



ИЗ ИСТОРИИ ГАМИЛЬТОНОВА ХАОСА: ИССЛЕДОВАНИЯ СТОХАСТИЧНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ТРУДАХ НОВОСИБИРСКОЙ ШКОЛЫ

Р.Р. Мухин

Статья посвящена вопросам истории открытия хаоса в гамильтоновых системах в 1960-е годы, мало освещенной в литературе по сравнению с историей диссипативного хаоса. Главным центром исследований гамильтонова хаоса был Институт ядерной физики в Новосибирске, где ключевая роль принадлежала Б.В. Чирикову и Г.М. Заславскому – крупнейшим специалистам в данной области в мире.

1. Начало исследований. Критерий Чирикова

В 1960-е годы главным центром исследований хаоса в гамильтоновых физических системах становится Институт ядерной физики Сибирского отделения АН СССР (Новосибирск). Основателем новосибирской школы нелинейной динамики является Борис Валерианович Чириков (1928–2008). Чириков принадлежит к первому выпуску физико-технического факультета МГУ (ныне Московский физико-технический институт). После окончания института он недолго проработал в Лаборатории № 3 (ныне Институт теоретической и экспериментальной физики в Москве). Затем по приглашению руководителя лаборатории новых методов ускорения, А.М. Будкера, в 1954 году Чириков переходит на работу в Лабораторию измерительных приборов (ЛИПАН, ныне Российский научный центр «Курчатовский институт»). В 1958 году в Новосибирском Академгородке был организован Институт ядерной физики Сибирского отделения АН СССР, первым директором которого стал Будкер. В следующем году Чириков перебирается в Новосибирск, начинает активно работать в ИЯФ и одновременно вести занятия в только что открывшемся Новосибирском университете [1, 2].

Здесь надо сказать несколько слов о том, как формировались коллективы институтов открывшегося Сибирского отделения Академии наук. Их ядро составили сотрудники научных институтов Москвы, Ленинграда и других городов, а также молодые выпускники различных вузов страны. Через несколько лет сюда добавилось сильное пополнение из так называемого «нулевого» выпуска молодого Новосибирского университета, первый набор которого (24 студента на отделение физики, столько же на отделение математики и механики) составили студенты из вузов со всей

страны, набранные сразу на второй курс. Среди приехавших из Института атомной энергии в ИЯФ кроме Будкера и Чирикова были С.Т. Беляев, В.М. Галицкий, Р.З. Сагдеев и другие.

Роальд Зинурович Сагдеев (родился в 1932 году), после окончания МГУ (1956) собирался поступать в аспирантуру Института физических проблем. Однако заявка в аспирантуру к Л.Д. Ландау была отклонена университетской комиссией по распределению. Ландау обратился к Курчатову с просьбой вмешаться, но единственное, что смог сделать Курчатов, это взять Сагдеева на работу в свой институт [3]. Все же за защиту диссертации Сагдеев решил провести в Институте физических проблем. Присутствовавший на этой защите В.И. Коган вспоминал, что сначала много вопросов задавал П.Л. Капица, затем другие. Итог подвел Л.Д. Ландау, отметивший, что поражает способность диссертанта мгновенно находить ответы на любые вопросы [4]. Такое признание из уст Ландау, который сам отличался мгновенной реакцией при ответах на поставленные вопросы, было довольно необычным. В конце 1950-х годов Сагдеев прочел в Московском энергетическом институте один из первых учебных курсов по физике плазмы [5]. Физика плазмы в то время была еще очень молодой областью и с нее только что была снята завеса секретности. После переезда в Новосибирск (1961) Сагдеев возглавил одну из лабораторий ИЯФ. Всего через восемь лет после окончания университета Сагдеев был избран членом-корреспондентом АН СССР (1964). Находящаяся на взлете научной карьеры фигура Сагдеева была очень привлекательной для молодых физиков [6]. Из «нулевого» выпуска вышли первые аспиранты Сагдеева: А.А. Галеев, В.Е. Захаров, А.М. Фридман, М.С. Моисеев, их имена сейчас широко известны. К ним надо добавить Г.М. Заславского.

Георгий Моисеевич Заславский (родился в 1935 году), только что окончивший Одесский университет и приехавший в Академгородок, активно включился в исследования, проводившиеся в ИЯФ. Его кандидатская диссертация была посвящена вопросам релятивистской гидродинамики. Чириков и Сагдеев определили интерес Заславского к проблематике хаоса, которая и стала предметом всех его последующих исследований. С Чириковым и Сагдеевым выполнены первые работы Заславского в этой области. Чириков и Заславский по праву считаются одними из ведущих в мире специалистов по хаосу. В дальнейшем выделилось две группы исследований хаоса – Б.В. Чириков, В.В. Вечеславов, Ф.М. Израйлев, Д.Л. Шепелянский и Г.М. Заславский, Г.П. Берман, П.И. Белобров, А.Р. Коловский, Х.-Р.Я. Рачко, В.Н. Сынах, Н.Н. Филоненко и др.

Жизнь в Академгородке не ограничивалась только наукой, во второй половине 1960-х годов там происходили очень бурные события. Представление об атмосфере того времени дают воспоминания А.И. Бурштейна [7]. Одним из таких событий явилось письмо с протестом против процесса Гинзбурга–Галанскова. Речь идет об одном из самых громких политических процессов в СССР, состоявшемся в январе 1968 года. А. Гинзбург, Ю. Галансков, А. Добровольский и В. Лашкова обвинялись в «антисоветской агитации и пропаганде». Поначалу это письмо подписало около 500 человек, но после оказанного давления осталось 46 подписей. Среди них фамилии Г.М. Заславского, В.Е. Захарова, А.М. Фридмана [8]. Эти подписи дорого обошлись всем троим. Они стали «невъездными», кроме того, у Заславского была отменена объявленная защита докторской диссертации, которая должна была состояться в ИЯФ в 1970 году. Как вспоминал Заславский, – «Сначала пытались давить на оппо-

