



ВЫРАЖЕНИЕ СТРУКТУРЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ В ТЕРМИНАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

А.В. Макаренко

В работе даны исходные положения нового подхода к описанию и анализу структурных свойств динамических процессов. Подход базируется на сформулированном и доказанном утверждении, что структура гладкого динамического процесса во временной области описывается параметрами состояния, скорости и кривизны. Суть подхода заключается в двух ключевых операциях. Во-первых, исходный процесс разлагается на компоненты, описывающие структуру его искривленности, – для этого в работе предложена соответствующая система функций, порождаемых угловым оператором. Во-вторых, по этим функциям рассчитываются различные предложенные конфигурационные, энергетические и информационные параметры.

Введение

Существует достаточно широкий класс прикладных задач, для решения которых требуется анализ структурных свойств и характеристик динамических процессов. Как правило, изучению доступна единственная ограниченная по длительности реализация процесса, измеренная с ограниченной точностью и содержащая конечное число отсчетов, а адекватная математическая модель динамической системы, порождающей процесс, – не известна. Подобные задачи относят к числу проблем с очень высокой априорной неопределенностью [1, 2].

Под структурой динамического процесса в первом приближении возможно понимать набор характерных свойств процесса, которые определяют форму его траектории в расширенном пространстве состояний.

В принципе, существует глубоко проработанный метод математического описания и анализа структуры динамических процессов – это частотно-временной анализ, существующий в настоящее время в двух разновидностях: тригонометрическое

преобразование Фурье [2, 3] и вейвлет-преобразование [4, 5]. Фактически частотно-временной анализ выдает две характеристики: амплитуду и фазу соответствующей гармоники в случае преобразования Фурье [2] и интенсивность и фазу соответствующего временного масштаба в каждый момент времени в случае вейвлет-преобразования [4]. Однако возможности тригонометрического преобразования Фурье не всегда отвечают требованиям задачи. Как уже было отмечено выше, длительность реального динамического процесса всегда ограничена ($\Delta T < \infty$), следовательно ширина спектра бесконечна ($\Delta\omega \rightarrow \infty$), а при спектральном анализе отсечка верхней частотной границы на некотором уровне в значительной степени произвольна [3]. Тем не менее известно, что точность представления и анализа динамического процесса вблизи точки его включения t_1 непосредственно связана с точностью представления его спектральной функции при $\omega \rightarrow \infty$, то есть точный анализ процесса подразумевает бесконечно широкий интервал частот [6, 7]. В свою очередь, нестационарность динамического процесса требует проведения двойного частотно-временного преобразования Фурье, что предполагает наличие реализаций процесса весьма значительной длины [2].

От этих недостатков несколько свободен вейвлет-анализ, но он, в свою очередь, также обладает двумя существенными ограничениями. Во-первых, существует очень сильная зависимость результатов анализа от сочетания исследуемого динамического процесса и материнского вейвлета, а процедура его выбора до сих пор не формализована [5]. Во-вторых, наличие краевых эффектов при вейвлет-преобразовании ограничивает возможности анализа длинновременных масштабов на концах процесса [8].

Таким образом, набор этих недостатков и ограничений определяет преимущества анализа структурных характеристик динамического процесса именно во временной области. Дополнительно отметим следующий факт. Элементарное состояние динамического процесса задается парой $\{x, t\}$, а весь процесс полностью описывается множеством таких пар, упорядоченных по t [1]. С учетом того, что переменная t является по отношению к процессу внешним параметром, из принципов термодинамического формализма [9] следует, что именно анализ во временной области дает максимальное количество информации об особенностях динамики процесса.

Другим направлением исследования характеристик динамических процессов являются подходы хаотической динамики, и, в частности, процедура реконструкции аттрактора методом запаздывания [10, 11]. Этот метод дает неплохие результаты для систем малой размерности (обычно $m < 6$), однако для коротких реализаций отсутствует аналитический критерий адекватности синтезированного аттрактора. Для реализаций значительной длины возможно вычисление корреляционного интеграла и оценка корреляционной размерности системы по наблюдаемой. Тем не менее на практике весьма часто попадают плохо обусловленные временные ряды, не позволяющие получить приемлемую оценку корреляционной размерности, и аттрактор приходится выбирать визуально. В итоге процедура не поддается автоматизации и в результат анализа изначально вносятся ошибки, связанные с «человеческим фактором».

В настоящее время наиболее распространенным способом изучения структуры динамических процессов во временной области является анализ их фазовых портретов в пространстве «состояние – скорость» (x, \dot{x}) . Данный метод был развит на

основе подходов качественной теории дифференциальных уравнений [12, 13]. Он весьма информативен, позволяет однозначно обнаруживать точки экстремумов и перегибов на траектории процесса в расширенном пространстве состояний (на фазовой кривой имеется точка возврата), но не определяет точки изгиба траектории процесса (фазовая кривая также плавно изгибается). Надо заметить, что точке изгиба вообще уделяют мало внимания, а именно она отделяет области с качественно различной динамикой. Действительно, если рассмотреть два типа функций: экспоненту и гиперболу, то можно увидеть, что на графиках этих кривых выделяются две характерные области – область с низкой скоростью и область с высокой скоростью изменения функции. Фактически точка изгиба является точкой «фазового перехода» в динамике системы. Следовательно, необходим инструментарий для ее обнаружения, ибо сам по себе анализ производных не позволяет выделять на траектории динамического процесса точки изгиба.

