

ВЛИЯНИЕ АСИММЕТРИИ СВЯЗИ НА БИФУРКАЦИОННЫЕ МЕХАНИЗМЫ РАЗРУШЕНИЯ ПРОТИВОФАЗНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА

В.В. Астахов, А.В. Шабунин, П.А. Стальмахов

В работе рассматриваются режимы управляемой противофазной синхронизации хаоса в диффузионно связанных кубических отображениях. Исследуется влияние асимметрии управляющего воздействия на механизмы разрушения синхронизации. Обнаружен новый бифуркационный сценарий потери синхронизации хаоса, который включает седло-репеллерную и транскритическую бифуркации неустойчивых неподвижных точек. Показано, что в зависимости от степени асимметрии управляющих воздействий одна и та же последовательность бифуркаций неустойчивых неподвижных точек может индуцировать переход как к пузырящемуся поведению, так и к изрешечиванию бассейна аттрактора.

Введение

В работе [1] рассматривалась противофазная синхронизация хаоса в связанных бистабильных системах с дискретным временем при использовании дополнительной управляющей обратной связи. Было обнаружено, что устойчивые синхронные колебания существуют в ограниченной области значений параметра управления. При выходе за этот диапазон наблюдается разрушение хаотической синхронизации через локальную изрешеченность хаотического аттрактора, а затем через бифуркацию прорыва [2]. Механизмы этих явлений для случая симметричной связи повторяют соответствующие механизмы, ответственные за разрушение полной синфазной синхронизации хаоса (см., например, [3]). Естественно, что полная идентичность взаимодействующих осцилляторов, наряду с симметрией управляющей связи, является идеализацией реальных систем. Представляется интересным вопрос: как асимметрия повлияет на обнаруженные закономерности потери синхронизации хаоса. В работе [4] нами уже рассматривалось влияние неидентичности осцилляторов при сохранении симметрии связи на механизмы разрушения полной синхронизации. При этом исследования ограничивались случаем малой расстройки между подсистемами, так чтобы ее можно было рассматривать как возмущение «идеальной» системы. Было обнаружено, что при переходе от одинаковых осцилляторов к осцилляторам с малой расстройкой по параметрам десинхронизация происходит по тому же сценарию, то есть через последовательность этапов слабой синхронизации и изрешечивания бассейна притяжения синхронного аттрактора, но бифуркационный механизм,

отвечающий за эти явления, меняется. В настоящей работе исследуется разрушение противофазной синхронизации для системы идентичных осцилляторов, но с несимметричной связью. Рассматривается весь диапазон возможной асимметрии связи – от симметричной до однонаправленной.

1. Исследуемая система, свойства симметрии, существование и устойчивость противофазных колебаний

Рассмотрим систему двух взаимодействующих кубических отображений в виде

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma(f(y_n) - f(x_n)), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma(f(x_n) - f(y_n)),\end{aligned}\tag{1}$$

где x_n, y_n – динамические переменные первой и второй подсистемы, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – дискретное время, γ – коэффициент диффузионной связи, функция $f(x_n) = (a - 1)x_n - ax_n^3$ задает одиночное кубическое отображение, a – его управляющий параметр.

Каждое из отображений представляет собой бистабильную систему, симметричную относительно преобразования $x \leftrightarrow -x$. При любых значениях a в системе существует неподвижная точка в начале координат

$$C_0 : x = 0.$$

Она является устойчивой при $0 < a < 2$. При $a = 2$ в ее окрестности в результате бифуркации вил рождается пара симметричных друг другу устойчивых неподвижных точек

$$C_{1,2} : x = \pm \sqrt{\frac{a-2}{a}}.$$

Сама точка C_0 становится неустойчивой и определяет границу бассейнов притяжения точек C_1 и C_2 , а в дальнейшем – и сформированных на их основе хаотических аттракторов. При увеличении a на базе неподвижных точек C_1 и C_2 наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся при $a = 3.3$ возникновением хаотических аттракторов. При $a = 3.6$ два симметричных друг другу хаотических аттрактора объединяются в один.

В системе связанных отображений (1) при $0 < a < 2$ и любых значениях связи существует устойчивая неподвижная точка в начале координат

$$C_{00} : x = 0, y = 0.$$

При $a = 2$ она претерпевает бифуркацию потери симметрии, в результате чего в симметричном подпространстве ($I_i : x = y$) рождается пара устойчивых, симметричных друг другу неподвижных точек

$$\begin{aligned}C_{01} : x = y &= \sqrt{\frac{a-2}{a}}, \\C_{02} : x = y &= -\sqrt{\frac{a-2}{a}}.\end{aligned}$$

После бифуркации неподвижная точка C_{00} становится неустойчивой в тангенциальном направлении к I_i , но остается устойчивой в трансверсальном направлении.

Затем, при $a = (2 - 2\gamma)/(1 - 2\gamma)$ она претерпевает еще одну бифуркацию потери симметрии. В симметричном подпространстве ($I_a : x = -y$) рождается пара седловых симметричных друг другу неподвижных точек

$$\begin{aligned} C_{10} : x = -y &= \sqrt{1 - \frac{1-\gamma}{a(0.5-\gamma)}}, \\ C_{20} : x = -y &= -\sqrt{1 - \frac{1-\gamma}{a(0.5-\gamma)}}. \end{aligned}$$

Регулярные и хаотические режимы полной синфазной синхронизации формируются на базе неподвижных точек C_{01} и C_{02} в симметричном подпространстве I_i . Режимы полной противофазной синхронизации формируются на базе неподвижных точек C_{10} и C_{20} в симметричном подпространстве I_a . В дальнейшем будут рассматриваться режимы, сформированные на базе точки C_{10} (при этом нижний индекс «10» у этой орбиты и всех порожденных ею орбит будет опускаться).

