



## ОСОБЕННОСТИ КАРТИНЫ СИНХРОНИЗАЦИИ ИМПУЛЬСАМИ В СИСТЕМЕ С ТРЕХМЕРНЫМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ РЕССЛЕРА

*А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина*

Рассмотрены особенности картины синхронизации в системе, предельный цикл которой вложен в трехмерное фазовое пространство. На примере системы Ресслера под воздействием периодической последовательности  $\delta$ -функций показано, что картина синхронизации существенно зависит от направления действия внешней силы. Выявлены особенности устройства языков синхронизации.

### Введение: краткий обзор и постановка проблемы

Ситуации, когда система с предельным циклом подвержена внешнему периодическому воздействию, широко распространены в радиофизике, электронике, биологии, химии и других областях естествознания [1–7]. С точки зрения теории колебаний и теории динамических систем, это задачи о возникновении квазипериодических движений и явления синхронизации [1–9]. Среди них выделяется класс задач, когда внешнее воздействие носит характер коротких по длительности импульсов. Подобные задачи не только привлекательны с точки зрения приложений, но и существенны для теории колебаний и нелинейной динамики с позиций возможной специфики картины синхронизации. В работах [10–19] такая ситуация была изучена в рамках модели, представляющей собой в автономном режиме простейшее укороченное уравнение с предельным циклом в виде окружности

$$\begin{aligned} \dot{r} &= sr(1 - r^2), \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $r$  и  $\varphi$  – амплитуда и фаза колебаний,  $s$  – управляющий параметр. Такая система подвергалась импульсному воздействию вдоль оси  $x$ . Заменой переменных  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $\tan \varphi = \frac{y}{x}$  от системы (1) можно перейти к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= sx(1 - x^2 - y^2) + C \sum \delta(t - nT), \\ \dot{y} &= x + sy(1 - x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $C$  и  $T$  – амплитуда и период импульсов,  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака. В случае, когда изображающая точка в промежутке между импульсами успевает вернуться на предельный цикл, Л. Глассом (L. Glass) для системы (2) получено приближенное отображение для фазы следующего вида:

$$\theta_{n+1} = \arctan\left(\frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n}\right) - T, \quad (3)$$

где  $\theta_n = -\varphi_n - T$ . Дальнейший вклад в изучение систем (2) и (3) внесли сам Гласс [17], Динг (Ding) с соавторами [11–15] и ряд других исследователей, которые показали, что картина синхронизации в рамках этих моделей обладает рядом особенностей. (Удвоения периода внутри языков наблюдаются при уменьшении, а не увеличении амплитуды воздействия, структура «чертовой лестницы» на пороге хаоса иная, чем для стандартного синус-отображения окружности и т.д.) В то же время модель (2) обладает и универсальными чертами, поскольку она может быть применена для различных автоколебательных систем вблизи порога бифуркации Андронова – Хопфа. Например, ее можно получить, рассмотрев задачу о воздействии на осциллятора ван дер Поля периодической последовательностью  $\delta$ -функций [20]

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B \sum \delta(t - nT). \quad (4)$$

Здесь  $x$  – динамическая переменная,  $\lambda$  – управляющий параметр,  $T$  – период следования внешних импульсов,  $B$  – их амплитуда. Если же в уравнении (4) учесть нелинейную зависимость фазы колебаний от времени (неизохронность систем), то есть рассмотреть осциллятор ван дер Поля – Дуффинга [21]

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT), \quad (5)$$

где  $\beta$  – параметр нелинейности осциллятора, то для этой системы, применяя метод медленно меняющихся амплитуд, можно получить новую разновидность отображения окружности

$$\theta_{n+1} = \arctan\left(\frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n}\right) - \Omega - \frac{3}{2}\beta \ln(1 + 2C \sin \theta_n + C^2), \quad (6)$$

где  $C = \frac{B}{2\sqrt{\lambda}}$  и  $\Omega = T(1 + \frac{3}{2}\beta\mu\lambda)$ . Отметим, что отображение (6) в случае нулевой фазовой нелинейности ( $\beta = 0$ ) переходит в отображение Гласса, а в случае большой ( $\beta = 1$ ) – в стандартное синус-отображение окружности [8, 22]

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \sqrt{1 + 9\beta^2 C \sin \theta_n}. \quad (7)$$

Детальный анализ систем (4) и (5) и ее моделей (2) и (6) дан в [20, 21].

Подчеркнем еще раз, что модели (2) и (6) и результаты их исследования имеют определенную степень универсальности, поскольку фактически касаются исследования системы у порога бифуркации Андронова – Хопфа. При этом воздействующий импульс может быть направлен не только вдоль оси  $x$ , а и в любом направлении в двумерном фазовом пространстве, поскольку аттрактором системы является окружность. Для дифференциальных систем (4), (5) с ростом управляющего параметра  $\lambda$  предельный цикл деформируется, но при умеренных  $\lambda$  картина качественно не меняется.

