

**Каталитическая модель массового обслуживания
на примере циклической очереди**

А. Т. Мустафин¹, А. К. Кантарбаева²

¹Казахский национальный исследовательский технический
университет им. К. И. Сатпаева

Казахстан, 050013 Алматы, ул. Сатпаева, 22

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Казахстан, 050040 Алматы, просп. аль-Фараби, 71

E-mail: butsuri123@gmail.com, ratnakka@gmail.com

Автор для переписки Мустафин Алмаз Тлемисович, butsuri123@gmail.com

*Поступила в редакцию 29.07.2019, принята к публикации 26.08.2019, опубликована
31.10.2019*

Сформулирована и исследована детерминистическая («жидкостная») модель системы массового обслуживания с открытой на вход и выход циклической очередью с возможностью отказов от получения услуги. Модель представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, переменными которых являются клиенты, ожидающие обслуживания, клиенты, получившие услугу, и серверы (каналы обслуживания). Цель работы – вывести минимальную математическую модель процесса оказания услуги как обобщённой псевдохимической реакции с катализатором. Особенность подхода состоит в представлении о провайдере услуги как о своего рода ферменте-катализаторе, который осуществляет трансформацию клиентов из категории ожидающих обслуживания в категорию получивших услугу, возвращаясь в исходное состояние после каждого акта конверсии. С междисциплинарной точки зрения, биохимическую реакцию и взаимодействие потребителя с провайдером объединяет образование короткоживущего комплекса – это соответственно фермент-субстрат и клиент-сервер. Построив базовую модель акта услуги, мы показываем её работоспособность на примере циклической системы массового обслуживания. Сформулированная модель циклической очереди исследуется методами качественной теории дифференциальных уравнений. Известный из практики факт, что среднее время обслуживания намного короче характерного времени ожидания, делает исходную систему уравнений сингулярно возмущённой. Методом многих масштабов система расщепляется на медленную и быструю подсистемы, описывающие соответственно динамику клиентов и серверов. Результаты. Показано, что в адиабатическом приближении количество занятых обслуживанием серверов мгновенно отслеживает текущую длину очереди (то есть спрос) в соответствии с известными соотношениями для квазистационарных концентраций ферментативной кинетики. Найдено физически допустимое стационарное решение медленной подсистемы и доказана его асимптотическая устойчивость. Проведён параметрический анализ стационарного состояния. Получен практический вывод о том, что стационарный спрос на услугу остаётся низким независимо от частоты отказов при входящем потоке клиентов, не превышающем

некоторый критический уровень. Предложенный формализм также позволяет вывести в аналитическом виде клиринговую функцию – зависимость скорости обслуживания от текущего спроса. Показано, что формула клиринговой функции применима во всех случаях, когда время обслуживания меньше времени ожидания, и необязательно только в стационарном режиме работы системы.

Ключевые слова: очередь, отказ, повторное требование, время обслуживания, время ожидания, клиринговая функция.

Образец цитирования: Мустафин А. Т., Кантарбаева А. К. Каталитическая модель массового обслуживания на примере циклической очереди // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, No 5. С. 53–71. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-5-53-71>

A catalytic model of service as applied to the case of a cyclic queue

A. Mustafin¹, A. Kantarbayeva²

¹K. I. Satbayev Kazakh National Research Technical University
22 Satbayev St., Almaty, 050013, Kazakhstan

²al-Farabi Kazakh National University
71 al-Farabi Ave., Almaty, 050040, Kazakhstan

E-mail: butsuri123@gmail.com, ratnakka@gmail.com

Correspondence should be addressed to A. Mustafin, butsuri123@gmail.com

Received 29.07.2019, accepted for publication 26.08.2019, published 31.10.2019

The research is devoted to the development of a deterministic («fluid») model for the open cyclical service system with abandonment and re-entry. The model is the system of coupled nonlinear ordinary differential equations for the following variables: (i) potential customers awaiting the service in the queue, (ii) served customers, (iii) busy servers, and (iv) free servers. Aim of the work is to derive a minimal mathematical model of the service process treated as a generalized pseudochemical reaction with catalyst. The key feature of our approach is the vision of service provider as a kind of enzyme that shifts customers from the category of «waiting in a queue» to the category of «served». The catalyst-facilitator does not get used up in the process and can continue to act repeatedly. From the interdisciplinary perspective, both the biochemical reaction, and the consumer-provider interaction share a common trait: formation of a short-lived intermediate complex (enzyme-substrate and client-server, respectively). Having constructed a basic model of a service act, we verify its workability by the example of a cyclic service system. The formulated model of a cyclic queue is investigated by methods of the qualitative theory of differential equations. The empirical fact that the average service time is much shorter than the characteristic waiting time makes the original system of equations singularly perturbed. Using the multiple-scale method the system is decomposed into slow and fast subsystems governing the respective dynamics of clients and servers. Results. Under the adiabatic approximation, the number of busy servers is shown to hastily instantly adapt to the momentary queue length (i.e. demand) in accordance with the well-known relationships for quasi-steady-state concentrations of enzyme kinetics. The physically feasible steady-state of the slow

subsystem is found and proven to be asymptotically stable. A parametric analysis of the model's steady state is performed. A practical conclusion has been drawn, that as long as the arrival rate of new customers remains below a certain threshold value, the steady-state demand will keep relatively low regardless of the abandonment rate. The proposed formalism also allows us to derive analytically the clearing function–functional response of the output (number of served customers in a unit of time) to the current demand, and to suggest the conditions of its applicability. It is shown that the clearing function formula remains valid in all cases when the service time is shorter than the waiting time, and not necessarily only in the steady-state mode of operation.

Key words: queue, abandonment, re-entry, service time, waiting time, clearing function.

Reference: Mustafin A., Kantarbayeva A. A catalytic model of service as applied to the case of a cyclic queue. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 5, pp. 53–71. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-5-53-71>