Два связанных отображения при симметрии связи и полной идентичности подсистем демонстрируют явления полной синфазной и полной противофазной синхронизации. Однако, как было показано в [1], если полная синфазная синхронизация наблюдается как для регулярных, так и для хаотических колебаний, то режимы противофазной синхронизации реализуются только для периодических орбит. Чтобы обеспечить в системе (1) противофазную синхронизацию хаоса, можно использовать управляющие воздействия вида $r(f(x_n) + f(y_n))$, реализуемые с помощью дополнительных обратных связей. Естественно, предлагаемая форма управляющего воздействия не единственная. Она выбрана с той целью, чтобы управляющее воздействие не оказывало влияния на форму целевых (противофазных) колебаний, но при этом влияло бы на их устойчивость. С учетом выбранной формы управляющего воздействия, уравнения системы (1) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma(f(y_n) - f(x_n)) + r(f(x_n) + f(y_n)), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma(f(x_n) - f(y_n)) + \delta r(f(x_n) + f(y_n)). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь r – интенсивность управляющей связи, $0 \leq \delta \leq 1$ – коэффициент асимметрии связи. Записав в таком виде уравнения, мы сможем, меняя δ , рассмотреть весь диапазон асимметрии связи: от полностью симметричной (взаимной) при $\delta = 1$ до однонаправленной при $\delta = 0$.

Как видно из уравнений (2), управляющее воздействие не меняет формы противофазных колебаний, поскольку при достижения цели управления дополнительное слагаемое управляющей связи ($f(x_n) + f(y_n)$) становится равным нулю. Определим, как дополнительная обратная связь влияет на устойчивость противофазных колебаний. Так как фазовые траектории, соответствующие режимам полной противофазной синхронизации, располагаются в одномерном инвариантном подпространстве I_a полного фазового пространства системы, то можно по отдельности рассматривать их устойчивость к возмущениям внутри подпространства (тангенциальная устойчивость) и в трансверсальном к нему направлении (трансверсальная устойчивость). Устойчивость к возмущениям внутри I_a определяется тангенциальным показателем Ляпунова $\Lambda_{||}$, имеющим вид

$$\Lambda_{||} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| (1 - 2\gamma) f' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) \right|. \quad (3)$$

Он отрицателен для периодических синхронных орбит и положителен для синхронных хаотических траекторий. Устойчивость хаотического предельного множества в нормальном направлении к симметричному подпространству I_a определяет трансверсальный показатель Ляпунова Λ_{\perp} . Для системы с асимметричным управляющим воздействием (2) выражение для трансверсального показателя Ляпунова имеет вид

$$\Lambda_{\perp} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| (1 + (1 + \delta)r) f' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) \right|. \quad (4)$$

Сопоставляя (3) и (4), можно записать соотношение между трансверсальным и тангенциальным показателями Ляпунова

$$\Lambda_{\perp} = \Lambda_{\parallel} + \ln \left| \frac{1 + (1 + \delta)r}{1 - 2\gamma} \right|, \quad (5)$$

из которого следует, что при любом значении Λ_{\parallel} (то есть при любой степени хаотичности синхронных движений) и любом $\gamma \neq 0.5$ можно выбрать значение коэффициента r таким, чтобы синхронные противофазные движения стали трансверсально устойчивыми.

Выберем значения параметров $a = 3.8$, $\gamma = 0.04$, соответствующие режиму развитого объединенного хаоса в системе без управления, то есть при $r = 0$. На рис. 1 для этих значений построена зависимость трансверсального показателя Ляпунова от параметра r , как для случая симметричной связи ($\delta = 1$), так и при незначительной асимметрии ($\delta = 0.9$).

Сравнивая области устойчивости для этих двух случаев, можно заключить, что с введением асимметрии связи область устойчивости (область отрицательных значений трансверсального показателя Ляпунова) смещается в сторону отрицательных значений параметра r и становится шире. Соответственно отличаются бифуркационные значения параметра r , при которых наблюдается бифуркация прорыва, когда трансверсальный показатель Ляпунова меняет знак. В симметричном случае бифуркации прорыва происходят при значениях r , равных -0.7475 и -0.2525 , а в асимметричном случае – при значениях r , равных -0.7915 и -0.2605 . Таким образом, при $\delta = 0.9$ область устойчивости расширилась на интервал $\Delta r = 0.0359$. При выходе параметра r за пределы указанного диапазона синхронные колебания теряют

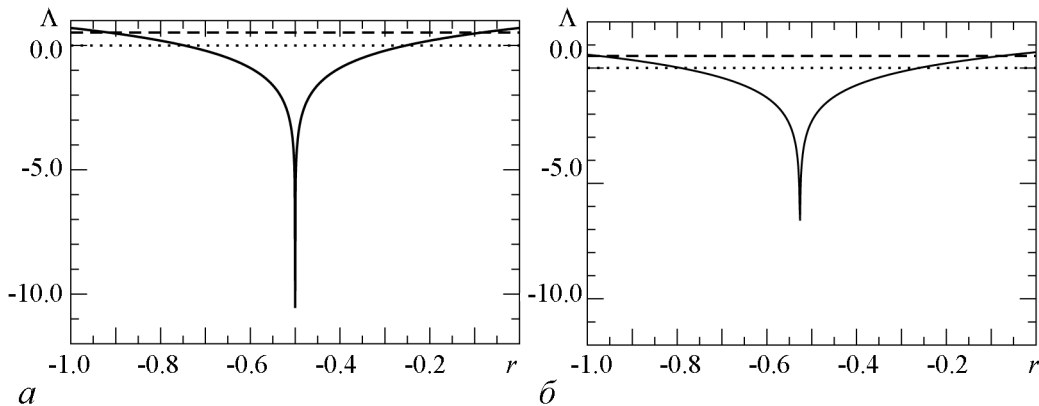


Рис. 1. Зависимость трансверсального показателя Ляпунова от коэффициента управляющей связи при двух значениях параметра асимметрии δ : $a - 1.0$, $b - 0.9$

устойчивость в трансверсальном к I_a направлении, что ведет к разрушению синхронизации хаоса по определенным сценариям.

