



НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В АНСАМБЛЯХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ СО СВЯЗЬЮ ЧЕРЕЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА

Часть 2: Колебательные режимы одномерного массива автогенераторов со связью через общий источник питания

Д.Э. Постнов, А.В. Шишкин, П.А. Щербаков

Предложена модель ансамбля осцилляторов со связью через потребление ресурса в виде одномерного массива автогенераторов с нелинейностью N-типа. Проанализированы механизм возникновения осцилляторных кластеров, основные типы внутрикластерной синхронизации и влияние флуктуаций энергонесущего параметра.

Введение

Как было показано в [1], а также в первой части данной работы, связь осцилляторов через цепь распределения некоторого ресурса, влияющего на возбуждение автоколебаний, приводит к тому, что часть элементов ансамбля может демонстрировать автоколебания, тогда как остальные находятся в демпфированном режиме. Этот эффект кластерной осцилляции был обнаружен в относительно сложных и многомерных моделях авторегуляции почечного кровотока [2, 3] и ансамблях микробиологических осцилляторов [4, 5]. Однако сам эффект связан во многом с особенностями типа связи, а потому может и должен изучаться на примере по возможности простой и обобщенной модели, отвечающей, однако, определенным требованиям. Таких требований два:

- все осцилляторы ансамбля «подключены» к сети распределения некоторой расходуемой величины (количество жидкости, концентрация питательных веществ, электрическая энергия и т.п.);
- динамика каждого элемента ансамбля зависит от упомянутой величины как от управляющего параметра, влияющего на подкачку энергии в автоколебательную систему.

Таким образом, уравнения связи в системе с распределением ресурса представляют собой уравнения баланса (притока и оттока), как, например, первый закон Кирхгофа для разветвленной электрической цепи. Что касается второго требования,

то ему отвечает модель осциллятора на фазовой плоскости с достаточно общим типом нелинейности и влияния управляющих параметров. Такой моделью, например, является осциллятор с нелинейностью N-типа, конкретные реализации которого включают такие широкоизвестные модельные системы, как уравнение ван дер Поля в радиотехнике [6, 7] или модель FitzHugh–Nagumo в биофизике [8, 9]. Отметим, что не все подобные модели одинаково хорошо отвечают условиям нашего исследования. Так, при выводе уравнения ван дер Поля в его классической форме начало координат переносится на середину падающего участка нелинейной характеристики, что уменьшает число управляющих параметров, но тем самым исключает возможность, например, анализа влияния напряжения питания или сдвига рабочей точки по нелинейной характеристике. Модель типа FitzHugh–Nagumo не имеет такого ограничения.

В данной работе используются модельные уравнения, полученные для одномерного массива ячеек, каждая из которых представляет собой RLC -цепь с туннельным диодом в качестве нелинейного элемента. Режим работы каждого из таких осцилляторов зависит от напряжения в точке его подключения к общей цепи. Как будет показано, в такой системе:

- наблюдается эффект кластерной осцилляции, причем изменению напряжения источника питания отвечает перемещение кластера вдоль по цепи;
- при изначально идентичных парциальных осцилляторах имеет место сложная зависимость частотной структуры кластера от параметров цепи распределения энергии;
- на размер и частотные свойства кластера существенно влияет наличие флуктуаций источника питания. При этом действие шума не сводится в «размыванию» существующего автоколебательного режима, но выражается в индуцированных шумом колебаниях в элементах по краям кластера.

1. Модель

На рис. 1, *a* представлена схема RLC -цепи с туннельным диодом и способ ее включения в общую цепь. Заметим, что малая емкость C_2 в точке подключения введена из соображений общности модели, а именно: она отвечает за конечное время распространения возмущений напряжения вдоль одномерного массива осцилляторов. При $C_2 \rightarrow 0$ потенциалы цепи в точках подключения индивидуальных осцилляторов связаны алгебраическим соотношением. Используя законы Киргхофа, можно перейти к безразмерной форме уравнений

$$\begin{aligned} \dot{U}_j &= I_j - f(U_j), \\ \varepsilon \dot{I}_j &= E_j - RI_j - U_j, \\ \gamma \dot{E}_j &= -I_j + \frac{1}{\tau}(E_{j-1} - 2E_j + E_{j+1}), \end{aligned} \quad (1)$$

где точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = t/R_*C_1$ ($R_* = 1$ Ом); все напряжения нормированы на величину $U_* = 1$ В; ток i_L нормирован на величину U_*/R_* . U_j и I_j есть безразмерные аналоги u_C и i_L (см. рис. 1);

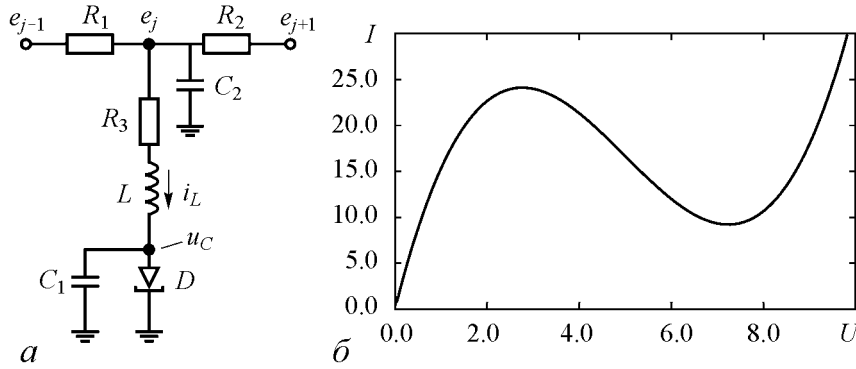


Рис. 1. *a* – электронная схема RLC -цепи с туннельным диодом; *b* – нелинейная функция, на качественном уровне воспроизводящая вольт-амперную характеристику туннельного диода

