



ВОЛНЫ СИНХРОНИЗАЦИИ В АНСАМБЛЯХ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А.К. Крюков, О.И. Канаков, Г.В. Осипов

Изучается синхронизация в ансамблях локально диссипативно и консервативно связанных слабонелинейных осцилляторов ван дер Поля. Показано, что в цепочке из N элементов возможно сосуществование не менее 2^{N-1} устойчивых режимов глобальной синхронизации. Рассмотрены особенности кластерной синхронизации. Показано сосуществование множества распространяющихся фронтов переключения режимов синхронизации, свободно проходящих друг сквозь друга и отражающихся от границ среды. Описан обнаруженный в численных экспериментах режим, при котором происходит чередование синфазной и противофазной синхронизации.

Ключевые слова: Синхронизация, мультистабильность, численные методы, моделирование, комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау, волны синхронизации.

Введение

Системы связанных нелинейных осцилляторов встречаются в различных областях науки (биологии, нейрофизиологии, физике и химии) и техники (электронике, радиотехнике, системах передачи данных). Один из ключевых коллективных эффектов, возникающих в таких системах – это эффект синхронизации, заключающийся в установлении общих ритмов (частот) колебаний всех (глобальная синхронизация) или части (кластерная синхронизация) элементов. Глобальная и кластерная синхронизация наблюдалась в ансамблях как периодических, так и хаотических осцилляторов в предположении различных конфигураций связей [1–3]. Наиболее полно изучены ансамбли локально связанных периодических осцилляторов [3–5]. В нелинейной динамике существует несколько парадигматических моделей, чаще всего используемых для демонстрации тех или иных эффектов. Одна из таких моделей – осциллятор ван дер Поля. Это хорошо изученная система, которая применяется для моделирования широкого круга явлений и процессов [6]. В цепочке диссипативно связанных неидентичных осцилляторов ван дер Поля с ростом диссипативной связи происходит переход от полностью несинхронного поведения к кластерной синхронизации и далее к глобальной синхронизации [5].

В настоящей работе изучается синхронизация в цепочках локально связанных неидентичных осцилляторов ван дер Поля в случае двух типов связи – *диссипативной и консервативной*.

1. Модель

Рассмотрим модель в виде цепочки линейно связанных слабонелинейных элементов ван дер Поля со слабо различающимися индивидуальными частотами

$$\begin{cases} \dot{x}_j = y_j, \\ \dot{y}_j = \mu(1 - x_j^2)y_j - (1 + \mu\Omega_j)x_j + \\ \quad + \mu\alpha(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) + \mu\beta(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}), \end{cases} \quad (1)$$

где $j = 1, \dots, N$, N – количество элементов в цепочке; Ω_j – параметр, определяющий частоту j -го элемента; $\mu \ll 1$; α и β – коэффициенты консервативной и диссипативной составляющих связи, соответственно. В работе анализируется коллективная динамика системы (1):

а) при граничных условиях типа «свободные концы»

$$\begin{cases} x_0(t) = x_1(t), \\ x_{N+1}(t) = x_N(t), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y_0(t) = y_1(t), \\ y_{N+1}(t) = y_N(t); \end{cases} \quad (3)$$

б) при периодических граничных условиях

$$\begin{cases} x_{j+N}(t) = x_j(t), \\ y_{j+N}(t) = y_j(t). \end{cases} \quad (4)$$

Применяя к (1) метод ван дер Поля, включающий переход к медленно меняющимся комплексным амплитудам z_j

$$x_j = z_j e^{it} + z_j^* e^{-it}, \quad y_j = iz_j e^{it} - iz_j^* e^{-it},$$

усреднение по периоду быстрых колебаний и переход к медленному времени $\tau = \mu t/2$, получим систему уравнений для комплексных амплитуд z_j , представляющую собой дискретный аналог комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау с пространственно неоднородным распределением индивидуальных частот [6]

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= [1 + i\Omega_j - |z_j|^2] z_j + (\beta - i\alpha)(z_{j+1} - 2z_j + z_{j-1}), \\ j &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

Комплексное дискретное уравнение Гинзбурга–Ландау (5) описывает динамику взаимодействующих автоколебательных элементов вблизи бифуркации Андронова–Хопфа и применяется для моделирования явлений из различных областей физики: сверхпроводимость, сверхтекучесть, фазовые переходы, конденсация Бозе–Эйнштейна, физика жидких кристаллов, нелинейные волны и потоки в теории поля [6].

Переходя в (5) от комплексных амплитуд к действительным амплитудам R_j и фазам φ_j

$$z_j = \frac{1}{2} R_j e^{i\varphi_j}, \quad (6)$$

определим режим глобальной синхронизации как периодическое решение с частотой Ω_s – частотой синхронизации. Для этого решения все фазы φ_j растут во времени линейно с одинаковым коэффициентом Ω_s , то есть

$$\dot{\varphi}_j = \Omega_s = \text{const}. \quad (7)$$

Заметим, что соответствующая частота синхронных колебаний в исходной системе (1) $\omega_s = 1 + \mu\Omega_s/2$.

Ограничимся рассмотрением частного случая распределения индивидуальных частот вдоль цепочки по линейному закону

$$\Omega_j = \Delta(j - 1), \quad (8)$$

где Δ – частотная расстройка между соседними элементами. Без ограничения общности будем считать $\Delta > 0$.

Известно [5], что в случае чисто диссипативной связи ($\alpha = 0$) система (5) с линейным распределением индивидуальных частот допускает существование не более одного устойчивого режима глобальной синхронизации. Как показано далее, введение консервативной составляющей связи $\alpha \neq 0$ изменяет параметры этого синхронного режима, а также может привести к появлению мультистабильности синхронных режимов.

2. Два связанных элемента

Рассмотрим случай $N = 2$ в (5). Положим $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = \Delta$. Из (5) и (6) тогда следует замкнутая система уравнений для амплитуд R_1 , R_2 и разности фаз $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = R_1(1 - \beta - R_1^2/4) + R_2(-\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi), \\ \dot{R}_2 = R_2(1 - \beta - R_2^2/4) + R_1(\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi), \\ \dot{\varphi} = -\Delta - \alpha \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_1}{R_2} \right) \cos \varphi - \beta \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2} \right) \sin \varphi. \end{cases} \quad (9)$$

Синхронным режимам соответствуют устойчивые ненулевые состояния равновесия $(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{\varphi})$ этой системы.

В [7] было проведено детальное исследование синхронных режимов для двух связанных слабонелинейных осцилляторов на основе анализа уравнений вида (9)¹. Были найдены области параметров, соответствующие областям бистабильности и мультистабильности синхронных режимов, в частности, выделены режимы синфазной ($\bar{\varphi} \approx 0$) и противофазной ($\bar{\varphi} \approx \pi$) синхронизации. Также рассматривался эффект

¹Заметим, что определение фаз, принятое в [7], имеет противоположный знак по сравнению с (6).

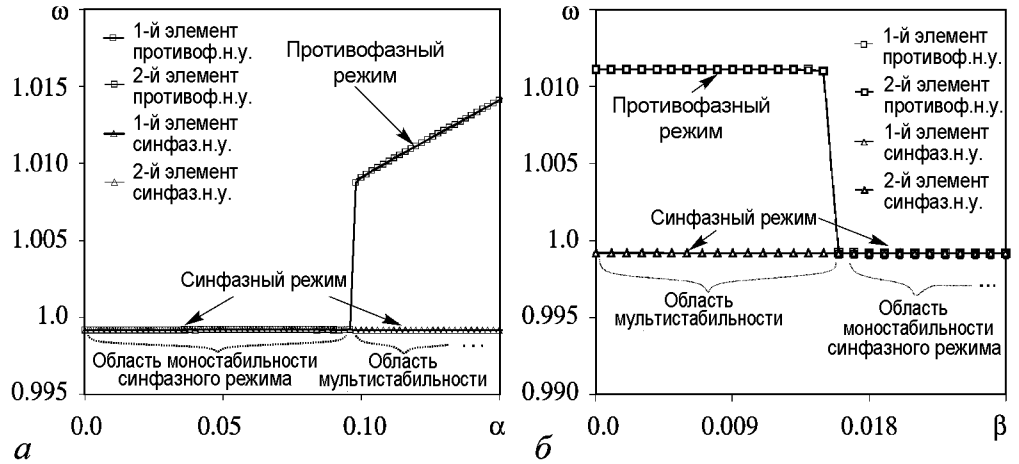


Рис. 1. Зависимость частот элементов от α при $\beta = 0.01$ (а) и от β при $\alpha = 0.12$ (б); $\mu = 0.1$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-3}$

вымирания колебаний осцилляторов, проявляющийся при сложной связи. Была получена оценка частоты синхронизации

$$\Omega_s \approx \frac{\Delta}{2} + \alpha(1 - \cos \bar{\varphi}) \quad (10)$$

с точностью до слагаемых более высокого порядка по α, β [7]. В частности, в синфазном режиме частота синхронизации

$$\Omega_s \approx \frac{\Delta}{2}, \quad (11)$$

в противофазном режиме

$$\Omega_s \approx \frac{\Delta}{2} + 2\alpha. \quad (12)$$

Таким образом, в этом приближении частота синфазной синхронизации не зависит от значений параметров связи и устанавливается на средней частоте из индивидуальных частот элементов. Частота противофазной синхронизации выше, чем частота синфазной, и возрастает с увеличением консервативной составляющей коэффициента связи.