нентов (М.А. Леонтович, И.М. Лифшиц, Я.Г. Синай), чтобы они отказались. Когда из этого ничего не вышло, мне за пять дней до защиты сообщили, что защита отменяется. Никакой мотивировки не было, просто отменяется и все. Потом Леонтович начал искать, где мне будет можно защититься, и мою работу приняли в Институте низких температур в Харькове. Здесь очень значительна роль директора этого института Б.И. Веркина, человека, сделавшего много добра разным людям. Защита прошла в 1973 году, я очень благодарен всем, кто мне помог. После всего этого меня не брали на работу, куда первоначально приглашали. В конечном итоге я оказался в Институте физики им. Л.В. Киренского в Красноярске» [9]. Группа Сагдеева покинула ИЯФ. Он сам вместе с Галеевым в 1970 году уехал в Москву, в Институт высоких температур. Через несколько лет Сагдеев стал директором Института космических исследований, куда в середине 1980-х он пригласил Заславского. В 1991 году Заславский уехал в США, в один из ведущих исследовательских центров – Институт им. Р. Куранта при Нью-Йоркском университете, где работает до настоящего времени.

Еще работая в ЛИПАНе, под влиянием Будкера Чириков заинтересовался вопросами нелинейных колебаний, которые были стимулированы задачами создания новых ускорителей и открытых систем магнитного удержания плазмы, или ловушек с «магнитными пробками». Эти задачи заняли главное место в тематике исследований ИЯФ, в котором сразу после его создания начались интенсивные исследования динамики заряженных частиц в магнитных ловушках. Проблема была поставлена Будкером [10] и связана с продолжением исследований по удержанию плазмы для управляемого термоядерного синтеза, коллективными процессами в плазме, условиями устойчивости движения заряженных частиц в циклических ускорителях.

Будкер критиковал новый тип ускорителей с жесткой фокусировкой, утверждая, что при большом числе колебаний частицы около равновесной орбиты за один оборот начальная фаза колебаний должна как-то «забываться», вследствие чего колебания будут диффузионно расти и это приведет к быстрой гибели частиц [2]. Диффузия, предсказанная Будкером, была обнаружена в вычислительных экспериментах Ф. Говарда и М. Хайна в ЦЕРНе [11]. Однако механизм диффузии был совершенно не ясен.

Приведем выдержки из письма Чирикова автору: «В течение многих лет наша небольшая группа (В.В. Вечеславов, Ф.М. Израйлев, Д.Л. Шепелянский и я) занимается исследованием так называемого динамического хаоса. Это удивительное явление позволяет понять природу и механизм статистических законов (таких, например, как знаменитый закон возрастания энтропии, то есть беспорядка или хаоса), играющих столь значительную роль в природе. А началось все с «простой» задачи Будкера, как мы говорим теперь, а фактически, с очень интересных (как всегда с Андреем Михайловичем) обсуждений или, лучше сказать, горячих споров о судьбе заряженных частиц в магнитной ловушке...

В том далеком 1954 году молодой Андрей Будкер выдвинул свой подход к решению проблемы управляемого термоядерного синтеза, решению, казавшемуся тогда таким близким. *Вместо того, чтобы удерживать заряженные частицы плазмы вместе с магнитными линиями* (как предложили А.Д. Сахаров и И.Е. Тамм), Андрей Михайлович предполагал преградить путь частицам вдоль магнитного поля с помощью, как он шутил, «железных пробок». Дело, конечно, не в самих пробках, а в областях повышенного магнитного поля, от которых и отражаются вращающиеся

ся частицы. Простейший вопрос, на который нужно было дать немедленный ответ, чтобы можно было серьезно рассматривать это предложение, состоял в следующем: способна ли такая «ловушка с магнитными пробками» удерживать достаточно долго (миллионы колебаний) хотя бы одну заряженную частицу? В этом и состояла задача Будкера. И, хотя на первый взгляд она казалась очень простой, Андрей Михайлович сразу понял или, лучше сказать, интуитивно почувствовал, что теоретическое решение здесь едва ли возможно.

Интуиция Будкера оказалась весьма глубокой: как выяснилось впоследствии, его задача была не просто очень сложной, но и принципиально неразрешимой полнотью, как и знаменитая задача трех тел в небесной механике. В обоих случаях движение системы может стать при определенных условиях хаотическим, то есть весьма запутанным и непредсказуемым, несмотря на обманчивую простоту уравнений движения и отсутствие в системе каких-либо случайных параметров или шума. Частица двигалась так, словно на нее действовали какие-то случайные силы, хотя никаких других сил, кроме простой силы Лоренца, в магнитном поле на самом деле не было. Со времен Больцмана с его гипотезой «молекулярного хаоса» считалось, что подобное нерегулярное движение возможно лишь в очень сложных системах с огромным числом степеней свободы. А здесь – всего лишь одна частица в аксиально-симметричном магнитном поле, всего две степени свободы! Открылась какая-то совершенно новая область явлений, и оторвать нас от этих исследований было уже невозможно. Возникло новое, хотя и небольшое, направление работ в нашем Институте» [12].

Теория нелинейных колебаний была создана в школе А.А. Андропова под воздействием запросов радиофизики и теории автоматического регулирования. Для решения поставленных задач был привлечен новейший математический аппарат – только что зародившаяся теория динамических систем. Затем прогресс в теории нелинейных колебаний в значительной степени происходил в силу логики внутреннего развития физического знания. Теперь история в точности повторилась с тем изменением, что вместо диссипативных систем стали рассматриваться консервативные (гамильтоновы) системы. Интерес к классическим гамильтоновым системам, которые какое-то время находились на заднем плане, вновь возродился постановкой новых физических задач. Конечно, стали использоваться новейшие достижения теории динамических систем. Совершенно естественно, установились постоянные контакты с молодыми московскими математиками, в особенности с В.И. Арнольдом, Я.Г. Синаем, Д.В. Аносовым. Эти контакты в известной степени продолжаются до сих пор [13].