E_j – нормированное на величину U_* значение потенциала e_j на емкости C_2 ; E_{j-1} и E_{j+1} – соответствующие потенциалы для предыдущего и последующего осцилляторов цепи. Параметры $r = R_{1,2}/R_*$ и $R = R_3/R_*$ пропорциональны резисторам $R_1 = R_2$ и R_3 в исходной модели, $\varepsilon = L/R_*^2 C_1$ и $\gamma = C_2/C_1$ отвечают за соотношение масштабов времени уравнений. $f(U)$ – упрощенное представление вольт-амперной характеристики туннельного диода в виде кубического полинома (рис. 1, *b*)

$$f(U) = U^3/3 - 5U^2 + 20U. \quad (2)$$

По сути, безразмерный потенциал в точке подключения к цепи E_j играет роль источника питания для парциального осциллятора, включающего элементы R_3 , L , C_1 и туннельный диод.

Очевидно, в пределе $r \ll R$ можно пренебречь током I_j , тогда $E_j = E$ постоянно и не зависит от режима осциллятора. Это позволяет рассмотреть индивидуальную динамику RLC -цепи, считая E управляющим параметром. Заметим, что такой осциллятор на фазовой плоскости подобен модели FitzHugh–Nagumo и отличается лишь способом введения управляющих параметров E и R . Разбиение плоскости параметров на области различных режимов определяется двумя перекрещивающимися линиями бифуркации Андронова–Хопфа. Между этими линиями для $R < 0.3$ наблюдается режим автоколебаний, тогда как для больших R система имеет два устойчивых состояния равновесия (бистабильный режим). Выше и ниже линий бифуркации Андронова–Хопфа при $R < 0.3$ система переходит в возбудимый режим, характеризуемый наличием одного устойчивого состояния и псевдоорбиты – почти замкнутой траектории [10]. В рамках нашего исследования интерес представляет изменение динамики системы (1) в области $R < 0.3$ при вариации E_j . Для всех описанных ниже результатов $\varepsilon = 10.0$, $\gamma = 0.01$.

Для построения одномерного массива систем (1) положим $j = 1 \dots N$, где j – номер осциллятора в цепи, а N общее их количество. Напряжение источника питания, подключенного к началу цепи, равно E_0 , а на конце цепи выполнено условие $E_{N+1} = E_N$ (свободный конец правого резистора на рис. 1).

2. Образование осцилляторных кластеров

Рассмотрим цепь из десяти осцилляторов, $N = 10$. Очевидно, вариация напряжения источника питания E_0 должна влиять на устойчивость состояний равновесия парциальных осцилляторов, которые, однако, теперь не независимы, а входят в фазовое пространство системы размерностью $3N$. На рис. 3 представлены результаты расчета $2N$ наибольших собственных чисел единственного состояния равновесия системы.

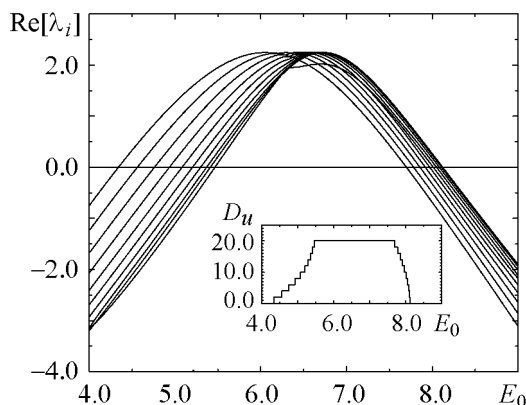


Рис. 2. Зависимость величин действительных частей 10 комплексно сопряженных пар собственных значений состояния равновесия от параметра E_0 . По мере изменения напряжения питания E_0 , происходят изменения в характере устойчивости глобального состояния равновесия: в фазовых подпространствах индивидуальных осцилляторов происходят бифуркации Андронова–Хопфа. $R = 0.05$, $r = 0.01$

Каждая кривая отображает изменение действительной части пары комплексно сопряженных собственных чисел. Таким образом, ее переход через нулевое значение соответствует бифуркации Андронова–Хопфа в двумерном фазовом подпространстве. Хорошо видно, что начиная с $E_0 \approx 4.35$ все десять кривых последовательно переходят в область положительных значений. Соответственно, размерность D_u неустойчивого многообразия состояния равновесия системы ступенчато возрастает до 20 (вставка на рис. 3). При дальнейшем росте E_0 кривые вновь уходят в область отрицательных значений, причем те кривые, которые первыми приняли положительные значения, первыми же и уходят в отрицательную область.