Компьютерные эксперименты с двумя связанными слабонелинейными элементами ван дер Поля показали, что для малых α при фиксированном β изначально наблюдается синфазный режим, с увеличением α , после некоторого порогового значения α реализуется мультистабильность синфазного и противофазного режима (рис. 1, а). То есть при наличии только диссипативной связи β (α мало) мультистабильности нет. При фиксированном α и малых значениях β в системе двух элементов наблюдается мультистабильность синхронных режимов (рис. 1, б). С увеличением диссипативной составляющей связи в системе реализуется синфазный режим. Заметим, что частота синфазного режима не зависит от значений параметров связи, а частота противофазного режима выше частоты синфазного, не зависит от диссипативной связи и линейно растет с увеличением консервативной связи.

3. Синфазная синхронизация в цепочке: теория

Исследуем режим глобальной синфазной синхронизации в уравнении Гинзбурга–Ландау (5) с граничными условиями «свободные концы», ограничиваясь фазовым приближением. Рассматривается линейное распределение индивидуальных частот элементов (8). Фазовое приближение возможно в пределе малой консервативной составляющей связи $|\alpha| \ll |\beta|$ на основе известного решения для случая чисто диссипативной связи [5].

Заменяя в уравнении (5) комплексные амплитуды на действительные амплитуды и фазы в соответствии с (6) и переходя в полученных уравнениях к фазовому приближению (пренебрегая динамикой амплитуд и полагая равными амплитуды соседних элементов в уравнениях для фаз, что справедливо при достаточно слабой межэлементной связи), получим систему

$$\dot{\varphi}_j = \Omega_j + \beta(\sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + \sin(\varphi_{j-1} - \varphi_j)) - \alpha(\cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + \cos(\varphi_{j-1} - \varphi_j) - 2) \quad (13)$$

с граничными условиями

$$\varphi_0(t) = \varphi_1(t), \quad \varphi_{N+1}(t) = \varphi_N(t). \quad (14)$$

Синхронный режим в (13) определяется условием (7). Подставляя (7) в (13), получим систему алгебраических уравнений, неизвестными в которой являются частота синхронизации Ω_s и статические значения фазовых расстройек $(\varphi_{j+1} - \varphi_j)$. В случае чисто диссипативной связи $\alpha = 0$ эта система сводится заменой $s_j = \sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j)$ к линейному разностному уравнению, решение которого для линейного распределения индивидуальных частот (8) имеет вид [5]

$$\sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j) = \frac{\Delta}{2\beta} j(N-j), \quad \Omega_s = \frac{\Delta(N-1)}{2}. \quad (15)$$

Выражение (15) задает 2^{N-1} различных синхронных состояний, из которых устойчивым является только то, для которого $|\varphi_{j+1} - \varphi_j| < \pi/2$, то есть реализуется режим глобальной синфазной синхронизации [5].

В случае четного N наибольшее по цепочке значение синуса фазовой расстройки между соседними элементами

$$\max_j \{ \sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \} = \frac{\Delta N^2}{8\beta} \quad (16)$$

достигается при

$$j = j_m = \frac{N}{2}. \quad (17)$$

Тогда в качестве условия существования устойчивого режима глобальной синхронизации имеем [5]

$$\left| \frac{\Delta N^2}{8\beta} \right| < 1.$$

Выясним, как изменяются выражения (15) – (17) при введении малой консервативной составляющей связи $\alpha \neq 0$. Перейдем в уравнении (13) к пределу сплошной среды, который предполагает большое количество элементов и малость расстройки фаз между соседними элементами $|\varphi_{j+1} - \varphi_j| \ll 1$. Для режима глобальной синхронизации это условие выполняется вдали от границы ее срыва, что при $\alpha = 0$ означает $|\Delta N^2/(8\beta)| \ll 1$.

Введем непрерывную пространственную координату x и пространственную длину системы L

$$x = \lambda j, \quad L = \lambda(N - 1), \quad (18)$$

где λ – расстояние между соседними элементами. Пусть λ стремится к нулю при фиксированной конечной длине системы L . Число элементов в системе N тогда стремится к бесконечности.

От дискретного набора переменных $\varphi_j(t)$ перейдем к непрерывной функции действительных переменных $\varphi(x, t)$.

Используя разложение в ряд Тейлора функции $\varphi(x, t)$ по пространственной координате

$$\varphi(x + \lambda, t) = \varphi(x, t) + \varphi'(x, t)\lambda + \frac{\varphi''(x, t)}{2}\lambda^2 + O(\lambda^3) \quad (19)$$

(здесь и далее знак «'» означает дифференцирование по пространственной координате), а также разложения тригонометрических функций

$$\sin x = x + O(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \quad (20)$$

получим выражения

$$\sin(\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)) + \sin(\varphi_{j-1}(t) - \varphi_j(t)) = \varphi''(x, t)\lambda^2 + O(\lambda^3), \quad (21a)$$

$$\cos(\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)) + \cos(\varphi_{j-1}(t) - \varphi_j(t)) = 2 - (\varphi'(x, t))^2\lambda^2 + O(\lambda^3), \quad (21b)$$

где переменные x и j связаны соотношением (18). Подставляя (21a), (21b) в уравнение (13), вводя новые обозначения

$$\sigma = \lambda^2\beta, \quad \kappa = -\lambda^2\alpha \quad (22)$$

и при этом полагая $\lambda \rightarrow 0$, получим уравнение фазового приближения в пределе сплошной среды

$$\dot{\varphi} = \omega(x) + \sigma\varphi'' - \kappa(\varphi')^2 \quad (23)$$

с граничными условиями

$$\varphi'(0) = \varphi'(L) = 0. \quad (24)$$

Синхронный режим, при котором $\dot{\varphi} = \Omega_s$, определяется обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\omega(x) - \Omega_s + \sigma\varphi'' - \kappa(\varphi')^2 = 0. \quad (25)$$

В Приложении показано, что частота синхронизации

$$\Omega_s = \Omega_m \left(1 - \frac{(cL)^3}{60} + O((cL)^9) \right), \quad (26)$$

максимальное значение градиента фазы в уравнении (25)

$$\varphi'_{\max} = \frac{\delta L^2}{8\sigma} \left(1 - \frac{19(cL)^6}{57600} + O((cL)^9) \right), \quad (27)$$

а координата точки, в которой достигается это значение,

$$x_m = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{7}{480}(cL)^3 + O((cL)^9) \right). \quad (28)$$

Возвращаясь теперь к дискретной пространственной координате, то есть переходя от непрерывного приближения (23) обратно к модели (13), получим выражения для частоты синхронизации, наибольшей по цепочке фазовой расстройки между соседними элементами, и номера элемента, на котором достигается эта наибольшая расстройка. Поскольку непрерывное приближение предполагает $N \rightarrow \infty$, в полученных выражениях можно заменить $(N - 1)$ на N без потери точности. Обозначая

$$M = -(cL)^3 = \frac{\alpha N^3 \Delta}{\beta^2}, \quad (29)$$

из выражений (26)–(28) находим частоту синхронизации

$$\Omega_s = \frac{\Delta(N - 1)}{2} \left(1 + \frac{M}{60} + O(M^3) \right), \quad (30)$$

максимум фазовой расстройки

$$\max_j \{\varphi_{j+1} - \varphi_j\} = \lambda \varphi'_{\max} = \frac{\Delta N^2}{8\beta} \left(1 - \frac{19}{57600} M^2 + O(M^3) \right) \quad (31)$$

и положение максимума фазовой расстройки в цепочке

$$j_m = \left[\frac{N}{2} \left(1 - \frac{7}{480} M + O(M^3) \right) \right]. \quad (32)$$

Здесь квадратные скобки $[\cdot]$ обозначают целую часть числа. Приближения, использованные при расчете, накладывают ограничения на область применимости полученных выражений, в том числе фазовое приближение требует $|\alpha|, |\beta| \ll 1$; приближение сплошной среды – $N \gg 1$ и $\Delta N^2 / (8\beta) \ll 1$; асимптотический метод – $|M| = |\alpha N^3 \Delta / \beta^2| \ll 1$.

При $M = 0$ выражения (30) – (32) переходят в (15) – (17) с учетом соотношения $\sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j) \approx \varphi_{j+1} - \varphi_j$ при $|\varphi_{j+1} - \varphi_j| \ll 1$, что справедливо в рамках непрерывного приближения.