Для рассматриваемых задач имелась прочная математическая база в двух предельных случаях: устойчивых динамических систем, описываемых теорией КАМ, и максимально неустойчивых систем, описываемых эргодической теорией. Строгий анализ общих динамических систем, который включал бы теорию КАМ и эргодическую теорию в качестве частных случаев, наталкивается на трудности принципиального характера и в значительной степени остается делом будущего. Большинство реальных систем относится как раз к промежуточному случаю. Несмотря на грандиозные успехи современной эргодической теории, она непосредственно применима к очень небольшому числу реальных систем (как, например, системы бильярдного типа).

Проблема состояла в изучении реальных физических систем в общем случае с использованием тех математических средств, которые были к тому времени разработаны. Точные законы (уравнения Лагранжа, Гамильтона и др.) считаются известными, и задача состоит в получении следствий из них, разработке приближенной системы понятий и законов. Чириков называл такой подход конструктивной физикой, имея в виду, что речь идет не о формулировке каких-либо новых законов природы, а о применении хорошо известных и твердо установленных законов механики к объяснению и конструированию новых явлений и объектов [14]. К конструктивной физике он относил теорию колебаний, статистическую физику, химию. В дальнейшем его взгляды по этому поводу претерпели изменения.

При недостатке строгих результатов особое значение приобретали полукачественные методы, основанные на физическом подходе. В отличие от дедуктивных математических схем в основу физической теории хаоса (которая в Новосибирской школе получила название «теория стохастичности») часто были положены оценки по порядку величины, дополненные результатами вычислительных экспериментов. С помощью теории стохастичности появилась возможность не только увидеть общую картину возникновения и развития сложной динамики, но нередко получать количественные соотношения. Надо отметить, что качественное рассмотрение физических задач, оценки величин, совершенно неожиданные аналогии являются одними из самых сильных сторон Чирикова. Еще одна его характерная черта – глубокое понимание математики. Не так часто бывает, что физик находит неточности и ошибки в математических трудах [15].

В своей докторской диссертации [14] Чириков формулирует программу исследований: проведение изучения многомерных нелинейных колебаний консервативной системы в *целом*, то есть на неограниченном временном интервале и для произвольных начальных условий (программа Чирикова). Основой анализа нелинейных колебаний является понятие *нелинейного резонанса*, восходящее еще к Л. Эйлеру и Ж.-Л. Лагранжу, которые использовали его в задачах небесной механики (либрационное движение планет). Позднее нелинейный резонанс нашел применение в теории ускорителей в связи с механизмом автофазировки (В.И. Векслер, Э. Макмиллан). Критерий стохастичности основан на понятии перекрытия нелинейных резонансов, который определяет основные особенности движения.

Чириков рассматривает одномерный нелинейный осциллятор под действием периодического внешнего возмущения. Эта модель стала основной при изучении гамильтонова хаоса. Для нее вводится понятие расширенного фазового пространства, в котором роль добавочной координаты играет время. Таким образом, у основной модели фазовое пространство трехмерно, и в этой ситуации говорят, что система имеет $3/2$ степеней свободы. Это минимальная размерность, при которой существует хаос. Основную модель можно представить в виде отображений, что особенно удобно для проведения вычислительных экспериментов. Гамильтониан системы в переменных «действие I – угол θ » имеет вид

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, \varphi(t)), \quad (1)$$

где H_0 описывает свободный нелинейный осциллятор. Получаются следующие урав-

нения движения для осциллятора:

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V(I, \theta, \varphi)}{\partial \theta}, \quad \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V(I, \theta, \varphi)}{\partial I}, \quad \dot{\varphi} = \Omega, \quad (2)$$

где ε – параметр возмущения ($\varepsilon \ll 1$), фаза φ характеризует внешнее возмущение с периодом $T = 2\pi/\Omega$. Спектр возмущения имеет частоты $n\Omega$, и условие резонанса имеет вид

$$m\omega(I) + n\Omega = 0. \quad (3)$$

Существенным и новым в рассмотрении Чирикова является *взаимодействие нелинейных резонансов*, которое всегда имеется в нелинейной системе. Взаимодействием резонансов Чириков называет ситуацию присутствия в системе одновременно нескольких резонансов, обусловленных гармониками возмущения. Отметим идентичность условия резонанса (3) и условия появления малых знаменателей в рядах теории возмущений. Согласно теории КАМ, имеется критическое значение возмущения, после которого движение становится неустойчивым. Взаимодействие резонансов служит источником неустойчивости колебаний, которая приводит к хаотическому движению, то есть появлению статистических законов в динамической системе [16, 14, 17].

В своей первой работе по проблеме Будкера «Резонансные процессы в магнитной ловушке» [16] Чириков рассматривает резонансы между ларморовским вращением заряженной частицы в магнитном поле и медленными колебаниями ее вдоль силовых линий. Постановка такого рода задач относится еще к 1928 году – в [18] указана роль резонансов в изменении адиабатического инварианта (магнитного момента частицы). Задача является столь сложной, что не удается провести достаточно полный математический анализ. Чириков формулирует простой и эффективный физический критерий разрушения интегралов движения и развития неустойчивости. Взаимодействие резонансов зависит от соотношения между шириной резонанса (ширина сепаратрисы) $\Delta\omega$ и расстоянием до ближайшего соседнего резонанса $\Delta = |\omega_{i+1} - \omega_i|$. Величина

$$S = \frac{\Delta\omega}{\Delta} \quad (4)$$

называется константой связи. Перекрытие резонансов начинается тогда, когда их сепаратрисы касаются друг друга, чему отвечает значение

$$S \geq 1. \quad (5)$$

Это условие означает переход к нерегулярному, хаотическому движению. Еще в вычислительных экспериментах Говарда и Хайна (1953) был получен критерий неустойчивости вида (5) [11]. Чириков распространил условие перекрытия нелинейных резонансов (5) на нелинейные гамильтоновы системы в общем случае и назвал его «критерием стохастичности»; в литературе он больше известен как «критерий Чирикова».

