using a combined approach that integrates analytical methods with direct numerical simulation. Within the analytical framework, based on the method of collective variables for small oscillation amplitudes, a system of coupled linear differential equations is derived to describe the dynamics of three oscillators. *Results.* The solution of this system allowed for the determination of the collective excitation spectrum, consisting of three distinct normal mode frequencies. The dependence of these frequencies on the distance between the impurities is analyzed, demonstrating their splitting at small distances and asymptotic convergence to the single-impurity frequency as the distance increases. Numerical solution of the original nonlinear partial differential equation confirmed the existence of three modes and allowed for a detailed study of their dynamics. It has been established that, depending on the initial kink velocity and the distance between the impurities, various types of oscillations can be excited: the first mode (in-phase oscillations), the second mode (oscillations of the outer waves in anti-phase with a stationary central one), and the third mode, characterized by the anti-phase motion of the central impurity relative to the outer ones. It was found that the second and third modes exhibit a threshold-like localization: they contribute to the dynamics only upon reaching a critical distance, when their frequency drops below  $\sqrt{2}$ . A comparison of analytical and numerical results showed good quantitative agreement for large distances and a systematic discrepancy for small ones, attributed to the nonlinearity of the potential. *Conclusion.* The results of the work demonstrate that the introduction of a third impurity leads to a qualitative increase in the complexity of the system dynamics, which opens up possibilities for controlling nonlinear waves in media with multiple impurities.

**Keywords:** kink, breather,  $\varphi^4$  equation, impurity modes, numerical simulation.

**Acknowledgements.** The authors express gratitude for the financial support rendered to the work on this paper by the State Assignment (Order №075-03-2024-123/1 dated February 15, 2024, topic №324-21).

**For citation:** Fakhretdinov MI, Ekomasov EG. Localized solutions of the  $\varphi^4$  equation in a model with three identical point impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2026;34(3):481–492. DOI: 10.18500/0869-6632-003213

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Нелинейное дифференциальное уравнение  $\varphi^4$ , как имеющее аналитические солитонные решения, интересно с фундаментальной точки зрения [1]. Также оно имеет много приложений в космологии, квантовой теории поля, биофизике, физике конденсированного состояния [1–6]. Для уравнения  $\varphi^4$  есть точное решение в виде кинка, но, в отличие от уравнения синус-Гордона (УСГ) [1, 7], нет локализованных в пространстве решений в виде уединенных солитонов и бризеров. Кинк уравнения  $\varphi^4$  отличается от кинка УСГ наличием внутренней моды колебаний [1]. Было обнаружено долгоживущее нелинейное метастабильное связанное состояние трех кинков, названное «тритон» [8]. Это состояние является продуктом симметричного столкновения двух кинков и антикинка.

Для практических приложений часто, как и УСГ, уравнение  $\varphi^4$  модифицируют, считая коэффициенты функциями от координат и времени [1, 7, 9–11]. Пространственную модуляцию потенциала часто называют примесью. К настоящему времени подробно исследован случай урав-

нения  $\varphi^4$  с одной примесью [1, 12]. Было показано, что одиночные точечные примеси способны рассеивать или захватывать кинки, а также генерировать локализованную волну (или примесную моду) [1]. В [13] рассмотрена динамика кинков для модели с одиночными протяженными примесями, имеющими пространственные профили Гаусса или Лоренца. Показано качественное согласие полученных результатов со случаем точечных примесей и существенное количественное влияние профиля примеси на форму локализованной примесной моды и рассеяние кинков на примесях. В [14] исследованы кинк-антикинкковые столкновения в присутствии протяженной примеси гауссовского вида. В [15] рассмотрены решения уравнения  $\varphi^4$  в модели с одиночной примесью, описываемой функцией гиперболического вида, в [16, 17], описываемой функцией прямоугольного вида. Динамика кинка для случая малых возмущений модели  $\varphi^4$  с помощью деформированного потенциала рассмотрена в [18].

Для УСГ в модели с двумя и тремя примесями получено много интересных результатов [19–22]. Для уравнения  $\varphi^4$  динамика локализованных волн была детально изучена для случая одной [12], а также двух примесей, как протяженных [23], так и точечных [24]. В этих работах было установлено, что взаимодействие между примесями приводит к расщеплению частоты одиночной примесной моды на две, соответствующие синфазным и антифазным коллективным колебаниям.

Настоящая работа делает следующий логический шаг и посвящена исследованию локализованных волн в системе с тремя точечными примесями. Этот переход не является тривиальным обобщением, поскольку введение третьей, центральной, примеси качественно изменяет симметрию системы и порождает новые динамические режимы, невозможные в конфигурации из двух примесей. В частности, как будет показано, наряду с модами, аналогичными синфазным и антифазным колебаниям пары, возникает третья мода. Она обладает уникальной структурой: в ней крайние примеси колеблются в фазе друг с другом, но в противофазе к центральной. Фундаментальной особенностью этой моды является пороговый характер её возбуждения. Исследование условий возбуждения этих мод и их роль в динамике системы является основной целью данной работы.