2. Бифуркационный сценарий разрушения синхронизации при малой асимметрии связи

Как известно, сценарий разрушения хаотической синхронизации во многом определяется бифуркациями седловых периодических орбит, встроенных в синхронный хаотический аттрактор. В нашем случае синхронное хаотическое предельное множество сформировано (при $r = 0$) в результате каскада бифуркаций удвоения периода трансверсально неустойчивых периодических орбит [1]

$$C \rightarrow 2C \rightarrow 4C \rightarrow 8C \rightarrow 16C \rightarrow \dots$$

Эти бифуркации происходят внутри симметричного подпространства при любом значении параметра r , который влияет только на трансверсальную устойчивость орбит.

Исследуем поведение симметричных периодических орбит $2^N C$, $N = 0, 1, 2, \dots$ при выходе из области противофазной синхронизации хаоса, как в сторону увеличения, так и уменьшения параметра r . Будем рассматривать случай слабой асимметрии связи при $\delta = 0.9$, сопоставляя его со случаем симметричной связи.

Первым этапом разрушения полной хаотической синхронизации является этап локальной изрешеченности хаотического аттрактора, когда внутри него появляются репеллерные орбиты, из окрестности которых (при наличии трансверсальных возмущений) траектория «выбрасывается» в сторону от симметричного подпространства I_a . В результате режим синхронизации становится негрубым, то есть чувствительным к слабому шуму и малой расстройке по параметрам. Причиной появления локальной изрешеченности являются бифуркации седловых периодических орбит, встроенных в хаотический аттрактор, в результате которых они теряют устойчивость в трансверсальном направлении. Так, при увеличении параметра r орбиты основного семейства $2^N C$ ($N = 0, 1, 2, \dots$), а именно, C , $2C$, $4C$, $8C$, не меняя своих координат, претерпевают бифуркации удвоения периода с потерей устойчивости в трансверсальном направлении при значениях $r = -0.2862454$, -0.2774312 , -0.2798463 , -0.2787813 , соответственно. Эти бифуркации полностью соответствуют последовательности бифуркаций в случае симметричной связи, которые происходят при близких значениях параметра r к вышеперечисленным. Также как и в симмет-

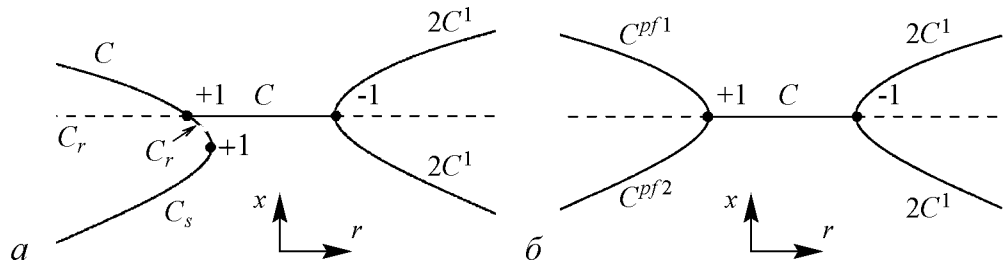


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма режимов, сформированных на базе орбиты C : a – случай слабой асимметрии при $\delta = 0.9$, b – для полностью симметричной связи при $\delta = 1.0$. Сплошная линия – седловые точки, штриховая линия – репеллер

ричном случае, потеря устойчивости режима хаотической управляемой синхронизации начинается с бифуркации седловой неподвижной точки C . При $r = -0.2862454$ ее собственное значение, соответствующее трансверсальному направлению к I_a , становится равным -1 . Происходит бифуркация удвоения периода. В результате C превращается в репеллер, и в его окрестности вне симметричного подпространства мягко рождается седловая орбита удвоенного периода $2C^1$. С увеличением r точки этой орбиты плавно расходятся от симметричного подпространства. На рис. 2 показана бифуркационная диаграмма на базе орбиты C как для указанного случая слабой асимметрии (рис. 2, *а*), так и полностью симметричной связи (рис. 2, *б*).

Теперь в малой окрестности репеллера C имеются начальные условия, стартова с которых фазовые траектории уходят из окрестности противофазного симметричного подпространства в сторону седловой орбиты $2C^1$. Седловая орбита $2C^1$ и ее неустойчивые многообразия ограничивают область вблизи симметричного подпространства, которую траектории не могут покинуть. После этой бифуркации в рассматриваемой системе может наблюдаться пузырящееся поведение, которое проявляется следующим образом. Без возмущений синхронное движение сохраняется, однако добавление слабого шума индуцирует режим перемежающейся синхронизации [5]. Теперь фазовая траектория в течение длительных интервалов времени демонстрирует почти синхронное поведение, когда траектория находится вблизи симметричного подпространства (так называемые «ламинарные фазы»). Этапы синхронного движения время от времени прерываются «выбросами» в сторону от симметричного подпространства, что приводит к кратковременным нарушениям синхронизации (так называемые «турбулентные всплески»). Характерный вид временной реализации $(x_n + y_n)$ для данного процесса показан на рис. 3, *а*. На нем приведена временная зависимость суммы динамических переменных при добавленном в систему аддитивном шуме интенсивностью порядка 10^{-5} .