Иная ситуация имеет место в более общем случае, когда мы рассматриваем автоколебательную систему, для которой предельный цикл вложен в трехмерное фазовое пространство. Действительно, пусть реализуется ситуация, когда предельный цикл лежит преимущественно в некоторой плоскости (а это обычно так у порога бифуркации Андронова – Хопфа). В этом случае, действие импульса в любом направлении в этой плоскости должно приводить к одному и тому же результату, качественно близкому к результатам анализа моделей (2), (6). Совершенно иная ситуация возникает, если импульс действует в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой лежит предельный цикл. Можно ожидать какую-то иную картину синхронизации, которая, в частности, будет отличаться как от даваемой моделью (2), так и от даваемой стандартным синус-отображением. В настоящей работе эта проблематика исследована на примере трехмерной потоковой системы – системы Ресслера [1-4, 22].

### 1. Система Ресслера под воздействием периодической последовательности $\delta$ -функций, действующих в плоскости, содержащей предельный цикл

Начнем со случая, когда внешнее воздействие – периодическая последовательность  $\delta$ -функций – действует в плоскости, в которой преимущественно лежит предельный цикл автономной системы Ресслера. Тогда неавтономная система будет описываться следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - z + A \sum \delta(t - nT), \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + (x - r)z, \end{aligned} \tag{8}$$

где  $x, y, z$  – динамические переменные;  $p, q, r$  – параметры системы;  $A$  и  $T$  – соответственно амплитуда и период внешнего воздействия. Выберем значения параметров  $p, q$ , и  $r$  такими, чтобы в автономной системе имел место однооборотный предельный цикл. Его большая часть будет лежать в плоскости  $(x, y)$ , и лишь небольшая часть – выступать из этой плоскости в направлении оси  $z$ . В зависимости от значений параметров высота «выступа» аттрактора автономной системы в направлении оси  $z$  может быть разной. Как мы покажем далее, картина синхронизации в неавтономной системе зависит так же и от величины этого «выступа».

Итак, пусть  $p = 0.2, q = 0.1, r = 1.5$ . В этом случае величина «выступа» аттрактора в направлении оси  $z$   $\Delta z \approx 3.5$ . Период колебаний в автономной системе в этом случае можно определить численно, и он составляет  $T = 5.4368309\dots$

На рис. 1 представлены полученная в результате компьютерного моделирования карта динамических режимов системы (8) на плоскости параметров (амплитуда  $A$  – период  $T$  внешнего воздействия) и ее увеличенные фрагменты. На этих и на всех последующих картах белым цветом обозначен режим периода 1, светло-серым – режим периода 2 и т.д., черный цвет отвечает хаосу, а область убегания траектории на бесконечность обозначена одним из оттенков серого. (Характер режима определяется в соответствующем сечении Пуанкаре, так что период 1 отвечает однооборотному предельному циклу в трехмерном фазовом пространстве.) Первое