## 1. Основные уравнения и линейный анализ

Рассмотрим модифицированное уравнение  $\varphi^4$ :

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x)(u^2 - 1)u = 0, \quad (1)$$

где пространственная неоднородность  $K(x)$  взята в виде трех одинаковых точечных неоднородностей в виде дельта-функций Дирака  $\delta(x)$ ,  $\varepsilon$  — константа,  $d$  — расстояние между примесями:

$$K(x) = 1 - \varepsilon \delta(x) - \varepsilon \delta(x - d) - \varepsilon \delta(x - 2d). \quad (2)$$

Лагранжиан, соответствующий уравнению (1), имеет вид

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{4} K(x) (u^2 - 1)^2 \right] dx. \quad (3)$$

Для решения уравнения (1) с неоднородностью (2) можно использовать как начальное приближение известное точное решение в виде кинка для уравнения  $\varphi^4$  при  $K(x) = 1$  (4):

$$u(x, 0) = \tanh \left( \frac{x - v_0 t}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}} \right). \quad (4)$$

При этом кинк возбуждает локализованные на примесях долгоживущие колебания, также известные как примесные моды. Найдем решение уравнения (1), которое описывает такие колебания. Для этого используем метод коллективных переменных и анзац в виде [1, 12]:

$$u = \pm 1 + a_1(t) \exp(-\varepsilon |x|) + a_2(t) \exp(-\varepsilon |x - d|) + a_3(t) \exp(-\varepsilon |x - 2d|). \quad (5)$$

Подставив анзац (5) в выражение для Лагранжиана (3) и выполнив интегрирование по пространственной переменной, получим эффективный Лагранжиан для коллективных переменных  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $a_3(t)$ . Далее, используя уравнения Лагранжа–Эйлера, получим систему уравнений (6) для  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $a_3(t)$  (заметим, что в нем оставлены только линейные члены по  $a_i(t)$ ). Эта система уравнений эквивалентна системе, полученной в [22] для уравнения синус-Гордона в модели с тремя точечными примесями, однако с иными коэффициентами:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + a_1 \omega_1^2 + a_2 k_{12} + a_3 k_{13} = 0, \\ \ddot{a}_2 + a_2 \omega_2^2 + (a_1 + a_3) k_{21} = 0, \\ \ddot{a}_3 + a_3 \omega_3^2 + a_1 k_{13} + a_2 k_{12} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 2 + \frac{e^{-2d\varepsilon} \varepsilon^2 (-e^{6d\varepsilon} - 2d\varepsilon(1+d\varepsilon) + 2e^{4d\varepsilon}(1+d\varepsilon(3+d\varepsilon)) - e^{2d\varepsilon}(1+4d\varepsilon(1+d\varepsilon(3+d\varepsilon))))}{(-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon)(-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon(1+d\varepsilon))}, \\ \omega_2^2 = \frac{e^{-2d\varepsilon} (-4d\varepsilon^3 - e^{4d\varepsilon}(-2+\varepsilon^2) + e^{2d\varepsilon}(-2+\varepsilon(\varepsilon+2d(-2+3\varepsilon^2+d\varepsilon(-2+\varepsilon^2))))}{-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon(1+d\varepsilon)}, \\ k_{12} = \frac{2e^{-d\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2d^2}{-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon}}, \\ k_{13} = \frac{2e^{-2d\varepsilon} \varepsilon^2 (-1+e^{4d\varepsilon}(-1+d\varepsilon) - 3d\varepsilon(1+d\varepsilon) + e^{2d\varepsilon}(2+d\varepsilon(2-d\varepsilon)))}{(-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon)(-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon(1+d\varepsilon))}, \\ k_{21} = -\frac{2e^{-3d\varepsilon} (-1+e^{2d\varepsilon}) \varepsilon^2 (e^{2d\varepsilon} - d\varepsilon)}{-1+e^{2d\varepsilon}-2d\varepsilon(1+d\varepsilon)}. \end{cases} \quad (7)$$

Система (6) имеет решения в виде [22]:

$$\begin{cases} a_1(t) = a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\ a_2(t) = \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\ a_3(t) = a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \end{cases} \quad (8)$$

где  $a_{01}$ ,  $a_{02}$ ,  $a_{03}$  – константы, определяемые из начальных условий, а остальные параметры имеют вид

$$\begin{cases} \Omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + k_{13} \mp \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2}, \\ \eta_{21} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - k_{13} - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2k_{12}}, \\ \eta_{12} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13} + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{4k_{21}}, \\ \Omega_3^2 = \omega_1^2 - k_{13}. \end{cases} \quad (9)$$

Частоты примесных мод  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  выражаются через параметры примесей  $\varepsilon, d$  следующим образом:

$$\Omega_1^2 = (2 - \varepsilon^2) + \frac{e^{-2d\varepsilon} \varepsilon^2 (-1 + e^{2d\varepsilon} (1 + 2d\varepsilon) - 2d\varepsilon (2 + 3d\varepsilon))}{(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon)(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon (1 + d\varepsilon))} - \sqrt{\frac{e^{-4d\varepsilon} \varepsilon^4 (1 + 8e^{6d\varepsilon} - 3e^{4d\varepsilon} (5 + 8d\varepsilon) + 2e^{2d\varepsilon} (3 + 4d\varepsilon (3 + 2d\varepsilon)))}{(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon (1 + d\varepsilon))^2}}, \quad (10)$$

$$\Omega_2^2 = (2 - \varepsilon^2) + \frac{e^{-2d\varepsilon} \varepsilon^2 (-1 + e^{2d\varepsilon} (1 + 2d\varepsilon) - 2d\varepsilon (2 + 3d\varepsilon))}{(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon)(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon (1 + d\varepsilon))} + \sqrt{\frac{e^{-4d\varepsilon} \varepsilon^4 (1 + 8e^{6d\varepsilon} - 3e^{4d\varepsilon} (5 + 8d\varepsilon) + 2e^{2d\varepsilon} (3 + 4d\varepsilon (3 + 2d\varepsilon)))}{(-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon (1 + d\varepsilon))^2}}, \quad (11)$$

$$\Omega_3^2 = (2 - \varepsilon^2) + \frac{2e^{-2d\varepsilon} (-1 + e^{2d\varepsilon}) \varepsilon^2}{-1 + e^{2d\varepsilon} - 2d\varepsilon}. \quad (12)$$