Интерпретация рис. 3 с точки зрения колебательных режимов системы позволяет объяснить механизм возникновения осцилляторного кластера – группы элементов, находящихся в автоколебательном режиме. Заметим, что для исследуемой системы затруднительно указать точное соответствие между парой собственных чисел и конкретным осциллятором массива¹. Однако знание индивидуальной динамики позволяет соотнести наблюдаемые бифуркации с изменением значения E_j в точках подключения осцилляторов. При этом очевидно, ближайший к источнику питания осциллятор первым переходит в автоколебательный режим и первым же выходит из него при дальнейшем повышении E_0 . При наличии хотя бы одного источника автоколебаний в системе все E_j более не постоянны во времени и наши рассуждения теряют строгость. Однако ими можно руководствоваться в предположении, что при не слишком сильной модуляции E_j определяющую роль играет его среднее значение, а быстрые изменения (как мы увидим далее) важны с точки зрения синхронизации колебаний в соседних элементах. Рис. 4 построен для цепи из 50 осцилляторов и наглядно показывает, что происходит с амплитудой колебаний. При $E_0 = 8.0$ первые восемь элементов массива находятся в автоколебательном режиме, причем амплитуда колебаний в первом осцилляторе уже заметно меньше, чем в остальных семи,

¹Это было бы возможно в случае строго однонаправленной связи.

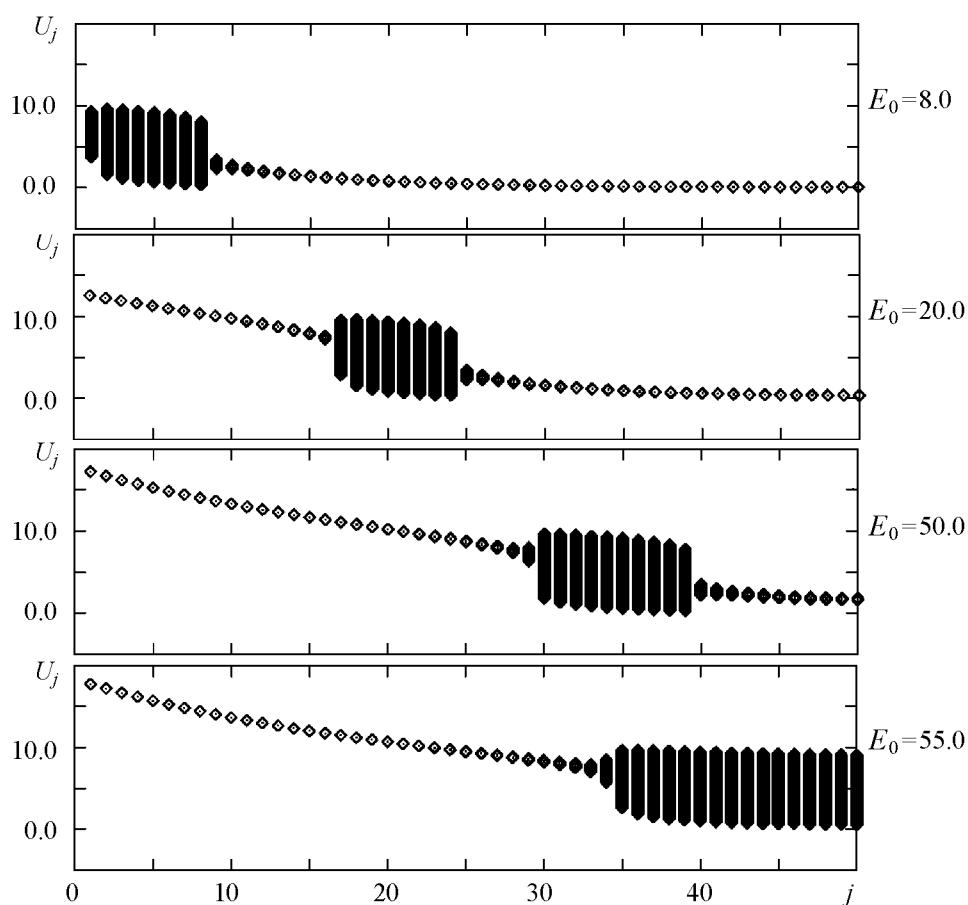


Рис. 3. С изменением напряжения питания E_0 количество и положение осцилляторов, генерирующих автоколебания, меняется. $R = 0.05$, $r = 0.01$

так как уровень E_0 для этого осциллятора выше оптимального. Незначительные по амплитуде колебания в девятой–одиннадцатой ячейках следует, очевидно, рассматривать как пассивный отклик на вариацию E_j предшествующими элементами. По мере увеличения E_0 до значения 20.0 образовавшийся кластер смещается вниз по потоку, не меняясь в размере. Однако дальнейший рост напряжения питания E_0 до значения 50.0 позволяет увидеть его расширение до 10 ячеек. При еще больших значениях E_0 кластер еще больше удлиняется, захватывает конец цепи осцилляторов и, наконец, исчезает: все элементы массива переходят в демпфированный режим вследствие избыточности напряжения источника питания.