Как показывает полученный результат, введение ненулевой консервативной составляющей связи $\alpha \neq 0$ приводит к изменению характеристик режима глобальной синфазной синхронизации, в частности, к сдвигу частоты синхронизации и положения максимума фазовой расстройки (рис. 2). Знак этого сдвига для обеих величин

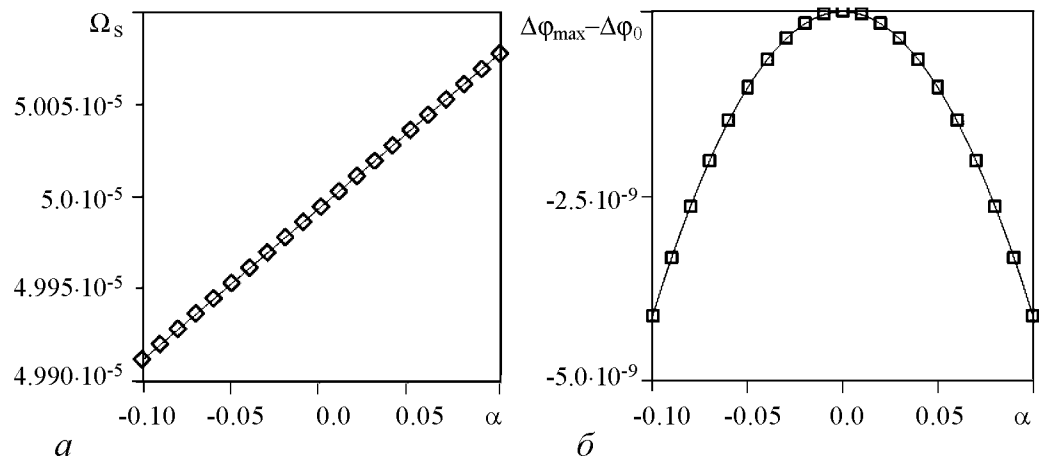


Рис. 2. Зависимость от α частоты синхронизации (а) и максимума фазовой расстройки, смещенной относительно своего максимального значения $\varphi_0 = 1.25 \cdot 10^{-3}$ (б); $N = 10$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-5}$, $\beta = 0.1$

зависит от знака α . Величина максимальной фазовой расстройки при этом уменьшается независимо от знака α .

4. Синхронные режимы в цепочке: компьютерный эксперимент

Кроме режима глобальной синфазной синхронизации в цепочке слабонелинейных элементов ван дер Поля обнаружено сосуществование нескольких глобальных синхронных режимов. Среди них синфазный и противофазный режимы, а также ряд смешанных режимов. В компьютерных экспериментах в цепочке из 32 элементов рассматривались периодические граничные условия и граничные условия «свободные концы». В обоих случаях было обнаружено сосуществование нескольких синхронных режимов при одних и тех же значениях параметров. Таким образом, фиксируя значения параметров, задавая граничные и начальные условия, можно получить

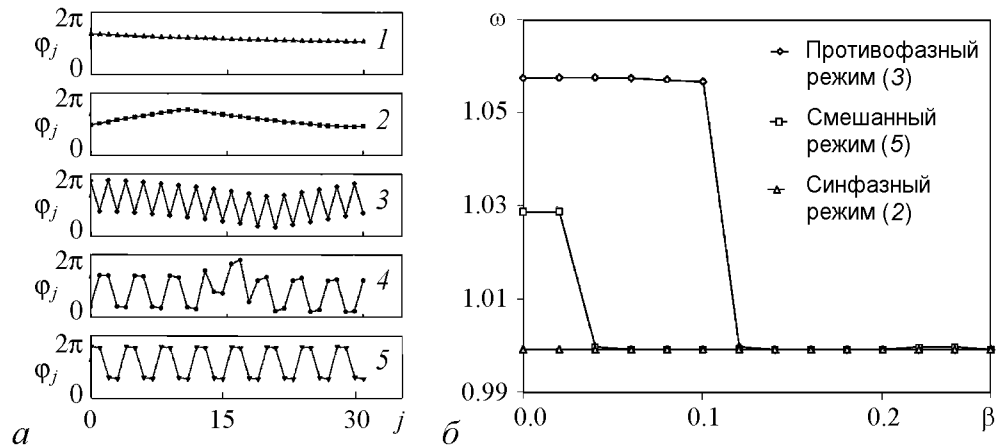


Рис. 3. а – Распределение фаз синхронных режимов при различных граничных условиях: 1 – синфазный режим, граничные условия – «свободные концы»; 2 – синфазный режим, периодические граничные условия, 3 – противофазный режим, периодические граничные условия; 4 – смешанный режим, граничные условия – «свободные концы»; 5 – смешанный режим, периодические граничные условия ($\mu = 0.1$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-5}$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.03$). б – Эволюция частот элементов при начальных условиях, соответствующих противофазному режиму 3 (\diamond), смешанному 5 (\square) и синфазному 2 (Δ) режимам ($N = 32$, $\mu = 0.1$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-5}$, $\alpha = 0.3$)

тот или иной синхронный режим в зависимости от начальных условий. Распределения фаз элементов в нескольких полученных синхронных режимах показаны на рис. 3, а. На рис. 3, б показана эволюция частот синфазного, смешанного и противофазного режимов зависимости от β в цепочке из 32 элементов при периодических граничных условиях. Видно, что при $\beta \leq 0.02$ все рассматриваемые режимы устойчивы. При дальнейшем увеличении β сначала исчезает смешанный режим, последним – противофазный. При большой диссипативной связи в системе реализуется синфазный синхронный режим.

Рассмотрим цепочку из K элементов. Пусть в ней существует M синхронных режимов. Добавим в цепочку новый элемент. Как видно из экспериментов, каждый из элементов может быть синхронизован синфазно и противофазно с соседним. Получаем M режимов в случае синфазной синхронизации нового элемента с соседним и еще M режимов в случае противофазной синхронизации нового элемента с соседним, всего $2M$ режимов. Таким образом, при добавлении нового элемента в цепочку количество синхронных режимов удваивается. А для двух элементов имеют место два режима (синфазный и противофазный). Отсюда несложно сделать вывод о существовании 2^{N-1} различных синхронных режимов в цепочке из N элементов.

Наличие фазового сдвига между соседними элементами в случае синхронного режима проявляется в существовании распространяющихся вдоль цепочки волновых фронтов. В синфазном режиме совокупность фазовых сдвигов образует известные фазовые волны [3]. Более сложные структуры возникают в противофазном и смешанных режимах. Например, в противофазном режиме распространение сдвига фаз вдоль цепочки имеет «пилообразный» вид. Таким образом, каждый синхронный режим может рассматриваться как структура, образованная волной синхронизации, задающей фазовый сдвиг между элементами.

При слабой связи поведение системы характеризуется кластерной синхронизацией. Чем меньше связь, тем больше кластеров в цепочке. При отсутствии связи каждый элемент осциллирует с собственной частотой. Исследовалось распределение частот элементов в цепочке при $\alpha = 0.12$ и различных значениях параметра связи β (рис. 4). При увеличении β число кластеров сокращается, и при некотором критическом значении β наступает глобальная синхронизация. Граница между глобальной и кластерной синхронизацией для цепочки из 20 элементов при $\Delta = 0.01$ показана на рис. 5.

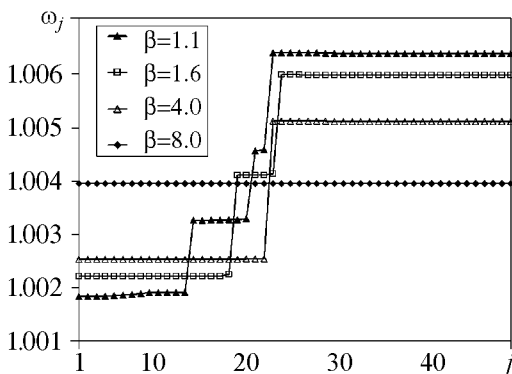


Рис. 4. Глобальная и кластерная синхронизация. $N = 50, \mu = 0.1, \Delta = 0.001, \alpha = 0.12$;

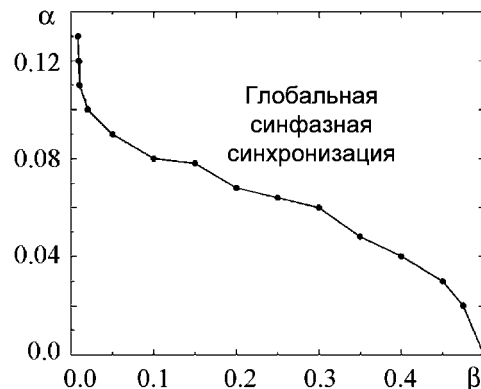


Рис. 5. Области глобальной и кластерной синхронизации ($N = 20, \mu = 0.1, \Delta = 0.01$)

5. Синфазная–противофазная синхронизация

При исследовании синхронизации в цепочке осцилляторов ван дер Поля ($N = 128, \mu = 0.1, \Delta = 2 \cdot 10^{-6}$) было обнаружено, что усредненные на большом временном интервале частоты парциальных систем при определенных значениях параметров выстраиваются симметрично относительно центра цепочки и линейно уменьшаются от центра к краям (рис. 6, *a*). Распределение фаз постоянно меняется, но практически все время в цепочке существует область около центра, в которой элементы синхронизованы в противофазе, и существуют области около краев, элементы в которых синхронизованы синфазно (рис. 6, *b*). Размеры этих областей меняются периодически. Эволюция этих областей показана на рис. 7. Области, где элементы синхронизованы синфазно, показаны светлым цветом, противофазные области – темным. Так, если в начальный момент элементы совершали колебания в противофазе, то противофазная область G_1 начинает уменьшаться и со временем практически исчезает около центра, при этом соответственно увеличивается область G_2 синфазной синхронизации. Далее область G_1 начинает увеличиваться, и через некоторое время практически все элементы колеблются противофазно, далее эта область снова уменьшается, потом увеличивается и т.д. Подчеркнем, что элементы внутри выделенных областей G_1 и G_2 синхронизованы. Так, усредненные на выделенном временном интервале (рис. 8, *a*) частоты элементов, не переходящих из одной области в другую, остаются неизменными и совпадают внутри каждой области. Усредненные частоты элементов, совершивших переход, выстраиваются линейно между частотами соответствующих областей (рис. 8, *b*).