На основании изложенного вполне логично представляется разработка других методов, информационно дополняющих вышеописанные.

В настоящей работе предложен новый подход к описанию и анализу структурных свойств динамических процессов, заключающийся в разложении исходного процесса на компоненты, характеризующие структуру его искривленности, и в расчете по ним различных конфигурационных, энергетических и информационных параметров.

Статья написана по материалам докладов [14, 15].

1. Постановка задачи

Введем в рассмотрение динамический процесс $x(t)$ со следующими свойствами:

$$x \in X \subset R^1, \quad t \in T \subset R^1, \quad x(t) \in C^\infty \quad \forall t \in (-\infty, +\infty). \quad (1)$$

Исходя из того, что динамический процесс описывается множеством пар $\{x, t\}$, упорядоченных по t , дополнительно определим Ω – расширенное метрическое пространство состояний динамического процесса: $\Omega = X \times T, \Omega \subset R^2$.

По физическим предпосылкам введем в пространстве Ω евклидову метрику, задав норму $dl^2 = dx^2 + dt^2$. Следовательно, пространство Ω будет представлять из себя евклидову плоскость P с декартовыми координатами (x, t) и ортонормированными базисными ортами e_1, e_2 , где любая точка M изображается радиусом-вектором $r = xe_1 + te_2$, направленным из начала координат O в точку с координатами (x, t) .

На основе вышеперечисленных предпосылок и фактов поставим задачу синтеза анализатора структуры динамического процесса $x(t)$ в пространстве Ω по геометрическим свойствам его траектории в этом пространстве.

2. Анализатор структуры динамического процесса

2.1. Основная идея подхода. Кинематическая интерпретация динамического процесса $x(t)$ позволяет рассматривать его как движение изображающей точки $M(x, t)$ в пространстве Ω . Из этого факта по аналогии с аналитической механикой [16] следует Утверждение.

Утверждение 1. Для динамического процесса $x(t)$ существует три фундаментально различных типа движения изображающей точки M в расширенном пространстве состояний Ω :

- покой;*
- равномерное движение;*
- движение с ускорением (в общем случае – переменным).*

Причем первые два типа перемещения точки M в пространстве Ω порождают прямую, третий – кривую. В случае покоя траектория динамического процесса параллельна оси времени.

Из дифференциальной геометрии известно [17], что у прямой касательная сохраняет одно и то же направление для всех точек, и совпадает с ней самой, а кривая этим свойством не обладает, чем фундаментально отличается от прямой. На основе этого факта с учетом Утверждения 1. может быть сформировано следующее Предложение.

Предложение 1. Структура динамического процесса, а следовательно, и форма его траектории в пространстве Ω , во временной области должны описываться и анализироваться в терминах «состояние – скорость – искривленность», как по мгновенным значениям соответствующих параметров, так и по их эволюции во взаимосвязи за определенный период времени.

Заметим, что в случае неравномерного движения изображающей точки M вид кривой, описывающей траекторию динамического процесса, зависит от значения его производных второго и более высоких порядков. Следовательно, классификацию, приведенную в Утверждении 1., можно продолжить и далее, рассматривая производные выше второго порядка, но подобное расширение уже не будет, в нашем смысле, фундаментальной классификацией траекторий, а будет подразделять некоторые частные виды кривых. Тем не менее из этого следует важное Замечание.

Замечание 1. Искривленность траектории динамического процесса в расширенном пространстве состояний может быть охарактеризована различными величинами, в состав которых входят производные различных порядков (не ниже второго).

Как известно, общепринятой, классической мерой искривленности гладкой плоской кривой является классическая кривизна [17]:

$$K_x = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{(1 + \dot{x}^2)^3}}, \quad (2)$$

где точка сверху означает дифференцирование по переменной t .

Тем не менее применение величины K_x для оценивания искривленности траектории динамического процесса во временной области затруднено по двум причинам.

1) Кривизна K_x явно измеряет искривленность $x(t)$ не в функции времени, а в функции длины дуги траектории, которая уже не является для динамического процесса внешним параметром, следовательно, истинная информация об особенностях динамики процесса $x(t)$ во временной области в величине K_x маскирована.

2) На основе предпосылок вывода классической кривизны как меры искривленности гладкой плоской кривой затруднительно построить систему функций, обладающую единой логической базой и позволяющую измерять нелинейные характеристики динамического процесса более высокого порядка согласно Замечанию 1..

Для снятия этих противоречий и ограничений применим следующий геометрический подход, обладающий внутренней строгостью, целостностью и логической корректностью.

2.2. Вывод базовых функций, описывающих искривленность процесса.

Как уже было отмечено выше, у прямой касательная сохраняет одно и то же направление для всех точек, и совпадает с ней самой, а кривая этим свойством не обладает, чем фундаментально отличается от прямой. Следовательно, вполне возможно применить эти положения дифференциальной геометрии для идентификации типов движения изображающей точки M траектории динамического процесса $x(t)$ и анализа его свойств, взяв в качестве индикатора угол наклона касательной к кривой $x(t)$ в точке t относительно оси времени, так называемую угловую функцию $\alpha(t) = \arctg \dot{x}(t)$. В свою очередь, непостоянство $\alpha(t)$ во времени, а следовательно, и искривленность $x(t)$ можно анализировать по поведению касательной уже к $\alpha(t)$, через соответствующую угловую функцию $\varphi(t) = \arctg \dot{\alpha}(t)$.