Критерий Чирикова является качественным методом оценки. Недостаток качественных методов в том, что сформулировать условия, при которых получается тот или иной результат, непросто, так как отсутствует строгий и последовательный вывод. Вследствие всего этого не определены границы применимости полученных результатов. Сказанное справедливо и по отношению к критерию Чирикова. Критерий

Чирикова явился исторически первым инструментом, дающим возможность провести простую оценку перехода к хаотической динамике в гамильтоновых системах. Сам Чириков применил его к большому числу различных физических задач, детально его исследовал в различных физических ситуациях, что позволило создать общую картину движения многих физически интересных гамильтоновых систем [14, 19]. Однако сейчас больше обращаются к методу показателей Ляпунова и к критерию Мельникова как к более строгим и последовательным методам.

2. Проблема Ферми–Пасты–Улама. Задача об ускорении Ферми

Наряду с Чириковым огромный вклад в понимание гамильтонова хаоса внес Заславский. В основу его подхода к вопросам хаоса положено понятие перемешивания. Более двух десятков работ Заславского, выполненных в 1960–1970-е годы, посвящены изучению нелинейных систем с перемешиванием. В них рассматриваются разнообразные физические задачи: движение заряженных частиц во внешних полях, неустойчивость частиц плазмы, нелинейные волны, турбулентность в средах с дисперсией и др. Вот что говорит сам Заславский: «Я начал работать над проблемами хаоса в 1963 году с Борисом Чириковым, и мы опубликовали статью об ускорении Ферми [17]. Это было временем становления новых представлений, и мы проанализировали реальную физическую систему. Вскоре после этого, перейдя к проблеме существования и устойчивости магнитных поверхностей, мы обнаружили два важных факта: 1) стохастическое разрушение магнитных поверхностей [20, 21]. Этот результат в настоящее время широко используются почти во всех случаях анализа в установках для удержания плазмы; 2) разрушение сепаратрисы и образование стохастического (эргодического) слоя, ширина которого оценивается с помощью специального, так называемого сепаратрисного отображения [22]. Последнее имеет принципиальное значение, так как в гамильтоновых системах хаос начинается с образования стохастического слоя... Для меня имела большое значение сильная поддержка со стороны Р.З. Сагдеева, М.А. Леонтовича, Б.Б. Кадомцева и И.М. Лифшица. Пришлось преодолеть немалые трудности, прежде чем мои работы по хаосу получили признание. В определенной степени это объяснялось моей отдаленностью, когда я работал в Красноярске. Широкое признание пришло где-то после 1984 года. Другой момент, на который я хочу обратить внимание – у меня не было хороших компьютеров и многое пришлось делать с помощью аналитических расчетов, в то время как на Западе повсеместно и очень эффективно пользовались компьютерами. Когда я приехал в США в 1990 году, я был удивлен тем, насколько хорошо были известны мои работы» [23]. Здесь следует отметить, что многие оригинальные результаты, в том числе полученные в указанных работах, изложены в книге [24], которая вместе с работой Чирикова [14] представляет самые первые книги по динамическому хаосу.

В недрах частных задач вызревали совершенно новые физические идеи, которые в должной мере не были сразу оценены. Статистическое описание для систем с очень большим ($N \sim 10^{23}$) числом степеней свободы является единственно возможным. В этом случае теряется детальная информация о траекториях системы, но за счет этого достигается очень значительное упрощение, поскольку намного уменьшается число переменных, необходимых для описания системы. Такое сокращенное

статистическое описание производится с помощью кинетических уравнений. Оно имеет давнюю историю, начиная с Л. Больцмана (1872), и эта история, наверно, еще не закончена [25–27]. При выводе кинетических уравнений налагаются дополнительные условия (например, приближение хаотических фаз), которые вводят в рассматриваемую систему элемент случайности. Изучение хаоса привело к пониманию того, что кинетическое описание может быть применено даже к системам с небольшим числом степеней свободы ($N = 1.5$) без каких-либо дополнительных условий. Это в огромной степени расширяет область применения мощных статистических методов. Одна из первых задач, в которой на простой физической модели было показано, как в динамической системе возникает кинетическое описание, была рассмотрена в работе Заславского и Чирикова [17].

Сначала обратимся к одной из последних работ Ферми, выполненной совместно с Дж. Пастой и С. Уламом [28]. Побудительным мотивом послужил давний интерес Ферми к нелинейным проблемам и возможность их изучения с помощью недавно созданных ЭВМ. Эргодические проблемы были предметом интереса Ферми еще в самом начале его научной деятельности. В 1923 году во время своего пребывания в Геттингене Ферми выполнил работу по эргодической теории [29]. В ней Ферми пытался доказать квазиэргодическую гипотезу, которая, как полагали, является основой обоснования статистической механики. В своем доказательстве он опирался на теорему Брунса–Пуанкаре о несуществовании у канонической нормальной системы однозначных, аналитических, не зависящих от времени интегралов, кроме интеграла энергии. Доказательство Ферми не было строгим, что вызвало нарекания математиков. Однако он был уверен в правильности своего результата. Ферми считал, что на основе квазиэргодической гипотезы можно будет описать поведение системы нелинейных осцилляторов [28]. В указанной работе изучался вопрос о распределении энергии в цепочке из 64 нелинейных осцилляторов, нелинейность вводилась как возмущение исходной линейной задачи. Рассматриваемая система являлась неинтегрируемой и не допускала аналитических решений, что и побудило авторов предпринять ее численное исследование. В задаче с самого начала содержался весьма нетривиальный момент. В интегрируемых системах траектории ложатся на многообразия малого числа измерений. В неинтегрируемом случае не существует полного набора независимых интегралов, поведение системы становится сложным, хаотическим. Если при сколь угодно малом возмущении система становится неинтегрируемой, как происходит разрушение интегралов движения? Эта трудность была разрешена теорией КАМ, но в то время она еще не была известна среди физиков. Таким образом, Ферми, Пастой и Уламом была затронута старая проблема, но предпринят новый подход к ее решению. Общепринятым был взгляд, что в системах с большим числом степеней свободы действуют законы статистической механики, и ожидалось равномерное распределение энергии между всеми модами. Вопреки ожидаемому, система демонстрировала устойчивый квазипериодический характер движения без заметных признаков хаотичности. Возникший парадокс получил название проблемы Ферми–Пасты–Улама (ФПУ-проблема).