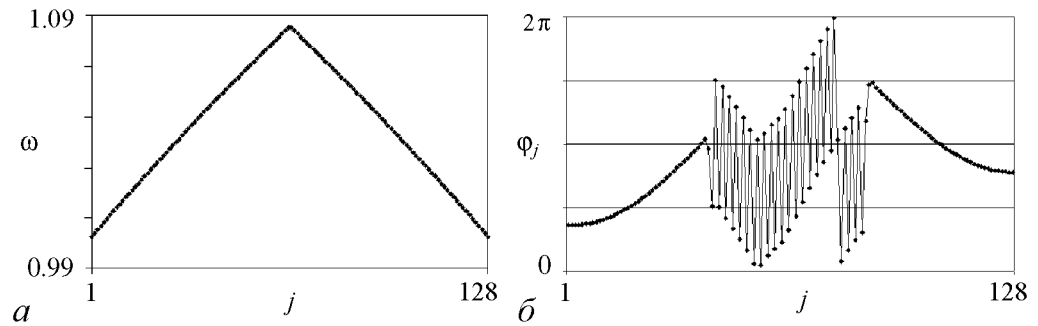


Рис. 6. *a* – Усредненные на большом временном интервале частоты. *b* – Типичное мгновенное распределение фаз в системе. Для рис. 6–11 значения коэффициентов связи $\alpha = 0.3, \beta = 0.01$

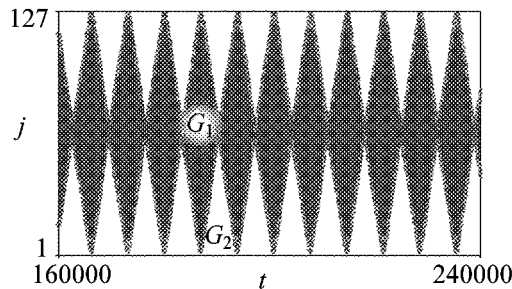


Рис. 7. Эволюция противофазных областей G_1 (здесь и далее выделенных темным цветом) и синфазных областей G_2 (здесь и далее выделенных светлым цветом). Граничные условия – свободные концы

Таким образом, в системе устойчивы фронты переключения режимов синхронизации. Эти фронты распространяются вдоль цепочки с некоторой скоростью в обоих направлениях и отражаются от границы. При заданных начальных условиях эти фронты распространяются навстречу и при пересечении в одной точке проходят друг через друга беспрепятственно. Таким образом, ключевым моментом для существования режима чередования во времени синфазной и противофазной синхронизации является существование в системе таких фронтов.

Как показали численные эксперименты, в системе возможно задание различных конфигураций фронтов переключения режима синхронизации, которые будут существовать как при свободных, так и при периодических граничных условиях. Так, на рис. 9 показан режим чередующейся синхронизации при изначально сонаправленных фронтах переключения, которые также отражаются от свободных концов и при столкновении проходят друг через друга беспрепятственно. На рис. 10 показан аналогичный режим с двумя сонаправленными фронтами переключения, но при периодических граничных условиях.

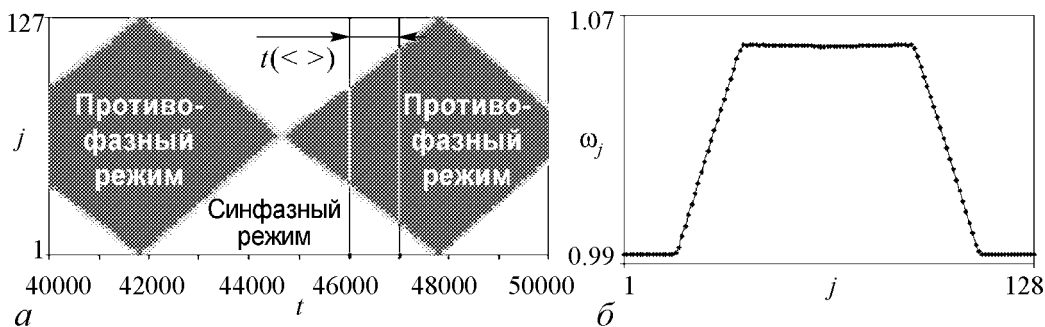


Рис. 8. а – Чередование синфазной и противофазной синхронизации и интервал для усреднения частот элементов; б – усредненные парциальные частоты на интервале (46000 : 47000)

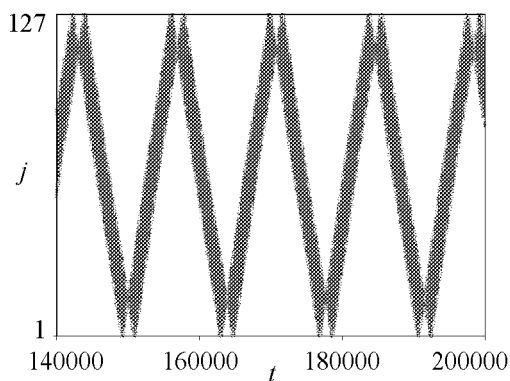


Рис. 9. Распространение двух изначально сонаправленных фронтов синхронизации: противофазной (передний фронт) и синфазной (задний фронт) в цепочке при граничных условиях «свободные концы»

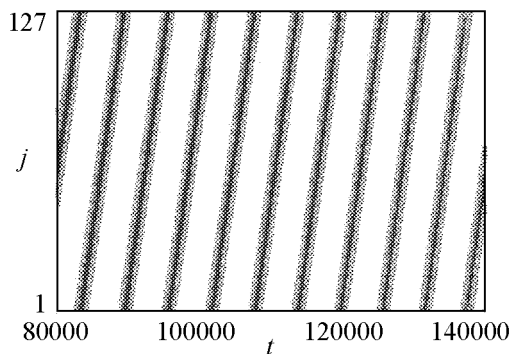


Рис. 10. Распространение двух сонаправленных фронтов синхронизации в цепочке при периодических граничных условиях

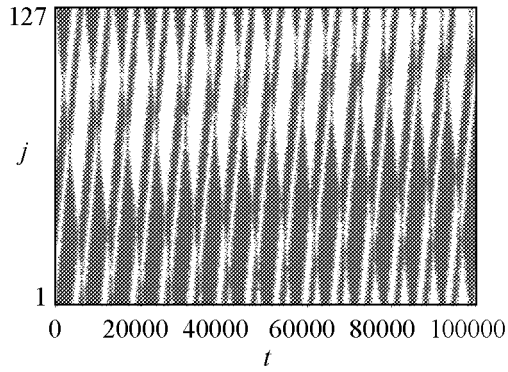


Рис. 11. Распространение четырех разнонаправленных фронтов синхронизации в цепочке при периодических граничных условиях

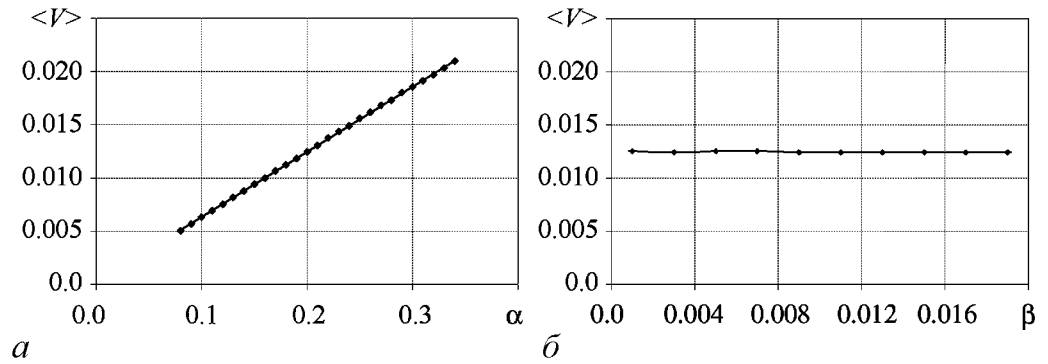


Рис. 12. Зависимость средней скорости распространения фронта от параметра связи α при $\beta = 0.01$ (а); от параметра связи β при $\alpha = 0.2$ (б). Граничные условия – «свободные концы»