Подобные рассуждения на основе математической индукции можно последовательно повторить, что в конечном итоге приведет к совокупности угловых функций, характеризующих структуру искривленности динамического процесса $x(t)$. Эту совокупность можно представить как результат действия на динамический процесс $x(t)$ углового оператора G_k^a

$$\alpha(t) = G_1^a x(t), \varphi_0(t) = G_2^a x(t), \varphi_i(t) = G_{i+2}^a x(t). \quad (3)$$

Оператор G_k^a порядка k имеет следующий вид (умножение производится слева):

$$G_k^a = \prod_{i=1}^k \arctg \left[(c_s)_i \frac{d}{dt} \right], \quad (4)$$

где $k = 1, 2, \dots, N_G, N_G \rightarrow +\infty, c_s > 0$ – масштабный коэффициент, служит для управления чувствительностью анализатора, в общем случае для каждой компоненты (угловой функции) он имеет независимое уникальное значение, определяемое целью и условиями анализа.

Отметим, что значения выражений (3) в общем случае ограничены главными углами арктангенса, которые простираются в диапазоне от $-\pi/2$ до $+\pi/2$. Это свойство оказывается чрезвычайно полезным при исследовании вопроса о характеристиках искривления траектории динамического процесса при стремлении его производных к бесконечному значению (что аналогично методу исследования динамических систем на сфере Пуанкаре [13]). Тем не менее при ограниченной динамике процесса зоны насыщения (горизонтальные асимптоты), присутствующие на графике арктангенса, оказывают негативное влияние на разрешающую способность анализатора. С целью компенсации этого эффекта дополнительно определим угловой оператор TG_k^a

$$TG_k^a = \operatorname{tg} G_k^a. \quad (5)$$

Оператор TG_k^a также порождает систему функций, характеризующих искривленность сигнала $x(t)$ в пространстве Ω :

$$\alpha^T(t) = TG_1^a x(t), \varphi_0^T(t) = TG_2^a x(t), \varphi_i^T(t) = TG_{i+2}^a x(t). \quad (6)$$

Функции для операторов TG_1^a и TG_2^a выпишем в явном виде:

$$\alpha^T(t) = c_{ss}\dot{x}(t), \quad (7a)$$

$$\varphi_0^T(t) = c_{ss}c_{as} \frac{\ddot{x}(t)}{1 + c_{ss}^2 \dot{x}^2(t)}. \quad (7b)$$

Заметим, что величина (7б) по своей сути и структуре аналогична классической кривизне (2), но измеряет искривленность динамического процесса не в функции приращения длины траектории, а в функции времени явно, из чего следует Определение.

Определение 1. Динамической кривизной процесса $x(t)$ в точке $M(x(t), t)$, заданного в классе (1), называется предел отношения приращения угла касательной к приращению независимого аргумента t , когда точка $M'(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ стремится к точке $M(x(t), t)$:

$$\varphi_0^T(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (8)$$

К Определению 1. следует Замечание.

З а м е ч а н и е 2. Условие корректности динамической кривизны как характеристики искривленности траектории динамического процесса в пространстве Ω требует, чтобы при $\Delta t \rightarrow 0$ точка $M'(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ стремилась к точке $M(x(t), t)$. Это условие накладывает ограничение на конечность абсолютного значения скорости процесса, то есть $|\dot{x}| < \infty$. Данное ограничение на самом деле несколько не сужает область применимости угловых функций в качестве характеристик искривленности динамического процесса, так как динамика всех реальных систем ограничена сверху конечными скоростями, порожденными так или иначе конечной скоростью света [18], и скорость передачи информации также конечна [19].

Таким образом, на основании вышеизложенного операторы G_k^a и TG_k^a можно рассматривать как фильтры, действующие на динамический процесс во временной области и выделяющие из исходного процесса отдельные структурные компоненты его динамики, каждая из которых по-своему характеризует исходный процесс и вносит свой вклад в его свойства.

2.3. Аналитический базис структуры динамического процесса. Для введения обоснованной конструкции аналитического базиса, задающего структуру динамического процесса, необходимо формализовать Предложение 1.. Для этого рассмотрим интуитивно-логическое представление понятия «структура». В толково-словообразовательном словаре русского языка [20] это понятие определяется следующим образом: *структура* (с латинского *structura* – строение, расположение) – это определенное взаиморасположение и связь составных частей, элементов чего-либо, характеризующие строение чего-либо (рис. 1, а).

