

**Наследие Александра Михайловича Ляпунова  
и нелинейная динамика**

*Р. Р. Мухин*

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,  
филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»  
Россия, 309516 Старый Оскол, Белгородской обл., мкр. Макаренко, 42  
E-mail: mukhiny@mail.ru

*Поступила в редакцию 27.04.2018, принята к публикации 29.05.2018*

**Цель.** Целью работы является изучение научного наследия А.М. Ляпунова с позиций нелинейной физики. Фундаментальной важности вклад Ляпунова определяется не только созданными им методами, которые вошли в основу математического аппарата при изучении нелинейных явлений. Его идеи и введенные им понятия способствовали формированию концепций и принципов нелинейной динамики. **Метод.** Исследование основано на анализе оригинальных работ Ляпунова с привлечением имеющейся литературы, касающейся его творчества. **Результаты.** Творчество Ляпунова тесно переплетается с деятельностью А. Пуанкаре, среди многих других фундаментальных достижений которого особое значение имеет качественная теория, составившая концептуальную основу нелинейной динамики. Ляпунов явился ближайшим продолжателем Пуанкаре в области качественной теории. Качественной по своей сути является теория устойчивости Ляпунова, одно из крупнейших достижений математики XIX в. С этих позиций Ляпунов подходит к самой постановке задачи устойчивости, выделяя невозмущенное и возмущенное движение. Он разработал методы решения задач устойчивости, предложив и строго обосновав конкретные алгоритмы. Одной из труднейших проблем математики и механики уже в течение нескольких столетий является проблема фигур равновесия вращающейся жидкости. Она имеет многочисленные приложения, стимулировала появление новых идей и целых направлений исследований. В решение проблемы фигур равновесия Ляпунов вместе с Пуанкаре внес определяющий вклад. Ляпунов подробно и совершенно строго исследовал серии новых фигур равновесия, их бифуркации и устойчивость. При этом он создал новые аналитические методы исследования, в частности, работы Ляпунова и Пуанкаре дали мощный импульс развитию теории нелинейных интегральных уравнений. Важное общенаучное значение имеет дальнейшее развитие результатов Ляпунова. Фундаментальное значение для нелинейной динамики приобрели показатели Ляпунова. В основе их использования лежит мультипликативная эргодическая теорема. Показатели Ляпунова связаны с другой важнейшей величиной, также являющейся мерой хаотичности и неустойчивости – энтропией Колмогорова–Синяя. **Обсуждение.** Введенные Ляпуновым понятия и созданные методы имеют непреходящее значение, они не только составили математический

аппарат, но в значительной степени формируют концепции и принципы нелинейной динамики.

Ключевые слова: нелинейные системы, качественные методы, устойчивость и неустойчивость, фигуры равновесия, бифуркации, показатели Ляпунова, энтропия Колмогорова–Синяя.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-95-120>

Образец цитирования: Мухин Р.Р. Наследие Александра Михайловича Ляпунова и нелинейная динамика // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, No 4. С. 95–120. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-95-120>

### **Legacy of Alexander Mikhailovich Lyapunov and nonlinear dynamics**

*R. R. Mukhin*

Ugarov Sary Oskol Technological Institute (branch)  
of National University of Science and Technology «MISiS»  
42, mkr Makarenko 309516 Sary Oskol, Belgorod region, Russia  
E-mail: mukhiny@mail.ru

*Received 27.04.2018, accepted for publication 27.04.2018*

**Aim.** The aim of the work is to study the scientific heritage of A.M. Lyapunov from the standpoint of nonlinear physics. Fundamental importance Lyapunov's contribution is determined not only by the methods he created, which became the basis of the mathematical apparatus in the study of nonlinear phenomena, but his ideas and concepts introduced by him contributed to the formation of concepts and principles of nonlinear dynamics. **Method.** The study is based on an analysis of Lyapunov's original works with the involvement of existing literature on his scientific heritage. **Results.** Lyapunov's creativity is closely intertwined with the works of A. Poincare, among many other fundamental achievements of which the qualitative theory that formed the conceptual basis of nonlinear dynamics is of particular importance. Lyapunov was the closest successor to Poincare in the field of qualitative theory. Qualitative in its essence is the Lyapunov stability theory, one of the greatest achievements of mathematics of the XIX century. From these positions Lyapunov approaches the very formulation of the stability problem, singling out the unperturbed and disturbed motion. He developed methods for solving stability problems by proposing and rigorously justifying specific algorithms. One of the most difficult problems of mathematics and mechanics for several centuries is the problem of the equilibrium figures of a rotating liquid. It has numerous applications, stimulated the emergence of new ideas and whole research directions. To solving the problem of the figures of equilibrium, Lyapunov together with Poincare made a decisive contribution. Lyapunov studied in detail and quite rigorously a series of new equilibrium figures, their bifurcations and stability. At the same time he created new

analytical methods of research, in particular, the works of Lyapunov and Poincare gave a powerful impetus to the development of the theory of non-linear integral equations. An important general scientific value is the further development of Lyapunov's results. The Lyapunov exponents have become fundamental for nonlinear dynamics. Their use is based on the multiplicative ergodic theorem. The Lyapunov exponents are related to another most important quantity, also a measure of randomness and instability – the Kolmogorov–Sinai entropy. **Discussion.** The concepts introduced by Lyapunov and the methods created have an enduring significance, they have not only formed a mathematical apparatus, but to a great extent form the concepts and principles of nonlinear dynamics.

Key words: nonlinear systems, qualitative methods, stability and instability, equilibrium figures, bifurcations, Lyapunov exponents, Kolmogorov–Sinai entropy.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-95-120>

References: Mukhin R.R. Legacy of Alexander Mikhailovich Lyapunov and nonlinear dynamics. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 4, pp. 95–120.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-95-120>