Таким образом, смещение рабочей точки осциллятора по мере падения напряжения вдоль цепи приводит к формированию осцилляторного кластера, положение и размер которого определяются как напряжением питания источника, как и его падением от одного элемента массива к другому (чем больше R или меньше r , тем медленнее падает E_j вдоль цепи и тем больше ширина кластера). До этого момента нас интересовал только сам механизм образования такого кластера. Однако очевидно, что взаимная модуляция напряжения E_j в точках подключения элементов должна существенным образом влиять на характеристики и взаимоподстройку временных масштабов этих колебаний.

3. Внутрикластерная синхронизация

При идентичности объединенных в цепь парциальных осцилляторов интуитивно ожидается, что возникающие в них автоколебания также должны иметь совпадающие (или очень близкие) частоты. Однако это не всегда так. Как показали результаты численного эксперимента, возможны самые разнообразные ситуации: от синхронизации колебаний в пределах кластера до многочастотных режимов без тенденции к синхронизации при вариации параметров. Причина этого – в двойственной природе связи, а именно: из-за падения напряжения E_j вдоль цепи изначально идентичные осцилляторы оказываются в разных режимах. При этом вследствие неизбежной неизохронности смещается также и собственная частота автоколебаний. При не очень большой расстройке колебания в пределах кластера могут синхронизоваться. Однако изменение параметра r одновременно меняет и степень расстройки по частотам и силу взаимовлияния осцилляторов. Типичные ситуации, которые при этом возникают, охарактеризованы ниже.

3.1. Случай слабой связи. На рис. 5, *a* приведены зависимости периода автоколебаний² T осциллятора от положения k внутри кластера для $r = 0.01$. Величина k определялась следующим образом: первому осциллятору, входящему в кластер, соответствовало $k = 1$, второму – $k = 2$ и так далее. Таким образом, можно было сопоставлять характеристики колебаний в пределах кластера вне зависимости от его локализации в цепи. Как можно видеть, при вариации E_0 от 10.0 до 40.0 размер кластера практически не меняется и, что более важно, сохраняется распределение периодов колебаний: крайние элементы кластера имеют период $T \approx 2.2, \dots 2.4$, тогда как следующие за ними к центру кластера – заметно больший $T \approx 2.7$. По мере приближения к центру кластера, период вновь уменьшается до $T \approx 2.3$. Отметим отсутствие видимых «полочек» графиков, которые говорили бы о захвате частот

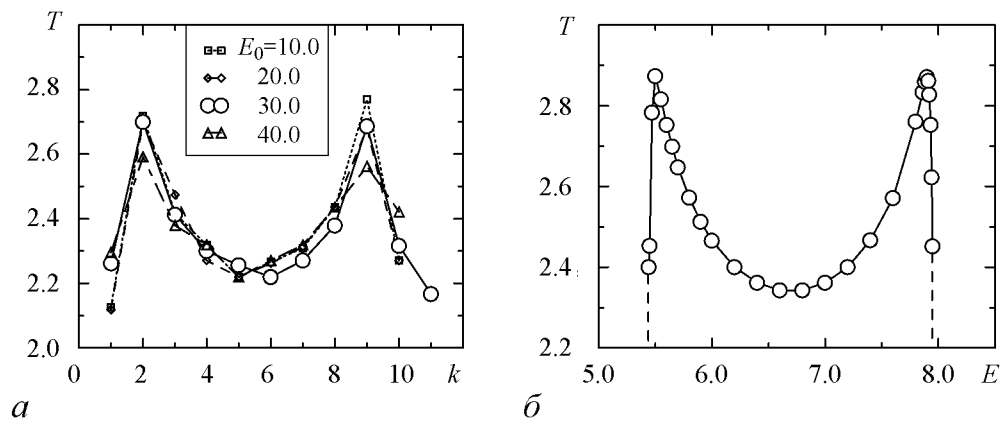


Рис. 4. *a* – распределение периодов колебаний T в пределах кластера для различных напряжений питания E_0 при относительно слабой связи ($r = 0.01$, $R = 0.05$); *b* – зависимость периода колебаний T от напряжения питания E для одиночного осциллятора

²Период автоколебаний определялся как среднее время возврата в секущую Пуанкаре в выбранной плоскости фазовых переменных

колебаний. Несмотря на мелкие различия для разных значений E_0 , все кривые следуют одному типу зависимости. Его природу позволяет понять график на рис. 5, б, где приведена зависимость периода колебаний одиночного осциллятора от значения E . Очевидно наблюдаемый на рис. 5, а шаблон распределения периодов автоколебаний внутри кластера порожден плавным спадом напряжения E_j в точках подключения осцилляторов при движении вдоль цепи. Таким образом, выбору $r = 0.01$ соответствует ситуация, когда имеется *индуцированная связью неоднородность режимов*, при этом влияние связи слишком слабо для проявления синхронизации колебаний. В результате имеет место многочастотный (квазипериодический или хаотический) режим, мало меняющийся при перемещении осцилляторного кластера вдоль по цепи.