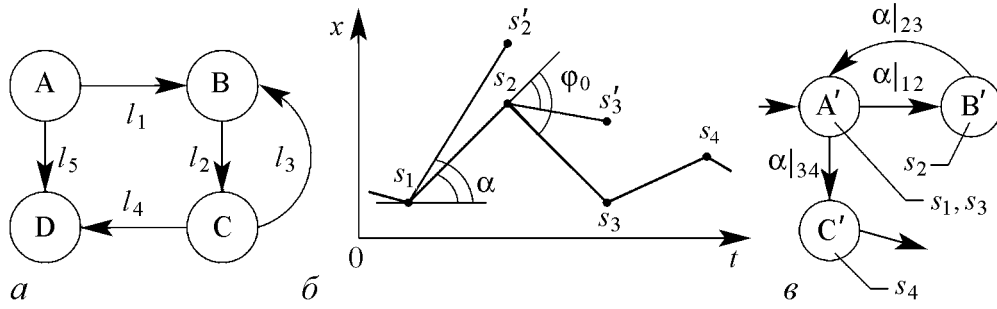


Рис. 1. A-D – элементы системы, l_1-l_5 – связи между элементами системы (а); s_1-s_4 – реализовавшиеся состояния, а s'_2, s'_3 – альтернативные состояния динамического процесса, причем переходы между состояниями определяются параметрами: α – двучечный переход и φ_0 – трехточечный переход (б); A'-C' – уникальные состояния (элементы) процесса в пространстве состояний, $\alpha|_{ij}$ – переходы между уникальными состояниями (связи между элементами) процесса (в).

Рассматривая динамический процесс $x(t)$ как систему [21], следует указать, что составными частями (элементами) процесса являются его состояния $\{x, t\}$, а связями между элементами – переходы между состояниями $\{x_1, t_1\} \rightarrow \{x_2, t_2\}$, причем переходы между состояниями однозначно определяются углом наклона касательной α . Иллюстрация этого положения приведена на рис. 1, б-в.

Таким образом, структура динамического процесса $x(t)$ формально, в первом приближении, описывается множеством пар $\{x, \alpha^T\}$. В свою очередь, структура процесса $\alpha^T(t)$ описывается множеством пар $\{\alpha^T, \varphi_0^T\}$. Для процесса $\varphi_i^T(t)$ структура естественно задается множеством пар $\{\varphi_i^T, \varphi_{i+1}^T\}$. Для обобщения этой последовательности рассуждений необходимо учесть ряд Замечаний.

Замечание 3. Процессы $\alpha^T(t)$ и $\varphi_i^T(t)$ не являются изолированными, а представляют собой динамические компоненты процесса $x(t)$.

Замечание 4. Структура процессов $\alpha^T(t)$ и $\varphi_i^T(t)$ определяет структуру переходов между состояниями динамического процесса $x(t)$.

Из обобщения вышеизложенного следует Утверждение.

Утверждение 2. Структура динамического процесса $x(t)$, заданного в классе (1), во временной области определяется двумя составляющими:

статической структурой – определяет структуру состояний процесса, и описывается множеством пар $\{x, \alpha^T\}$;

динамической структурой – определяет структуру переходов между состояниями процесса и описывается множеством объединений пар $\{\{\alpha^T, \varphi_0^T\}, \{\varphi_0^T, \varphi_1^T\}, \dots, \{\varphi_{N_G-1}^T, \varphi_{N_G}^T\}\}$.

К Утверждению 2. следует Замечание.

Замечание 5. Минимальным носителем динамической структуры процесса $x(t)$, заданного в классе (1), является множество пар $\{\alpha^T, \varphi_0^T\}$.

На основе Утверждения 2. сформируем в классе угловых функций (6) аналитический базис, задающий структуру динамического процесса,

$$P_i^T = \{x, \alpha^T, \varphi_0^T, \dots, \varphi_i^T\}. \quad (9)$$

Для практических задач анализа динамической структуры процесса наибольший интерес представляют первые две компоненты α^T и φ_0^T , как наиболее физически осмысленные. Так, величина $\alpha^T(t)$ фактически описывает скоростные свойства (мгновенную крутизну), а $\varphi_0^T(t)$ – нелинейные свойства (мгновенную кривизну) фронта динамического процесса в момент времени t , что с учетом Замечания 5. позволяет выделить из (9) минимальный базис

$$P_0^T = \{x, \alpha^T, \varphi_0^T\}, \quad (10)$$

который через линейные проективные ортогональные преобразования [22] разлагается на три подпространства:

- $\{x, \alpha^T\}$ – пространство статической структуры процесса;
- $\{\alpha^T, \varphi_0^T\}$ – пространство динамической структуры процесса;
- $\{x, \varphi_0^T\}$ – K_0 -фазовое пространство.

Для функций, определяющих в пространстве P_0^T уникальную фазовую траекторию, справедливы следующие интегральные соотношения:

$$\alpha^T(t) = \operatorname{tg} \left(\int_{t_0}^t \varphi_0^T(t) dt + \operatorname{arctg} \alpha^T(t_0) \right), \quad (11a)$$

$$x(t) = \int_{t_0}^t \alpha^T(t) dt + x(t_0). \quad (11b)$$

Следующая Теорема утверждает эквивалентность динамических процессов, обладающих идентичной динамической структурой. Теорему приведем без доказательства.

Теорема 1. Динамические процессы с идентичной динамической структурой в базисе $\{\alpha^T, \varphi_0^T\}$, заданные в классе (1), эквивалентны с точностью до аддитивной константы и линейного сдвига по времени

$$x_1(t) = x_2(t + \Delta t_2) + \Delta x_2 = \dots = x_n(t + \Delta t_n) + \Delta x_n. \quad (12)$$

Из Теоремы 1. вытекает важное Следствие.