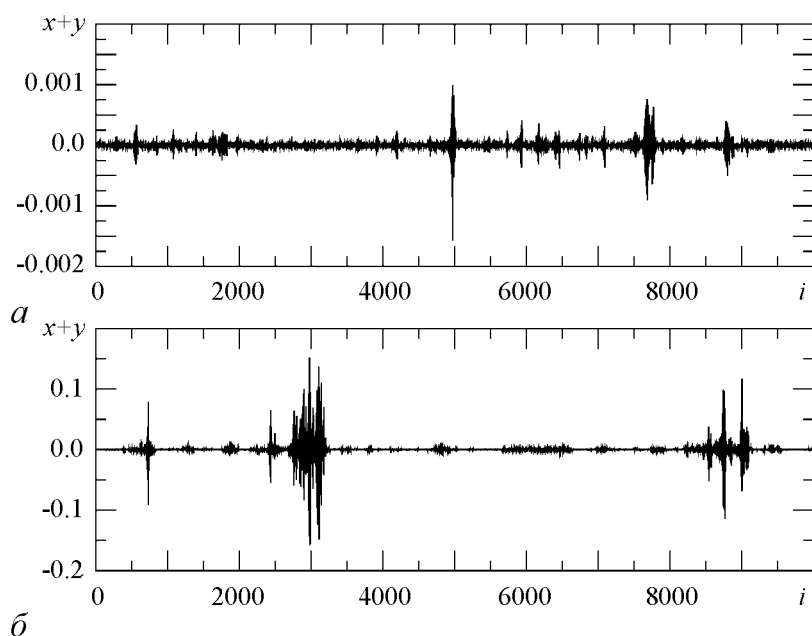


Рис. 3. Временная реализация $x + y$, соответствующая перемежающейся синхронизации при значениях r : -0.278 (*а*) и -0.27 (*б*). Остальные значения параметров: $a = 3.8$, $\gamma = 0.04$, интенсивность шума 10^{-5}

При дальнейшем увеличении параметра r происходят бифуркации удвоения седловых циклов с более высокими периодами ($2C$, $4C$ и $8C$), встроенных в хаотический аттрактор. В результате они становятся репеллерами и в их окрестностях вне симметричного подпространства мягко рождаются седловые циклы удвоенных периодов. С увеличением r точки седловых циклов плавно расходятся от симметричного подпространства. Пузырящееся поведение становится более развитым (рис. 3, б). Однако без внешнего шума, также как в системе с симметричным управляющим воздействием, после переходных процессов наблюдаются синхронные противофазные хаотические колебания.

Далее при $r = -0.2605$ происходит бифуркация прорыва, завершающая процесс разрушения синхронизации хаоса. За точкой бифуркации при малой надкритичности наблюдаются режимы перемежающейся синхронизации, когда интервалы синхронного поведения чередуются случайным образом с интервалами нарушения синхронизации. Теперь, в отличие от этапа локальной изрешеченности (пузырящегося поведения), перемежающаяся синхронизация наблюдается как в системе с малым шумом, так и без шума. С увеличением надкритичности длительность синхронных фаз уменьшается, и перемежающаяся синхронизация постепенно сменяется полностью несинхронными хаотическими колебаниями. Здесь следует отметить, что описанный сценарий десинхронизации, происходящей с увеличением параметра r , полностью идентичен случаю симметричной связи ($\delta = 1.0$).

Поведение системы при десинхронизации имеет существенные различия в случаях симметричных и асимметричных управляющих воздействий, когда выход из области противофазной синхронизации происходит при уменьшении значений управляющего параметра r . Здесь также как и во всех других случаях потерю синхронизации определяют бифуркации основного семейства симметричных седловых периодических орбит, встроенных в синхронный хаотический аттрактор.

Для случая симметричной связи процесс локальной изрешеченности хаотического аттрактора начинается с трансверсальной бифуркации седловой орбиты C , при которой она претерпевает бифуркацию потери симметрии (бифуркация вил). Усиливают процесс локального изрешечивания бифуркации орбит более высокого периода ($2C$, $4C$, $8C$), которые теряют устойчивость в трансверсальном направлении через бифуркацию удвоения периода.

При асимметричных управляющих воздействиях бифуркация потери симметрии седловой точки C , как бифуркация обусловленная симметрией системы, не может быть реализована. Поэтому бифуркационный механизм в этой части меняется. При небольшой асимметрии связи (в данном случае $\delta = 0.9$) вблизи того же бифуркационного значения, при $r = -0.7507$ происходит седло-репеллерная бифуркация (см. рис. 2). В окрестности седловой точки C , встроенной в хаотический аттрактор, рождается пара неподвижных точек: репеллер C_r и седловая точка C_s . При уменьшении управляющего параметра седловая неподвижная точка C_s удаляется от симметричного подпространства. При этом репеллер C_r перемещается к симметричному подпространству и сближается с седловой неподвижной точкой C , встроенной в синхронный хаотический аттрактор. При $r = -0.7513$ репеллер C_r сливается с седловой неподвижной точкой C , происходит транскритическая бифуркация. Неподвижные точки обмениваются устойчивостью: репеллер C_r превращается в седло, а седло C становится репеллером. При дальнейшем уменьшении параметра r репеллер C остается встроенным в синхронное хаотическое множество внутри симметричного

подпространства, а седло C_r уходит в сторону от симметричного подпространства. Дальнейшее развитие потери трансверсальной устойчивости синхронного хаотического множества происходит в результате бифуркаций удвоения периода седловых орбит более высокого периода $2C$, $4C$, $8C$ и т.д. Данные бифуркации присутствуют в обоих случаях при $\delta = 0.9$ и $\delta = 1.0$.

Таким образом, здесь процесс потери полной противофазной синхронизации хаоса начинается совершенно иным образом, по другому бифуркационному сценарию. Вначале в бассейне притяжения синхронного хаотического аттрактора в результате седло-репеллерной бифуркации рождается пара неустойчивых неподвижных точек. Затем одна из них (репеллер) входит в симметричное подпространство и взаимодействует с седловой неподвижной точкой, встроенной в синхронный хаотический аттрактор. Происходит транскритическая бифуркация, в результате которой появляется трансверсально неустойчивая неподвижная точка (репеллер), встроенная в хаотический аттрактор. Следует отметить, что такой бифуркационный сценарий потери противофазной синхронизации хаоса еще не был описан в литературе и выявлен впервые.