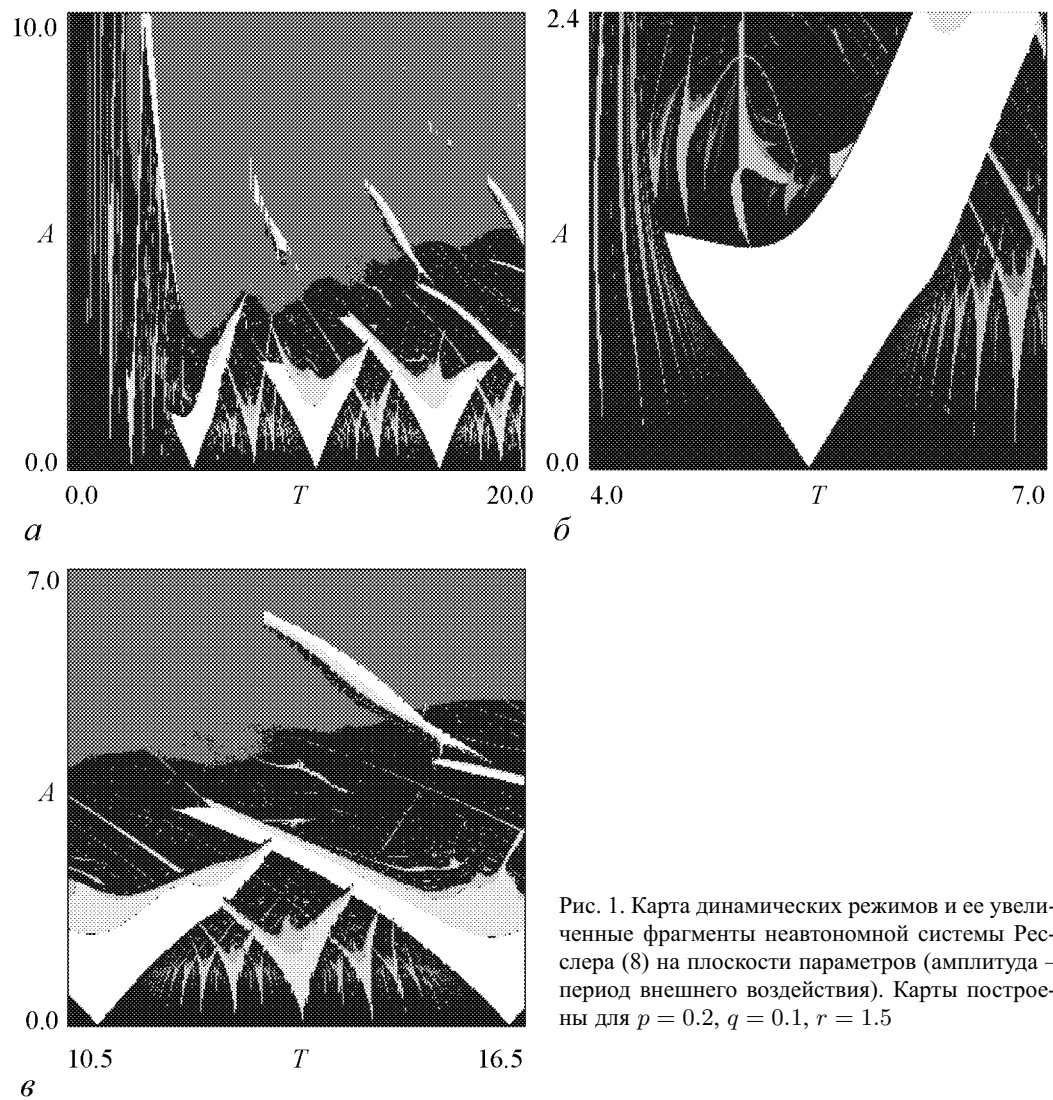


Рис. 1. Карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты неавтономной системы Ресслера (8) на плоскости параметров (амплитуда – период внешнего воздействия). Карты построены для  $p = 0.2$ ,  $q = 0.1$ ,  $r = 1.5$

существенное отличие от системы (5) и ее моделей состоит в том, что появляются области, которые отвечают убеганию траектории на бесконечность. Это связано с тем, что предельный цикл автономной системы Ресслера, в отличие от упомянутых моделей, имеет ограниченный бассейн притяжения в трехмерном фазовом пространстве. Поэтому сильный импульс может выбросить изображающую точку за пределы этого бассейна, и она в итоге уйдет на бесконечность.

На карте, представленной на рис. 1, можно видеть достаточно традиционную картину языков Арнольда. Увеличенные фрагменты карты демонстрируют следующие особенности системы. Так при достаточно больших периодах внешней силы (по сравнению с собственным периодом системы  $T = 5.43\dots$ ) картина синхронизации близка к классической, даваемой простейшим одномерным синус-отображением окружности [8, 22] (рис. 1, в). Внутреннее устройство языков синхронизации также традиционное – можно видеть удвоения периода и характерные конфигурации «crossroad area», по терминологии [22]. С другой стороны, при воздействии с пе-

риодом, близким к собственному, основной язык синхронизации хотя и окружен системой классических по форме языков, но внутри устроен иначе (рис. 1, б). Хорошо видна линия вторичной бифуркации Андронова – Хопфа на «вершине» языка и отвечающая ей вторичная система языков синхронизации.

На рис. 2 приведены аттракторы неавтономной системы Ресслера (8). На рис. 2 а, б представлены различные конфигурации аттракторов периода 3, а на рис. 2 в, г аттракторы периода 2 и 4, соответственно. Все перечисленные рисунки относятся к случаю, когда амплитуда внешнего воздействия является весьма существенной. Если же амплитуда воздействия мала, аттрактор неавтономной системы не будет сильно отличаться от автономного случая. Импульс, не сильно изменяя траекторию автономной системы, переместит изображающую точку в фазовом пространстве на небольшую величину. Таким образом, увеличится период режима неавтономной системы, но при этом форма самого аттрактора изменится мало.

Теперь изменим параметры автономной системы так, чтобы величина «выступа» аттрактора в направлении оси  $z$  увеличилась:  $p = 0.3$ ,  $q = 0.1$ ,  $r = 2.0$ . В этом случае  $\Delta z \approx 6.7$ . На рис. 3 изображены карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты неавтономной системы Ресслера (8) для указанных выше параметров. Видно, что в этом случае, также как и в предыдущем, наблюдаются языки синхронизации, однако, значительно увеличилась область разбегания траекторий, а явления синхронизации и квазипериодические режимы реализуются при гораздо меньших значениях амплитуды внешнего воздействия  $A$  (рис. 3, а). Также языки Арнольда несколько деформировались (рис. 3, б, в): они стали более узкими, нарушается их симметрия, и они несколько наклонены в левую сторону.

