

**Гиперболический хаос в осцилляторе Бонхоффера–ван дер Поля  
с дополнительной запаздывающей обратной связью  
и периодически модулируемым параметром возбуждения**

*С. П. Кузнецов, Ю. В. Седова*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38

E-mail: [spkuz@yandex.ru](mailto:spkuz@yandex.ru), [sedovayv@yandex.ru](mailto:sedovayv@yandex.ru)

Автор для переписки Седова Юлия Викторовна, [sedovayv@yandex.ru](mailto:sedovayv@yandex.ru)

*Поступила в редакцию 13.10.2018, принята к публикации 3.12.2018*

**Тема и цель исследования.** Цель работы состоит в рассмотрении простой в реализации системы, демонстрирующей гиперболический аттрактор Смейла–Вильямса, на основе осциллятора Бонхоффера–ван дер Поля, поочередно пребывающего в состоянии возбуждения или подавления благодаря периодической модуляции параметра внешним управляющим сигналом и дополненного цепью запаздывающей обратной связи. **Исследуемые модели.** Сформулирована математическая модель, описываемая неавтономным уравнением второго порядка с запаздывающим аргументом. Указана схема электронного устройства, реализующего данный тип хаотического поведения. **Результаты.** Представлены результаты численного моделирования динамики системы, включая реализации, спектры колебаний, графики показателей Ляпунова, карту режимов на плоскости параметров. Проведено схемотехническое моделирование электронного устройства с помощью программного продукта Multisim. **Обсуждение.** Присутствие аттрактора Смейла–Вильямса обусловлено тем, что преобразование фаз заполнения для генерируемой системой последовательности радиоимпульсов отвечает растягивающему в целое число раз отображению окружности. Особенность системы в том, что передача возбуждения от одной к следующей стадии активности с удвоением (или утроением) фазы осуществляется резонансным образом, на гармонике релаксационных колебаний, имеющих вдвое (или втрое) больший период, чем у малых колебаний. В силу гиперболической природы аттрактора генерируемый хаос грубый, то есть характеризуется малой чувствительностью к вариации параметров устройства и его компонентов. Приведенная схема отвечает низкочастотному устройству, но может быть адаптирована для генераторов хаоса также на высоких и сверхвысоких частотах.

Ключевые слова: динамическая система, запаздывание, генератор хаоса, аттрактор, показатель Ляпунова, схемотехническое моделирование.

Образец цитирования: Кузнецов С.П., Седова Ю.В. Гиперболический хаос в осцилляторе Бонхоффера–ван дер Поля с дополнительной запаздывающей обратной связью и периодически модулируемым параметром возбуждения // Изв.вузов. ПНД. 2019. Т. 27, No 1. С. 77–95.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-77-95>

Финансовая поддержка. Разработка принципа действия системы, построение математической модели, численные расчеты и обработка результатов выполнены при поддержке гранта РФФ 17-12-01008 (разделы 1, 2). Разработка электронного устройства и схемотехническое моделирование в среде Multisim выполнены при поддержке гранта РФФИ 16-02-00135 (раздел 3).

### **Hyperbolic chaos in the Bonhoeffer–van der Pol oscillator with additional delayed feedback and periodically modulated excitation parameter**

*S. P. Kuznetsov, Yu. V. Sedova*

Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch  
38, Zelenaya str., 410019 Saratov, Russia

E-mail: spkuz@yandex.ru, sedovayv@yandex.ru

Correspondence should be addressed to Sedova Yuliya V., sedovayv@yandex.ru

*Received 13.10.2018, accepted for publication 3.12.2018*

**Topic and aim.** The aim of the work is to consider an easy-to-implement system demonstrating the Smale–Williams hyperbolic attractor based on the Bonhoeffer–van der Pol oscillator, alternately manifesting a state of activity or suppression due to periodic modulation of the parameter by an external control signal, and supplemented with a delayed feedback circuit. **Investigated models.** A mathematical model is formulated as a non-autonomous second-order equation with delay. The scheme of the electronic device that implements this type of chaotic behavior is proposed. **Results.** The results of numerical simulating of the system dynamics, including waveforms, oscillation spectra, plots of Lyapunov exponents, a chart of regimes on the parameters plane are presented. The circuit simulation of the electronic device using the software Multisim is carried out. **Discussion.** The Smale–Williams attractor in the system appears due to the fact that the transformation of the phases of the carrier for the sequence of radio-pulses generated by the system corresponds to a circle map expanding by an integer factor. The important feature of the system is that the transfer of excitation from one to the next stage of activity with doubling (or tripling) of the phase occurs due to the resonance mechanism involving a harmonic of the developed oscillations that have twice (or triple) longer period than that of small oscillations. Due to the hyperbolic nature of the attractor, the generated chaos is rough, that is, it is characterized by low sensitivity to variations in the parameters of the device and its components. Our scheme corresponds to a low-frequency device, but it can be adapted for chaos generators also at high and ultrahigh frequencies.

*Key words:* dynamical system, time-delay, chaos generator, attractor, Lyapunov exponent, circuit simulation.

*Reference:* Kuznetsov S.P., Sedova Yu.V. Hyperbolic chaos in the Bonhoeffer–van der Pol oscillator with additional delayed feedback and periodically modulated excitation parameter. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 77–95.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-77-95>

*Acknowledgements.* Development of the operating principle of the system, construction of a mathematical model, numerical calculations and processing of the results are supported by the grant of Russian Science Foundation No 17-12-01008 (sections 1, 2). The development of electronic devices and circuit simulation environment Multisim is executed with support of Russian Foundation for Basic Research grant No 16-02-00135 (section 3).