3. Изменения в механизме разрушения синхронизации с ростом асимметрии

Проследим более подробно за изменениями области устойчивости режимов синхронизации и бифуркационного сценария потери синхронизации по мере увеличения асимметрии управляющих воздействий на подсистемы: от симметричного до однонаправленного, уменьшая параметр δ от 1.0 до 0.

На рис. 4 построены области устойчивости синхронных режимов при различных значениях параметра δ . Они представляют собой интервалы значений управляющих параметров, при которых трансверсальный показатель Ляпунова принимает отрицательные значения. Из рисунка видно, что при уменьшении δ область устойчивости смещается в сторону меньших значений параметра r и расширяется. В предельном случае $\delta = 0$ интервал устойчивости имеет ширину $\Delta r = 1.0$. Область устойчивой противофазной синхронизации хаоса увеличилась в два раза по параметру r по сравнению с полностью симметричным случаем $\delta = 1.0$.

Рассмотрим, как увеличение асимметрии связи влияет на бифуркационный механизм потери синхронизации хаоса.

На рис. 5 показаны бифуркационные диаграммы неустойчивых периодических орбит, участвующих в процессе потери синхронизации хаоса, при уменьшении r для

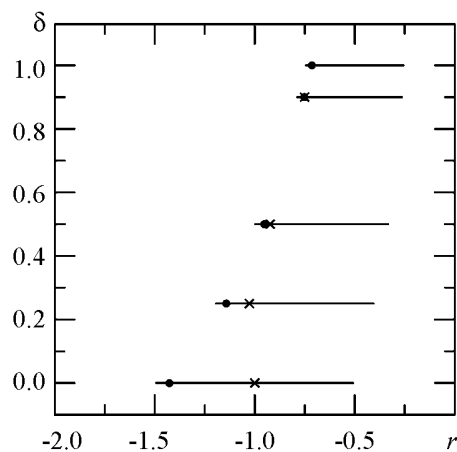


Рис. 4. Зависимость ширины области трансверсальной устойчивости синхронного режима от параметра асимметрии δ . Кружочками отмечены точки транскритической бифуркации орбиты C , крестиками — седло-репеллерной бифуркации

различных значений параметра δ . Кружочками отмечены точки бифуркаций, цифры означают соответствующие значения мультипликаторов периодических орбит. Два верхних рисунка (рис. 5, *a*, *b*) относятся к уже рассмотренным в предыдущем разделе случаям полной симметрии и слабой асимметрии управляющего воздействия. При этом центральная точка $+1$, соответствующая бифуркации вил для случая симметричного воздействия, расщепляется на две точки $+1$ и $+1$, соответствующие седло-репеллерной и транскритической бифуркациям в слабонесимметричном случае. Из бифуркационных диаграмм видно, что увеличение асимметрии приводит к смещению бифуркационных значений для седло-репеллерной и транскритической бифуркаций в сторону меньших значений r . При этом интервал между бифуркационными значениями по параметру r увеличивается. Точка фазового пространства, где происходит рождение седло-репеллера (седло-репеллерная бифуркация), плавно отдалается от симметричного подпространства и точки C все дальше и дальше (рис. 5, *b*-*d*).

Эти изменения в поведении неустойчивых периодических орбит с ростом асимметрии связи приводят к качественным изменениям процесса десинхронизации. При небольшой асимметрии управляющих воздействий на подсистемы с уменьшением параметра r процесс потери полной противофазной синхронизации хаоса происходит через пузыряющийся переход. Однако по мере увеличения асимметрии эта же последовательность бифуркаций неустойчивых периодических орбит может вместо пузыряющегося перехода индуцировать изрешечивание бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора [6]. Под явлением изрешечивания бассейна притяжения обычно понимают возникновение в окрестности синхронного аттрактора областей притяжения других аттракторов. При этом, выбор начальных условий сколь угодно близко к аттрактору не гарантирует, что траектория не уйдет к другому пре-

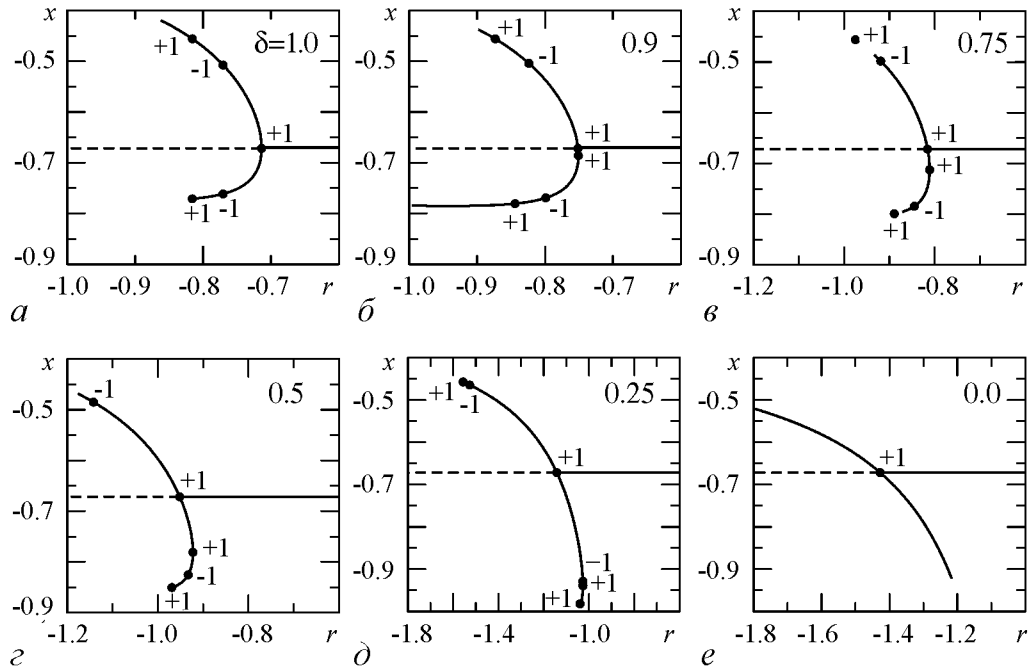


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы на плоскости (r, x) для неустойчивых периодических орбит в зависимости от расстройки δ