ФПУ-проблема явилась одним из поворотных пунктов в развитии нелинейной динамики. Недавно как раз исполнилось 50 лет со дня публикации работы Ферми, Пасты и Улама [28] (май 1955 года) и этому событию целиком посвящен выпуск журнала «Хаос» [30]. В ФПУ-проблеме сошлись как в фокусе несколько важней-

ших аспектов. Во-первых, М. Крускал и Н. Забуски рассмотрели ФПУ-проблему в непрерывном пределе и показали, что уравнения движения цепочки нелинейных осцилляторов сводятся к уравнению Кортевега – де Фриза (КдФ) [31]. Уравнение КдФ было получено в 1895 году для описания слабонелинейных волн на мелкой воде и является интегрируемым. В работе М. Крускала и Н. Забуски появился термин «солитон», чтобы подчеркнуть частицеподобные свойства полученных ими решений. Основываясь на результатах работы [31] Крускал с соавторами развил новый метод интегрирования нелинейных эволюционных уравнений – метод обратной задачи рассеяния [32], что привело к созданию теории солитонов (см., например, [33]). Сформировался важнейший раздел современной математической физики, возродился интерес к классической области математики – к интегрируемым системам. Было найдено большое количество точно решаемых нелинейных систем, важных с точки зрения физики, и их число постоянно растет.

ФПУ-проблема послужила одним из исходных пунктов, положивших начало новому методу научного исследования – вычислительному эксперименту. Появление вычислительного эксперимента как метода научного исследования стало возможным с созданием быстродействующих ЭВМ. Первые ЭВМ предназначались, главным образом, для работ по атомной проблеме. В их числе была машина MANIAC, смонтированная в Лос-Аламосе в 1952 году. Фон Нейман и Ферми первыми поняли, какие возможности таят ЭВМ для решения научных задач, и им принадлежат главные заслуги в появлении вычислительного эксперимента в современном понимании. Об этом свидетельствуют С. Улам [34] и один из ближайших сотрудников фон Неймана, А. Бёркс [35]. Исходным пунктом для фон Неймана были его собственные исследования по гидродинамике. Он обнаружил, что существующие аналитические методы не пригодны для получения даже качественной информации о поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений математической физики. Выход фон Нейман видел в численном решении и применении для этой цели только что появившихся ЭВМ. Он быстро оценил их возможности и предложил использовать результаты решений многих различных конкретных уравнений для выявления физических и математических закономерностей, что поможет построению общей теории. На машине MANIAC и была выполнена работа, приведшая к ФПУ-проблеме. В статье Ферми, Пасты, Улама [28] впервые появился сам термин «вычислительный эксперимент».

В понятие вычислительного эксперимента вкладывается иное содержание, чем просто численные решения задач. В вычислительном эксперименте варьированием параметров, начальных условий и т.д. стараются выяснить устройство модели в целом выделением ее характерных черт, элементов ее внутренней структуры, особенностей поведения. Все эти качества исследуемой системы заранее не известны. Вычислительный эксперимент имеет полное право претендовать на самостоятельный метод исследования наряду с теорией и натурным (лабораторным) экспериментом. В нем имеются составляющие традиционного научного метода «гипотеза – дедукция – эксперимент» [35]. Из исходной гипотезы с помощью математического формализма делаются некоторые выводы, которые проверяются экспериментально. С учетом данных экспериментов строится новая гипотеза, и процесс повторяется до тех пор, пока не будут выявлены общие закономерности. То же самое происходит в вычислительном эксперименте: строится некоторая гипотеза относительно исследу-

емых уравнений, ищутся критические случаи, полученные результаты сравниваются с гипотетическими, цикл повторяется и т.д. Вычислительный эксперимент может дополняться лабораторным экспериментом. Вычислительный эксперимент представляет эвристический метод исследования не только в физике, но и в современной математике. С его помощью выбираются направления для дальнейших аналитических исследований, появился даже термин «экспериментальная математика». Вычислительный эксперимент в исследованиях хаоса первым в нашей стране начал широко использовать Чириков. Вычислительный эксперимент не только в сильнейшей степени способствовал обнаружению феномена хаоса, но и привел к пониманию проблемы. Однако следует иметь в виду, что вычислительный эксперимент является эффективным методом, если он опирается на теоретические положения.

В ФПУ-проблеме статистическое поведение возникло не из-за взаимодействия системы с термостатом, а вследствие сложных нелинейных взаимодействий осцилляторов между собой. Как вспоминает Заславский, ФПУ-проблема в сильнейшей степени определила его интерес к нелинейным задачам [36]. Ферми в 1949 году опубликовал работу об ускорении космических частиц из-за столкновения с магнитными облаками, что давало возможный механизм происхождения космических лучей [37]. Отрицательный результат, полученный в [28], побудил Улама обратиться к более простой задаче ускорения Ферми. Улам предложил модель, в которой частица движется между двумя параллельными стенками, одна из которых колеблется по определенному закону [38]. Результаты Улама снова были отрицательными. В этой же работе Улам кратко описал ФПУ-проблему. Через два года (1963) работа Улама [38] была опубликована на русском языке в сборнике переводов «Математика». Первое знакомство в СССР с ФПУ-проблемой было косвенным. Лишь после установления переписки с Уламом Чириков получил от него ставший знаменитым отчет LA-1940 [28]. Стремление понять модель Улама привело к работе Заславского и Чирикова об ускорении Ферми [17]. В этой работе рассматривается механизм стохастического ускорения Ферми, который был предложен Э. Ферми для объяснения происхождения быстрых частиц в космических лучах [37]. Идея заключалась в том, что частицы при «столкновениях» с движущимися магнитными полями в межзвездной среде должны в среднем ускоряться. Такие «столкновения» можно представить как столкновения с телами очень большой массы с хаотическим распределением скоростей. Частица будет приобретать или отдавать энергию в зависимости от того, движется ли тело навстречу частице или от нее. Поскольку движущихся навстречу тел будет больше, частица будет чаще приобретать энергию, чем ее отдавать, что приводит к возникновению эффективного ускорения. Одним из побудительных мотивов рассмотрения данного механизма, как указывают авторы [17], была принципиальная возможность его использования для ускорения космических ракет в гравитационном поле планет или звезд.

В решении поставленной задачи можно выделить два этапа: 1) установление, исходя из полукачественных соображений, критерия стохастичности; 2) переход к статистическому описанию рассматриваемой системы. Была рассмотрена простая модель, когда частица движется между двумя бесконечно тяжелыми стенками, с которыми она сталкивается по законам абсолютно упругого удара. Одна из стенок строго периодически колеблется. С помощью этой модели был детально изучен механизм ускорения Ферми.

Причина отрицательного результата в модели Улама осталась нераскрытой. Положение прояснилось лишь после того, как пришло понимание механизма возникновения хаоса. Ключевым моментом является перемешивание в фазовом пространстве. Рассмотрим отображение [17, 39]

$$p_{n+1} = p_n + Vf(x_n), \quad x_{n+1} = x_n + \frac{a}{p_{n+1}^v} + b \pmod{2\pi}, \quad (6)$$

где все переменные безразмерные, (p, x) – обобщенный импульс и координата, $f(x)$ – периодическая функция: $f(x+2\pi) = f(x)$; V, a, b, v – постоянные. Для модели Улама p – скорость, $f(x)$ – функция пилообразной формы, определяющая периодические колебания стенки, n определяет номер соударения с движущейся стенкой, $v = 1$.

Хаос в отображении (6) возникает при условии

$$K \equiv (avV/p^{v+1})|f'(x)| \gg 1, \quad (7)$$

и можно принять условие растяжения фаз $K \sim 1$, который ввели и широко использовали Заславский и Чириков [17] в качестве критерия возникновения хаоса. В действительности в отображении (6) всегда имеются области хаоса, но они могут быть трудно обнаруживаемы из-за их малого объема. В области хаоса (назовем ее «область I») происходит быстрое перемешивание по фазам x и медленная диффузия вдоль переменных p . Для области I было получено кинетическое уравнение

$$\frac{\partial F(p, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} D(p) \frac{\partial F(p, t)}{\partial p}, \quad (8)$$

где $F(p, t)$ – нормированная функция распределения, $D(p)$ – коэффициент диффузии, определяемый по формуле

$$D(p) = \langle (\Delta p)^2 / \Delta t \rangle \quad (9)$$

Здесь $\Delta p = Vf(x)$ – изменение скорости при ударе, Δt – время между двумя соударениями, $\langle \dots \rangle$ – усреднение по фазам.

Для значений $K \gg 1$ происходит экспоненциальное затухание корреляций

$$\langle e^{i(x_{n+m} - x_m)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(x_{n+m} - x_m)] dx_m \sim \exp(-mc \ln K), \quad (10)$$

с константой $c \sim 1$. Соотношение (10) соответствует быстрому перемешиванию фазы с характерным временем

$$\tau \sim 1 / \ln K. \quad (11)$$

Было установлено существование трех качественно различных областей значений скорости частицы: I – область малых скоростей, в которой движение является стохастическим; II – промежуточная область; III – область больших скоростей, в которой скорость частицы совершает малые устойчивые колебания. Описание поведения системы является динамическим [17, 24, 40]. Численные расчеты показали правильность сделанных предположений. Одним из важных результатов явилось установление с помощью механизма Ферми величины максимально достижимой скорости. Заложенные в работе [17] идеи и методы получили развитие в дальнейших исследованиях.

Изучение ФПУ-проблемы поставило ряд вопросов, поиски ответов на которые оказало сильное влияние на исследования хаоса [39]:

1) каким образом возникает хаотическая динамика и какова структура областей фазового пространства Γ_c , где это происходит (перемешивание и существование в Γ_c положительной энтропии Колмогорова – Синая);

2) как провести упрощение системы уменьшением числа переменных и перейти к кинетическому описанию (master equation);

3) как провести интегрирование кинетического уравнения, что позволяет получить характеристики переноса (транспорта) в системе. В частности, большой интерес представляет распределение энергии между степенями свободы, с этим связана проблема термализации.

3. Интерпретация ФПУ-проблемы Б.В. Чириковым и Ф.М. Израйлевым

Несмотря на полученные результаты в исследованиях ФПУ-проблемы и связанных с нею задач, сама проблема не была закрыта. Результаты Забуски и Крускала [31] разъяснили возникший парадокс, но они относились к непрерывному пределу. Действительно ли система нелинейных осцилляторов представляет собой полностью интегрируемую систему? Ранняя смерть Ферми не позволила ему самому довести задачу до конца. Положение в определенной степени разъяснилось после появления работы Ф.М. Израйлева и Б.В. Чирикова «Статистические свойства нелинейной струны» [41]. В ней авторы пишут: «До недавнего времени считалось, что любая нелинейность будет приводить к появлению статистических свойств, которые мы кратко будем называть в дальнейшем термином стохастичность (эргодичность, перемешивание, конечная энтропия по А.Н. Колмогорову). Поэтому отрицательный результат работы ([28]. – *Р.М.*) (четкий квазипериодический характер движения вместо стохастичности) казался удивительным. Однако последние работы А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда показали, что такой результат является, наоборот, естественным: при достаточно малом возмущении нелинейная система сохраняет квазипериодический характер движения. С точки зрения современной теории динамических систем следует ожидать существования в общем случае некоторого критического возмущения, при котором начинается стохастичность. Целью настоящей работы является оценка границы стохастичности для цепочки осцилляторов» [41, с. 57].