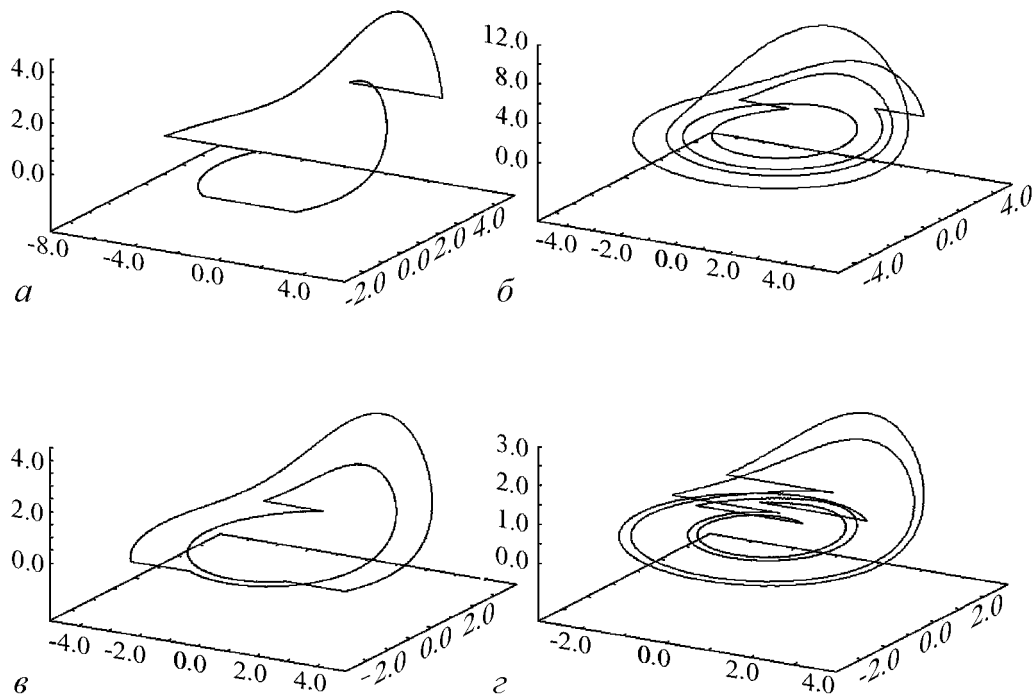


Рис. 2. Аттракторы неавтономной системы Ресслера (8) для различных значений амплитуды  $A$  и периода  $T$  внешнего воздействия, соответственно: а – 4.4, 1.8; б – 1.8, 10.9; в – 2.0, 3.7; г – 2.5, 7.1

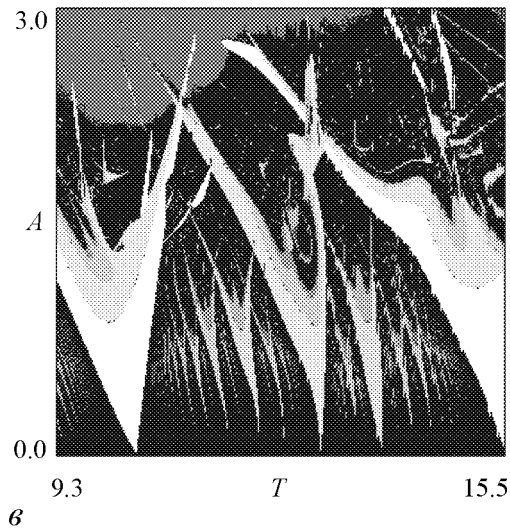
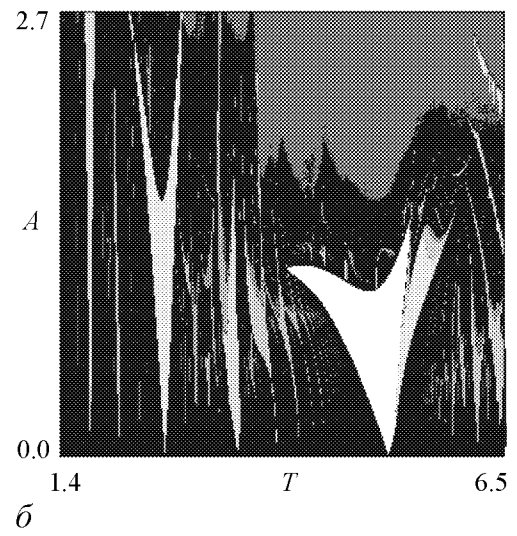
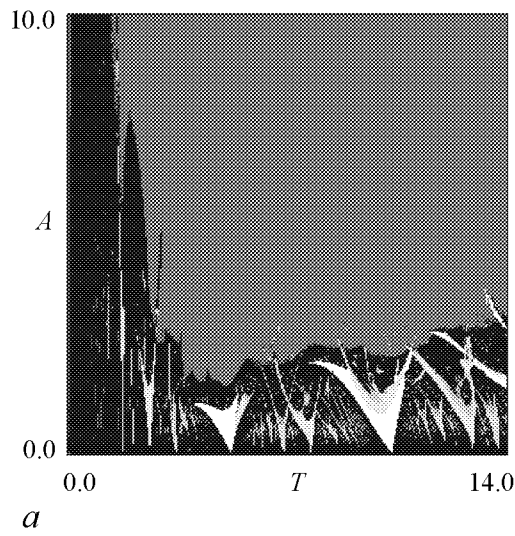