Следствие 1. Динамическая структура процесса, заданная в базисе $\{\alpha^T, \varphi_0^T\}$, инвариантна к линейному сдвигу динамического процесса в пространстве Ω .

Изучение свойств минимального аналитического базиса, задающего структуру динамического процесса, приводит к следующим замечаниям.

Замечание 6. Пространство $\{x, \alpha^T\}$ с точностью до линейного масштабирующего множителя c_{ss} топологически эквивалентно классическому фазовому пространству $\{x, \dot{x}\}$. Следовательно, пространство P_0^T обобщает фазовое пространство $\{x, \dot{x}\}$.

Замечание 7. Анализ в базисе P_0^T снижает требования по дифференцируемости динамического процесса $x(t)$ до класса C^2 .

Для придания пространству $\{\alpha^T, \varphi_0^T\}$ аналитичности введем в рассмотрение носитель динамической структуры процесса в этом пространстве – комплексную функцию действительного переменного

$$\gamma^T(t) = \alpha^T(t) + i\varphi_0^T(t). \quad (13)$$

3. Аналитические характеристики динамической структуры процесса

3.1. Мультипликатор динамической структуры. Введем в рассмотрение величину

$$\beta_2^T = \alpha^T \varphi_0^T, \quad (14)$$

которую назовем мультипликатором динамической структуры процесса.

Изучение мгновенных значений мультипликатора позволяет находить специфические точки траектории динамического процесса. Помимо точек экстремума и перегиба, которые также обнаруживаются изучением производных процесса [23], анализ процесса в терминах оператора G_k^a позволяет находить и определять местоположение точки изгиба траектории динамического процесса, которая, как уже указывалось во введении, отделяет область с «медленной» динамикой от области с «быстрой» динамикой.

Следующая Теорема определяет условия существования точки изгиба траектории динамического процесса в расширенном пространстве состояний. Теорему приведем без доказательства.

Теорема 2. Для того чтобы в пространстве Ω точка $M(x(t), t)$ траектории динамического процесса $x(t)$, заданного в классе (1), была точкой изгиба, необходимо и достаточно выполнение следующего условия для одного из n :

$$TG_1^a \left\{ \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right\} TG_2^a \left\{ \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right\} \neq 0 \quad \text{при} \quad TG_2^a \left\{ \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right\} \rightarrow \text{extremum}, \quad (15)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – определяет порядок дифференциального оператора.

Кроме выделения точки изгиба, величина β_2^T способна определять локальные свойства динамического процесса:

$\beta_2^T < 0$ – локально сходящийся процесс;

$\beta_2^T > 0$ – локально расходящийся процесс;

$\beta_2^T = 0$ – процесс имеет наилучшую локальную предсказуемость. В этом случае он в точке t либо задается линейной функцией и $\varphi_0^T(t) = 0$, либо $\dot{x}(t) = 0$.

Это положение наглядно иллюстрирует рис. 2.

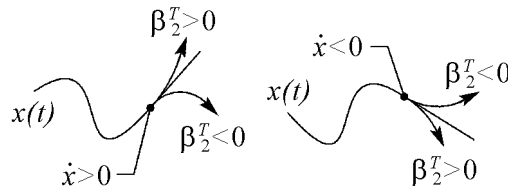


Рис. 2. Иллюстрация к определению понятия локальной сходимости/расходимости динамического процесса

3.2. Интегральные меры. В работе [24] установлено, что сложность непериодического динамического процесса характеризуется суммарной искривленностью его траектории в пространстве Ω . В этом случае мерой сложности процесса $x(t)$ является мера его полной динамической кривизны

$$C_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_0^T(t)| dt. \quad (16)$$

По своей геометрической сути величина C_φ показывает полный угол поворота касательного вектора к кривой $x(t)$ (вектора ее скорости), когда внешний параметр t пробегает свои значения на указанном промежутке. Таким образом, если траектория динамического процесса – прямая линия, то $C_\varphi = 0$. Следовательно, полная динамическая кривизна показывает, насколько форма траектории динамического процесса в пространстве Ω отличается (усложняется) относительно прямой линии. Из чего величина φ_0^T определяется как скорость нарастания сложности динамического процесса.

Интегральную меру возможно ввести и для мультипликатора динамической структуры (14)

$$B_2^T = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_2^T(t) dt. \quad (17)$$

Величина B_2^T характеризует сбалансированность динамики процесса «в целом». Действительно, по знаку этой величины можно судить о преобладании в динамике процесса участков:

- $B_2^T < 0$ – локально сходящихся;
- $B_2^T > 0$ – локально расходящихся;
- $B_2^T = 0$ – динамический процесс скомпенсирован.

На основе (17) для α^T и φ_0^T компонент возможно ввести меру ортогональности

$$r_{\alpha\varphi}^c = \frac{B_2^T}{\sqrt{A_{2b}^T} \sqrt{\Phi_{2b}^T}}, \quad \cos(\theta_{\alpha\varphi}^v) = r_{\alpha\varphi}^c, \quad (18)$$

где $\theta_{\alpha\varphi}^v$ – угол между компонентами α^T и φ_0^T в функциональном пространстве [25].