Случай сильной связи. На рис. 6 приведены диаграммы режимов в зависимости от параметров E_0 и r для случая относительно сильной связи. Режимы колебаний в выбранных точках диаграмм охарактеризованы с помощью фазовых проекций на вставках. На рис. 5, а дана зависимость расположения области генерации от напряжения питания E_0 при $r = 0.274$. Темно-серым отмечены осцилляторы, находящиеся в режиме автоколебаний. Как можно видеть, при таком большом r размер кластера уменьшился до 2–3-х осцилляторов. Как и при слабой связи, он перемещается по цепи с изменением E_0 (см. рис. 5, а). Изменение r (см. рис. 5, б) оказывает аналогичное действие с той разницей, что изменение размера кластера более выражено. Меньшим значениям r соответствует меньшее падение потенциала E_j вдоль цепи, что и приводит к расширению кластера.

При выбранных значениях параметров связь между осциллирующими элементами может приводить к синхронизации колебаний в них. Как видно из вставок на рис. 6, в ряде случаев (как правило, в середине области устойчивости конкретного кластера) фазовая проекция имеет вид предельного цикла. Отметим, что характерным является значительный сдвиг фаз между колебаниями в соседних осцилляторах,

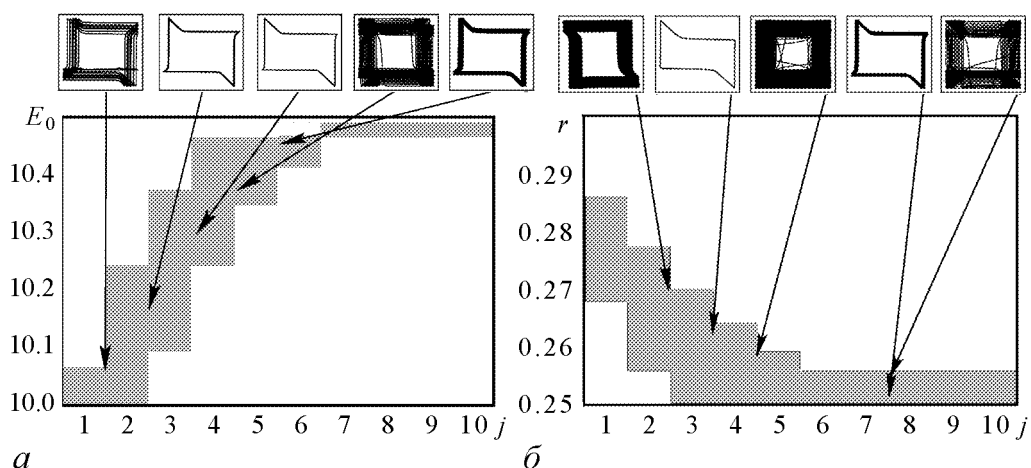


Рис. 5. Зависимость расположения области генерации от напряжения питания E_0 при $r = 0.274$ (а) и от значения сопротивления связи r при $E_0 = 10.0$ (б). Темно-серым отмечены осцилляторы, находящиеся в режиме автоколебаний. Вверху на вставках – примеры перекрестных фазовых проекций колебаний на плоскость (U_j, U_{j+1}) в точках, отмеченных стрелками

тогда как синфазного (или близкого к нему) поведения не наблюдалось. Областям параметров, при которых кластер перемещается вдоль цепи (или расширяется, захватывая новые элементы), соответствует несинхронное поведение.

Перечисленные выше наблюдения согласуются с зависимостью на рис. 5, б, из которой видно, что случаю, когда оба элемента кластера находятся в центральной части области генерации $E \approx 6, \dots 7.5$, отвечает относительно небольшая разница периодов колебаний. В то же время ситуации, когда один из осцилляторов находится на границе области, с чем и связано перемещение кластера, соответствует значительный скачок периода колебаний. Это приводит к рассинхронизации колебаний в элементах кластера при его перемещении.

Подводя итоги раздела, можно заключить, что в зависимости от выбора управляющих параметров характер колебаний в пределах осцилляторного кластера может существенно различаться. Режимы синхронизации наблюдаются при относительно сильной связи вдали (по параметрам) от точек перемещения кластера по цепи. Вблизи (по параметрам) от точек перемещения кластера, а также во всей области параметра E_0 при слабой связи (малые значения r), колебания в пределах кластера не обнаруживают тенденции к синхронизации, имеют место многочастотные (квазипериодические либо хаотические) режимы.

4. Влияние шума

Можно интуитивно ожидать, что наличие шума в автоколебательной системе должно приводить лишь к «ухудшению» характеристик колебаний: уширению спектральной линии генерации и сбоям фазы. Однако результаты недавних исследований показывают, что это далеко не всегда так. В нелинейных системах действие шума может приводить к возникновению новых колебательных мод [11, 12], к повышению чувствительности к слабому периодическому воздействию [13] или же способствовать синхронизации [14, 15]. В нашем случае наиболее выраженное влияние шума ожидается для элементов на границах осцилляторного кластера, режим которых близок к точке бифуркации.

Для учета влияния флуктуаций в модели (1) уравнение для U_j модифицировалось следующим образом:

$$\dot{U}_j = I_j - f(U_j) + D\xi(t), \quad (3)$$

где $\xi(t)$ – гауссов белый шум, параметр D отвечает за интенсивность. Такое включение шума можно трактовать как внутренние флуктуации тока нелинейного элемента или же некий дополнительный внешний ток в точку соединения C_1 , L и туннельного диода.