Анализ структуры решений (8) позволяет найти три типа возможной зависимости амплитуд  $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$  от времени при возбуждении только одного гармонического колебания, когда все три локализованные волны (или примесные моды) колеблются с одинаковой частотой. Первый тип колебаний является синфазным: все локализованные волны колеблются в одинаковой фазе (рис. 1, *a*). Характерно, что частота  $\Omega_1$  этого типа колебаний при уменьшении параметра  $d$  уменьшается (см. рис. 2). Второй тип колебаний — антифазный: первая и третья примесные моды колеблются антифазно, а вторая между ними покоится (см. рис. 1, *b*). Его частота  $\Omega_3$  при уменьшении расстояния  $d$  увеличивается (см. рис. 2). Третий тип колебаний синфазно-антифазный: первая и третья примесные моды колеблются в фазе, а вторая между ними — в противоположной им (см. рис. 1, *c*). Его частота  $\Omega_2$  при уменьшении  $d$  увеличивается (см. рис. 2). В пределе  $d \rightarrow \infty$  частоты примесных мод стремятся к частоте одиночной примеси  $\sqrt{2 - \varepsilon^2}$  (показана на рис. 2 пунктирной линией):

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \Omega_1 = \lim_{d \rightarrow \infty} \Omega_2 = \lim_{d \rightarrow \infty} \Omega_3 = \sqrt{2 - \varepsilon^2}. \quad (13)$$

Фундаментальное усложнение системы из трех примесей по сравнению с системой из двух примесей проявляется в том, что условия возбуждения локализованной волны для центральной примеси отличаются от условий возбуждения локализованных волн на крайних

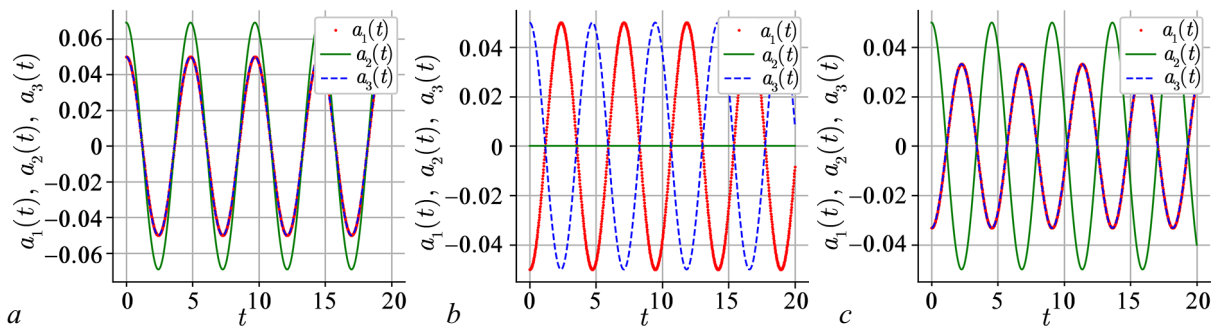


Рис. 1. *a* — Первая мода (синфазная); *b* — вторая мода (антифазная); *c* — третья мода (синфазно-антифазная) (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* — First mode (in-phase); *b* — second mode (anti-phase); *c* — third mode (in-phase-anti-phase) (color online)

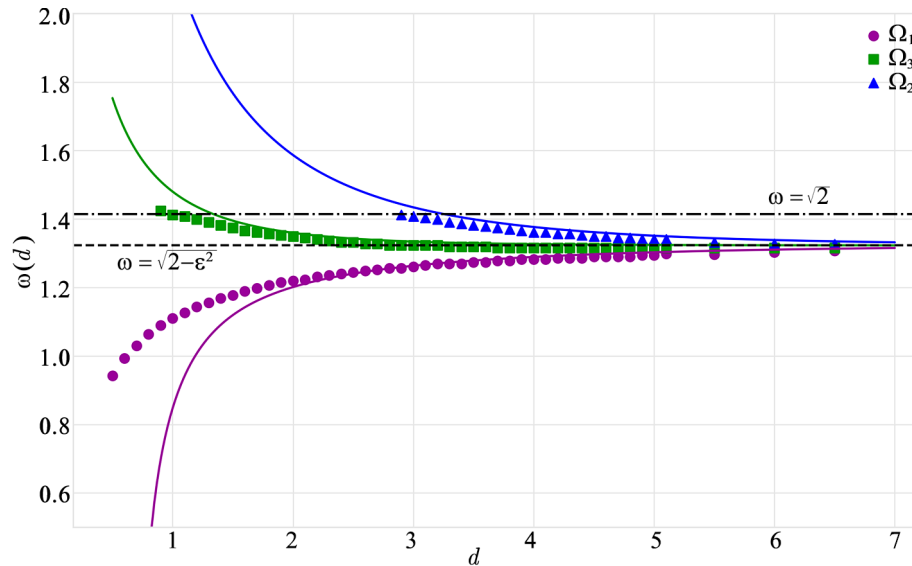


Рис. 2. Зависимость частот  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  от расстояния между примесями  $d, \varepsilon = 0.5, v_0 = 0.6$ . Линии — аналитический расчет, маркеры — численные данные. Штрихпунктирная линия  $\omega = \sqrt{2}$  (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependence of frequencies  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  on the distance between impurities  $d, \varepsilon = 0.5, v_0 = 0.6$ . Lines — analytical calculation, markers — numerical data. Dash-dotted line  $\omega = \sqrt{2}$  (color online)

примесях. При этом вследствие симметричности задачи амплитуды колебаний локализованных волн на первой и третьей примесях во всех случаях одинаковы.