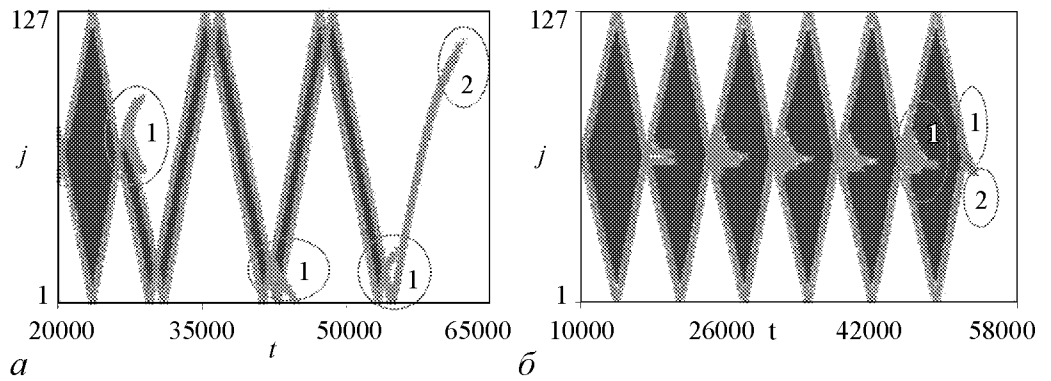


Рис. 13. Эволюция и исчезновение режима чередующейся синфазной – противофазной синхронизации при большом значении: а – параметра $\alpha = 0.354$ ($\beta = 0.01$); б – параметра $\beta = 0.019$ ($N = 128$, $\mu = 0.1$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-6}$, $\alpha = 0.3$). Светло-серым цветом показаны высокоградиентные фазовые волны, обычно разграничивающие области G_1 и G_2 . Граничные условия – «свободные концы»

Как оказалось, в системе возможно существование большего числа фронтов переключения синхронных режимов. Так, на рис. 11 приведен случай сосуществования четырех разнонаправленных фронтов в системе с периодическими граничными условиями. Видно, что скорости фронтов в разных направлениях различны. Это обусловлено неидентичностью элементов в цепочке. Скорость распространения фронта переключения зависит как от индивидуальных параметров элементов, так и от связи между элементами. Данные зависимости приведены на рис. 12. Видно, что средняя скорость распространения фронта линейно возрастает при увеличении α и не зависит от β .

Режим чередующейся синфазной – противофазной синхронизации существует в ограниченной части плоскости параметров (α, β) . Разрушение этого режима происходит как при малой, так и при большой связи. На рис. 13, *a* показано исчезновение режима чередующейся синхронизации при большом значении α ($\alpha = 0.354$). На рис. 13, *б* показана эволюция и исчезновение синфазных и противофазных областей при большом значении β ($\beta = 0.019$). Видно, что срыв режима чередующейся синхронизации происходит в синфазный режим.

Примечательно то, что режим чередующейся синфазной – противофазной синхронизации переходит в синфазный синхронный режим и при малых значениях параметров связи, о чем свидетельствуют рис. 14 и рис. 15.

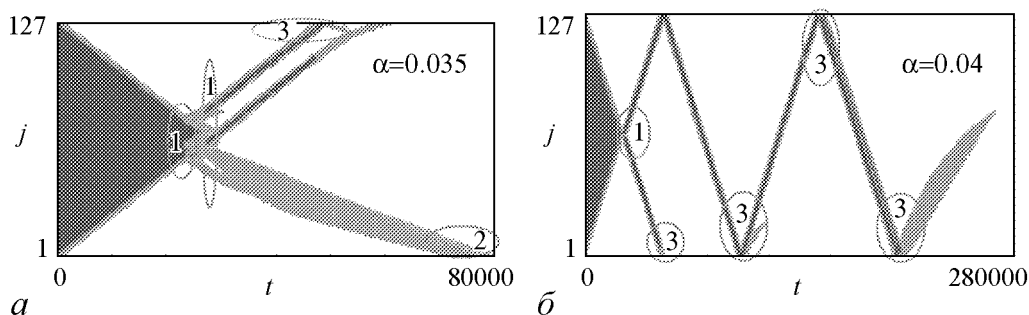


Рис. 14. Эволюция и исчезновение режима чередующейся синфазной – противофазной синхронизации при $\beta = 0.001$ и малом значении параметра α : 0.035 (*a*); 0.04 (*б*). Граничные условия – «свободные концы»

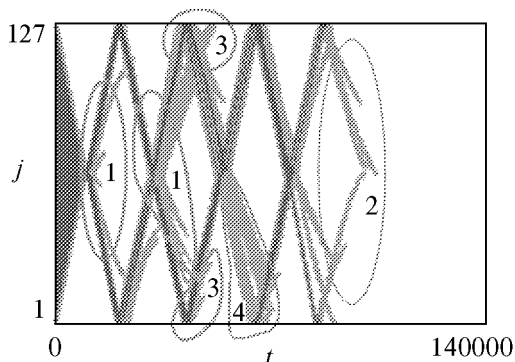


Рис. 15. Эволюция и исчезновение режима чередующейся синфазной – противофазной синхронизации при малых значениях параметров $\alpha = 0.01$ и $\beta = 0.01$. Граничные условия – «свободные концы»

На рисунках видны основные эффекты, предшествующие срыву перемежающейся синхронизации в синфазный режим. Их можно объединить в 3 группы:

- 1) изменение направления и/или количества фронтов переключения при столкновении фронтов;
- 2) разрушение фронтов переключения при их распространении в системе при значениях параметров, соответствующих неустойчивости перемежающейся синхронизации;
- 3) разрушение фронтов переключения при отражении от границы (в случае свободных граничных условий).

В системе присутствует также эффект зарождения фронтов переключения режимов синхронизации при отражении от границы высокоградиентных фазовых волн.

Типичный случай изменения направления распространения фронта переключения режима синхронизации, иллюстрирующий первый механизм, показан на рис. 16 (направления фронтов показаны стрелками). После столкновения фронтов, фронт, распространяющийся вправо (рис. 16, *a*), не может перевести элементы из синфазной синхронизации в противофазную. Из-за сильной связи они продолжают оставаться синхронизованными синфазно, хотя и с большим градиентом фазы, чем ранее (рис. 16, *б*). Динамические переменные выстраиваются так, что фронт переключения начинает распространяться в обратную сторону (рис. 16, *в*). При этом разности фаз между элементами, образующими высокоградиентную фазовую волну (рис. 16, *з*), уменьшаются с течением времени, и в результате элементы синхрони-

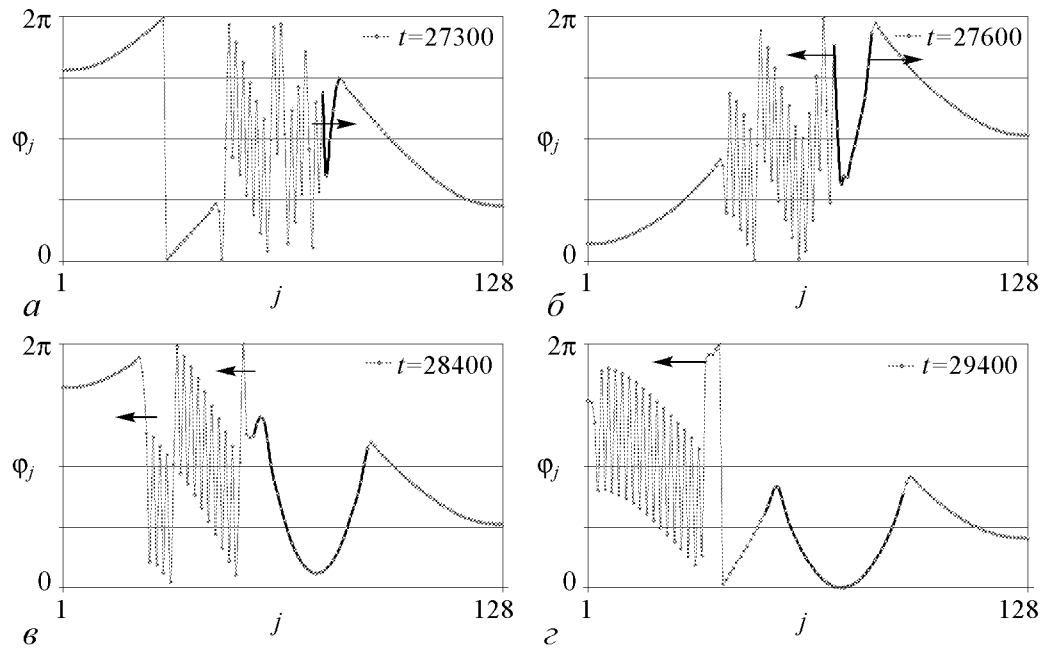


Рис. 16. Распределения фаз φ_j в различные моменты времени, иллюстрирующие механизм изменения направления одного из фронтов синхронизации при столкновении фронтов (см. рис. 13, *a* (1)); $\alpha = 0.354$, $\beta = 0.01$. Граничные условия – «свободные концы»