Причем интегралы

$$A_{2b}^T = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha^T(t)]^2 dt, \quad (19a)$$

$$\Phi_{2b}^T = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_0^T(t)]^2 dt \quad (19b)$$

имеют самостоятельное информационное значение – они определяют полную энергию соответствующей компоненты динамического процесса. Дополнительно, для изучения нестационарных и переходных процессов возможно определение локальных аналогов мер (19)

$$A_{2bl}^T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha^T(t') w_\alpha(t-t')]^2 dt', \quad (20a)$$

$$\Phi_{2bl}^T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi_0^T(t') w_\varphi(t-t')]^2 dt', \quad (20b)$$

где w_α и w_φ – некие неотрицательные оконные функции. Если $w_\alpha(t) = \delta(t)$, где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, то локальные величины будут равняться мгновенным. Для повышения избирательности анализатора ширину окна локализации можно сделать адаптивной, зависящей от мгновенной энергии той или иной компоненты.

Дополнительно можно определить меру линейной памяти компонент α^T и φ_0^T

$$r_\alpha(t_1, t_2) = \frac{1}{A_{2b}^T} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^T(t+t_1) \alpha^T(t+t_2) dt, \quad (21a)$$

$$r_\varphi(t_1, t_2) = \frac{1}{\Phi_{2b}^T} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0^T(t+t_1) \varphi_0^T(t+t_2) dt, \quad (21б)$$

а также меру линейной связи между компонентами α^T и φ_0^T [22]

$$r_{\alpha\varphi}(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{A_{2b}^T} \sqrt{\Phi_{2b}^T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^T(t+t_1) \varphi_0^T(t+t_2) dt. \quad (22)$$

3.3. Спектральные характеристики. Как уже отмечалось во введении, спектральный анализ представляет собой мощный и отработанный аппарат исследования структуры динамических процессов, поэтому представляется вполне логичным применить его и к анализу структурных компонент динамических процессов, определив ряд величин:

$$S_k(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[v - TG_k^a x(t)] dt, \quad (23a)$$

$$F_k(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} TG_k^a x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (23б)$$

$$W_k(s_t, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} TG_k^a x(t') \bar{\psi}(s_t, t, t') dt', \quad (23в)$$

где $\bar{\psi}(s_t, t, t')$ – комплексно-сопряженная вейвлетная функция [4].

Таким образом, характеристики, введенные выражениями (23), позволяют выявлять ведущие индексы (v), частоты (ω) и временные масштабы (s_t), оказывающие преобладающее влияние на формирование динамической структуры анализируемого процесса.

3.4. Эффективные временные величины. Введем в рассмотрение плоскую кривую с постоянным коэффициентом динамической кривизны ($\varphi_0^T = \text{const}$). Из (16) следует, что это кривая с постоянной скоростью нарастания сложности и находится она как общее решение автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} - \frac{c_{ss}}{c_{as}} \varphi_0^T \dot{x}^2 - \frac{\varphi_0^T}{c_{ss} c_{as}} = 0, \quad (24)$$

следующего из формулы (76). Решение уравнения (24) запишется в следующем виде:

$$x_\varphi(t) = C_2 - \frac{c_{as}}{c_{ss} \varphi_0^T} \ln \left| \cos \left(\frac{\varphi_0^T}{c_{as}} t + C_1 \right) \right|, \quad (25)$$

где постоянная

$$C_1 = \operatorname{arctg}(c_{ss} \dot{x}_0) - \frac{\varphi_0^T}{c_{as}} t_0, \quad (26)$$

а постоянная C_2 находится из выражения (25) подстановкой в него x_0 и t_0 . График плоской кривой с постоянным коэффициентом динамической кривизны приведен на рис. 3.

Анализ выражения (25) показывает, что функция x_φ периодическая, с периодом

$$\Delta T_\varphi = c_{as} \frac{\pi}{|\varphi_0^T|}, \quad (27)$$

и имеет полюсы в моменты времени

$$t_p[k] = \frac{c_{as}}{\varphi_0^T} \left(\pi k + \frac{\pi}{2} - C_1 \right), \quad (28)$$

где $k \in (-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty)$. В случае $\varphi_0^T > 0$ – функция в пределах периода выпукла вниз, а если $\varphi_0^T < 0$ – выпукла вверх, при $\varphi_0^T = 0$ – функция представляет собой прямую, параллельную оси t .

По своему смыслу величина ΔT_φ аналогична радиусу классической кривизны [23]

$$R_K = \frac{1}{|K_x|} \quad (29)$$

и ее можно интерпретировать как эффективную длительность элементарной нелинейности динамического процесса.