## 2. Численное исследование

Для численного решения (1) будем использовать метод прямых на интервале  $x \in [-L, L], L = 60$ , шаг по координате  $\Delta x = 0.01$ , а шаг по времени будет адаптивным и определяется решателем системы ОДУ, возникающей в ходе метода прямых. Граничные условия  $u_x(x = -L) = u_x(x = L) = 0$ . В качестве начальных условий используем точное решение в виде кинка (4):

$$u(x, 0) = \tanh\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}}\right), \quad u_t(x, 0) = -\frac{v_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}}\right)}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}}, \quad (14)$$

где  $x_0 = -10$  — начальная координата кинка,  $0 \leq v_0 < 1$  — начальная скорость кинка. На границах расчетной области использовался метод поглощающего слоя (Sponge Layer) [27]. В уравнение (1) был введен дополнительный диссипативный член вида  $\sigma(x)u_t$ , где функция вязкости  $\sigma(x) = \alpha [e^{\beta(x-L)} + e^{-\beta(x+L)}]$  экспоненциально возрастает при приближении к границам. Параметры  $\alpha = 1.5, \beta = 0.8$  были подобраны таким образом, чтобы исключить влияние волн, отраженных от границ, на исследуемую динамику, сохраняя при этом пренебрежимо малое значение вязкости в основной области моделирования.

Дельта-функция аппроксимировалась следующей функцией:

$$\delta(x) \approx \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \exp(-\gamma^2 x^2), \quad (15)$$

где  $\gamma = 80$ .

Рассмотрим локализованные на точечных примесях колебания:  $u(x=0, t)$ ,  $u(x=d, t)$ ,  $u(x=2d, t)$ . Будем рассматривать только случай полного прохождения кинком всех трех примесей, который зависит от начальной скорости кинка и расстояния между примесями, см. точечную диаграмму на рис. 3.

Частоты колебаний найдем с помощью дискретного преобразования Фурье при  $t > 500$ . Зависимость частот  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  от расстояния между примесями  $d$  при  $v_0 = 0.6$  показана на рис. 2 в виде кружочков, треугольников и квадратиков. Важной особенностью, выявленной при численном эксперименте, является пороговый характер возбуждения частот  $\Omega_3$  и  $\Omega_2$ . Они возбуждаются лишь при достижении критического расстояния  $d$ , когда величина этих частот становится меньше чем  $\sqrt{2}$  — частоты, соответствующей простым вакуумным колебаниям уравнения  $\varphi^4$  [1].

Данный вывод полностью подтверждается результатами спектрального анализа. На рис. 4, *b* при  $d = 2.0$  в спектре наблюдаются только два пика ( $\Omega_1$  и  $\Omega_3$ ). Заметим, что  $\Omega_3$  в данном случае меньше  $\sqrt{2}$ . При  $d = 3.0$  (рис. 4, *a*), когда частота  $\Omega_2$  опускается ниже порогового значения, в спектре Фурье начинает проявляться третий пик. Заметим, что вблизи значения  $\sqrt{2}$  амплитуда этой моды остается малой. Она вносит заметный вклад в динамику волны локализованной на центральной примеси лишь при дальнейшем увеличении  $d$ .

При малых расстояниях ( $d \lesssim 0.9$ ) возбуждается одна локализованная волна бризерного типа на всех трех примесях (см. рис. 5). Она совершает колебания с частотой  $\Omega_1$ . Отметим, что в этой области наблюдается наибольшее расхождение между аналитическими и численными результатами (больше, чем для случая двух примесей [24]), что обусловлено сильным нелинейным взаимодействием примесей, которое не в полной мере учитывается линейным приближением.

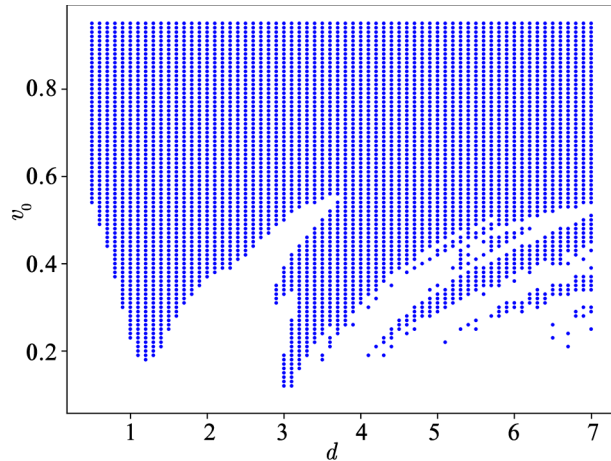


Рис. 3. Область полного прохождения примесей кинком в зависимости от расстояния между примесями  $d$  и начальной скорости кинка  $v_0$  (показана точками)

Fig. 3. Region of full kink transmission through impurities depending on the distance between impurities  $d$  and the initial kink velocity  $v_0$  (shown by dots)