На рис. 6, а приведена диаграмма режимов в зависимости от интенсивности шума D . В исходном состоянии при $D = 0$ колебания наблюдаются только во 2 и 3 осцилляторах цепи. Как можно видеть, увеличение интенсивности шума приводит к вовлечению в колебательный режим все большего числа осцилляторов. При $D > 0.05$ колебания наблюдаются начиная с первого элемента цепи, а при $D > 0.25$ в осцилляторный кластер вовлечены все десять элементов. Вставки в верхней части диаграммы позволяют визуально оценить степень зашумленности колебаний. Как

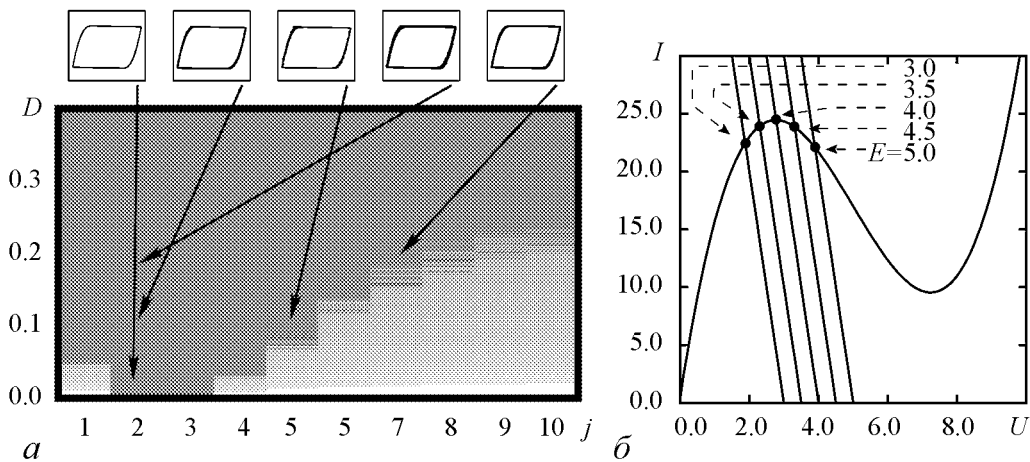


Рис. 6. *a* – зависимость области генерации от интенсивности шума D . Темно-серым отмечены осцилляторы, находящиеся в режиме колебаний. В белой области колебаний не наблюдается. При $D = 0$ в режиме автоколебаний находятся только осцилляторы 2 и 3. Колебания во всех остальных осцилляторах индуцированы либо шумом (темно-серая область), либо колебаниями в кластере (светло-серый). Вверху представлены примеры фазовых портретов колебаний. Напряжение питания $E = 10.174$, сопротивление связи $r = 0.274$. *б* – взаиморасположение нульклин для индивидуального осциллятора иллюстрирует смещение рабочей точки при выходе из кластера

можно видеть, в тех элементах, что изначально находились в автоколебательном режиме, предельный цикл остается четко выраженным. То есть, интенсивность шума не настолько велика, чтобы разрушить собственную динамику системы. При этом во вновь вовлеченных в колебательный режим элементах геометрия предельного цикла практически неотличима от той, что имеет место во 2 и 3 осцилляторах. Таким образом, шум указанной на диаграмме интенсивности не столько «размывает» и «дезорганизует» динамику системы, сколько индуцирует колебания в элементах на границах осцилляторного кластера! Каков механизм наблюдаемого эффекта? Чтобы понять это, вернемся к свойствам одиночного осциллятора. На рис. 6, *б* приведены нульклины, характеризующие положение состояния равновесия (рабочей точки) отдельного элемента на плоскости (U, I) при $R = 0.05$ в зависимости от потенциала E в точке подключения. Уравнение кубической параболы задает условие $\dot{U} = 0$, что дает $I = f(U)$ (см. (2)), тогда как прямые определяются в предположении $\dot{I} = 0$, то есть $I = (E - U)/R$. Прямые и соответствующие точки их пересечения с кубической параболой соответствуют убыванию E от 5.0 до 3.0, что на качественном уровне соответствует передвижению вдоль цепи с выходом из зоны осцилляторного кластера.

Как можно видеть, точки пересечения для $E = 5.0$ и $E = 4.5$ расположены на падающем участке параболы. На языке исходной радиофизической модели это означает наличие отрицательного дифференциального сопротивления и наличие автоколебаний. Соответственно, такое состояние равновесия неустойчиво. Точке пересечения $E = 4.0$ на вершине параболы соответствует смена устойчивости состояния равновесия (бифуркация Андронова–Хопфа). Точкам $E = 3.5$ и $E = 3.0$ отвечает устойчивое состояние равновесия, в отсутствие шума такие элементы находятся вне осцилляторного кластера. Однако такое взаиморасположение кривых отвечает другому случаю, хорошо известному, например, в нейродинамике, а именно: осцил-

лятор находится в *возбужденном режиме*, когда небольшое возмущение относительно состояния равновесия приводит к генерации одиночного полноразмерного импульса-отклика. Реакция таких систем на шум интенсивно изучалась в последние годы как пример проявления когерентного резонанса [11, 16–18]. Известно, что шум некоторой оптимальной интенсивности приводит к генерации почти регулярной последовательности импульсов. Таким образом, элементы на границах осцилляторного кластера наиболее восприимчивы к действию шума в силу наличия псевдоорбиты – траектории, проходящей вблизи устойчивого состояния равновесия и возвращающейся в него же после петли относительно большого размера.