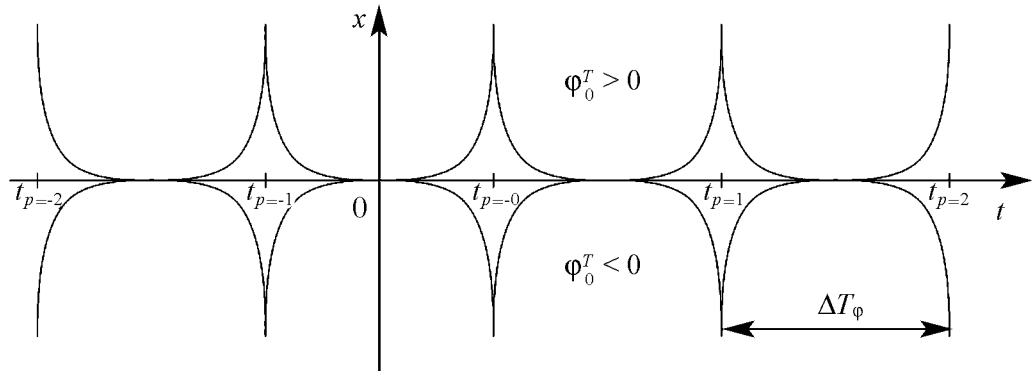


Рис. 3. График кривой с постоянным коэффициентом динамической кривизны

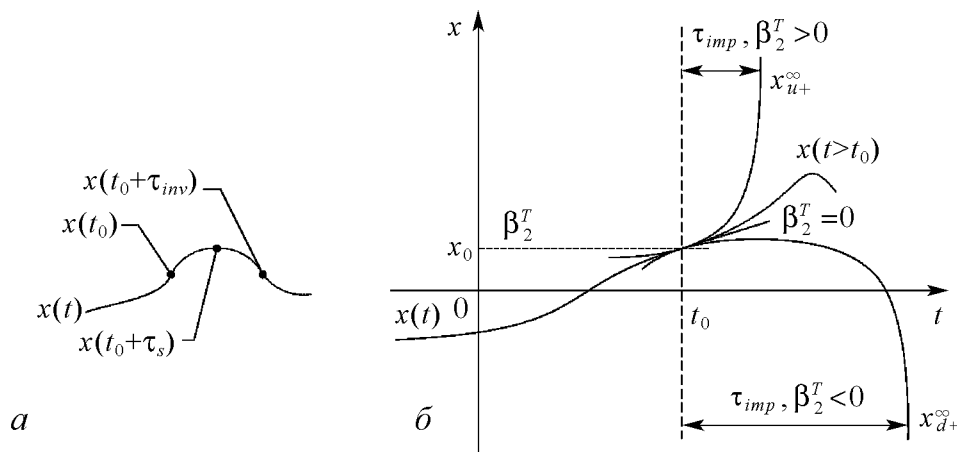


Рис. 4. Состояния динамического процесса, описываемые величинами: τ_s и τ_{inv} – успокоение и инверсия (а); τ_{imp} – выброс траектории, x_{u+}^{∞} и x_{d+}^{∞} – полюса функции x_{φ} (б)

Для локально сходящихся процессов ($\beta_2^T < 0$) можно определить характеристические эффективные времена: τ_s – время выхода процесса в состояние успокоения, $\dot{x}(t_0 + \tau_s) = 0$; τ_{inv} – время перехода процесса в состояние инверсии, $\dot{x}(t_0 + \tau_{inv}) = -\dot{x}(t_0)$. Смысл этих величин иллюстрирует рис. 4, а, и выражаются они через формулы

$$\tau_s = c_{as} \left| \frac{\text{arctg}(c_{ss} \dot{x})}{\varphi_0^T} \right|, \quad (30a)$$

$$\tau_{inv} = 2 \tau_s. \quad (30b)$$

Дополнительно вводится еще и эффективное время выброса траектории динамического процесса ($|x| \rightarrow \infty$):

$$\tau_{imp} = \frac{c_{as} [\pi - 2 \text{sign}(\beta_2^T) \text{arctg} |\dot{x} c_{ss}|]}{2 |\varphi_0^T|}, \quad (31)$$

смысл этой величины иллюстрирует рис. 4, б.

Выводы

В представленной работе предложен новый подход к описанию и анализу структуры динамических процессов, обладающих свойствами гладкости и непрерывности. Основная идея подхода заключается в разложении исходного процесса на компоненты, описывающие структуру его искривленности и расчета по ним различных конфигурационных, энергетических и информационных характеристик. Совокупность компонент, каждая из которых несет информацию об определенных свойствах процесса, формируется посредством действий на исходный процесс совокупности угловых операторов соответствующих порядков. Суть углового оператора заключается в формировании функции, выражающей угол наклона касательной к кривой относительно оси времени.

В работе формализовано понятие «структура динамического процесса» и показано, что она определяется статической и динамической составляющими. Во временной области структура может быть описана и проанализирована в терминах «состояние – скорость – искривленность» как по мгновенным значениям соответствующих параметров, так и по их эволюции во взаимосвязи за определенный период времени. Для динамической составляющей введены две базовые структурные компоненты процесса: α^T – характеризует скоростные свойства, ее возможно интерпретировать как мгновенную крутизну фронта процесса; φ_0^T – выражает нелинейные свойства процесса, его мгновенную искривленность.

Различные дополнительные аналитические характеристики – мультипликатор динамической структуры, набор эффективных временных величин, интегральные меры – позволяют достаточно полно описать динамическую структуру процесса. Кроме того, анализ в терминах оператора G_k^a позволяет находить и определять местоположение точки изгиба траектории динамического процесса, которая, как указано в работе, является точкой «фазового перехода» в эволюции системы и отделяет область с «медленной» динамикой от области с «быстрой» динамикой.