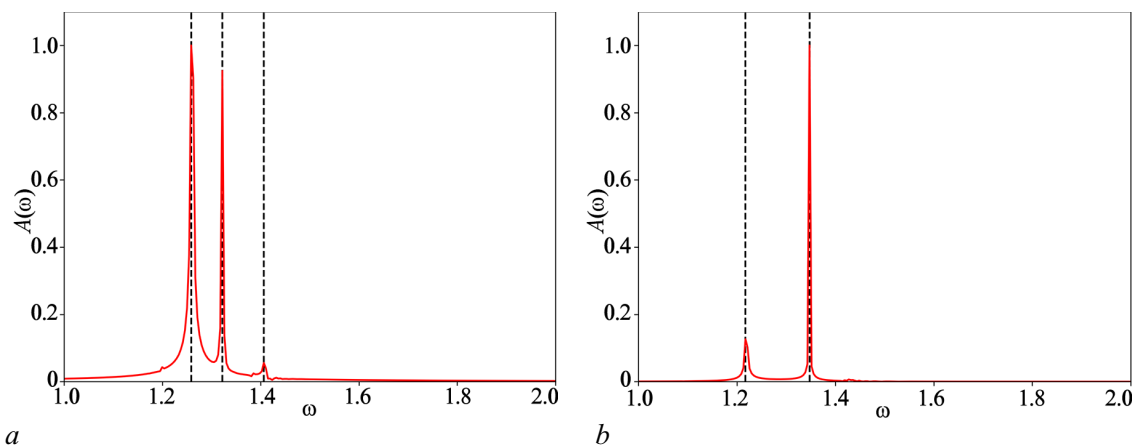


Рис. 4. Дискретное Фурье-преобразование  $A(\omega)$  для двух значений  $d$ :  $d = 3.0$  (*a*),  $d = 2.0$  (*b*)

Fig. 4. Discrete Fourier transform  $A(\omega)$  for two values of  $d$ :  $d = 3.0$  (*a*),  $d = 2.0$  (*b*)

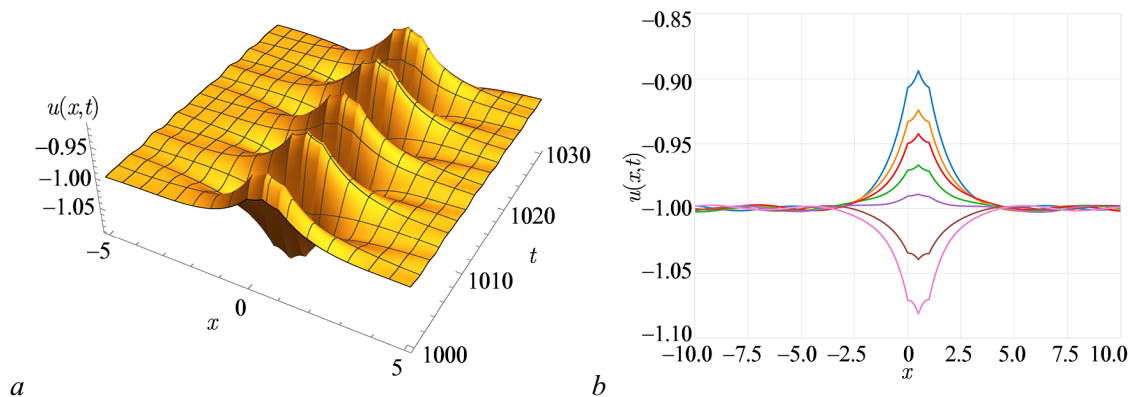


Рис. 5. Зависимость при  $d = 0.5, v_0 = 0.5$ :  $a - u(x, t)$ ;  $b - u(x, t)$  в отдельные моменты времени (цвет онлайн)  
 Fig. 5. Dependence for  $d = 0.5, v_0 = 0.5$ :  $a - u(x, t)$ ;  $b - u(x, t)$  at specific moments of time (color online)

На рис. 6 представлена пространственно-временная динамика локализованных волн при различных расстояниях  $d$ . При малых расстояниях (рис. 6,  $a$ ) наблюдаются синфазные колебания трех локализованных волн как единого целого с частотой  $\Omega_1$ . С увеличением расстояния до  $d = 2.0$  (рис. 6,  $b$ ) в системе дополнительно появляется мода  $\Omega_3$ . В этом режиме локализованная волна на центральной примеси колеблется с малой амплитудой. При  $d \gtrsim 3.0$  (рис. 6,  $c$ , рис. 6,  $d$ ) в спектре частот появляется мода  $\Omega_2$ . Таким образом, динамика системы при  $d > 3.0$  демонстрирует фундаментальное усложнение связанной динамики локализованных волн в трехпримесной модели по сравнению с двухпримесной.