В оригинальной работе Ферми, Пасты и Улама [28] рассматривалась система из 64 частиц с силами, действующими между соседними частицами. Если x_i – смещение i -й точки от ее начального положения, то уравнения движения будут иметь вид

$$\ddot{x}_l = (x_{l+1} + x_{l-1} - 2x_l) + \alpha [(x_{l+1} - x_l)^2 - (x_l - x_{l-1})^2] \quad (12)$$

или

$$\ddot{x}_l = (x_{l+1} + x_{l-1} - 2x_l) + \beta [(x_{l+1} - x_l)^3 - (x_l - x_{l-1})^3], \quad l = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (13)$$

Константы нелинейности α и β предполагаются малыми. Имеются две модели, соответственно α - и β -модель.

Если нелинейные члены отсутствуют ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), то точные решения уравнений (12) и (13) могут быть записаны в виде набора ($N - 1$) независимых

нормальных колебаний $Q_k(t)$

$$x_l = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{k=1}^{N-1} Q_k \sin \frac{\pi kl}{N}, \quad (14)$$

система является интегрируемой.

Авторы [41] с самого начала стояли на твердой почве строгой математической теории (теория КАМ). В своей работе они аналитически рассмотрели β -модель. Используя критерий перекрытия резонансов (5), была проведена оценка нижней границы стохастичности

$$3\beta_{\text{кр}} \frac{E}{N} \sim \begin{cases} \frac{3}{k}, & k \ll N \text{ (акустические волны),} \\ \frac{3\pi^2}{N^2} \left(\frac{k}{N}\right)^2, & N - k \ll N \text{ (оптические волны),} \end{cases} \quad (15)$$

где E – энергия возбуждения, k – волновой вектор. Для высших мод и больших N стохастичность наступает уже при очень малой нелинейности. В противоположном случае, при возбуждении низших мод стохастичность возможна для очень больших нелинейных возмущений. Стал ясен результат работы Ферми, Пасты и Улама [28], где как раз возбуждались низшие моды, которые казались естественными начальными условиями. Значение работы Израйлева и Чирикова состоит также в том, что в ней была осуществлена одна из первых проверок теории КАМ: при достаточно малом возмущении нелинейная система сохраняла квазипериодический характер движения. В последующих работах полученные результаты были дополнены и уточнены [42, 43].

Работа Израйлева и Чирикова [41] поступила в редакцию Докладов АН СССР в апреле 1965 года и была напечатана в начале следующего года. В августе 1966 года произошла встреча Чирикова с Уламом на Международном конгрессе математиков в Москве. В контексте взаимоотношений советских и американских ученых любопытно, как Улам оказался в Москве [15]. Станислав Улам (1909–1984), польский математик, в 1930-е годы эмигрировал в США, где тесно сотрудничал с фон Нейманом и Ферми, и не случаен его интерес к нелинейным задачам. Улам был одной из главных фигур в создании термоядерного оружия, и ему были запрещены поездки в СССР и страны Восточной Европы. Несмотря на запрет, Улам тайком приехал в Москву. По возвращении в США у него были неприятности, и когда через некоторое время туда приехал Чириков, их уже не оставляли одних и все беседы проходили в присутствии сотрудников службы безопасности.

Открытие хаоса относительно независимо было сделано для двух классов динамических систем: гамильтоновых и диссипативных. Очень часто, особенно в зарубежной литературе, открытие хаоса в гамильтоновых системах игнорируется. Само открытие гамильтонова хаоса произошло даже несколько раньше, чем диссипативного. Феномен был не только открыт, но и понят; к началу 1970-х годов была создана соответствующая теория. Если говорить о диссипативном хаосе, то понятие странного аттрактора относится к 1971 году [44], работа Лоренца [45] получила признание в середине 1970-х годов. Иногда встречающееся утверждение, что «теория хаоса началась с Лоренца» выглядит чрезмерным упрощением, искажающим действительный ход событий. Имеются две линии развития. Открытие Лоренцом хаоса

в диссипативных системах относится к общеизвестной линии развития, которую на завершающем этапе можно изобразить цепочкой Лоренц – Смейл – Рюэль, Такенс. Другая линия идет через небесную механику и эргодическую теорию и восходит к Л. Больцману, А. Пуанкаре, Дж. Биркгофу, Э. Хопфу, Н.С. Крылову, А.Н. Колмогорову, Я.Г. Синаю. Эта линия развития привела в 1960-е годы к открытию хаоса в гамильтоновых системах, где работы Б.В. Чирикова, Г.М. Заславского и их сотрудников имели первостепенное значение. Обнаружение хаотичности при изучении ФПУ-проблемы, затронувшей фундаментальные вопросы физики (Б.В. Чириков, Ф.М. Израйлев, 1966), и в задаче о магнитных поверхностях (Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, Н.Н. Филоненко, 1967) способствовало установлению представлений, что стохастическое разрушение интегралов движения является общим свойством гамильтоновых систем. Концептуальное значение в понимании феномена хаоса имело установление его неоднородности, когда области хаоса весьма сложным образом переплетены с областями регулярности – системы с разделяющимся фазовым пространством (Г.М. Заславский и Б.В. Чириков, 1964; Б.В. Чириков, 1969).

При написании данной работы я использовал информацию, полученную от Б.В. Чирикова, Г.М. Заславского и Ф.М. Израйлева, с Г.М. Заславским обсуждался ряд вопросов. А.Ю. Лоскутов прочел работу и выразил некоторые пожелания. Всем им приношу глубокую благодарность.

P.S. После того как статья была закончена, Г.М. Заславский сообщил мне о кончине Б.В. Чирикова. Борис Валерианович является не только одним из открывателей гамильтонова хаоса, он внес огромный вклад в дальнейшие исследования, и его работы в значительной степени определяют современный облик данной области науки.

