

**Динамика уравнения с двумя запаздываниями,  
моделирующего численность популяции**

*И. С. Кащенко<sup>1</sup>, С. А. Кащенко<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14

<sup>2</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31

E-mail: [iliyask@uniyar.ac.ru](mailto:iliyask@uniyar.ac.ru), [kasch@uniyar.ac.ru](mailto:kasch@uniyar.ac.ru)

Автор для переписки Кащенко Илья Сергеевич, [iliyask@uniyar.ac.ru](mailto:iliyask@uniyar.ac.ru)

*Поступила в редакцию 18.12.2018, принята к публикации 1.03.2019*

Предмет исследования. В работе исследуется поведение решений логистического уравнения с двумя запаздываниями из некоторой окрестности состояния равновесия при большом значении коэффициента линейного роста. Такие задачи возникают при моделировании численности популяций с учетом возрастной структуры, в качестве модели численности насекомых и т.п. Новизна. Показано, что критические случаи, возникающие в задаче об устойчивости состояния равновесия, имеют бесконечную размерность: бесконечно большое число корней характеристического уравнения стремятся к мнимой оси. Кроме того, в ряде изученных ситуаций возникает дополнительное вырождение, существенно влияющее на структуру решений. Методы исследования. Для изучения поведения решений в близких к критическим случаям разработан асимптотический метод, с помощью которого были построены специальные нелинейные уравнения – квазинормальные формы, решения которых дают асимптотические приближения решений исходной задачи. Полученные результаты. Показано, что в критических случаях поведение решений исходной сингулярно возмущенной задачи определяется динамикой квазинормальной формы. Приведены асимптотические формулы, связывающие их решения. В качестве квазинормальной формы могут выступать комплексные параболические уравнения типа Гинзбурга–Ландау, а при некоторых вырождениях – уравнения с одним (возможно, большим) запаздыванием либо обобщенное уравнение Кортевега–де Фриза. Эти задачи либо не содержат малый параметр, либо зависят от него регулярно. Выводы. Изучено поведение решений сингулярно возмущенного логистического уравнения с двумя запаздываниями. Выделены критические случаи и исследованы бифуркации. Показано, что у изучаемой системы присутствуют такие динамические эффекты, как мультистабильность и гипермультистабильность, а также бесконечный процесс прямых и обратных бифуркаций при стремлении малого параметра к нулю.

Финансовая поддержка. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No 18-29-10043.

*Ключевые слова:* уравнение с запаздыванием, два запаздывания, малый параметр, нормальная форма, численность популяции, уравнение Гинзбурга–Ландау.

*Образец цитирования:* Кащенко И.С., Кащенко С.А. Динамика уравнения с двумя запаздываниями, моделирующего численность популяции // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, No 2. С. 21–38. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-2-21-38>

## **Dynamics of equation with two delays modelling the number of population**

*I. S. Kashchenko<sup>1</sup>, S. A. Kashchenko<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>P.G. Demidov Yaroslavl State University  
14, Sovetskaya st., 150003 Yaroslavl, Russia

<sup>2</sup>National Research Nuclear University «MIFI»,  
31, Kashirskoe sh., 115409 Moscow, Russia

E-mail: [iliyask@uniyar.ac.ru](mailto:iliyask@uniyar.ac.ru), [kasch@uniyar.ac.ru](mailto:kasch@uniyar.ac.ru)

Correspondence should be addressed to Kashchenko Iliya S., [iliyask@uniyar.ac.ru](mailto:iliyask@uniyar.ac.ru)

*Received 18.12.2018, accepted for publication 1.03.2019*

Issue. The paper investigates the behavior of solutions of a logistic equation with two delays from some neighborhood of the equilibrium state with a large value of the coefficient of linear growth. Such problems arise in modeling the population size taking into account the age structure, as a model of the number of insets, etc. Innovation. It is shown that the critical cases arising in the problem of the stability of an equilibrium state have infinite dimension: an infinitely large number of roots of the characteristic equation tend to the imaginary axis. In addition, in a number of studied situations, an additional degeneracy arises that significantly affects the structure of solutions. Investigation methods. To study the behavior of solutions in close to critical cases, an asymptotic method has been developed. With its help, special nonlinear equations – quasi-normal forms – whose solutions provide asymptotic approximations of solutions to the original problem. Results. It is shown that in critical cases the behavior of the solutions of the original singularly perturbed problem is determined by the dynamics of the quasi-normal form. The asymptotic formulas connecting their solutions are given. Complex parabolic Ginzburg–Landau equation can serve as a quasi-normal form, and for some degenerations, equations with one (possibly large) delay or the generalized Korteweg–de Vries equation. These tasks either do not contain a small parameter, or depend on it regularly. Conclusions. The behavior of solutions of a singularly perturbed logistic equation with two delays is studied. Critical cases are found and bifurcations are investigated. It is shown that the system under study has such dynamic effects as multistability and hypermultistability, as well as an infinite process of direct and inverse bifurcations as the small parameter tends to zero.

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR according to the research project No 18-29-10043.

*Key words:* equation with delay, two delays, small parameter, normal form, number of population, Ginzburg–Landau equation.

*Reference:* Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Dynamics of equation with two delays modelling the number of population. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 2, pp. 21–38. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-2-21-38>