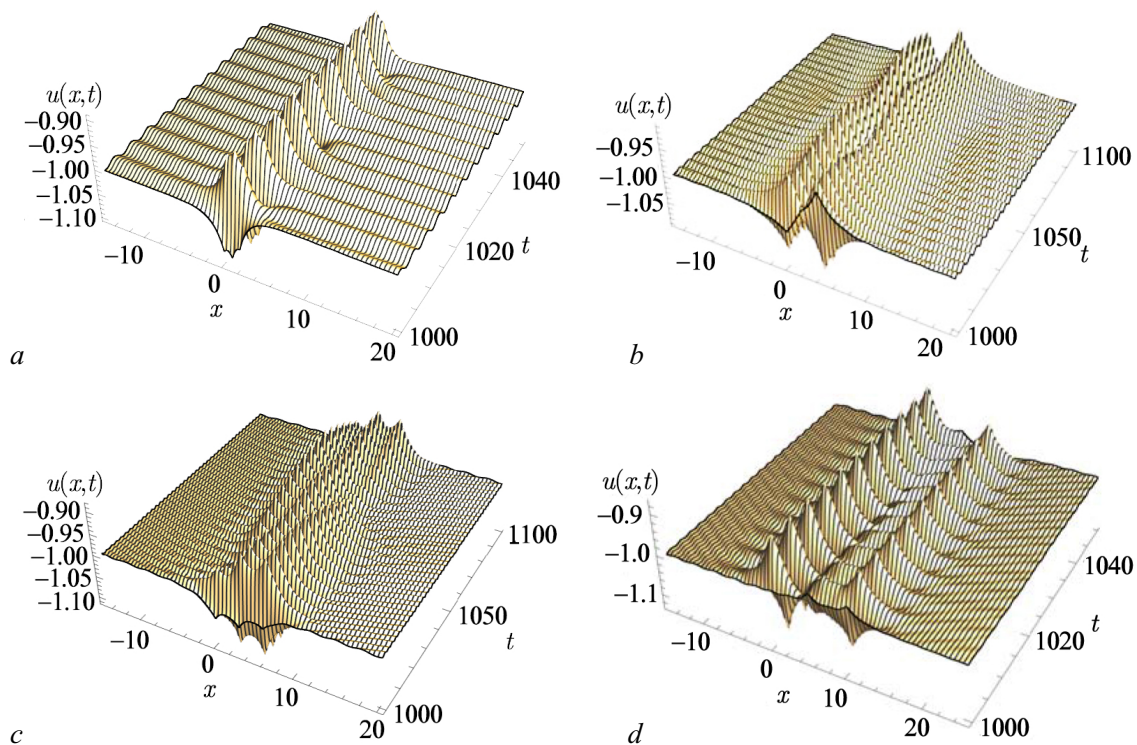


Рис. 6. Зависимость  $u(x, t)$  при  $v = 0.6$  и  $d = 1.0$  ( $a$ ),  $d = 2.0$  ( $b$ ),  $d = 3.0$  ( $c$ ),  $d = 5.0$  ( $d$ )  
 Fig. 6. Dependence of  $u(x, t)$  for  $v = 0.6$  and  $d = 1.0$  ( $a$ ),  $d = 2.0$  ( $b$ ),  $d = 3.0$  ( $c$ ),  $d = 5.0$  ( $d$ )

## Заключение

В настоящей работе исследована структура и динамика локализованных на трех точечных примесях волн бризерного типа в модели  $\varphi^4$ . С помощью метода коллективных переменных получена система уравнений, описывающая связанную динамику трех примесных осцилляторов, и найдены аналитические зависимости частот нормальных мод от расстояния  $d$  между примесями и глубины примеси  $\varepsilon$ .

Показано, что наличие третьей примеси приводит к качественному усложнению динамики локализованных волн по сравнению с двухпримесной моделью. Это усложнение обусловлено наличием еще одной моды нормальных колебаний ( $\Omega_2$ ), обладающей пороговым характером возбуждения. Выявлены три характерных режима связанной динамики локализованных волн: при малых расстояниях ( $d \lesssim 1$ ) на всех трех примесях наблюдается решение в виде одной локализованной волны бризерного типа, колеблющейся с частотой  $\Omega_1$ ; в диапазоне  $1 \lesssim d \lesssim 3$  наблюдаются три локализованные волны, колеблющиеся с частотами  $\Omega_1, \Omega_3$ ; при  $d \gtrsim 3$  наблюдаются связанные колебания трех локализованных волн, в спектре частот которых появляется мода  $\Omega_2$ , что существенно усложняет картину колебаний. Обнаруженные механизмы перераспределения энергии между локализованными на примесях волнами открывают новые возможности для управления локализованными возбуждениями в нелинейных средах.

## Список литературы

1. A Dynamical Perspective on the  $\varphi^4$  Model: Past, Present and Future. Kevrekidis P., Cuevas-Maraver J. (eds). Cham: Springer, 2019. 311 p. DOI: 10.1007/978-3-030-11839-6.
2. Gani V. A., Kudryavtsev A. E., Lizunova M. A. Kink interactions in the (1+1)-dimensional  $\varphi^6$  model // Phys. Rev. D. 2014. Vol. 89, no. 12. P. 125009. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.125009.
3. Marjaneh A. M., Saadatmand D., Zhou K., Dmitriev S. V., Zomorrodian M. E. High energy density in the collision of  $n$  kinks in the  $\varphi^4$  model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2017. Vol. 49. P. 30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
4. Yan H., Zhong Y., Liu Y. X., Maeda K. I. Kink–antikink collision in a Lorentz-violating  $\varphi^4$  model // Phys. Lett. B. 2020. Vol. 807. P. 135542. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135542.
5. Yamaletdinov R. D., Slipko V. A., Pershin Y. V. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the  $\varphi^4$  field model // Phys. Rev. B. 2017. Vol. 96, no. 9. P. 094306. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.094306.
6. Yamaletdinov R. D., Romańczukiewicz T., Pershin Y. V. Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects // Carbon. 2019. Vol. 141. P. 253–257. DOI:10.1016/j.carbon.2018.09.032.
7. Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P., Williams F. (eds) The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer, 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.
8. Гетманов Б. С. Связанные состояния солитонов в модели теории поля  $\varphi_2^4$  // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 24, № 5. С. 323–327.
9. Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G., Fatykhov M. A., Javidan K. Effect of the  $\varphi^4$  kink's internal mode at scattering on a  $\mathcal{PT}$ -symmetric defect // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101, № 7. С. 550–555.
10. Saadatmand D., Javidan K. Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory // Braz. J. Phys. 2013. Vol. 43. P. 48–56. DOI: 10.1007/s13538-012-0113-y.
11. Marjaneh A., Simas F., Bazeia D. Collisions of kinks in deformed  $\varphi^4$  and  $\varphi^6$  models // Chaos, Solitons and Fractals. 2022. Vol. 164. P. 112723. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112723.