Рис. 3. Карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты для неавтономной системы Рёсслера (8) на плоскости параметров (амплитуда – период внешнего воздействия). Карты построены для  $p = 0.3$ ,  $q = 0.1$ ,  $r = 2.0$

## 2. Система Рёсслера под воздействием периодической последовательности $\delta$ -функций, действующих перпендикулярно плоскости, содержащей предельный цикл

Рассмотрим, как изменится картина синхронизации в неавтономной системе Рёсслера, если импульсы действуют вдоль оси  $z$ , то есть перпендикулярно плоскости, в которой в основном лежит предельный цикл,

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -x - z, \\
 \dot{y} &= x + py, \\
 \dot{z} &= q + (x - r)z + A \sum \delta(t - nT).
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Снова начнем со случая, когда в автономной системе реализуется цикл периода 1, а величина «выступа» в направлении оси  $z$  есть  $\Delta z \approx 3.5$ , то есть  $p = 0.2$ ,  $q = 0.1$ ,  $r = 1.5$ . На рис. 4 изображены соответствующая карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты, построенные для тех же значений параметров автономной системы. Если сопоставить рис. 1 и 4, то видно, что картина синхронизации стала существенно иной. Так на карте, построенной для системы (9), помимо языков синхронизации и области квазипериодических режимов, расположенных в нижней части карты, наблюдаются достаточно большие области режимов периода 1 и 2, расположенные при больших значениях амплитуды внешнего воздействия. Нижняя граница области периода 1 является линией бифуркации Неймарка – Сакера, и к ней подходят языки Арнольда, имеющие острия не только у основания, но и у вершины (рис. 4, б). Справа имеется небольшая система языков, образующих незамкну-

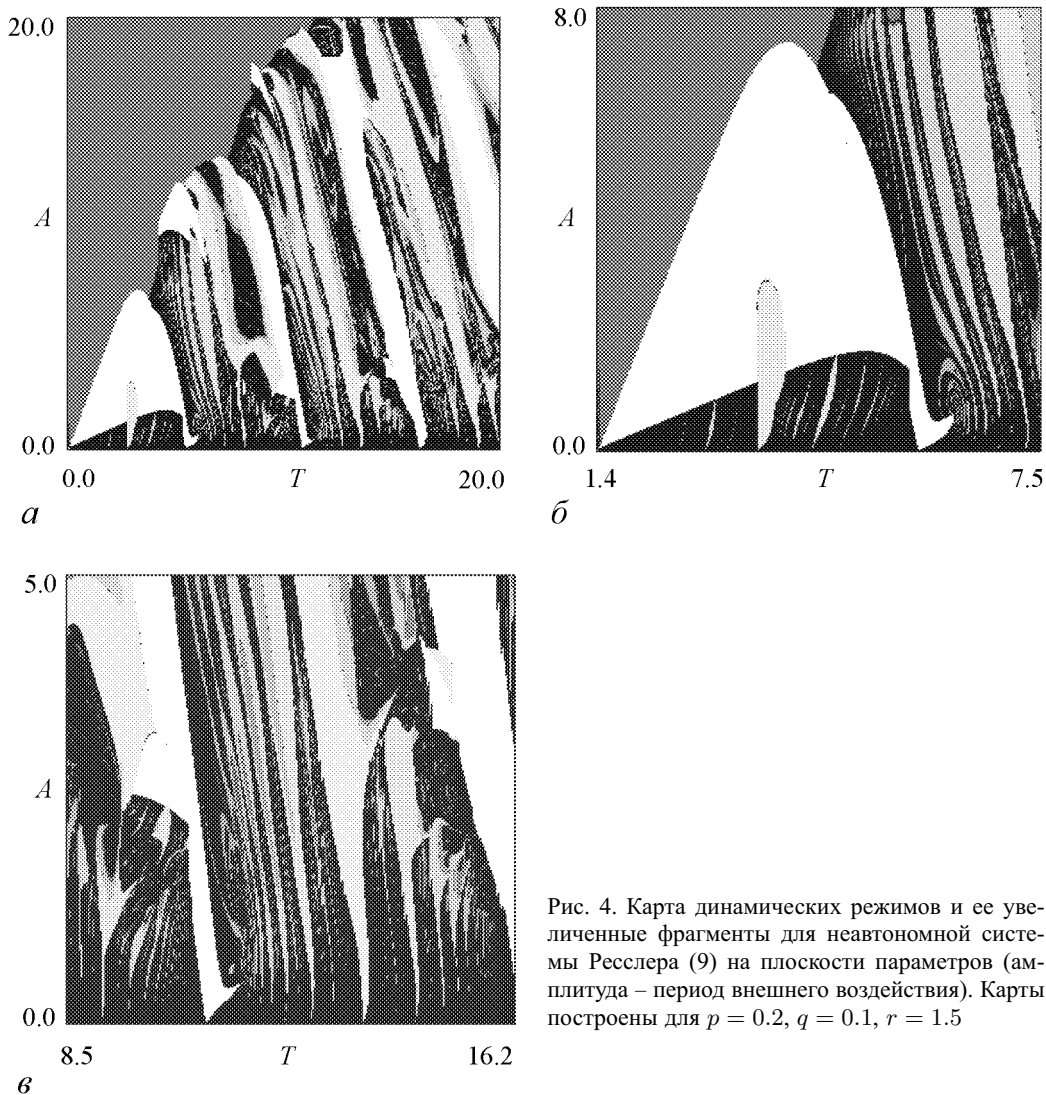


Рис. 4. Карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты для неавтономной системы Ресслера (9) на плоскости параметров (амплитуда – период внешнего воздействия). Карты построены для  $p = 0.2$ ,  $q = 0.1$ ,  $r = 1.5$

тые кольца. Остальные языки, лежащие справа от основного, имеют вид некоторых полос. При больших амплитудах эти языки трансформируются в большие области режимов различных периодов (рис. 4, *a*, *в*). Заметим, что при малых периодах воздействия, порог «убегания» траекторий стремится к нулю, что также отличается от случая, представленного на рис. 1. На рис. 5 изображены аттракторы для неавтономной системы (9) периодов 1, 2, 3 и 5, которые следует сопоставить с аттракторами, изображенными на рис. 2.

Теперь опять изменим параметры так, чтобы величина «выступа» увеличилась:  $\Delta z \approx 6.7$ . На рис. 6 представлена соответствующая карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты. Сопоставление рисунков 4 и 6 показывает, что в этом случае увеличивается область, в которой траектория «убегает» на бесконечность и, как следствие, уменьшается область периодических и квазипериодических режимов, что особенно хорошо видно в области относительно больших значений периода внешнего воздействия  $T$ . Кроме того, языки становятся уже и наклоняются влево, усложняется их внутренне устройство. Исключение составляет область небольших значений периода внешнего воздействия ( $T < 6.0$ ). Здесь область периодических и квазипериодических режимов наоборот увеличивается, а внутри многих языков наблюдается образование островов режимов удвоенного периода с последующим переходом к хаосу по Фейгенбауму.