дельному множеству. В случае изрешечивания бассейна синфазного аттрактора такими предельными множествами, чьи области притяжения «вклиниваются» в бассейн синхронного аттрактора, являются периодические орбиты разных периодов [1]. В настоящем случае, при сильно асимметричной связи, бассейн притяжения синхронного аттрактора изрешечивается областью притяжения аттрактора, находящегося на бесконечности. Рассмотрим это явление более детально.

4. Эволюция структуры бассейна притяжения хаотического аттрактора с увеличением асимметрии управляющей связи

В исследуемой системе синхронный хаотический аттрактор окружен бассейном притяжения конечного размера, за пределами которого фазовые траектории уходят на бесконечность. Будем исследовать изменения бассейна притяжения при увеличении асимметрии связи. Для этого использовался стандартный алгоритм: выбирались значения начальных условий x_0, y_0 , после чего система (1) в течение длительного времени предоставлялась сама себе. По истечении интервала релаксации определялось, находится ли конечная точка вблизи симметричного подпространства I_a , либо стремится к бесконечности. Бассейн притяжения синхронного аттрактора в дальнейшем отображается серым цветом, а бассейн притяжения аттрактора на бесконечности – белым.

При малой асимметрии управляющей связи рождение седло-репеллера происходит внутри бассейна притяжения (рис. 6, *a*). Место рождения седло-репеллера в фазовом пространстве зависит от величины асимметрии связи δ . Чем меньше асимметрия (чем ближе значение δ к единице), тем ближе к синхронному хаотическому аттрактору располагается седло-репеллер. Обозначим эту неподвижную точку как SR, и отметим, что она существует только при бифуркационном значении r , а затем распадается на седло и репеллер. При изменении величины параметра асимметрии δ меняется форма бассейна притяжения и место рождения седло-репеллера SR в фазовом пространстве. Проследим за этими изменениями более подробно.

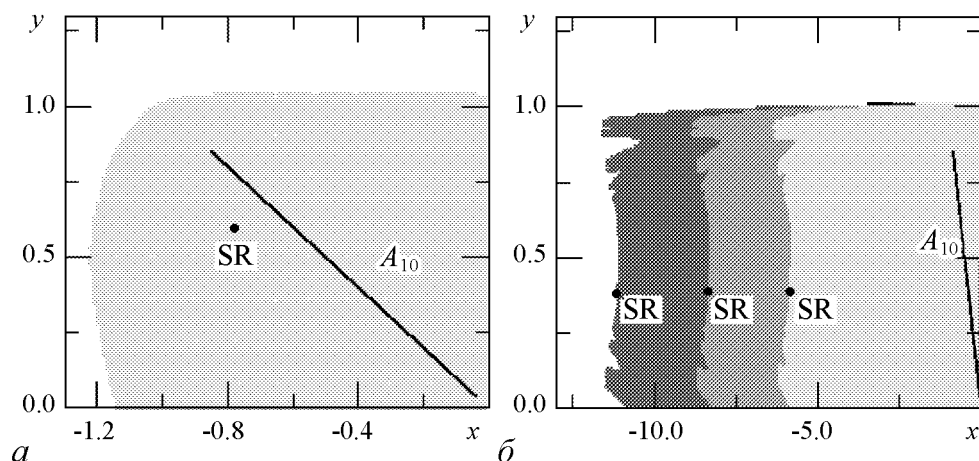


Рис. 6. Бассейн притяжения синхронного хаотического аттрактора: *a* – при малой асимметрии воздействия $\delta = 0.9$; *b* – при сильной асимметрии $\delta = 0.0419, 0.0417, 0.04166$ (более темный цвет соответствует меньшему значению δ)

Будем менять параметр асимметрии δ от единицы до нуля и следить за изменениями координат неподвижной точки SR и структуры бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора. Вначале рост асимметрии ведет к постепенному смещению точки SR к границе бассейна притяжения, а затем она оказывается лежащей на границе бассейна притяжения. При дальнейшем увеличении параметра асимметрии точка SR продолжает отдаляться от синхронного хаотического аттрактора A_{10} , при этом она «тянет» за собой и границу бассейна притяжения. На рис. 6, б показаны бассейны притяжения и положение неподвижной точки SR при различных значениях параметра асимметрии δ .

Проследим, как будет меняться бассейн притяжения хаотического аттрактора при изменении параметра r в случае однонаправленного управляющего воздействия (при $\delta = 0$). Предварительно отметим, что в этом случае репеллер располагается на границе бассейна притяжения, причем фазовые координаты седло-репеллера SR стремятся к бесконечности при стремлении параметра δ к нулю и управляющего параметра r к -1 . Таким образом, при уменьшении r от значения -1 , соответствующего абсолютной трансверсальной устойчивости противофазных колебаний