12. Zhang F., Kivshar Y. S., Vázquez L. Resonant kink-impurity interactions in the  $\varphi^4$  model // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46, no. 8. P. 5214–5220. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.5214.
13. Lizunova M. A., Kager J., de Lange S., van Wezel J. Kinks and realistic impurity models in  $\varphi^4$ -theory // Int. J. Mod. Phys. B. 2022. Vol. 36, no. 5. P. 2250042. DOI: 10.1142/S0217979222500424.
14. Lizunova M., Kager J., de Lange S., van Wezel J. Emergence of oscillons in kink-impurity interactions // J. Phys. A: Math. Theor. 2021. Vol. 54, no. 31. P. 315701. DOI: 10.1088/1751-8121/ac0d36.
15. Romańczukiewicz T., Shnir Y. Oscillons in the presence of external potential // J. High Energ. Phys. 2018. Vol. 2018. P. 101. DOI: 10.1007/JHEP01(2018)101.
16. Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Yu., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G. Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the  $\varphi^4$  model // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2024. Vol. 20, no. 1. P. 15–26. DOI: 10.20537/nd231206.
17. Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Yu., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G. Kink dynamics in the  $\varphi^4$  model with extended impurity // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2023. Vol. 19, no. 3. P. 303–320. DOI: 10.20537/nd230603.
18. Dorey P., Romańczukiewicz T. Resonant kink-antikink scattering through quasinormal modes // Phys. Lett. B. 2018. Vol. 779. P. 117–123. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.02.003.
19. Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N. Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities // Braz. J. Phys. 2018. Vol. 48, no. 6. P. 576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.
20. Самсонов К. Ю., Кабанов Д. К., Назаров В. Н., Екомасов Е. Г. Локализованные нелинейные волны уравнения синус-Гордона в модели с тремя протяженными примесями // Компьютерные исследования и моделирование. 2024. Т. 16, № 4. С. 855–868. DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-4-855-868.
21. Екомасов Е. Г., Самсонов К. Ю., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В. Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми притягивающими примесями // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011.
22. Екомасов Е. Г., Кудрявцев Р. В., Самсонов К. Ю., Назаров В. Н., Кабанов Д. К. Динамика кинка уравнения синус-Гордона в модели с тремя одинаковыми притягивающими или отталкивающими примесями // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 6. С. 693–709. DOI: 10.18500/0869-6632-003069.
23. Фахретдинов М. И., Екомасов Е. Г. Локализованные волны уравнения  $\varphi^4$  в модели с двумя протяженными примесями // Компьютерные исследования и моделирование. 2025. Т. 17, № 3. С. 437–449. DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-3-437-449.
24. Fakhretdinov M. I., Kabanov D. K., Ekomasov E. G. Localized waves of the  $\varphi^4$  equation in the model with two-point impurities // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2025. Vol. 21, no. 3. P. 419–432. DOI: 10.20537/nd250703.
25. Schiesser W. E. The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations. San Diego: Academic Press, 2012. 326 p.
26. Белова Т. И., Кудрявцев А. Е. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // УФН. 1997. Т. 167. С. 377–406. DOI: 10.3367/UFNr.0167.199704b.0377.
27. Israeli M., Orszag S. A. Approximation of radiation boundary conditions // Journal of Computational Physics. 1981. Vol. 41, no. 1. P. 115–135. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90082-6.

## References

1. A Dynamical Perspective on the  $\varphi^4$  Model: Past, Present and Future. Kevrekidis P, Cuevas-Maraver J, editors. Cham: Springer; 2019. 311 p. DOI: 10.1007/978-3-030-11839-6.

2. Gani VA, Kudryavtsev AE, Lizunova MA. Kink interactions in the (1+1)-dimensional  $\varphi^6$  model. *Phys. Rev. D.* 2014;89(12):125009. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.125009.
3. Marjaneh AM, Saadatmand D, Zhou K, Dmitriev SV, Zomorrodian ME. High energy density in the collision of  $n$  kinks in the  $\varphi^4$  model. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2017;49:30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
4. Yan H, Zhong Y, Liu YX, Maeda KI. Kink–antikink collision in a Lorentz-violating  $\varphi^4$  model. *Phys. Lett. B.* 2020;807:135542. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135542.
5. Yamaletdinov RD, Slipko VA, Pershin YV. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the  $\varphi^4$  field model. *Phys. Rev. B.* 2017;96(9):094306. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.094306.
6. Yamaletdinov RD, Romańczukiewicz T, Pershin YV. Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects. *Carbon.* 2019;141:253–257. DOI: 10.1016/j.carbon.2018.09.032.
7. The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cuevas-Maraver J, Kevrekidis P, Williams F, editors. Cham: Springer; 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.
8. Getmanov BS. Soliton bound states in the  $\varphi^4$  in two-dimensions field theory. *JETP Lett.* 1976;24:291–295.
9. Saadatmand D, Dmitriev SV, Borisov DI, Kevrekidis PG, Fatykhov MA, Javidan K. Effect of the  $\varphi^4$  kink’s internal mode at scattering on a  $\mathcal{PT}$ -symmetric defect. *JETP Lett.* 2015;101:497–502. DOI: 10.1134/S0021364015070140.
10. Saadatmand D, Javidan K. Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory. *Braz. J. Phys.* 2013;43:48–56. DOI: 10.1007/s13538-012-0113-y.
11. Marjaneh A, Simas F, Bazeia D. Collisions of kinks in deformed  $\varphi^4$  and  $\varphi^6$  models. *Chaos, Solitons and Fractals.* 2022;164:112723. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112723.
12. Zhang F, Kivshar YS, Vázquez L. Resonant kink-impurity interactions in the  $\varphi^4$  model. *Phys. Rev. A.* 1992;46(8):5214–5220. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.5214.
13. Lizunova MA, Kager J, de Lange S, van Wezel J. Kinks and realistic impurity models in  $\varphi^4$ -theory. *Int. J. Mod. Phys. B.* 2022;36(5):2250042. DOI: 10.1142/S0217979222500424.
14. Lizunova M, Kager J, de Lange S, van Wezel J. Emergence of oscillons in kink–impurity interactions. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2021;54(31):315701. DOI: 10.1088/1751-8121/ac0d36.
15. Romańczukiewicz T, Shnir Y. Oscillons in the presence of external potential. *J. High Energ. Phys.* 2018;2018:101. DOI: 10.1007/JHEP01(2018)101.
16. Fakhretdinov MI, Samsonov KYu, Dmitriev SV, Ekomasov EG. Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the  $\varphi^4$  model. *Russ. J. Nonlinear Dyn.* 2024;20(1):15–26. DOI: 10.20537/nd231206.
17. Fakhretdinov MI, Samsonov KYu, Dmitriev SV, Ekomasov EG. Kink dynamics in the  $\varphi^4$  model with extended impurity. *Russ. J. Nonlinear Dyn.* 2023. Vol. 19;(3):303–320. DOI: 10.20537/nd230603.
18. Dorey P, Romańczukiewicz T. Resonant kink–antikink scattering through quasinormal modes. *Phys. Lett. B.* 2018;779:117–123. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.02.003.
19. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV, Dmitriev SV, Nazarov VN. Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities. *Braz. J. Phys.* 2018;48(6):576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.
20. Samsonov KYu, Kabanov DK, Nazarov VN, Ekomasov EG. Localized nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three extended impurities. *Comput. Res. Model.* 2024;16(4):855–868. DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-4-855-868.
21. Ekomasov EG, Samsonov KYu, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. Nonlinear waves of the sine-