Индукцированные шумом колебания принято характеризовать их частотой (средним количеством циклов в единицу времени) и так называемой регулярностью, то есть близостью процесса к периодическому. Согласно [11], регулярность β может быть оценена как нормированная вариабельность интервалов времени τ между импульсами (или между повторяющимися состояниями колебаний)

$$\beta = \langle \tau \rangle / \sqrt{\langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2}, \quad (4)$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по всей временной реализации. На рис. 7 показано изменение средней частоты $\langle f_0 \rangle$ и степени регулярности β для каждого осциллятора для различных значений интенсивности шума D . Как можно видеть, по мере увеличения D растет число осцилляторов с ненулевой $\langle f_0 \rangle$. Заметим, что в ячейках 2 и 3, которые изначально находились в автоколебательном режиме, частота также несколько растет. Механизм этого эффекта заключается в том, что шум «помогает» траектории преодолеть участок медленного движения вблизи состояния равновесия и тем самым уменьшает период колебаний.

С увеличением интенсивности шума частота индуцированных шумом колебаний в ячейках 1, 4... 10 быстро растет, и при $D = 0.8$ режим становится практически однородным по всей цепи. Поэтому, судя лишь по частоте колебаний, невозможно с уверенностью выделить элементы, изначально находившиеся в автоколебательном режиме.

Величина регулярности β (рис. 7, б) может быть рассчитана лишь при ненулевом шуме, так как β становится бесконечно большим в режиме автоколебаний и не определена при их полном отсутствии. При малых $D = 0.05, 0.1, 0.2$ notable разница между ячейками в автоколебательном режиме и теми, где колебания индуцированы шумом. Однако с ростом D регулярность индуцированных шумом колебаний быстро растет (эффект когерентного резонанса), тогда как в ячейках 2 и 3 – падает. При $D = 0.8$ регулярность колебаний во всех элементах цепи практически одинакова. При дальнейшем росте интенсивности шума собственная динамика осцилляторов вносит все меньший вклад и «тонет» во флуктуациях. Регулярность β во всех ячейках при этом вновь уменьшается (кривая для $D = 5.0$ на рис. 7, б).

Итак, результаты, приведенные на рис. 7, показывают, что наличие собственных некоррелированных источников шума в осцилляторах цепи приводит к увеличению размеров осцилляторного кластера за счет активации элементов на границах кластера. Эти элементы, в силу механизма образования кластера, находятся в возбужденном режиме, их динамика под действием шума определяется эффектом когерентного резонанса. Рассматривая процесс в целом по всей цепи осцилляторов, можно

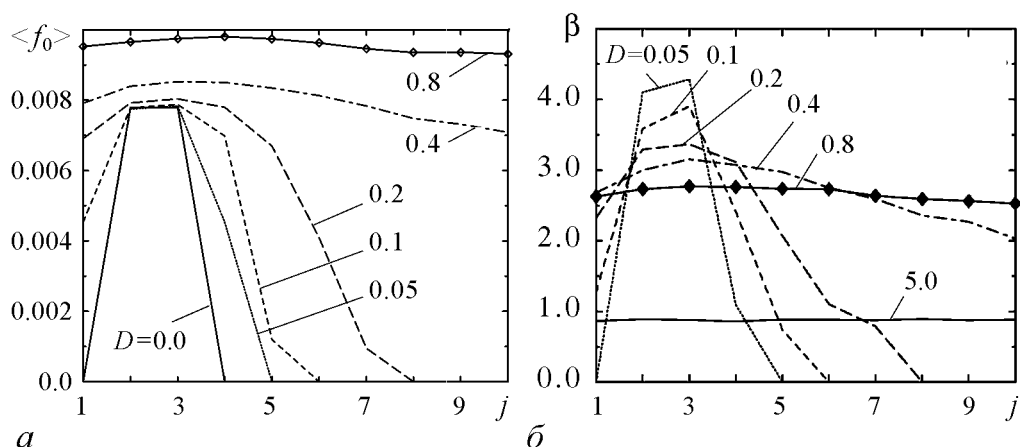


Рис. 7. Частота (а) и регулярность (б) для осцилляторов в цепи при различных значениях интенсивности шума

сказать, что шум вызывает фазовый переход – при его достаточной интенсивности (в нашем случае $D = 0.8$) уже невозможно различить, каким был режим того или иного элемента цепи в отсутствие шума.

Выводы

Несмотря на радиофизический характер системы, которую мы ради конкретности изложения использовали для построения и анализа модели одномерного ансамбля осцилляторов с распределением ресурса, полученные результаты можно считать достаточно общими. В самом деле, к модели осциллятора с нелинейностью N-типа сводится большое число самых разнообразных прикладных задач. При этом возникновение автоколебаний через бифуркацию Андронова–Хопфа, как правило, связано со смещением рабочей точки по нелинейной характеристике, что и лежит в основе образования осцилляторного кластера в изученном нами случае.

На примере рассмотренной модельной системы нам удалось показать следующее.

- Механизм возникновения осцилляторного кластера связан с последовательностью бифуркаций Андронова–Хопфа глобального состояния равновесия системы, что добавляет новые плоскости неустойчивости в многомерном фазовом пространстве.