Введение такой характеристики, как динамическая кривизна траектории процесса в расширенном пространстве состояний позволило формализовать понятие «сложность динамического процесса» и предложить для непериодических процессов меру сложности, которая оперирует конкретной реализацией процесса, сравнительно легко вычисляется и имеет обоснованный физический смысл.

В работе предложена и обоснована конструкция аналитического базиса, задающего структуру динамического процесса, причем показано, что широко применяемое в качественной теории динамических систем фазовое пространство (x, \dot{x}) является его частным случаем. Более того, предполагается, что анализ динамического процесса в терминах оператора G_k^a способен дополнить процедуру Такенса по конструированию фазового пространства и построению возможного аттрактора процесса по его временной реализации.

Предложенный подход изначально ориентирован на анализ динамических процессов, не имеющих адекватной математической модели, и не требует каких-либо априорных знаний о самом процессе, а функционирование анализатора во временной области позволяет анализировать структуру переходных и нестационарных процессов без потери информации, что является его несомненным достоинством. Необходимо также отметить, что результаты анализа динамических процессов по изложенному в работе подходу поддаются достаточно простой физической интерпретации, однако эта простота ни в коем случае не умаляет важности последующих выводов о характере исследуемого процесса. Причем положения описанного подхода переносятся и на анализ векторных динамических процессов, и на случай процессов с разрывами, и на стохастические процессы. При этом описанный метод не является заменой классических анализаторов и не умаляет их достоинств, напротив, он органично интегрируется с ними, позволяя посмотреть на анализируемый сигнал с несколько иной точки зрения – с точки зрения геометрии его траектории в расширенном пространстве состояний.

Автор благодарит Д. И. Трубецкова за проявленное внимание к работе и поддержку.

Библиографический список

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука. Гл. Ред. Физ.-мат. Лит., 1987. 712 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных / Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 540 с., ил.
3. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 312 с., ил.
4. Чуи К. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с.
5. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
6. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Связь, 1957.
7. Астанин Л.Ю., Костылев А.А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. М.: Радио и связь, 1989. 192 с.
8. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145-1170.
9. Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука, 1983. 416 с.
10. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
11. Takens F. Lecture Notes in Mathematics / Eds D. Rand, L.-S. Young. New York: Springer-Verlag, 1981. P. 366.
12. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 3-е, испр. М.: Едиторал УРСС, 2004. 552 с.
13. Баутин Н.Н., Леонтович М.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1990. 488 с.
14. Макаренко А.В. Об одном подходе к описанию и анализу формы и структуры сигнала // Доклады I международной научной конференции «Сверхширокополосные сигналы и сверхкороткие импульсы в радиолокации, связи, акустике». Суздаль, ВлГУ, 2005.
15. Макаренко А.В. Геометрический подход к описанию и анализу динамической структуры сигнала // Материалы XIII Зимней школы-семинара по СВЧ-электронике и радиофизике / Под общ. ред. Д. И. Трубецкого. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2006. С.119.
16. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
17. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 432 с.
18. Einstein A. Zur Elektrodynamik der bewegter Korper // Ann. der Physik. 1905. Vol. 17. С. 891.
19. Хармут Х. Применение методов теории информации в физике / Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 540 с., ил.
20. Ефремова. Т.Ф. Новый словарь русского языка. Толково-словообразовательный. М.: Русский язык, 2000.

21. *Крайзмер Л.П.* Техническая кибернетика. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Энергия, 1964.
22. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
23. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. Изд. 8-е. М.: Физматлит, 2003. 680 с.
24. *Макаренко А.В.* Критерий сложности сигнала – динамическая кривизна его траектории в расширенном пространстве состояний // Доклады VIII международной научно-технической конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение». Москва, ИПУ РАН, 2006.
25. *Пугачёв В.С.* Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во МАИ, 1996. 744 с.

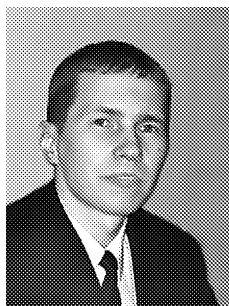
Северо-Кавказский горно-металлургический институт, (Государственный технологический университет), Владикавказ

Поступила в редакцию 30.06.2006

A NEW APPROACH OF FORM AND SIGNAL STRUCTURE DESCRIPTION AND ANALYSIS

A.V. Makarenko

A new approach to describe and analysis the structural and forming characteristics in time domain of signals are presented here. This approach is based on the decomposition of initial process into individual components, which are characteristic of the structure of its curving, and corresponding calculations for different configuration, energy and information parameters.



Макаренко Андрей Викторович – родился в Орджоникидзе (1977). Закончил Северо-Осетинский государственный университет (1998) и аспирантуру при математическом факультете СОГУ (2001). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности «системный анализ, управление и обработка информации» (СКГТУ, 2002). Заместитель директора ОИЦ СКГМИ (ГТУ). Научные интересы – непараметрическая идентификация по временным рядам нелинейных объектов в стохастических средах; анализ структуры динамических процессов; хаотические системы и природа структурообразования красных (фликкер) шумов. Имеет 16 научных публикаций, участник 7 НИОКР, научный руководитель 12 инженерно-технических проектов. E-mail: avm@skgtu.ru