Библиографический список

1. Борис Валерианович Чириков // УФН. 1998. Т. 168. № 7. С. 813.
2. *Чириков Б.В.* Жизнь – это творчество // Академик Г.И. Будкер. Новосибирск: Наука, 1988. С. 67.
3. *Сагдеев Р.З.* Сколько каши было съедено // Академик М.А. Леонтович. М.: Наука, 2003. С. 287.
4. *Коган В.И.* Устное сообщение 17.12.2003.
5. *Визгин Вл.П.* Устное сообщение 23.11.2004.
6. *Мухин Р.Р.* «Для понимания структуры и природы колец старые методы небесной механики оказались неприменимыми». Интервью с А.М. Фридманом // Вопр. истории естествозн. и техники. 2005. № 3. С. 157.
7. *Бурштейн А.И.* Возвращение «Интеграла» // Научное сообщество физиков СССР. 1950–1960-е годы. Вып. 1. СПб.: Изд-во РХГА, 2005. С. 569.
8. «Наука в Сибири» – 28 июня 1990. № 23-24.
9. *Заславский Г.М.* Устное сообщение 25.08.2006.
10. *Будкер Г.И.* Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками // Физика плазмы и проблема управляемых реакций. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С.3.
11. *Заславский Г.М., Чириков Б.В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // УФН. 1971. Т. 105, вып. 1. С. 3.

12. *Чириков Б.В.* Письменное сообщение от 17.11.2003.
13. *Синай Я.Г.* Как математики и физики нашли друг друга // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 417.
14. *Чириков Б.В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ 267. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1969.
15. *Израйлев Ф.М.* Устное сообщение 2.07.2004.
16. *Чириков Б.В.* Резонансные процессы в магнитных ловушках // Атомн. энергия. 1959. Т 6, № 6. С. 630.
17. *Заславский Г.М., Чириков Б.В.* О механизме ускорения Ферми в одномерном случае // ДАН СССР. 1964. Т. 159. № 2. С. 306.
18. *Андронов А.А., Леонтович М.А., Мандельштам Л.И.* К теории адиабатических инвариантов // Журн. рус. физ.-хим. общества. 1928. Т. 60. № 5. С. 413.
19. *Chirikov B.V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Phys. Reps. 1979. Vol. 52, № 5. P. 263.
20. *Rosenbluth M.N., Sagdeev R.Z., Taylor J.B., Zaslavsky G.M.* Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities // Nucl. Fusion. 1966. Vol. 6. P. 297.
21. *Filonenko N.N., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities. Part II // Nucl. Fusion. 1967. Vol. 7. P. 253.
22. *Заславский Г.М., Филоненко Н.Н.* Стохастическая неустойчивость захваченных частиц и условия применимости квазилинейного приближения // ЖЭТФ. 1968. Т. 54, вып. 5. С. 1590.
23. *Заславский Г.М.* Письменное сообщение от 02.12.2003.
24. *Заславский Г.М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970.
25. *Зубарев Д.Н.* Современные методы статистической теории неравновесных процессов. М.: ВИНТИ, 1980.
26. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.
27. *Пригожин И.* Неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1964.
28. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Study of Nonlinear Problems // Studies of Nonlinear Problems. I. Los Alamos Report. LA, 1940. 1955 / Рус. пер.: Э.Ферми. Научн. тр. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 647.
29. *Fermi E.* Beweis dass ein Mechnisches Normalsystem in Allgemeinen Quasi-ergodisch ist // Phys. Zs. 1923. B. 24. S. 261 / Рус. пер.: Ферми Э. Научн. труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. С. 115.
30. Chaos. 2005. Vol. 15. 015101.
31. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 15. P. 240.
32. *Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura K.M.* Method for the solving the Kortevag – de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1095.
33. Солитоны. М.: Мир, 1983.
34. *Ulam S.* John von Neumann, 1903–1957 // Bull. AMS. 1958. Vol. 64, № 3. P. 1.
35. *Беркс А.* Введение к книге: Дж. фон Нейман. Теория самовоспроизводящихся автоматов. М.: Мир, 1971. С. 20.

36. *Заславский Г.М.* Письменное сообщение от 04.03.2004.
37. *Fermi E.* On the origin of cosmic radiation // *Phys. Rev.* 1949. Vol. 75. P. 1169 / Рус. пер.: Э.Ферми. Научн. тр. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 439.
38. *Ulam S.* On some statistical properties of dynamical systems // *Proc. 4-th Berkely Sympos. Math. Prob. Berkely – Los Angeles.* 1961. Vol. 3. P. 315.
39. *Zaslavsky G.M.* Long way from FPU-problem to chaos // *Chaos.* 2005. Vol. 15. 015103. P. 137.
40. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
41. *Израйлев Ф.М., Чириков Б.В.* Статистические свойства нелинейной струны // *ДАН СССР.* 1966. Т. 166, № 1. С. 57.
42. *Израйлев Ф.М., Хисамутдинов А.И., Чириков Б.В.* Численные эксперименты с нелинейной цепочкой. Препринт ИЯФ 252. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1968.
43. *Израйлев Ф.М., Чириков Б.В.* Стохастичность простейшей динамической модели с разделенным фазовым пространством. Препринт ИЯФ 191. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1968.
44. *Ruelle D., Takens F.* On the Nature of Turbulence // *Comm. Math. Phys.* 1971. Vol. 20. P. 167 / Рус. пер. в кн.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 117.
45. *Lorenz E.* Deterministic nonperiodic flow // *J.Atmosph. Sci.* 1963. Vol. 20. P. 130 / Рус. пер.: в кн.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88.

*Старооскольский
технологический институт*

*Поступила в редакцию 21.02.2008
После обработки 17.04.2008*

**FROM THE HISTORY OF HAMILTONIAN CHAOS:
RESEARCH OF STOCHASTICITY IN NONLINEAR SYSTEMS
BY THE NOVOSIBIRSK SCHOOL**

R.R. Mukhin

The article is devoted to the problems of history of the Hamiltonian chaos discovery in 1960th which is described a little in publications in comparison with the history of dissipative chaos. The main center of Hamiltonian chaos research was the Nuclear Physics Institute in Novosibirsk where B.V. Chirikov and G.M. Zaslavsky worked, being the major specialists in the world in this field of science.



Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). После защиты кандидатской диссертации (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) работал в Карагандинском государственном университете. В настоящее время работает в Старооскольском технологическом институте (Старый Оскол Белгородской области). Сейчас область научных интересов – история физики, в особенности история нелинейной динамики. Имеет несколько десятков публикаций.