- Gordon equation in the model with three attracting impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(6):749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011.
22. Ekomasov EG, Kudryavtsev RV, Samsonov KYu, Nazarov VN, Kabanov DK. Kink dynamics of the sine-Gordon equation in a model with three identical attracting or repulsive impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(6):693–709. DOI: 10.18500/0869-6632-003069.
  23. Fakhretdinov MI, Ekomasov EG. Localized waves of the  $\varphi^4$  equation in models with two extended impurities. *Comput. Res. Model.* 2025;17(3):437–449. DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-3-437-449.
  24. Fakhretdinov MI, Kabanov DK, Ekomasov EG. Localized waves of the  $\varphi^4$  equation in the model with two-point impurities. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2025;21(3):419–432. DOI: 10.20537/nd250703.
  25. Schiesser WE. *The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations*. San Diego: Academic Press; 2012. 326 p.
  26. Belova TI, Kudryavtsev AE. Solitons and their interactions in classical field theory. *Phys. Usp.* 1997;40:359–387. DOI: 10.1070/PU1997v040n04ABEH000227.
  27. Israeli M, Orszag SA. Approximation of radiation boundary conditions. *Journal of Computational Physics*. 1981;41(1):115–135. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90082-6.



*Фахретдинов Марат Ирекович* — родился в Уфе (1984). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (2007). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Теоретическая физика». Доцент кафедры теоретической физики Уфимского университета науки и технологий. Область исследовательских интересов — нелинейные волны, вычислительная физика. Опубликовал около 50 научных и методических работ.

Россия, Республика Башкортостан, 450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32/1  
 Уфимский университет науки и технологий  
 E-mail: fmi106tf@gmail.com  
 ORCID: 0000-0002-5338-2933  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 586430



*Екомасов Евгений Григорьевич* — родился в с. Анучино Приморского края (1958). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (1980). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Физика магнитных явлений» (1991, МГУ) и доктора физико-математических наук по специальности «Физика конденсированного состояния» (2005, ЧелГУ). Профессор кафедры теоретической физики Уфимского университета науки и технологий. Награжден Нагрудным знаком «Почетный работник высшего образования РФ» (2011) и Почетной грамотой Министерства образования и науки РФ (2008). Область исследовательских интересов — теоретическая и математическая физика, физика конденсированного состояния, спинтроника, вычислительная физика. Опубликовал более 200 научных и методических работ.

Россия, Республика Башкортостан, 450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32/1  
 Уфимский университет науки и технологий  
 E-mail: ekomasoveg@gmail.com  
 ORCID: 0000-0002-6194-3358  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 29060

## EDITOR-IN-CHIEF

*Yu. V. Gulyaev*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

## DEPUTY EDITORS

*I. V. Sysoev*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. N. Chumachenko*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

## MANAGING EDITOR

*M. V. Sysoeva*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

## EDITORIAL BOARD

*V. M. Anikin*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*B. P. Bezruchko*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*S. Boccaletti*, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

*A. M. Bykov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

*N. S. Ginzburg*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*S. V. Gonchenko*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. S. Dmitriev*, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*O. I. Kanakov*, Ph.D., Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*S. A. Kashchenko*, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

*A. V. Kraskov*, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

*N. V. Kuznetsov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

*G. van Luijelaar*, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

*A. Lüttjohann*, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

*G. G. Malinetskiy*, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

*V. V. Matrosov*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. B. Neiman*, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

*V. I. Nekorkin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. N. Pisarchik*, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

*A. V. Porubov*, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

*V. V. Tuchin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. M. Feigin*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*E. Ya. Frisman*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute for Complex Analysis of Regional Problems of the RAS (Birobidzhan, Russia)

*A. E. Hramov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Plekhanov Russian University of Economics (Moscow, Russia)

*V. A. Tsarev*, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

*V. A. Cherepenin*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*M. V. Shitikova*, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

*V. G. Yakhno*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >