



## ОПТИМАЛЬНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ ХАОСА И ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СКОРРЕКТИРОВАННЫХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

*Ю.В. Талагаев, А.Ф. Тараканов*

Представлена двухэтапная схема оптимальной коррекции пространства параметров динамической системы, целью которой является преобразование хаотического режима системы в регулярный с минимальной интенсивностью воздействий. В основе предлагаемого подхода лежит комбинирование методов теории оптимального управления с численным тестированием качества подавления хаоса. Теоретически обосновано, что найденные в результате применения схемы оптимальные корректирующие функции позволяют осуществить процесс модификации хаотического аттрактора в уникальное устойчивое предельное множество, соответствующий переходу системы к устойчивой динамике. В вычислительном эксперименте с обобщенной моделью автоколебательной системы показано, что предложенная методика коррекции эффективна для многопараметрического анализа ситуаций, возникающих при оптимальном подавлении хаоса.

### Введение

Особенностью хаотических систем как объектов управления является не только чувствительная зависимость от малых возмущений параметров [1], но и то, что параметрическое пространство многих из них многомерно. Неослабевающий интерес к управлению хаосом [2] и бифуркациями [3, 4] требует совершенствования средств многопараметрического анализа, важных при конструировании и моделировании процессов управления сложных систем в технике, экономике, биологии и т.д.

При высокой размерности пространства параметров нелинейных динамических систем структура границ областей регулярной и хаотической динамики приобретают разнообразный (иногда нетривиальный) характер [5]. По причине сложности картины бифуркаций при большом числе управляющих параметров, анализ механизмов подавления хаотического поведения требует гораздо больших усилий, чем в однопараметрическом случае. Несмотря на возникающие трудности, продуктивность МР-анализа позволяет: углубить понимание механизма функционирования системы на основе сведений об особенностях границ параметрических областей устойчивости линеаризованных уравнений (теория многопараметрической устойчивости [6]); исследовать разнообразные критические ситуации и универсальные характеристики,

возникающие на границе перехода «регулярная динамика–хаос» (теория многопараметрической критичности [7, 8]); повысить прогнозируемость и выявить особенности управления нелинейными многопараметрическими системами [9–12] .

В представленной работе в качестве средства МР-анализа используется метод оптимальной коррекции. Первоначально [13] метод предназначался для погашения хаотической динамики автономных систем путем преобразования хаотического режима в регулярный динамической коррекцией (по некоторому критерию качества) их пространства параметров. Однако при включении в круг корректируемых объектов нелинейных осцилляторов оказалось, что его возможности шире и с его помощью можно исследовать особенности оптимальных переходных процессов, возникающих при подавлении хаоса. Согласно анализу целей управления в [14], цель коррекции мы определяем как *модификацию* предельного множества системы из неустойчивого в устойчивое с учетом требования малости воздействия на параметры. Отличие от задачи стабилизации хаоса [15] состоит в том, что заранее задаются не количественные характеристики целевого множества (как правило, это неустойчивая периодическая орбита или положение равновесия, вложенные в хаотический аттрактор), а характер устойчивости системы. Данная цель типична для методов управления сложной динамикой и хаосом в нелинейных осцилляторах, использующих внешние периодические возмущения, эффективность которых оценивается на основании критерия Мельникова [16–18], а также методов оптимального управления бифуркациями [19].

В одной из последних работ [20], посвященной управлению хаосом, специально подобранными возмущениями, реализованными без обратной связи, изучена проблема стабилизации хаотического поведения колебательной системы с сепаратрисным контуром. Для общего случая в ней показано, что внешнее возмущение (функция стабилизации), приводящее к подавлению хаоса, представляет собой серию толчков («kicks»). Это сразу наводит на вопрос о связи этих новых результатов с классической теорией оптимального управления [21–23], в которой аналогичная динамика характерна оптимальным программным сигналам.

В настоящей работе метод коррекции рассматривается как альтернативный способ нахождения функций, обеспечивающих устойчивость системы. Мы показываем, что требование малости возмущения параметров в сочетании с типичными свойствами хаотических систем позволяет получить вспомогательный интегральный критерий (имеющий смысл минимума затрат энергии на процесс коррекции) для определения на основе условий принципа максимума Понтрягина оптимальной структуры корректирующих функций, в отношении которых возможна минимизация уровня их интенсивности.

Теоретический анализ, проведенный в работе и подкрепленный численным экспериментом, указывает, что свойства оптимальных корректирующих функций позволяют осуществить процесс модификации хаотического аттрактора, не имея заранее полной информации о том, как будет вести себя траектория системы, если она окажется в устойчивом режиме. Такая ситуация возникает при управлении многими сложными системами, для которых неизвестно, какие из допустимых параметров и форм их возмущений будут наилучшими для осуществления управляющих воздействий. В результате в фазовом пространстве системы удается локализовать *уникальное предельное множество* (ULS), одновременно отвечающее требованиям к устойчивости и оптимальности переходного процесса.

## 1. Задача коррекции и метод ее решения

**1.1. Постановка задачи.** Рассмотрим нелинейную диссипативную динамическую систему  $\dot{x} = f(x, p)$ ,  $x \in R^n$ , с вектором параметров  $p \in R^m$ , у которой значения параметров лежат в области параметрического пространства, соответствующей хаотической динамике. Это означает, что для любых начальных условий  $x_0 \neq 0$  из бассейна притяжения  $B_A$  хаотического аттрактора  $A_p$  выполнено предельное соотношение  $dist(x(t), A_p) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , где  $dist(x(t), A_p) = \inf_{z \in A_p} \|x - z\|$  – расстояние от точки  $x$  до множества  $A_p$  ( $\|\cdot\|$  – евклидова норма). Множество  $A_p$  ограничено ( $\|x(t)\| < D$ ), и для траектории  $x(t) = x(x_0, t)$ ,  $x_0 \in B_A$ , рассматриваемой хаотической системы положителен старший характеристический показатель Ляпунова

$$\Lambda_1 = \max \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\tilde{x}_i(t)\| \right\}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\tilde{x}(t)$  – возмущение траектории, то есть  $\bar{x}(t) = x(t) + \tilde{x}(t)$ , с близким к  $x_0$  начальным условием  $\bar{x}_0 = x_0 + \tilde{x}_0$ ,  $\|\bar{x}_0 - x_0\| = \varepsilon$ . Геометрическую структуру хаотического аттрактора определяет равновесное множество  $E = \{x_{(k)}^e\}_{k=\overline{1, s}} = \{x \subset R^n \mid f(x, p) = 0\}$ , где  $s$  – число неустойчивых состояний равновесия системы. От их количества, типа и локализации в фазовом пространстве зависит конфигурация траекторий системы на аттракторе.

Идея многопараметрической коррекции [13] состоит в выделении множества параметров  $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ ,  $r \leq m$ , допускающих целенаправленное воздействие и трансформацию исходной системы к виду

$$\dot{x} = f(x, \hat{p}), \quad (1)$$

где допустимые параметры скорректированы по правилу  $\hat{p}_j(t) = p_j(1 + h_j(t))$ ,  $j = \overline{1, r}$ . Целью преобразования  $\dot{x}(t) = f(x(t), p) \rightarrow \dot{x}(t) = f(x(t), \hat{p}(t))$  является обеспечение устойчивости скорректированной хаотической системы при соблюдении естественного требования «малости» коррекции параметров, формализованного в виде условия минимума некоторой векторной нормы  $\|\hat{p}(\cdot) - p\| \rightarrow \min$ .

Известно, что в хаотический аттрактор вложено счетное множество неустойчивых периодических орбит. Для скорректированных хаотических систем эта особенность проявляется в том, что выполнение условия устойчивости  $\Lambda_1 < 0$  задает «нечеткую» цель, поскольку ей может соответствовать широкий класс приемлемых динамических режимов. Учитывая это, введем целевое множество  $M_E = \{(x, h) \mid f(x, \hat{p}) = 0\}$ , которое локально неустойчиво при  $h = \{h_j\} \equiv 0$ . Тогда цель коррекции можно переформулировать: необходимо обеспечить свойство  $A_p \mapsto M_E$ , то есть есть *модификацию* [24] хаотического аттрактора  $A_p$  во внутренне (локально) устойчивое инвариантное предельное множество  $M_E$ . Очевидно, что устойчивость множества  $M_E$  достигается при условии  $\Lambda_1 < 0$ . При этом в силу структуры  $M_E \supset E$  оно будет содержать некоторый регулярный аттрактор, соответствующий устойчивому динамическому режиму скорректированной системы.

Использование при формализации цели коррекции множества  $M_E$  позволяет обойти неопределенность, которая возникает из-за недостаточности количественной информации о конечном режиме. Это происходит благодаря тому, что в исследуемой

задаче существенным оказывается не перевод состояния системы на терминальное множество («стабилизация»), а изменение характера устойчивости  $M_E$  в целом («модификация»). Если при этом соблюдено условие оптимальности  $\|\hat{p}(\cdot) - p\| \rightarrow \min$ , то на основе  $M_E$  рождается ULS системы.

Поскольку  $\|\hat{p}(\cdot) - p\| = \|p h(\cdot)\| \leq \|p\| \cdot \|h(\cdot)\|$ , то условие  $\|\hat{p}(\cdot) - p\| \rightarrow \min$  для обеспечения модификации  $A_p \mapsto M_E$  можно выполнить путем оценки сверху  $\|h(\cdot)\| \rightarrow \min$ , которое, очевидно, можно связать с наличием ограничивающего множества

$$U = \{h(\cdot) \in L_2[0, T] \mid \|h(t)\| \leq a, t \in [0, T], T \gg T^*\}$$

и записать критерий оптимальности коррекции в виде  $a \rightarrow \min$ . После введения множества  $U$  задача оказывается определенной на конечный интервал времени  $[0, T]$ , где  $T$  – время, на котором определено решение системы. Хаотическим системам характерно наличие времени  $T^*$  переходного процесса, в течение которого поведение траекторий отличается от свойственного им при  $T > T^*$ . Поэтому в задаче коррекции при исследовании характера устойчивости установившегося режима выбор момента  $T$  должен быть проведен согласно условию  $T \gg T^*$ , то есть быть заведомо больше длительности переходного процесса.

При  $h \in U$  характер динамики скорректированной системы (1) зависит от значения  $a$ , являющегося общим уровнем возмущения параметров. Следовательно, величина  $a$  определяет эволюцию малого возмущения  $\tilde{x}(t)$  вдоль выбранной для анализа устойчивости скорректированной траектории  $x(t)$ ,  $x_0 \in B_A$ , причем  $\Lambda_1$  есть функция  $\Lambda_1 = \Lambda_1(a)$ .

Определим множество  $K = \{a > 0 \mid \Lambda_1(a) < 0\}$  допустимых значений, обеспечивающих устойчивость скорректированной системы. Тогда, конкретизируя норму и формализуя критерий «малости» коррекции  $a \rightarrow \min_{a \in K}$ , приходим к следующему условию:

$$J_1(h, a) = \|h(\cdot)\|_C = \max_{0 \leq t \leq T} \max_{1 \leq j \leq r} |h_j(t)| \rightarrow \min_{a \in K}. \quad (2)$$

В (2) обозначение  $J_1(h, a)$  введено для отражения особенности исследуемой задачи, где минимум по параметру  $a$  может достигаться на различных  $h \in U$ . Поэтому дополнительно к решению  $a_{\min}$  задачи (2), при котором  $\|h(\cdot)\|_C \leq a_{\min}$  и соблюдается условие устойчивости скорректированной системы  $\Lambda_1(a_{\min}) < 0$ , необходимо осуществить выбор оптимальной функции  $h^0(t)$ . Для этого введем вспомогательный критерий

$$J_2(h, a) = \int_0^T \sum_{j=1}^r h_j^2(t) dt \rightarrow \min_{h \in U}. \quad (3)$$

Условие (3) требует найти такую структуру корректирующей функции  $h^0 \in U$ , чтобы она обеспечивала минимум затрат энергии на коррекцию.

Суммируя сказанное, приходим к задаче оптимальной многопараметрической коррекции

$$J_1(h, a) \rightarrow \min_{a \in K, h^0 \in U^0}, \quad (4)$$

где минимум на множестве  $K$  допустимых значений параметра  $a$ , обеспечивающих на  $[0, T]$  устойчивость скорректированной системы, ищется для функции  $h^0 \in U^0 = \underset{h \in U}{\text{Arg min}} J_2(h, a)$ .

Задача (4) стеснена условием выбора корректирующей функции  $h \in U$  (внутренняя задача (3)) и максимным критерием выбора значения  $a_{\min}$  из множества допустимых значений  $K$  (параметрическая задача (2)). Решением (4) является пара  $(h^*(\cdot), a_{\min})$ , которая удовлетворяет неравенству  $\|h^*(\cdot)\|_C \leq a_{\min}, t \in [0, T]$ . При условии  $\Lambda_1(a_{\min}) < 0$  пара обеспечивает оптимальную модификацию  $A_p \mapsto M_E$ , при которой ULS, локализованное на  $M_E$ , локально устойчиво. Тем самым оптимальным способом достигается цель коррекции, заключающаяся в обеспечении устойчивости установившегося на  $[0, T]$  режима скорректированной динамической системы.

## 1.2. Оптимальные корректирующие функции и их свойства

**1.2.1. Двухэтапная схема коррекции.** Упорядоченность критериев (2)–(3) в задаче (4) позволяет провести ее решение в два этапа как последовательное решение двух задач:

$$J_2(h(\cdot), a) \xrightarrow{\text{I}} \min_{h(\cdot) \in U} \Rightarrow J_2(h^0(\cdot), a) \rightarrow J_1(h^0(\cdot), a) \xrightarrow{\text{II}} \\ \xrightarrow{\text{II}} \min_{a \in K, h^0 \in U^0} \Rightarrow J_1(h^*(\cdot), a_{\min}) = J^*.$$

Реализация двухэтапной схемы предполагает комбинирование методов теории оптимального управления с численным тестированием качества достижения системой устойчивого состояния. В этом случае искомой паре  $(h^*(\cdot), a_{\min})$  соответствует наилучший результат  $J^*$ , являющийся неулучшаемой оценкой сверху качества достижения системой устойчивого режима на  $M_E$ .

На этапе I, где решается задача  $J_2(h^0(\cdot), a) = \min_{h(\cdot) \in U} J_2(h(\cdot), a)$ , определяются динамические свойства искомой оптимальной корректирующей функции. Для фиксированного  $a$  в ограничении  $\|h(\cdot)\| \leq a$  с использованием соответствующих методов решается задача оптимального управления для скорректированной системы. А именно, ищется структура допустимой функции  $h^0(t), t \in [0, T], T > T^*$ , переводящей на интервале  $[0, T]$  скорректированную систему с начальным условием  $x_0 \in B_A$  во множество  $M_E$  с обеспечением (3).

На этапе II решается задача  $J_1(h^*(\cdot), a_{\min}) = \min_{a \in K, h^0 \in U^0} J_1(h^0(\cdot), a)$ , где  $h^0 \in U^0$  – решение этапа I схемы коррекции. Задача минимизации по параметру  $a$  связана с численным тестированием качества модификации  $A_p \mapsto M_E$ . Для этого при различных значениях  $a$  в ограничениях  $|h_j^0(t)| \leq a, j = \overline{1, r}$ , отслеживается эволюция малого возмущения  $\tilde{x}(t)$  вдоль скорректированной траектории. В результате для компонент  $h_j^0(t), j = \overline{1, r}$ , находится значение  $a_{\min}$ , которое обеспечивает переход  $h^0(\cdot) \mapsto h^*(\cdot)$  от корректирующей функции с оптимальной структурой  $h^0$  к оптимальной корректирующей функции  $h^*$ .

**1.2.2. Необходимые условия оптимальности.** Введем для системы (1) функцию Гамильтона–Понтрягина  $H(x, h, \psi) = \psi^T f(x, \hat{p}) - \|h\|^2/2$ . Для того чтобы вектор-функция  $h^0(t) \in U$  и соответствующая траектория  $x^0(t)$  с краевыми усло-

виями  $x_0^0 \in B_A$ ,  $x^0(T) \in M_E$  доставляла минимум функционалу энергии (3), необходимо выполнение условий:

1) существует ненулевая вектор-функции  $\psi(t) \in R^n$ , удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\psi}(t) = -(\partial/\partial x)H(x^0(t), h^0(t), \psi(t));$$

2) функция  $h^0(t) = h^0(x(t), \psi(t))$  удовлетворяет условию максимума

$$H(x^0(t), h^0(t), \psi(t)) = \max_{h \in U} H(x^0(t), h, \psi(t)) \equiv 0; \quad (5)$$

3) в точках  $x_0^0$  и  $x^0(T)$  выполнены условия трансверсальности  $\psi_0 \perp \Omega(x_0^0)$  и  $\psi(T) \perp \Omega(x^0(T))$ , где  $\Omega(x_0^0)$  и  $\Omega(x^0(T))$  – касательные многообразия к множествам  $B_A$  и  $M_E$  в точках  $x_0^0 \in B_A$  и  $x^0(T) \in M_E$ , соответственно.

Условие (5) позволяет покоординатно найти оптимальную структуру вектор-функции  $h^0(t) = (h_1^0(t), h_2^0(t), \dots, h_r^0(t))$  как функции насыщения ( $sat(\cdot)$ ) (доказательство см. в [23, с. 426–427]). Обозначим через  $\tilde{h}_j(t)$  компоненты вектора  $\tilde{h}(t)$ , определяемые из равенств  $(\partial/\partial h_j)H(x^0(t), h, \psi(t)) = 0$ . Тогда

$$h_j^0(t) = sat(\tilde{h}_j(t)) = \begin{cases} \tilde{h}_j(t), & \text{если } |\tilde{h}_j(t)| \leq a, \\ a \cdot sign(\tilde{h}_j(t)), & \text{если } |\tilde{h}_j(t)| > a, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\tilde{h}_j(t) = (\partial/\partial h_j)\psi^T f(x(t), \hat{p}(t))$ ,  $j = \overline{1, r}$ .

Особенность полученной на основании условий принципа максимума вектор функции (6) заключается в том, что она аппроксимирует ограничение по гиперсфере ( $\|h(\cdot)\| \leq a$ ) ограничением по гиперкубу ( $\|h(\cdot)\|_C \leq a$ ):  $|h_j(t)| \leq a$ ,  $j = \overline{1, r}$ . Очевидно, аппроксимация будет тем лучше, чем меньше величина  $a$ . Это означает, что найденному значению  $a_{\min}$ , определяющему переход  $h^0(\cdot) \mapsto h^*(\cdot)$ , будет соответствовать наилучшая (по критерию достижения устойчивости) аппроксимация.

После определения (6) получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = (\partial/\partial \psi)H(x, h(x, \psi), \psi), & x_0 \in B_A, \\ \dot{\psi} = -(\partial/\partial x)H(x, h(x, \psi), \psi), & \psi_0 \perp \Omega(x_0), \end{cases} \quad (7)$$

интегрирование которой с (6) дает энергетически оптимальный процесс

$$C^0 = \{x^0(t), (h^0(t) = h(x^0(t), \psi(t)), a), t \in [0, T]\} \quad \forall a \in (0, 1).$$

Для оптимальности  $C^0$  также нужно удовлетворить условиям трансверсальности на обоих концах траектории. Условие  $\psi_0(0) \perp \Omega(x_0)$  на левом конце нетрудно выполнить, используя соотношение  $\sum_{i=1}^n \psi_{0i} x_{0i} = 0$ . Ниже будет показано, что условие  $\psi(T) \perp \Omega(x^0(T))$  на правом конце выполняется автоматически.

### 1.2.3. Свойства оптимальных корректирующих функций и траекторий.

Определенные выше необходимые условия оптимальности  $h^0(t)$  относятся к этапу I схемы коррекции. Однако для осуществления модификации хаотического аттрактора не менее важным требованием, предъявляемым к  $h^0(t)$  на этапе II коррекции, является наличие у нее особых динамических свойств. Необходимо, чтобы для соответствующих траекторий  $x^0(t)$  функция  $h^0(t)$  обеспечивала их сходимость к  $M_E$  и характер устойчивости множества  $M_E$  определялся значением  $a$  в ограничениях (6).

Рассмотрим систему (7), которая за счет введения сопряженной переменной  $\psi(t)$  расширяет фазовое пространство системы (1). Особенностью системы (7) является то, что она не может быть одновременно устойчивой по переменным  $x$  и  $\psi$ . Траектории хаотических систем сосредоточены в ограниченной области  $\|x(t)\| < D$  фазового пространства. Глобальная ограниченность динамики нелинейных систем известна как устойчивость по Лагранжу и говорит о присутствии аттрактора. Важно, что ограниченность сохраняется при малом возмущении параметров системы. Тогда введение, согласно принципу максимума, сопряженной системы оставляет в силе условие  $\|x(t)\| < D$  и приводит к тому, что норма  $\|\psi(t)\|$  неограниченно возрастает на  $[0, T]$ .

Особенности системы (7) определяют динамические свойства компонент корректирующей функции  $h^0(t)$ . А именно, при произвольном  $a \in (0, 1)$  в ограничениях  $|h_j^0(t)| \leq a, j = \overline{1, r}$ :

- 1) компоненты функции  $h^0(t), t \in [0, T]$ , почти всюду постоянны и равны  $\pm a$ ;
- 2) для траекторий  $x^0(t)$  скорректированной системы выполнена оценка

$$\|f(x^0(t), \hat{p}(h^0(t)))\| \leq \frac{r a^2}{2\|\psi(t)\|} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow T, \quad (8)$$

то есть функция  $h^0(t)$  обладает свойством аттрактивности, обеспечивающим сходимость  $x^0(t)$  к множеству  $M_E$  (обоснование свойств 1-2 вынесено в приложение).

Выражение (8) означает, что при коррекции для траекторий (1) при произвольном  $a \in (0, 1)$  регулярно выполнено  $dist(x^0(t), M_E) < \varepsilon, t \in [0, T]$ , то есть функция  $h^0(t)$  обеспечивает сходимость скорректированных траекторий  $x^0(t)$  к множеству  $M_E$ . Следовательно, выбор некоторой точки из множества  $B_A$  автоматически дает достижение соответствующей траекторией  $x^0(t)$  целевого множества, и для оптимальности процесса  $C^0$  достаточно удовлетворить условию трансверсальности на левом конце траектории.

Таким образом, благодаря свойствам функции  $h^0(t)$ , имеет место достижение целевого множества, проявляющая себя в притяжении траекторий  $x^0(t)$  к  $M_E$ . Однако из этого не следует, что для каждого  $a$  будет обеспечена локальная устойчивость сходящихся к  $M_E$  скорректированных траекторий. Реализующийся характер динамики существенно зависит от величины  $a$  в ограничении  $\|h^0(\cdot)\|_C \leq a$ . Поэтому дополнительно к условиям принципа максимума следует реализовать этап II схемы коррекции и найти значение ограничения  $a_{\min} = \arg \min_{a \in K, h^0 \in U^0} J_1(h, a)$ , а вместе с ним процесс  $C^* = \{x^*(t), (h^*(t), a_{\min}), t \in [0, T]\}$ , обеспечивающий оптимальную динамическую модификацию хаотического аттрактора в ULS, соответствующее устойчивой динамике системы.

В заключение раздела, посвященного формальной стороне задачи коррекции, укажем общий смысл проблемы. Оптимальность функции  $h^*(t), t \in [0, T]$ , определенная решением задачи (4), обеспечивает ключевое для области управления хаосом требование малости воздействия на параметры системы. Собственно значение  $a_{\min}$  дает оценку сверху границы, ниже которой условие устойчивости (1) не выполняется, а значит, имеет место хаотическая динамика. Поскольку  $|h_j^*(t)| \leq a_{\min}, j = \overline{1, r}$ , то общее для каждого скорректированного параметра  $\hat{p}_j^*(t) = p_j + p_j h_j^*(t)$  значение  $a_{\min}$  определяет интервал параметрического возмущения компонент  $r$ -мерной функ-

ции  $h^0(\cdot) \in U^0$  и позволяет говорить об  $a_{\min}$  как о *минимальном радиусе коррекции* системы, а о задаче (4) – как задаче его определения. Добавим, что, с физической точки зрения, задача (4) означает минимизацию максимально возможной амплитуды стабилизирующих систему управлений.

## 2. Коррекция многопараметрической колебательной системы

**2.1. Модель.** В данной работе объектом коррекции является периодически возмущаемый осциллятор ван дер Поля–Дуффинга

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + (d/dx)V(x) = f \cos(\omega t), \quad (9)$$

где  $\lambda > 0$  – управляющий параметр;  $f$  и  $\omega$  – амплитуда и частота внешнего периодического возмущения;  $V(x)$  – потенциальная функция, заданная в виде  $V(x) = \alpha x^2/2 + \beta x^4/4$ . Уравнение (9) является нелинейным обобщением двух эталонных осцилляторов и способно демонстрировать разнообразные режимы, включая хаотическую динамику. Наш интерес к модели продиктован ее многопараметричностью. Она позволяет исследовать возможности метода оптимальной многопараметрической коррекции как способа подавления хаотической динамики [25], дополняя полученные ранее результаты для осциллятора Дуффинга–Холмса [26]. В данной работе с более широкой позиции оценивается его возможности как средства многопараметрического анализа, способного углубить понимание особенностей оптимальных переходных процессов, ведущих к стабилизации хаотического поведения и присущих автоколебательным системам различной природы.

Реализация методики коррекции начинается с выделения параметров системы, допускающих целенаправленное воздействие. Хаотизация динамики (9) вызывается внешним периодическим возмущением  $f \cos(\omega t)$ , корректированию доступны только собственные параметры осциллятора  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\lambda$ . Тогда в эквивалентной уравнению (9) форме скорректированная система запишется в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\hat{\alpha}x_1 - \hat{\beta}x_1^3 + \hat{\lambda}(1 - x_1^2)x_2 + f \cos(\theta), \quad \dot{\theta} = \omega, \quad (10)$$

где  $\hat{\alpha}(t) = \alpha(1 + h_1(t))$ ,  $\hat{\beta}(t) = \beta(1 + h_2(t))$ ,  $\hat{\lambda}(t) = \lambda(1 + h_3(t))$ .

Конкретный представитель семейства осцилляторов (9) определяется ограничениями на значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  потенциала невозмущенной ( $f = h \equiv 0$ ) системы. Согласно условию  $(d/dx)V(x) = 0$  система имеет три состояния равновесия:  $x_{(1)}^e = (0, 0)$  и  $x_{(2,3)}^e = (\pm\sqrt{-\alpha/\beta}, 0)$ , то есть для (10) множество  $M_E$  содержит окрестности трех точек, определяемых условием локального экстремума потенциальной функции  $V(x)$ . Нами будут изучены две наиболее интересных физических ситуации: (i) потенциал с одной ямой ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ) и (ii) потенциал с двумя ямами ( $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ ).

В случае (i) собственные значения параметров, дающих хаотическое поведение, будут выбраны для  $\alpha \gg \beta > 0$ , то есть для очень малой величины параметра фазовой нелинейности  $\beta$ . Данная ситуация подробно изучена в работе [27], где показано, что системе в основном характерны два пути перехода к хаосу: каскад бифуркаций удвоения периода и перемежаемость, связанная с седло-узловыми бифуркациями. Типичное хаотическое состояние со значениями параметров  $\alpha = 1$ ,



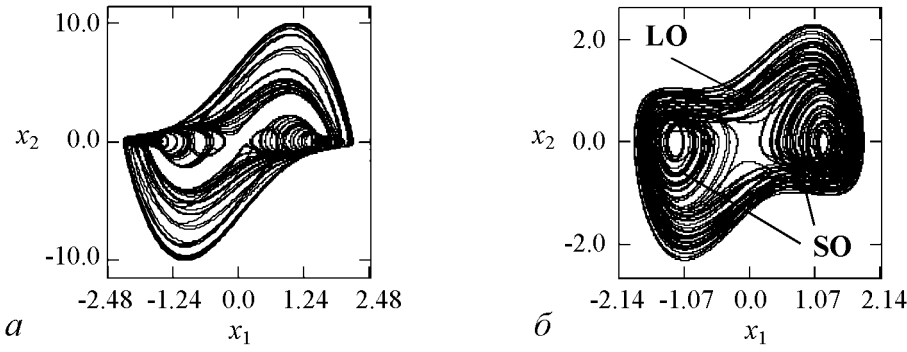


Рис. 1. Хаотическая динамика осциллятора (1):  $a$  – потенциал с одной ямой;  $b$  – потенциал с двумя ямами

$\beta = 0.00025$ ,  $\lambda = f = 5$ ,  $\omega = 2.4665$ , которое в дальнейшем будет считаться исходным при коррекции параметров системы, представлено на рис. 1,  $a$ . Единственным типом траекторий, формирующих структуру хаотического аттрактора, являются орбиты, охватывающие все три состояния равновесия системы.

Случай (ii) будет исследован для  $|\alpha| > \beta$ , когда хаотический аттрактор содержит два типа траекторий (неустойчивых орбит), которые в невозмущенном случае замкнуты и разделены сепаратрисой. Рис. 1,  $b$  иллюстрирует исходное хаотическое состояние системы, возникающее при значениях параметров  $\alpha = -1.44$ ,  $\beta = \mu = 1$ ,  $f = 0.45$ ,  $\omega = 1.2$ . Как видно, первый тип движений (L-орбиты, LO) окружает все три состояния равновесия. Второй тип (S-орбиты, SO) происходит в окрестности точек  $x_{(2,3)}^e$  и зависит от начальных условий.

**2.2. Реализация схемы коррекции.** Для обоих случаев вида потенциальной функции осциллятора задача коррекции формулируется одинаково: воздействием на систему (10) корректирующей функцией  $h(t) = (h_1(t), h_2(t), h_3(t))$  необходимо преобразовать динамику системы из хаотической в регулярную, чтобы

$$\max_{0 \leq t \leq T} \max_{1 \leq i \leq 3} |h_j^0(t)| \rightarrow \min_{a \in K, h^0 \in U^0} .$$

Согласно двухэтапной схеме коррекции, последовательность действий следующая. Сначала ищется оптимальная структура корректирующей вектор-функции  $h^0 \in U$ , которая на этапе I схемы (внутренняя задача) должна обеспечить сходимость скорректированных траекторий к целевому множеству  $M_E$  с условием  $\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^3 h_j^2(t) dt \rightarrow \min_{h \in U}$ . Для этого, на основании (10), записывается функция Гамильтона–Понтрягина

$$H(x, h, \psi) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-\hat{\alpha} x_1 - \hat{\beta} x_1^3 + \hat{\lambda} (1 - x_1^2) x_2 + f \cos(\theta)) + \psi_3 \omega - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 h_j^2$$

и применяются необходимые условия оптимальности (п.1.2.2). А именно, согласно условию  $\psi_i = -(\partial/\partial x_i)H(x, h, \psi)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , к (10) добавляется система сопряженных

переменных

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2(\hat{\alpha} + 3\hat{\beta}x_1^2 + 2\hat{\lambda}x_1x_2), \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - \psi_2\hat{\lambda}(1 - x_1^2), \quad \dot{\psi}_3 = 0, \quad (11)$$

для которой на основании связи  $\sum_{i=1}^3 \psi_{0i}x_{0i} = 0$  для произвольного  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})^T \in B_A$  системы (10) производится выбор начального вектора для сопряженной системы (в результатах ниже использован вариант  $\psi_0 = (-x_{02}, x_{01}, 0)^T$ ). Далее находятся удовлетворяющие условию максимума (5) однозначно выраженные через состояние системы  $x(t)$  и сопряженную переменную  $\psi(t)$  компоненты корректирующей функции

$$h_j^0(t) = \begin{cases} \tilde{h}_j(t), & \text{если } |\tilde{h}_j(t)| \leq a, \\ a \cdot \text{sign}(\tilde{h}_j(t)), & \text{если } |\tilde{h}_j(t)| > a, \end{cases} \quad (12)$$

для которых

$$\tilde{h}_1 = -\alpha x_1 \psi_2, \quad \tilde{h}_2 = -\beta x_1^3 \psi_2, \quad \tilde{h}_3 = \lambda x_2 \psi_2 (1 - x_1^2)$$

есть решения уравнений  $(\partial/\partial h_j)H(x, h, \psi) = 0$ ,  $j = \overline{1, 3}$ .

Полученная  $2n$ -система дифференциальных уравнений (10)–(11) с условием (12) и начальным условием  $(x_0, \psi_0)$  образуют задачу Коши. Вместе с функцией  $h^0(t) = (\text{sat}(\tilde{h}_1(x^0(t), \psi(t))), \dots, \text{sat}(\tilde{h}_r(x^0(t), \psi(t))))$  она дает оптимальный процесс  $C^0 = \{x^0(t), (h^0(t), a), t \in [0, T]\}$ , где  $T$  – время, много большее времени переходного процесса  $T^*$ , на котором определено решение задачи Коши. Исследование его устойчивости производится на этапе II схемы коррекции, где необходимо численным тестированием качества коррекции минимизировать величину ограничения  $a$ .

Процедура тестирования заключается в задании двух близких начальных условий  $x_0^0 = (x_{01}^0, x_{02}^0, x_{03}^0)^T$ ,  $\bar{x}_0^0 = (\bar{x}_{01}^0 + \varepsilon, \bar{x}_{02}^0 + \varepsilon, \bar{x}_{03}^0 + \varepsilon)^T$  (где, например,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ), вычислении соответствующих  $\psi_0, \bar{\psi}_0$  и интегрировании системы (10)–(11) с (12). Полученные процессы  $C^0$  и  $\bar{C}^0$  позволяют оценить качество модификации хаотического аттрактора  $A_P$  по эволюции во времени малого возмущения  $\tilde{x}^0(t)$ ,  $\tilde{x}_0^0 = \bar{x}_0^0 - x_0^0$  вдоль опорной скорректированной траектории  $x^0(t)$ . Для этого в ходе интегрирования с выбранным значением  $a_0 < 1$  достаточно [28, 29] приближенным вычислением величины  $\Lambda_1(a_0) = T^{-1} \ln(\varepsilon^{-1} \|\bar{x}^0(t) - x^0(t)\|)$  отследить характер устойчивости режима скорректированной системы по динамике  $\Lambda_1(a_0)$  на интервале  $[0, T]$ . Если условие  $\Lambda_1(a_0) < 0$  при  $t \rightarrow T$  окажется выполненным, то следует повторить вычисления  $\Lambda_1$  для последовательности  $a_l < \dots < a_1 < a_0$  и выбрать  $a_{\min} = \min_{a \in K} \{a_m\}_{m=\overline{0, l}}$ . В результате среди ограничений на функцию  $\|h^0(\cdot)\|_C \leq a$  находится искомая граница  $a_{\min}$ , ниже которой условие  $\Lambda_1(a_{\min}) < 0$  уже не выполняется.

### 2.3. Результаты

**2.3.1. Потенциал с одной ямой.** Данный случай отличает особенная чувствительность динамики осциллятора к малой вариации параметров. Уже при ограничении  $\|h^*(\cdot)\|_C \leq a_{\min} = 0.0015$  корректирование всех трех параметров вызывает

короткий переходной процесс, в результате которого происходит требуемая модификация хаотического аттрактора и рождение устойчивого ULS. Как видно на рис. 2, ULS представляет собой устойчивый цикл. Его локализация определяется структурой траекторий на хаотическом аттракторе и отличается от формы предельного цикла невозмущенной системы ( $f = h \equiv 0$ ). При уменьшении величины ограничения на корректирующее воздействие ниже  $a_{\min}$  наблюдается переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Особенности ULS и бифуркационный механизм перехода от оптимального регулярного режима к хаосу сохраняются при уменьшении числа корректируемых параметров. Например, для корректирующей функции  $h^*(t) = (h_1^*(t), 0, 0)$  минимальное ограничение, обеспечивающее существование аналогичного ULS, составляет  $a_{\min} = 0.004$ .

**2.3.2. Потенциал с двумя ямами.** Результаты коррекции в этом случае определяются одновременным сосуществованием в фазовом пространстве нескольких возможных установившихся режимов. Причиной мультистабильности являются особенности потенциала, который симметричен и имеет два локальных минимума. При коррекции мультистабильность сохраняется и проявляется в чувствительной зависимости локализации ULS от выбранного начального условия. В результате установившимся режимом скорректированной хаотической системы оказывается устойчивый цикл, локализованный либо в окрестности состояния  $x_{(2)}^e = \sqrt{-\alpha/\beta} = 1.2$ , либо  $x_{(3)}^e = -\sqrt{-\alpha/\beta} = -1.2$ . Пример стабилизации движений в окрестности одной из потенциальных ям ( $x_{(2)}^e$ ), полученный при корректировании функцией  $h^*(t) = (h_1^*(t), h_2^*(t), h_3^*(t))$ , приведен на рис. 3.

Данному случаю характерна большая длительность переходного процесса (см. рис. 3 и рис. 4). Его основную часть занимает движение по L-орбите, ограничивающей область, занимаемую прежде хаотическим аттрактором, и имеющей максимальный период. Окончанием переходного процесса является реализация перехода  $LO \rightarrow SO$ . Он сопровождается потерей устойчивости L-орбиты и переходом к ти-

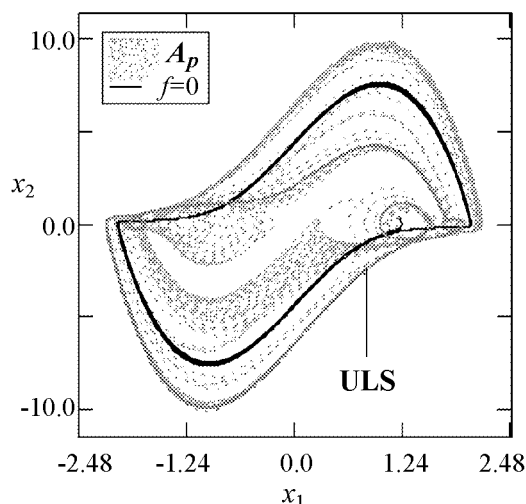


Рис. 2. Результат коррекции (10) с ограничением  $a_{\min} = 0.0015$  (потенциал с одной ямой)

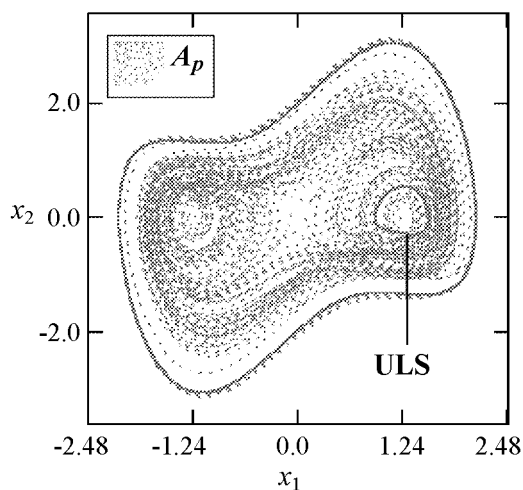


Рис. 3. Результат коррекции (10) с ограничением  $a_{\min} = 0.05$  (потенциал с двумя ямами)

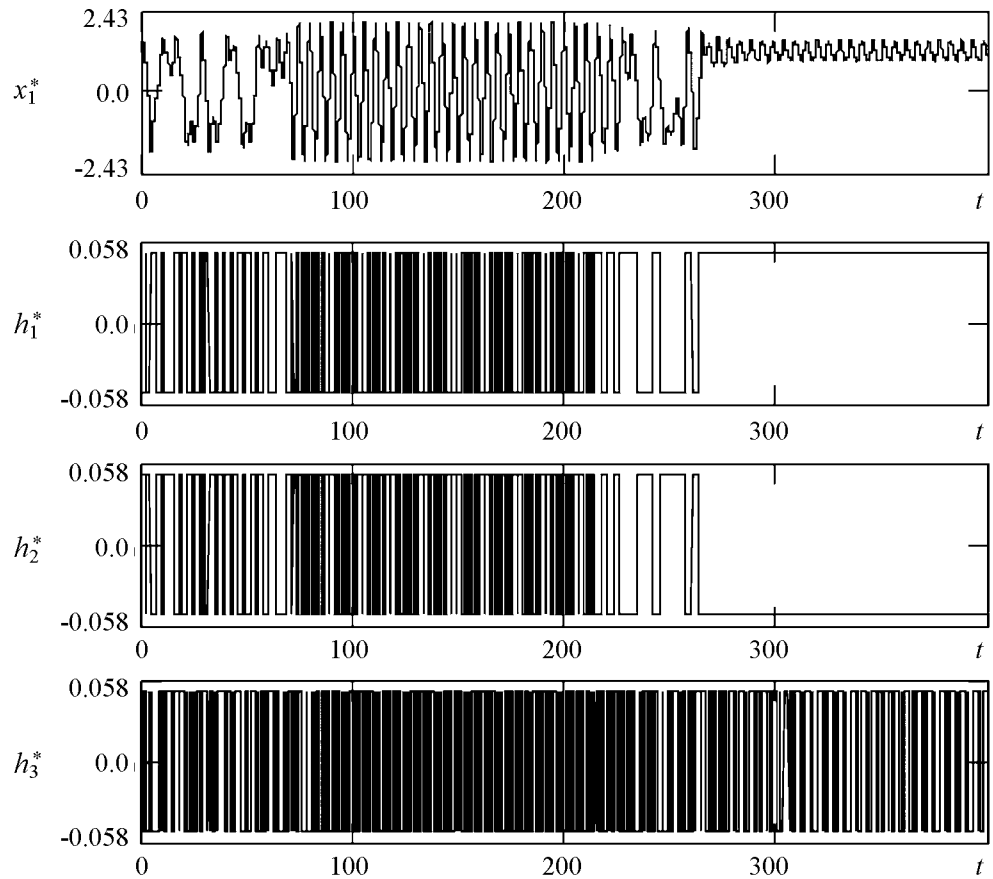


Рис. 4. Временная реализация скорректированного режима (10) (потенциал с двумя ямами),  $a_{\min} = 0.05$

пу движений по S-орбите. Реализующийся при этом цикл устойчив и является ULS системы. Таким образом, оптимальный переходной процесс системы к ULS можно выразить следующей схемой: хаос→LO→хаос→SO.

Обращает на себя внимание эффект насыщения корректирующих функций  $h_1^*(t)$ ,  $h_2^*(t)$  на границе ограничения (см. рис. 4), возникающий после выхода траекторий на ULS и являющийся следствием свойств оптимальных корректирующих функций (см. п. 1.2.3). Момент насыщения в точности совпадает с окончанием переходного процесса и может использоваться для оценки времени выхода системы на устойчивый режим. Характер насыщения ( $h_1^*(t)$  на верхней границе ограничения,  $h_2^*(t)$  – на нижней) сохраняется и не зависит от того, относительно какой из потенциальных ям произошла стабилизация колебаний осциллятора.

Картина потери устойчивости ULS отличается от описанной в п. 2.3.1. При выборе ограничения меньше  $a_{\min} = 0.05$  происходит увеличение длительности переходного процесса, который приобретает все более нерегулярный характер. При этом уменьшается длительность фазы движения по L-орбите. При дальнейшем уменьшении ограничения предельным множеством системы вновь становится хаотический аттрактор. Отметим, что указанные особенности сохраняются при меньшем числе корректируемых параметров (например, для  $h^*(t) = (h_1^*(t), 0, 0)$ ,  $a_{\min} = 0.07$ ).

## Приложение

Действительно, функция  $h^0(t)$  с компонентами вида (6) аппроксимирует евклидову норму  $\|h^0(\cdot)\| \leq a$  кубической  $\|h^0(\cdot)\|_C \leq a$  так, что компоненты  $h_j^0(t) = \text{sat}(\tilde{h}_j(t))$ ,  $j = \overline{1, r}$ , становятся независимыми. А именно, если в некоторый момент времени  $\theta$  выполнено  $h_1^0(\theta) = a$ , то остальные  $r - 1$  компонент  $h_2^0(\theta), h_3^0(\theta), \dots, h_r^0(\theta)$  могут иметь любые совместимые с ограничением  $\|h^0(\cdot)\|_C \leq a$  значения. В силу возрастания  $\|\psi(t)\|$  на  $[0, T]$ , где определено решение системы, существует конечное число моментов переключения  $0 = \tau_0 < \tau_1 \dots < \tau_s = T$ , при которых  $|\tilde{h}_j(t)| > a$ ,  $j = \overline{1, r}$ . Тогда, согласно (6), имеем  $h_j^0(t) = a \cdot \text{sign}(\tilde{h}_j(t)) = \pm a$ .

После подстановки тройки  $(x^0(t), h^0(t), \psi(t))$  в функцию  $H$ , согласно (5), получим равенство

$$H(x^0(t), h^0(t), \psi(t)) = \psi^T(t) f(x^0(t), \hat{p}(h^0(t))) - \|h^0(t)\|^2/2 \equiv 0,$$

где в силу (6) корректирующая функция  $h^0(t)$  оказывается ограниченной для всех  $t \in [0, T]$ . Тогда

$$\psi^T(t) f(x^0(t), \hat{p}(h^0(t))) = \frac{1}{2} \|h^0(t)\|^2 \leq \frac{\bar{a}^2}{2},$$

где верхняя оценка  $\bar{a} = \|h^0(t)\| = \sqrt{r} a$  взята с учетом того, что соотношения (6) аппроксимируют  $\|h^0(\cdot)\| \leq a$  ограничением  $\|h^0(\cdot)\|_C \leq a$ . Так как  $\psi(t) \neq 0$  (иначе  $h^0(t) \equiv 0$  и требование обеспечить условие  $a \in K$  невыполнимо), то  $\dot{x}^0(t) = f(x^0(t), p(h^0(t))) \leq \frac{r a^2}{2\psi(t)}$ . Отсюда при неограниченном возрастании  $\|\psi(t)\|$  получаем требуемую оценку (8).

## Заключение

На основе формализации понятия модификации предельного множества как цели воздействия комбинированием методов теории оптимального управления с численным тестированием качества подавления хаоса в статье развит метод оптимальной коррекции параметров системы. Выяснение роли сопряженной системы для хаотических систем с расширенным фазовым пространством позволило найти оптимальные корректирующие функции, которые благодаря свойству аттрактивности обеспечивают оптимальную динамическую модификацию хаотического аттрактора в уникальное предельное множество, соответствующее устойчивой динамике системы.

Являясь достаточно эффективным способом подавления хаоса, методика динамической коррекции пространства параметров одновременно позволяет сфокусировать внимание на эволюции системы к устойчивому состоянию. Корректирование системы предоставляет обобщенную информацию о свойствах объекта в виде реакции системы на суммарное параметрическое воздействие. При этом оказывается возможным сравнение и оценка эффективности воздействия на конкретный параметр. В практических приложениях, когда управлению доступно ограниченное число параметров, возмущение только одного параметра становится более обоснованным, а его результаты – предсказуемыми.

На примере коррекции обобщенной автоколебательной модели нелинейного осциллятора показано, что метод дает возможность идентифицировать переходной процесс, который приводит к устойчивости системы, требуя наименьшей интенсивности корректирующего воздействия. Описан ранее отмеченный при коррекции системы Лоренца [24] эффект насыщения корректирующих функций, возникновение которого вызывается стабилизацией фазовых траекторий в области локального минимума энергии скорректированной системы. Методика многопараметрической коррекции применима к широкому кругу нелинейных колебательных систем и открывает новый путь к исследованию особенностей оптимальных переходных процессов в хаотических системах.