зуются синфазно. Характерный пример разрушения фронтов переключения при их распространении в системе показан на рис. 17. Два фронта распространяются параллельно с небольшим расстоянием друг от друга (рис. 17, *a*, *б*). После их отражения от границы два элемента остаются в противофазе (рис. 17, *в*). Однако при заданных параметрах системы режим чередующейся синхронизации неустойчив. Поэтому со временем разность фаз между элементами уменьшается (рис. 17, *г*: $\Delta\varphi \approx 1$), а затем наступает глобальная синфазная синхронизация (рис. 17, *д*, *е*). При значениях параметров, соответствующих неустойчивой чередующейся синхронизации, разрушение фронтов часто происходит при их отражении от свободных концов цепочки. В определенный момент времени из-за сильной связи противофазная синхронизация некоторых элементов около центра цепочки разрушается (рис. 18, *a*). В резуль-

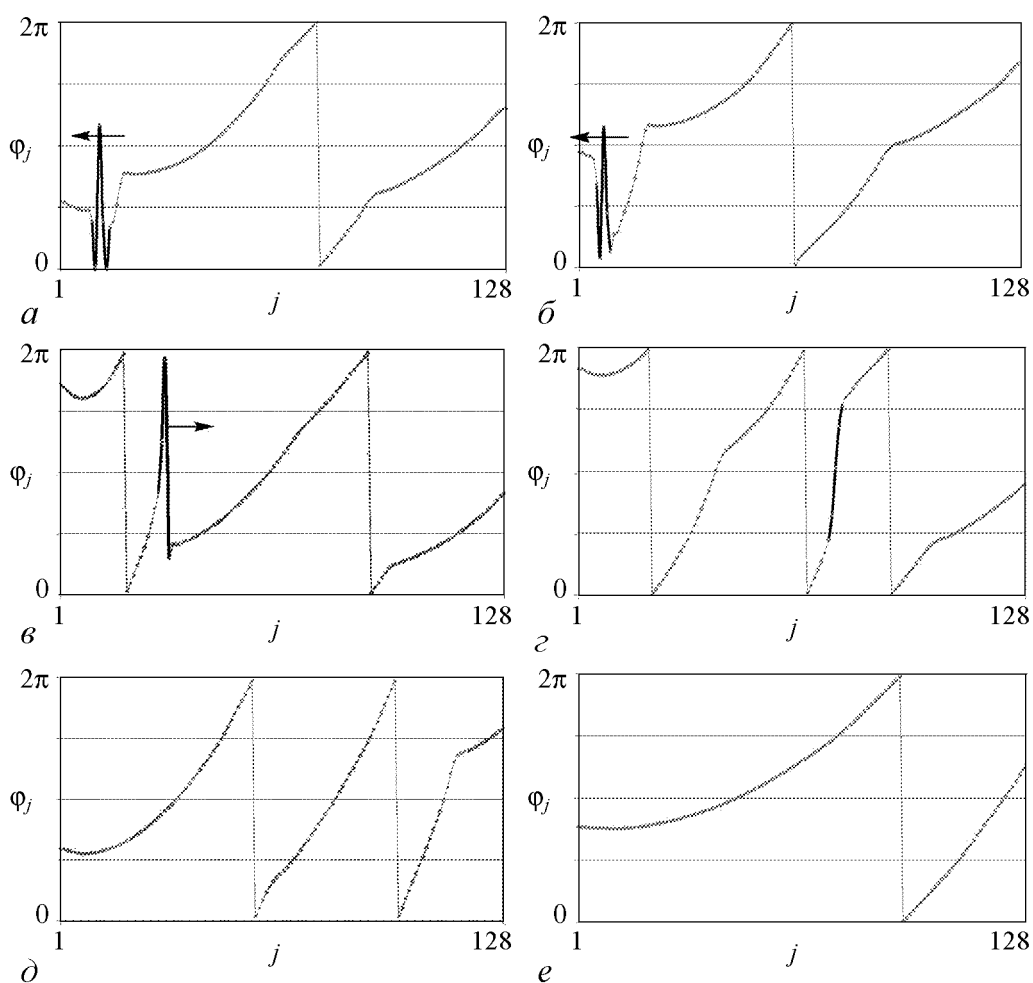


Рис. 17. Распределения фаз φ_j в различные моменты времени, иллюстрирующие механизм разрушения фронтов переключения при их распространении в системе при значениях параметров, соответствующих неустойчивости перемежающейся синхронизации (см. рис. 13, *a* (2)); $\alpha = 0.354$, $\beta = 0.01$. Граничные условия – «свободные концы»

тате рождаются новые фронты переключения и высокоградиентные фазовые волны (рис. 18, б). Эти фронты распространяются в цепочке (рис. 18, в) и доходят до границы (рис. 18, з). В результате отражения от границы разности фаз между элементами уменьшаются (рис. 18, д), и устанавливается синфазный синхронный режим (рис. 18, е). Помимо разрушения фронтов переключения в системе может реализоваться и возрождение фронтов при отражении от границы высокоградиентных фазовых волн. Этот эффект выглядит следующим образом: к левой границе приближаются высокоградиентные фазовые волны (рис. 19, а) (в среднем разность фаз элементов – порядка $\pi/4$, максимальная – порядка $\pi/2$). При отражении волн от границы (рис. 19, б, в, з) максимальная разность фаз увеличивается до π . Таким образом формируются фронты переключения (рис. 19, д), которые в дальнейшем распространяются по цепочке (рис. 19, е).

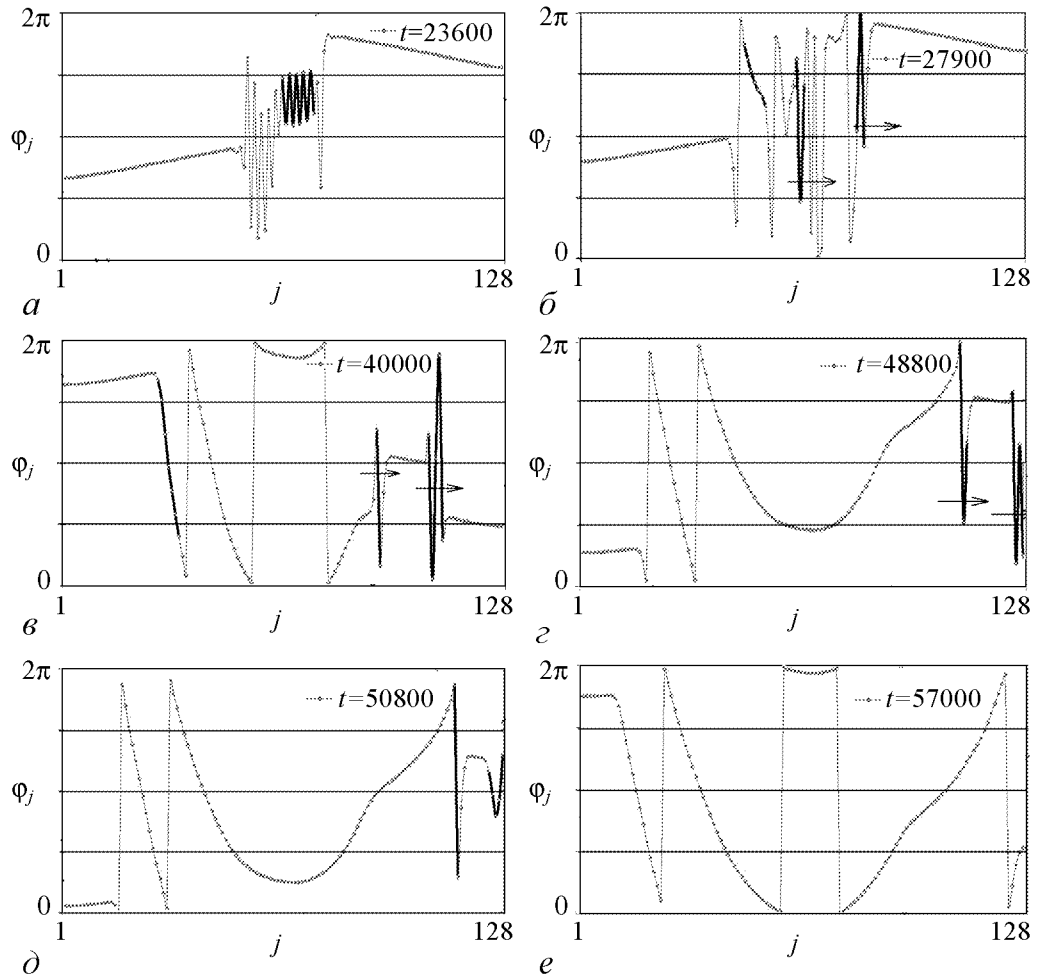


Рис. 18. Распределения фаз φ_j в различные моменты времени, иллюстрирующие механизм разрушения фронтов синхронизации при их отражении от границы (см. рис. 14, а (3)) ($\alpha = 0.035$, $\beta = 0.001$). Граничные условия – «свободные концы»

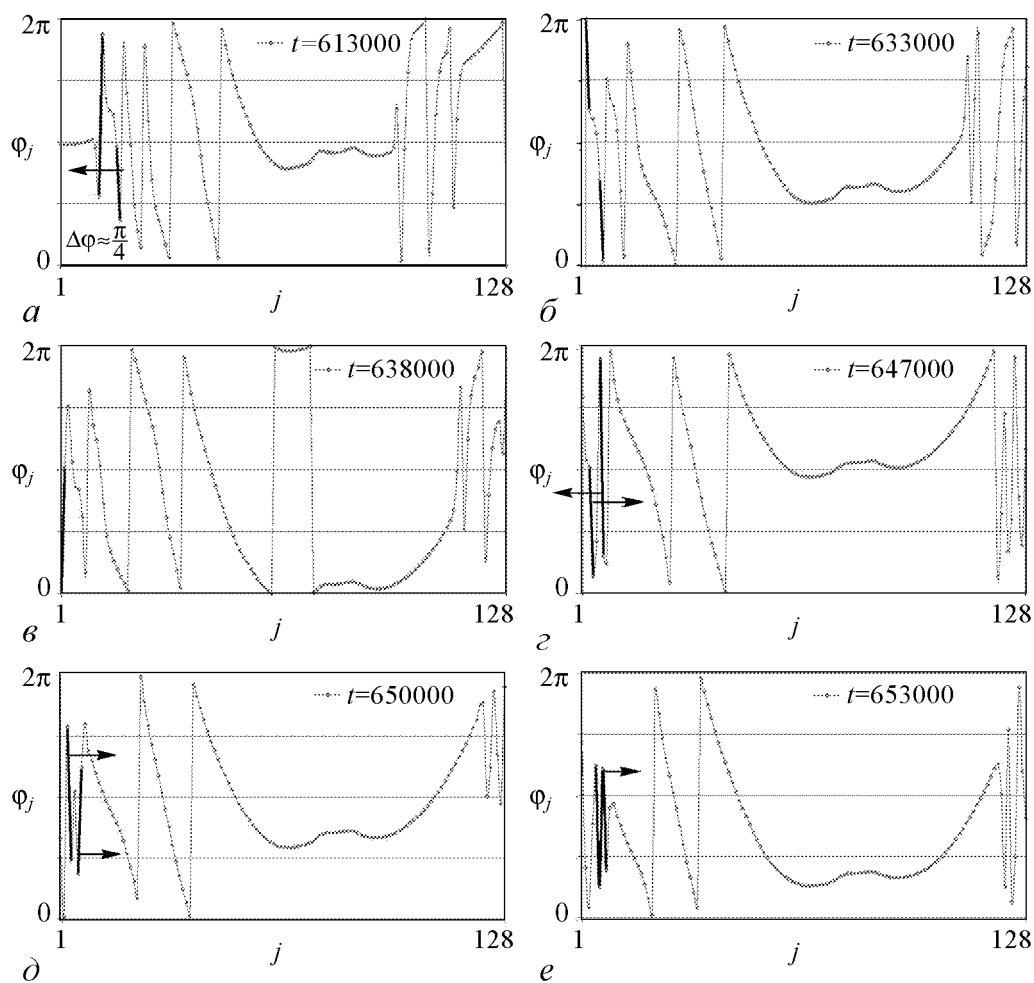


Рис. 19. Распределения фаз φ_j в различные моменты времени, иллюстрирующие механизм возрождения фронтов переключения синхронизации при отражении от границы высокоградиентных фазовых волн (см. рис. 15 (4)) ($\alpha = 0.01$, $\beta = 0.01$). Граничные условия – «свободные концы»

Заключение

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что в цепочке из N консервативно и диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля при фиксированных значениях параметров может сосуществовать не менее 2^{N-1} различных режимов глобальной синхронизации. Аналитически показано сосуществование синфазного и противофазного режимов в ансамбле из двух связанных элементов. При малых связях в цепочках элементов наблюдается кластерная синхронизация. При увеличении связей количество кластеров уменьшается, и при сильной связи имеет место режим глобальной синхронизации. Это могут быть:

- а) синхронный режим синфазной синхронизации всех элементов;
- б) синхронный режим противофазной синхронизации всех элементов;
- в) синхронные режимы, при которых часть пар соседних элементов синхронизованы в фазе, а часть – в противофазе.

В случае режима глобальной синфазной синхронизации имеет место определенный сдвиг фаз между соседними элементами. Таким образом, в цепочке происходит распространение волновых фронтов. Аналогичные волновые фронты наблюдаются в случае режимов кластерной синхронизации: внутри каждого кластера скорости распространения и периоды волн различны и зависят от частоты синхронизации в кластере. Более сложные волновые структуры существуют при противофазной синхронизации: распространение сдвига фаз вдоль цепочки имеет «пилообразный» вид.

При определенных значениях параметров в цепочке существует режим чередования во времени синфазной и противофазной синхронизации, обусловленной наличием распространяющихся фронтов переключения режимов синхронизации. «Солитоноподобные» структуры и фронты переходов от синфазной к противофазной синхронизации обнаружены для достаточно широкой области параметров связи.

Нам представляется, что обнаруженная мультистабильность синхронных режимов и волновой характер их установления и исчезновения важны для понимания таких механизмов работы сетей, как хранение и распознавание изображений, выделение контуров изображений [8], визуальное восприятие [9], работа памяти [10], структурообразование, самоорганизация [11] и т.д. Рассмотренные эффекты могут быть полезны и для понимания сверхтекучести, сверхпроводимости, фазовых переходов, конденсации Бозе–Эйнштейна [6]. Полученные результаты могут также представлять интерес с точки зрения физики жидких кристаллов и описания нелинейных волн и потоков в теории поля, поскольку рассмотренная в работе классическая модель актуальна и для данных областей физики [6].

Приложение

Как известно, нелинейное уравнение

$$(\omega(x) - \Omega_s) + \sigma\varphi'' - \kappa(\varphi')^2 = 0 \quad (33)$$

с помощью замены

$$\varphi = -\frac{\sigma}{\kappa} \ln y \quad (34)$$

приводится к линейному

$$y'' - \frac{\kappa}{\sigma^2}(\omega(x) - \Omega_s) y = 0. \quad (35)$$

В случае линейного профиля индивидуальных частот (8) имеем

$$\omega(x) = \delta x, \quad \text{где} \quad \delta = \frac{\Delta}{\lambda}. \quad (36)$$

Уравнение (35) тогда принимает вид

$$y'' - \frac{\kappa\delta}{\sigma^2}(x - x_0)y = 0, \quad (37)$$

где точка x_0 определяется условием $\omega(x_0) = \Omega_s$, то есть

$$x_0 = \Omega_s/\delta. \quad (38)$$

Заменой независимой переменной

$$z = c^3(x - x_0), \quad c = \sqrt[3]{\frac{\kappa\delta}{\sigma^2}} \quad (39)$$

уравнение (37) сводится к линейному уравнению Эйри

$$y'' - zy = 0, \quad (40)$$

где символ «'» означает дифференцирование по новой независимой переменной z .

Для градиента фазы $\psi(x) = \varphi'(x)$ в новых переменных, в соответствии с (34) и (39), получаем выражение

$$\psi(x) = -\sqrt[3]{\frac{\sigma\delta}{\kappa^2}} \frac{1}{y(z)} \frac{dy(z)}{dz} \Big|_{z=c(x-x_0)} \quad (41)$$

или

$$\psi(x) = -\psi_0 p(z_0 + cx) \quad (42)$$

где

$$p(z) = \frac{y'(z)}{y(z)}, \quad \psi_0 = \sqrt[3]{\frac{\sigma\delta}{\kappa^2}}, \quad z_0 = -cx_0. \quad (43)$$

Вводя обозначение

$$\zeta = cL, \quad (44)$$

перепишем граничные условия (24) в виде

$$p(z_0) = p(z_0 + \zeta) = 0, \quad (45)$$

или

$$y'(z_0) = y'(z_0 + \zeta) = 0, \quad (46a)$$

$$y(z_0) \neq 0, \quad y(z_0 + \zeta) \neq 0. \quad (46b)$$

Как известно из теории, решение уравнения Эйри (40) представляется в виде линейной комбинации двух базисных функций, составляющих фундаментальную систему решений уравнения

$$y = as_1(z) + bs_2(z), \quad (47)$$

где функции $s_1(z)$ и $s_2(z)$ выражаются в виде всюду сходящихся степенных рядов

$$s_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4)\dots 3 \cdot 2}, \quad (48a)$$

$$s_2(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{(3n+1)3n(3n-2)(3n-3)\dots 4 \cdot 3}. \quad (48b)$$

Значения коэффициентов a и b в решении (47) должны быть выбраны так, чтобы решение удовлетворяло граничным условиям. Но, поскольку граничные условия (46) (как и само уравнение (40)) инвариантны относительно домножения решения на постоянный множитель, что соответствует в исходных переменных сдвигу фазы на постоянную величину, в решении (47) остается лишь один эффективный параметр, выбором которого необходимо удовлетворить граничным условиям. Значение одного из коэффициентов, таким образом, можно зафиксировать. Положим $a = 1$, тогда решение принимает вид

$$y = s_1(z) + bs_2(z). \quad (49)$$

В качестве второго параметра, определяемого из граничных условий, выступает величина z_0 , входящая в сами граничные условия и определяющая не известную заранее частоту синхронизации.

Уравнения (46а) тогда образуют систему с двумя неизвестными величинами z_0 и b :

$$s_1'(z_0) + bs_2'(z_0) = 0, \quad (50a)$$

$$s_1'(z_0 + \zeta) + bs_2'(z_0 + \zeta) = 0. \quad (50b)$$

Найдем решение этой системы в виде разложения по степеням параметра ζ , который будем полагать малым, после чего проверим выполнение условий (46б).