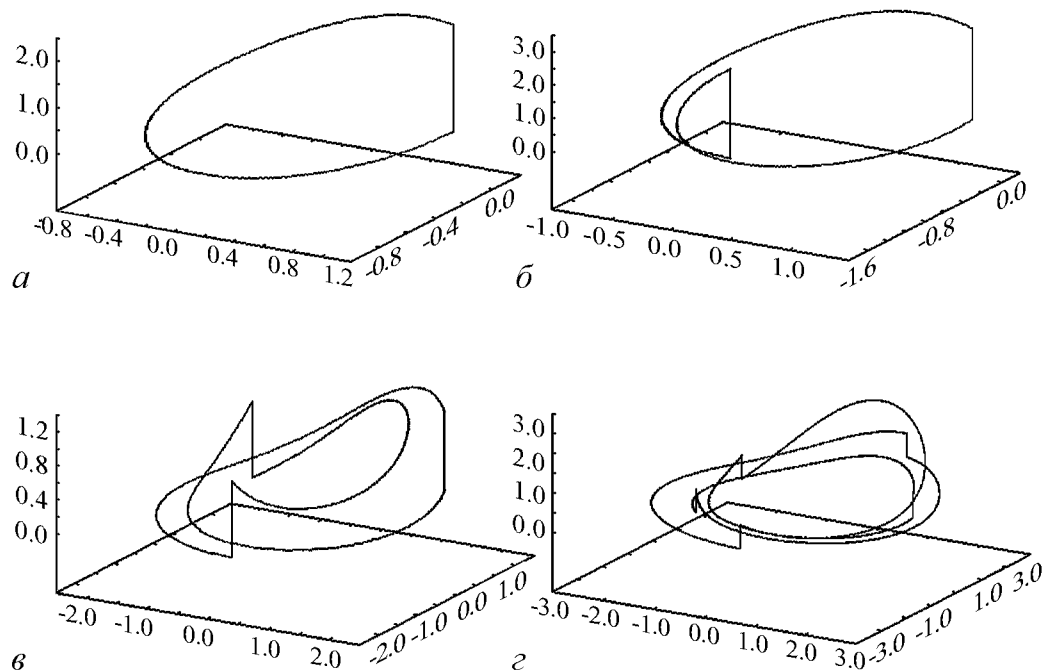


Рис. 5. Аттракторы неавтономной системы Ресслера (9) для различных значений амплитуды  $A$  и периода  $T$  внешнего воздействия, соответственно: *a* – 2.3, 4.3; *б* – 2.7, 2.8; *в* – 3.9, 0.9; *г* – 0.6, 3.4



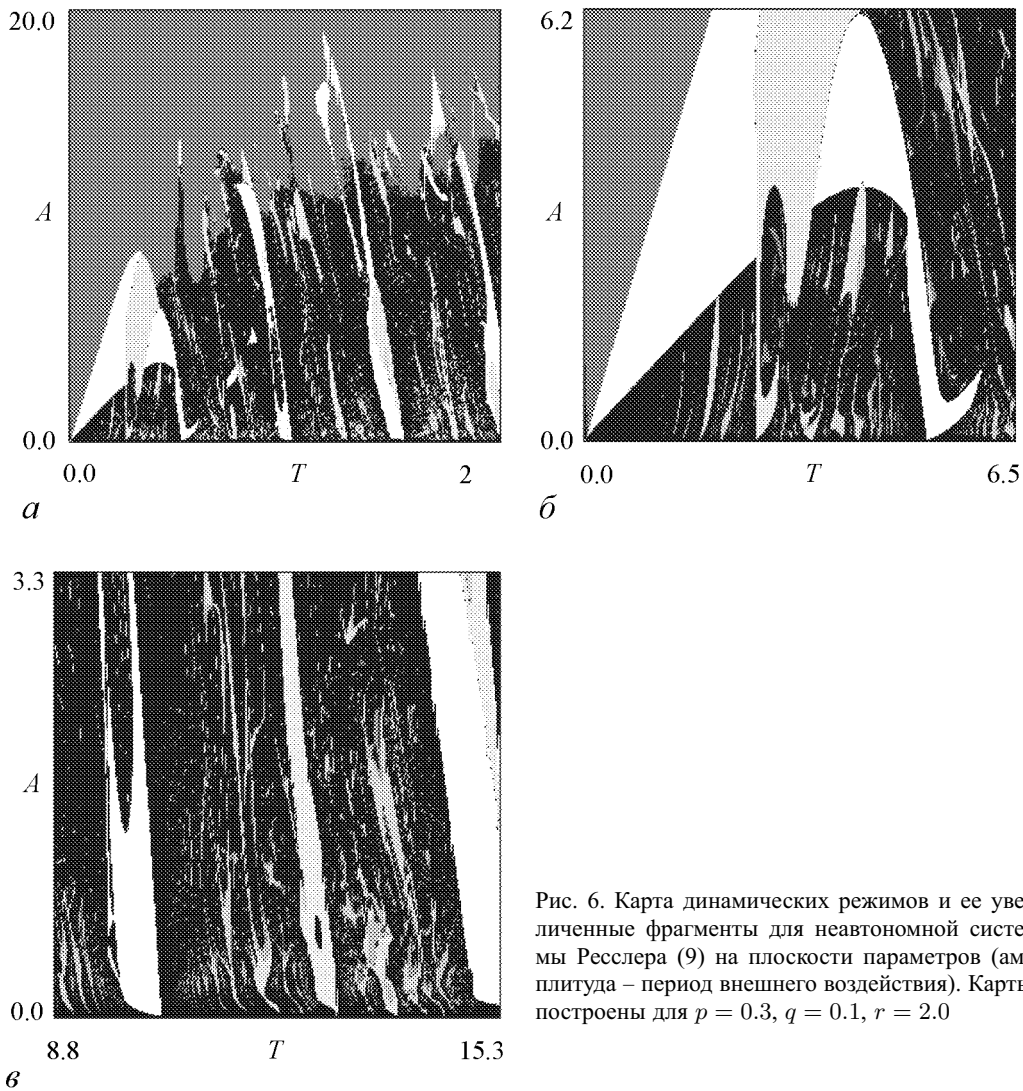


Рис. 6. Карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты для неавтономной системы Ресслера (9) на плоскости параметров (амплитуда – период внешнего воздействия). Карты построены для  $p = 0.3$ ,  $q = 0.1$ ,  $r = 2.0$

### Заключение

Таким образом, на примере системы Ресслера показано, что картина синхронизации автоколебательных систем с трехмерным фазовым пространством существенно зависит от направления действия внешних импульсов. Она оказывается классической лишь в том случае, если импульсы действуют в плоскости, в которой в основном расположен предельный цикл. Но даже тогда внутреннее устройство основного языка, реализующегося при периоде воздействия, примерно равном собственному, оказывается специфическим. Если же внешние импульсы действуют перпендикулярно этой плоскости, имеет место иная картина языков синхронизации и областей периодических режимов. Кроме того, происходит определенное изменение картины синхронизации при «развитии» аттрактора в третьем измерении в фазовом пространстве: увеличивается область «разбегания» траекторий, языки синхронизации стано-

вятся более узкими, а их внутреннее устройство усложняется. Полученные закономерности могут быть полезны при исследовании других автоколебательных систем с трехмерным фазовым пространством.

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований грант № 04-02-04011 и грантом CRDF BRHE REC-006 № Y2-P-06-13.*

### **Библиографический список**

1. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 368 с.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1990, 240с.
3. Ott E. Chaos in dynamical systems. Cambridge university press, 1993.
4. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. Winfree A.T. The geometry of biological time. Springer Berlin, 1980.
6. Caldas I.L., Tasson H. Limit cycles of periodically forced oscillations // Phys. Lett, 1989. Vol. A135. p.264-266.
7. Steeb W.H., Kunick A. Chaos in limit-cycle systems with external periodic excitation // Int. J of Nonlinear Mechanics, 1987. № 22. P. 349.
8. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
9. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // Physica, 1997. Vol. D104. P. 219.
10. Gonzalez D.L. and Piro O. Chaos in a nonlinear driven oscillator with exact solution // Phys. Rev. Lett., 1983. Vol. 50, № 12. P. 870.
11. Ding E.J. Analytic treatment of periodic orbit systematics for a nonlinear driven oscillator // Phys. Rev., 1986. Vol. A34, № 4. P. 3547.
12. Ding E.J. Analytic treatment of a driven oscillator with a limit cycle // Phys. Rev., 1987. Vol. A35, № 6. P. 2669.
13. Ding E.J. Structure of parameter space for a prototype nonlinear oscillator // Phys. Rev., 1987. Vol. A36, № 3. P. 1488.
14. Ding E.J. Structure of the parameter space for the van der Pol oscillator // Physica Scripta, 1988. Vol. 38. P. 9.
15. Ullmann K. and Caldas I.L. Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system // Chaos, Solitons & Fractals, 1996. № 11. P. 1913.
16. Keener J.P., Glass L. Global bifurcation of a periodically forced nonlinear oscillator // J. Math. Biology, 1984. № 21. P. 175.
17. Glass L., Sun J. Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // Phys. Rev., 1994. Vol. 50, № 6. P. 5077.
18. Ding E.J. and Hemmer P.C. Exact treatment of mode locking for a piecewise linear map // Journal of Statistical Physics, 1987. Vol. 46, № 1-2. P. 99.
19. Glass L. et. all. Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator // Phys. Rev. A., 1983. № 29. P. 1348.

20. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Осциллятор ван-дер-Поля с импульсным воздействием: от потока к отображениям // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2001. № 6. С. 69.
21. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Синхронизация автоколебательной системы ван дер Поля – Дуффинга короткими импульсами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2004. № 5. С. 16.
22. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.:Физматлит, 2001. 296 с.

Саратовский филиал ИРЭ РАН  
Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
После доработки

02.12.05  
10.07.06

### FEATURES OF THE SYNCHRONIZATION PICTURE BY THE PULSES IN THE SYSTEM WITH 3-DIMENSIONAL PHASE SPACE BY THE EXAMPLE OF THE RESSLER SYSTEM

*A.P. Kuznetsov, N.V. Stankevich, L.V. Turukina*

Features of the synchronization picture in the system which limit cycle lied in three-dimensional phase space are considered. By the example of Ressler system with the periodic sequence of  $\delta$ -Functions it is shown, that the synchronization picture essentially depends on a direction of the external force. Features of the synchronization tongues are found.



*Станкевич Наталья Владимировна* – родилась в 1985 году. С 2000 по 2002 год обучалась в Лицее прикладных наук Саратова. В 2002 году поступила в Саратовский госуниверситет на факультет нелинейных процессов. В настоящее время студентка 5 курса факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается исследованием особенностей синхронизации короткими импульсами в многомерных автоколебательных системах. Принимала участие в конференциях разного уровня. Автор 6 публикаций, в том числе 2-х статей.



*Тюрюкина Людмила Владимировна* – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор 26 научных публикаций, в том числе 7 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.  
E-mail: ludmila@forpost.ru