*Работа поддержана Федеральным агентством по образованию РФ в рамках подпрограммы I «Фундаментальные исследования» ведомственной научной программы «Развитие научного потенциала высшей школы». Авторы благодарят профессора В.А. Горелика (Вычислительный центр РАН) за полезные обсуждения.*

### **Библиографический список**

1. *Shinbrot T., Grebogi C., Ott E., and Yorke J.A.* Using small perturbations to control chaos // *Nature*. 1993. Vol. 882. P. 300.
2. *Fradkov A.L., Evans R.J., Andrievsky B.R.* Control of chaos: methods and applications in mechanics // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2006. Vol. 364. P. 2279.
3. *Chen G., Moiola J.L., Wang H.O.* Bifurcation control: Theories, methods, and applications // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 3. P. 511.
4. *Krener A., Kang W., Chang D.E.* Control bifurcations // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 2004. Vol. 49, № 8. P. 1231.
5. *Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Savin A.V., Sataev I.R., Sedova J.V., Milovanov S.V.* Multi-parameter picture of transition to chaos // *Izvestija Vuzov. Applied Nonlinear Dynamics*. 2002. Vol. 10, № 3. P. 80.
6. *Seyranian A.P., Mailybaev A.A.* Multiparameter stability theory with mechanical applications. World Scientific, New Jersey, London, 2003.
7. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D*. 1997. Vol. 109. P. 91.
8. *Kuznetsov S.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R.* Multiparameter critical situations, universality and scaling in two-dimensional period-doubling maps // *J. of Statistical Physics*. 2005. Vol. 121, № 5–6. P. 697.
9. *Warncke J., Bauer M., Martienssen W.* Multiparameter control of high-dimensional chaotic systems // *Europhys. Lett*. 1994. Vol. 25, № 5. P. 323.
10. *Barreto E., Grebogi C.* Multiparameter control of chaos // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 54, № 4. P. 3553.
11. *Löcher M., Hunt E.R.* Control of high-dimensional chaos in systems with symmetry // *Phys. Rev. Lett*. 1997. Vol. 79. P. 63.
12. *Paula A.S., Savi M.A.* A multiparameter chaos control method based on OGY approach // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008 (in press).
13. *Горелик В.А., Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* Оптимальная параметрическая

- коррекция динамики систем с хаотическим аттрактором // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2006. С. 34.
14. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика: Принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. 208 с.
  15. *Ott E., Grebogi C., Yorke J.A.* Controlling chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 1196.
  16. *Chacon R.* Relative effectiveness of weak periodic excitations in suppressing homoclinic/heteroclinic chaos // *Eur. Phys. J. B.* 2002. Vol. 30. P. 207.
  17. *Lenci S., Rega G.* Optimal control of nonregular dynamics in a Duffing oscillator // *Nonlinear Dynamics.* 2003. Vol. 33, № 1. P. 71.
  18. *Loskutov A.Y.* Parametric perturbation and non-feedback controlling chaotic motion // *Discrete and continuous dynamical systems-Series B.* 2006. Vol. 6, № 5. P. 1157.
  19. *Cao H., Chen G.* A simplified optimal control method for homoclinic bifurcations // *Nonlinear Dynamics.* 2005. Vol. 42, № 1. P. 43.
  20. *Dzhanoev A.R., Loskutov A., Cao H., Sanjuán M.A.F.* A new mechanism of the chaos suppression // *Discrete and Continuous Dynamical Systems B.* 2007. Vol. 7, № 2. P. 275.
  21. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
  22. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории и оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
  23. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764с.
  24. *Talagaev Y.V., Tarakanov A.F.* Modification of chaotic systems limit sets by multiparametrical optimal correction // *Proc. 3rd Int. IEEE Scientific Conference on Physics and Control (PhysCon 2007), September 3rd-7th, 2007. University of Potsdam, Germany. (Full text in Open Library IPACS: <http://lib.physcon.ru/>).*
  25. *Talagaev Y.V., Tarakanov A.F.* Multiparametrical optimal correction for chaos suppression in a family of Duffing–van der Pol oscillators // *Proc. of 6th EUROMECH. Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008), June 30–July 4, 2008, Saint Petersburg, Russia.*
  26. *Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* Оптимальная параметрическая стабилизация хаотических колебательных систем // *Системы управления и информационные технологии.* 2007. Вып. 2(28). С. 67.
  27. *Sanjuán M.A.F.* Symmetry-restoring crises, period-adding and chaotic transitions in the cubic van der Pol oscillator // *J. of Sound and Vibration.* 1996. Vol. 193, № 4. P. 752.
  28. *Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом. Методы и приложения. Часть 1. Методы // *Автоматика и телемеханика.* 2003. № 5. С. 3.
  29. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит, 2001. 296 с.

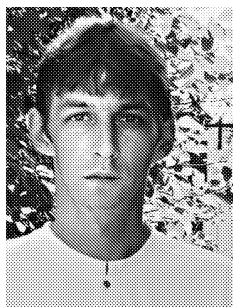
*Балашовский филиал Саратовского  
государственного университета  
Борисоглебский государственный  
педагогический институт*

*Поступила в редакцию 24.04.2008  
После доработки 16.07.2008*

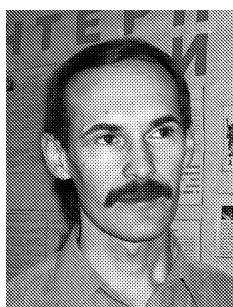
## OPTIMAL CHAOS SUPPRESSION AND TRANSITION PROCESSES IN CORRECTED MULTIPARAMETRICAL OSCILLATORY SYSTEMS

*Yu.V. Talagaev, A.F. Tarakanov*

In the work we present a two-stage scheme of optimal correction of the dynamic system's parameters space aimed at the transformation of the system's chaotic regime into the regular one through minimal intensity of the perturbation. The offered technique is based on combination of the optimal control theory methods with numerical tests of chaos suppression quality. It is theoretically proved that optimal corrective functions found in the course of scheme application allow putting into practice the process of modification of chaotic attractor into the unique stable limit set corresponding to the transition of the system to the stable dynamics. Numerical experiment performed on a generalized model of an auto-oscillatory system showed that the offered correction technique is effective in multiparametrical analysis of situations that arise in optimal chaos suppression.



*Талагаев Юрий Викторович* – родился в Балашове (1975). Окончил физико-математический факультет Балашовского государственного педагогического института (1997). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата педагогических наук в СГУ (2000) в области приложений системно-синергетического подхода к современным образовательным технологиям. Доцент кафедры физики Балашовского филиала Саратовского государственного университета (с 2004). Область научных интересов: моделирование и оптимизация сложных систем, управление хаосом, многопараметрическая коррекция динамических систем. Автор 48 научных статей в отечественной и зарубежной печати. Принял участие в нескольких международных конференциях. Член Международного общества физики и управления (IPACS, 2007).  
E-mail: shangyi@narod.ru



*Тараканов Андрей Федорович* – родился в Рыбинске Ярославской области (1959). Окончил физико-математический факультет Борисоглебского государственного педагогического института (1982) Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1989) и доктора физико-математических наук (1996) в Вычислительном центре АН в области управления динамическими системами в условиях неопределенности, профессор (с 2000). Профессор кафедры прикладной математики и информатики Борисоглебского государственного педагогического института (с 2003). Научные интересы связаны с математической теорией оптимального управления в условиях неопределенности, оптимальной коррекцией динамических систем с неустойчивой и хаотической динамикой, теорией коалиционных и иерархических игр. Автор более 80 научных работ. Состоит в Обществе прикладной математики и механики (ГАММ), член Международного общества физики и управления (IPACS), член-корреспондент Российской Академии Естествознания. Осуществляет подготовку аспирантов по специальности «Теоретические основы информатики».  
E-mail: aft777@rambler.ru