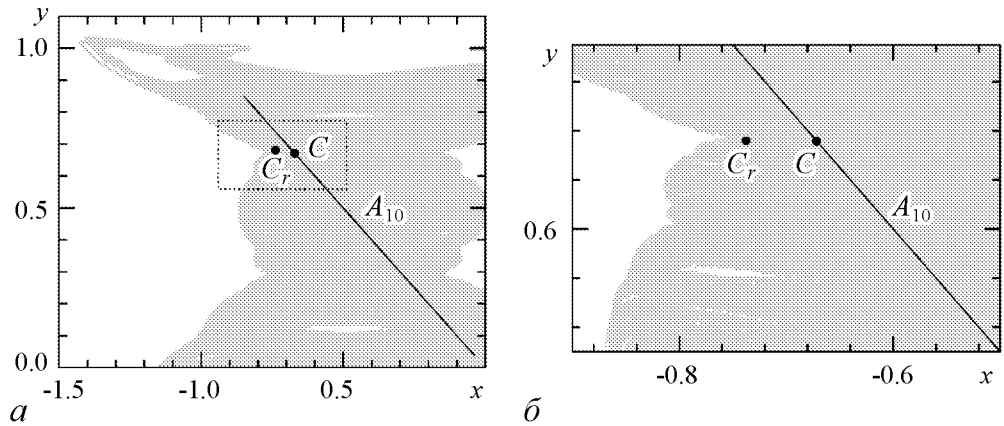


Рис. 7. *a* – бассейн притяжения хаотического аттрактора при $\delta = 0$, $r = -1.35$; *б* – фрагмент бассейна вблизи неподвижных точек

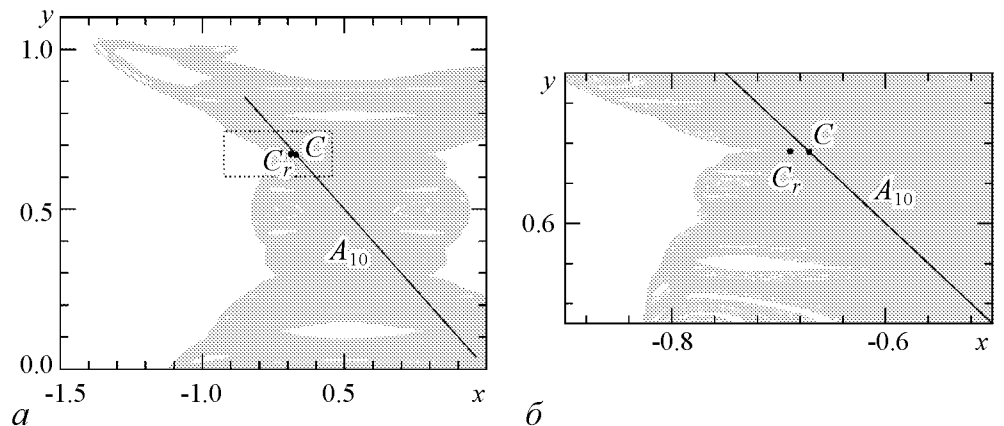


Рис. 8. *a* – бассейн притяжения хаотического аттрактора при $\delta = 0$, $r = -1.4$; *б* – фрагмент бассейна вблизи неподвижных точек

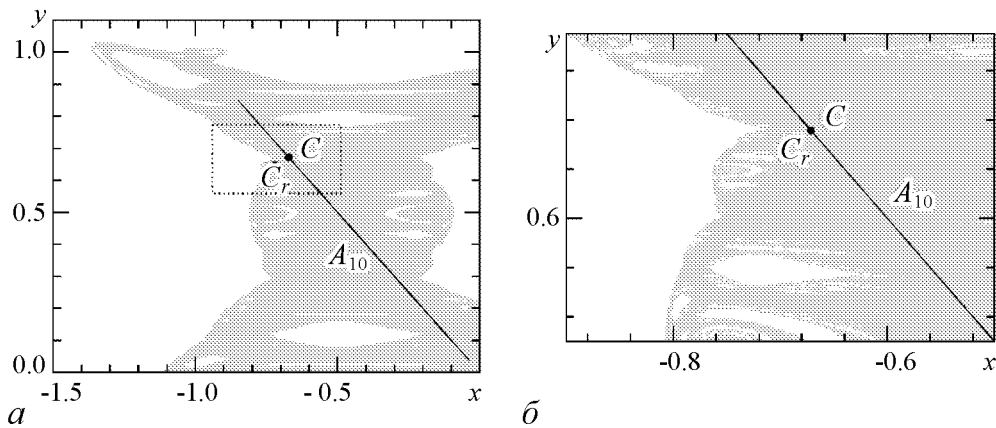


Рис. 9. *a* – бассейн притяжения хаотического аттрактора при $\delta = 0$, $r = -1.427$; *б* – фрагмент бассейна вблизи неподвижных точек

($\Lambda_{\perp} = -\infty$), седло-репеллер приходит с аттрактора на бесконечности, притягивая вместе с собой границу области притяжения этого аттрактора.

При движении по параметру r к границе области синхронизации ($r \rightarrow -1.5$) координаты репеллера меняются, и он плавно приближается к хаотическому аттрактору. Приближаясь к аттрактору, репеллер «тянет» за собой и границу бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора (рис. 7-8). На рис. 7, *a* и 8, *a* показаны фрагменты бассейна притяжения в окрестности репеллера C_r и точки C . Затягивая границу бассейна притяжения хаотического аттрактора, репеллер образует «клюв», который опирается на репеллер. В окрестности репеллера, клюв очень узкий. Далее, как уже отмечалось во втором разделе, происходит транскритическая бифуркация, при которой репеллер C_r сливается с седлом C , встроенным в синхронный хаотический аттрактор (рис. 9). После этой бифуркации в малой окрестности синхронного хаотического аттрактора появляется множество начальных условий, стартуя с которых фазовые траектории уходят на бесконечность. Дальнейшее уменьшение параметра r ведет к более сильной изрешеченности бассейна притяжения. Изрешеченный бассейн синхронного хаотического аттрактора наглядно проиллюстрирован на рис. 10. Для его построения использовалась система «нормальных координат» $u = (x + y)/2$ и $v = (x - y)/2$, в которых симметричное подпространство задается горизонтальной прямой $u = 0$. При значении $r = -1.49$ происходит бифуркация прорыва, хаотический аттрактор теряет трансверсальную устойчивость и одновременно с этим теряет бассейн притяжения. Таким образом, при уменьшении параметра r в процессе потери синхронизации хаоса происходит только изрешечивающий переход. Пузырящегося перехода в этом случае не наблюдается.