- Даже в случае идентичности осцилляторов цепи при относительно слабой связи ($r = 0.01$) реализуется многочастотный колебательный режим. Механизм его появления заключается в индуцированной связью неоднородности режимов – падение потенциала от одной точки подключения к другой порождает расстройку по частотам. При этом двойственный характер такой связи (изменение r влияет одновременно и на силу взаимодействия и на индуцированную расстройку частот) обеспечивает структурную устойчивость такого режима при перемещении кластера вдоль цепи. При сильной связи и малых размерах кластера возможны синхронные режимы колебаний, которые, как правило, разрушаются при перемещении кластера.

• Наличие в каждом из осцилляторов цепи источника шума не столько разрушает колебательный режим, сколько меняет его структуру: осцилляторный кластер расширяется, частоты составляющих его элементов выравниваются. Причина такого действия шума в том, что элементы на границах кластера неизбежно находятся в возбужденном режиме, а в таком случае, как показано в целом ряде работ по когерентному резонансу, шум индуцирует колебания, регулярность которых максимальна в некотором оптимальном диапазоне интенсивностей шума и мало отличается от соответствующего параметра для автоколебаний при той же интенсивности шума.

Следует отметить, что за рамками исследований, проведенных в данной работе, остался ряд небезинтересных вопросов. Так, не рассматривалось влияние инерционности системы распределения ресурса (в модели она определяется емкостью C_2 , которая принималась постоянной и много меньше C_1). Не проводился детальный анализ механизма перемещения кластера и связанных с этим бифуркаций аттрактора, в то время как есть основания ожидать там хаотические режимы и эффекты, связанные со скачком потребления тока отдельным осциллятором при возбуждении/гашении автоколебаний. При наличии в системе шума интерес представляют не только автоколебательные режимы, но и область бистабильности при $R > 0.3$. Все перечисленные вопросы входят в программу дальнейших исследований.

Статья написана по материалам исследовательских работ, поддержанных гос. контрактом 02.512.11.2111.

Библиографический список

1. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V. and Mosekilde E.* Oscillator clustering in resource distribution chain // *Chaos*. 2005. Vol. 15. P. 1.
2. *Barfred M., Mosekilde E. and Holstein-Rathlou N.-H.* Bifurcation analysis of nephron pressure and flow regulation // *Chaos*. 1996. Vol. 6. P. 280.
3. *Holstein-Rathlou N.-H. and Marsh D.J.* A dynamic model of renal blood flow autoregulation // *Bull. Math. Biol.* 1994. Vol. 56. P. 441.
4. *Postnov D.E., Balanov A.G. and Mosekilde E.* Synchronization phenomena in an array of population dynamic systems // *Advances in Complex Systems*. 1998. Vol. 1. P. 181.
5. *Mosekilde E., Maistrenko Yu. and Postnov D.* Chaotic synchronization // *Application to living systems*. World Scientific, 2002.
6. *van der Pol B. and van der Mark J.* The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart // *Phil. Mag. Suppl.* 1928. Vol. 6. P. 763.
7. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. Москва: Изд-во физ.-мат. литературы, 2002.
8. *FitzHugh R.A.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophys. J.* 1961. Vol. 1. P. 445.
9. *Keener J., Sneyd J.* *Mathematical Physiology*. New York: Springer-Verlag, 1998.

10. *Izhikevich Eugene M.* Neural excitability, spiking and bursting // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 6. P. 1171.
11. *Pikovsky A. and Kurth J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable systems // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 775.
12. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Han S.K. and Kim W.S.* Noise-induced multimode behavior in excitable systems // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 66. P. 016203.
13. *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Масс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // *УФН*. 1999. Т. 169, № 1. С. 7.
14. *Shulgin B.V., Neiman A.B. and Anishchenko V.S.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by a periodic force // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75. P. 4157.
15. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83. P. 1771.
16. *Postnov D., Han S.K., Yim T.G. and Sosnovtseva O.* Experimental observation of coherence resonance in cascaded excitable systems // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 59, № 4. P. 3791.
17. *Постнов Д.Э., Сосновцева О.В., Сецинский Д.В., Борисов В.С.* Генерация и синхронизация стохастических колебаний в связанных возбудимых системах // *Изв. вузов. ПНД*. 2001. Т. 9, № 3.
18. *Сецинский Д.В., Постнов Д.Э.* Индуцированная шумом когерентность в возбудимой системе с частотно-зависимой обратной связью // *Письма в ЖТФ*. 2005. Т. 31, вып. 7. С. 70.

*Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 12.05.2006
После доработки 15.05.2007*

NONLINEAR EFFECTS IN ENSEMBLES OF OSCILLATORS WITH RESOURCE DISTRIBUTION COUPLING

Part 2: Oscillatory regimes of one-dimension array of self-sustained oscillators coupled via common power supply

D. Postnov, A. Shishkin, P. Shcherbakov

We suggest the model of ensemble of resource sharing oscillators in the form of one-dimension array of self-sustained systems with N-type nonlinearity. We analyze the mechanism of oscillatory cluster formation, study the intra-cluster synchronization, and show the effect of energy fluctuations.