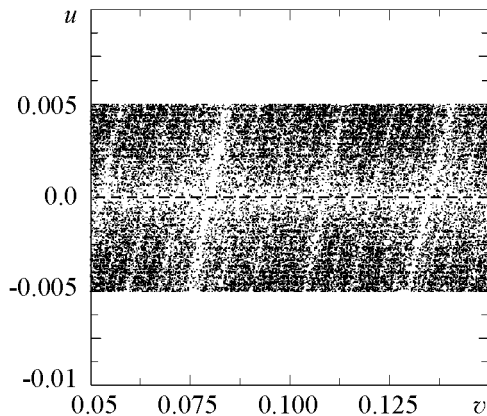


Рис. 10. Фрагмент бассейна притяжения хаотического аттрактора в режиме изрешечивания

Заключение

В двух диффузионно связанных бистабильных отображениях устойчивый режим полной противофазной синхронизации хаоса можно обеспечить, используя методы управления хаосом, а именно с помощью дополнительной управляющей связи. Стабилизация синхронных колебаний происходит в ограниченной области значений управляющего параметра. Устойчивый режим противофазной синхронизации хаоса возникает как в случае симметричных управляющих воздействий на подсистемы (при взаимной управляющей связи), так и в случае различных асимметричных управляющих воздействий (вплоть до однонаправленной управляющей связи). При переходе от взаимной к однонаправленной связи область синхронизации увеличивается.

При симметричной управляющей связи потеря полной противофазной синхронизации хаоса происходит по тому же бифуркационному сценарию, что и потеря синфазной синхронизации хаоса. Наблюдается такая же последовательность бифуркаций и также на базе основного семейства седловых периодических орбит, формирующих скелет синхронного хаотического аттрактора. Однако в случае потери полной противофазной синхронизации хаоса до бифуркации прорыва наблюдается только пузыряющийся переход, изрешечивания бассейна притяжения хаотического аттрактора не происходит.

При исследовании явления полной противофазной синхронизации хаоса в бистабильных системах с асимметричной управляющей связью обнаружен новый бифуркационный сценарий потери синхронизации. Бифуркационный сценарий, в результате которого режим синхронизации хаоса становится негрубым, существенно отличается от уже известных сценариев, и выглядит следующим образом. Вначале в окрестности синхронного противофазного подпространства рождается седло-репеллер. С уменьшением параметра r седло удаляется от синхронного хаотического аттрактора, а репеллер приближается к седловой неподвижной точке C , встроенной в хаотический аттрактор. Затем они взаимодействуют и в результате транскритической бифуркации обмениваются устойчивостью. Седловая точка C превращается в репеллер, а репеллер C_r - в седло. Такая последовательность бифуркаций неустойчивых неподвижных точек ведет к пузыряющемуся переходу. Однако по мере увеличения асимметрии управляющих воздействий на подсистемы эта же последовательность бифуркаций неустойчивых неподвижных точек может вместо пузыряющегося перехода индуцировать изрешечивающий переход. Причина заключается в том, что, начиная с некоторого значения параметра асимметрии связи, неподвижная точка (седло-репеллер) рождается не внутри бассейна притяжения синхронного хаотического аттрактора, а на его границе. Репеллер, перемещаясь к хаотическому аттрактору, «тянет» за собой границу бассейна притяжения. В этом случае транскритическая бифуркация при взаимодействии репеллера с седлом, встроенным в хаотический аттрактор, ведет к изрешечиванию бассейна притяжения.

Библиографический список

1. Астахов В.В., Шабунин А.В., Стальмахов П.А., Климишин А.В. Управляемая противофазная синхронизация хаоса в связанных кубических отображениях // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. С. 4.

2. *Ashvin P., Bescu J., Stewart I.* Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillations // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 193. P. 126.
3. *Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V.* Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 1014.
4. *Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V.* Effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. P. 5620.
5. *Platt N., Spiegel E.A., Tresser C.* On-off intermittency: A mechanism for bursting // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70. P. 279.
6. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Venkataramani S.C.* Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 1.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*17.10.2006
26.01.2007*

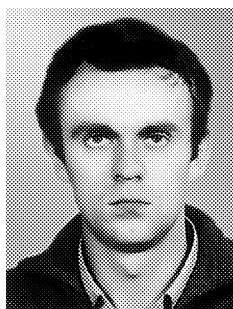
ASYMMETRICAL COUPLING INFLUENCE ON BIFURCATIONAL MECHANIZMS OF ANTIPHASE CHAOTIC SYNCHRONIZATION DESTRUCTION

V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, P.A. Stalmakhov

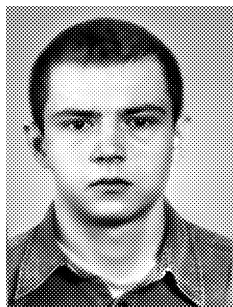
The work is devoted to anti-phase controlled synchronization of chaos in diffusively coupled cubic maps. Influence of asymmetry of controlling feed-back coupling on mechanisms of the synchronization loss is considered. A new bifurcational scenarium which includes a sequence of transcritical and saddle-repeller bifurcation has been found. We demonstrate that the same squence of bifurcations can lead to either «bubbling» or «riddling» transitions in dependance of assymetry value.



Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций. E-mail: alexey@chaos.ssu.runnet.ru



Стальмахов Петр Андреевич – окончил Саратовский государственный университет (2001, кафедра радиофизики и нелинейной динамики), аспирантуру, защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2006, СГУ). Область научных интересов – хаотическая динамика, синхронизация, управление хаосом. Имеет 8 научных публикаций.