Выпишем разложения функций $s_1(z)$ и $s_2(z)$, а также их производных, с точностью, требуемой для дальнейших расчетов:

$$s_1(z) = 1 + \frac{z^3}{3 \cdot 2} + \frac{z^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{z^9}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + O(z^{12}), \quad (51a)$$

$$s_2(z) = z + \frac{z^4}{4 \cdot 3} + \frac{z^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + O(z^{10}), \quad (51b)$$

$$s_1'(z) = \frac{z^2}{2} + \frac{z^5}{5 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{z^8}{8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + O(z^{11}), \quad (52a)$$

$$s_2'(z) = 1 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^6}{6 \cdot 4 \cdot 3} + O(z^9). \quad (52b)$$

Подставив выражения (52) в уравнение (50а), получим

$$\frac{z_0^2}{2} + b + \frac{z_0^5}{30} + b\frac{z_0^3}{3} + \frac{z_0^8}{1440} + b\frac{z_0^6}{72} + O(z_0^{11}) + O(bz_0^9) = 0. \quad (53)$$

Это уравнение позволяет выразить b через z_0 с точностью до слагаемых порядка $O(z_0^{11})$. Подставим в (53) степенное разложение зависимости $b(z_0)$

$$b = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n, \quad (54)$$

в результате чего получим систему уравнений для коэффициентов разложения c_n . Вычислив первые три ненулевых коэффициента разложения, получим искомое выражение

$$b = -\frac{1}{2}z_0^2 + \frac{2}{15}z_0^5 - \frac{11}{288}z_0^8 + O(z_0^{11}). \quad (55)$$

Очевидно, аналогичное соотношение, в котором z_0 заменено на $(z_0 + \zeta)$, получается из уравнения (50б). Приравнявая эти два выражения для b , получаем уравнение

$$-\frac{1}{2} \left[(z_0 + \zeta)^2 - z_0^2 \right] + \frac{2}{15} \left[(z_0 + \zeta)^5 - z_0^5 \right] - \frac{11}{288} \left[(z_0 + \zeta)^8 - z_0^8 \right] + O \left[z_0^{11} \right] + O \left[(z_0 + \zeta)^{11} \right] = 0. \quad (56)$$

Раскрыв квадрат суммы в первых квадратных скобках, приведем это уравнение к виду

$$z_0 = -\frac{\zeta}{2} + \frac{2}{15} \frac{(z_0 + \zeta)^5 - z_0^5}{\zeta} - \frac{11}{288} \frac{(z_0 + \zeta)^8 - z_0^8}{\zeta} + O(\zeta^{10}) \quad (57)$$

(здесь учтено, что $z_0 = O(\zeta)$). Эту форму записи можно использовать для нахождения зависимости $z_0(\zeta)$ методом последовательных приближений. В качестве начального приближения полагаем

$$z_0 = -\frac{\zeta}{2} + O(\zeta^4). \quad (58)$$

Подставив это выражение в правую часть (57), найдем следующее приближение

$$z_0 = -\frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta^4}{120} + O(\zeta^{10}). \quad (59)$$

Более высокой точности из уравнения (57) получить невозможно. Подставляя выражение (59) в (55), находим

$$b = -\frac{\zeta^2}{8} + \frac{301}{1843200} \zeta^8 + O(\zeta^{11}). \quad (60)$$

Выражения (59) и (60) представляют собой искомое решение системы (50а), (50б) с точностью до двух старших членов разложения по степеням ζ .

Выпишем решение (49) с точностью, определяемой точностью найденного выражения (60) для параметра b .

Поскольку решение ищется на интервале $z \in [z_0, z_0 + \zeta]$, а, согласно (59), $z_0 = O(\zeta)$, в дальнейших выкладках полагаем $z = O(\zeta)$. Подставляя в решение (49) значение параметра b (60), а также разложения функций $s_1(z)$ и $s_2(z)$ по степеням z (51), для решения уравнения (40) получим выражение

$$y(z) = 1 + \frac{z^3}{6} - \frac{\zeta^2 z}{8} + \frac{z^6}{180} - \frac{\zeta^2 z^4}{96} + \frac{z^9}{12960} - \frac{\zeta^2 z^7}{4032} + \frac{301 \zeta^8 z}{1843200} + O(\zeta^{12}). \quad (61)$$

Здесь слагаемые упорядочены по возрастанию суммы показателей степеней параметра ζ и независимой переменной z .

Заметим, что, согласно (61), на рассматриваемом отрезке $y(z) = 1 + O(\zeta^3)$, то есть при достаточно малых ζ найденное решение в ноль на концах отрезка не обращается. Таким образом, условие (46б) выполнено.

Получим теперь выражения для частоты синхронизации Ω_s , максимального значения градиента фазы φ'_{\max} и координаты этого максимума x_m .

Для частоты синхронизации, согласно (38), (43), (59), имеем

$$\begin{aligned}\Omega_s = \omega(x_0) = \delta x_0 &= -\frac{\delta}{c} z_0 = \frac{\delta}{c} \left(\frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta^4}{120} + O(\zeta^{10}) \right) = \\ &= \frac{\delta}{c} \left(\frac{cL}{2} - \frac{(cL)^4}{120} + O((cL)^{10}) \right) = \Omega_m \left(1 - \frac{(cL)^3}{60} + O((cL)^9) \right),\end{aligned}\quad (62)$$

где $\Omega_m = \delta L/2$ – собственная частота в средней точке отрезка.

Для вычисления x_m и $\varphi'_{\max} = \psi_{\max}$ найдем сначала точку экстремума функции $p(z)$ (43) в зависимости от параметра b . Производная $p'(z)$ записывается следующим образом:

$$p'(z) = \frac{y''(z)y(z) - (y'(z))^2}{(y(z))^2}.\quad (63)$$

Приравняем к нулю числитель этой дроби, подставив в него решение (49), сохраняя лишь те порядки малости, которые необходимы для дальнейших выкладок

$$(z + O(z^4) + bO(z^2))(1 + O(z^3) + bO(z)) - (b + O(z^2) + bO(z^3))^2 = 0.\quad (64)$$

Решение этого уравнения есть искомая точка экстремума z_m

$$z_m = b^2 + O(z_m^4) + bO(z_m^2).\quad (65)$$

Учитывая, что $z_m = O(b^2)$, окончательно получаем

$$z_m = b^2 + O(b^5).\quad (66)$$

Найдем значение p_m функции $p(z)$ в точке экстремума. Запишем выражение для $p(z)$ с необходимой точностью

$$p(z) = \frac{z^2/2 + b + O(z^5) + bO(z^3)}{1 + bz + O(z^3) + bO(z^4)}.\quad (67)$$

Учитывая, что $z_m = O(b^2)$, для p_m тогда имеем:

$$\begin{aligned}p_m = p(z_m) &= \frac{z_m^2/2 + b + O(b^7)}{1 + bz_m + O(b^6)} = \\ &= (z_m^2/2 + b + O(b^7))(1 - bz_m + O(b^6)) = b - b^2 z_m + z_m^2/2 + O(b^7).\end{aligned}\quad (68)$$

Подставляя в это выражение значение z_m (66), находим

$$p_m = b - b^4/2 + O(b^7).\quad (69)$$

Подставляя в (66) и (69) найденное из граничных условий значение параметра b (60), получим выражение z_m и p_m через ζ

$$z_m = \frac{\zeta^4}{64} + O(\zeta^{10}),\quad (70)$$

$$p_m = -\frac{\zeta^2}{8} + \frac{19\zeta^8}{460800} + O(\zeta^{11}). \quad (71)$$

В соответствии с (39), (42)–(44), находим максимальные значения градиента фазы в уравнении (33)

$$\varphi'_{\max} = -\psi_0 p_m = \frac{\delta L^2}{8\sigma} \left(1 - \frac{19(cL)^6}{57600} + O((cL)^9) \right) \quad (72)$$

и координату точки, в которой достигается это значение,

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{c}(z_m - z_0) = \frac{1}{c} \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{7}{960}\zeta^4 + O(\zeta^{10}) \right) = \\ &= \frac{\zeta}{2c} \left(1 + \frac{7}{480}\zeta^3 + O(\zeta^9) \right) = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{7}{480}(cL)^3 + O((cL)^9) \right). \quad (73) \end{aligned}$$

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 06-02-16596, 07-02-01404, 08-02-92004 и 08-02-97049. Работа О. Канакова поддержана также Фондом некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., and Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
2. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., and Postnov D.* Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems. World Scientific, Singapore, 2002.
3. *Osipov G.V., Kurths J., and Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Springer, Berlin, 2007.
4. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., and Shalfeev V.D.* Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization networks. Singapore, World Scientific, 1994.
5. *Osipov G.V. and Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 7198.
6. *Aranson I.S. and Kramer L.* // Rev. Mod. Phys. 2002. Vol. 74. P. 99.
7. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D. and Kurths J.* Physica D. 2004. Vol. 189. P. 8.
8. *Macleod K., Bäcker A., and Laurent G.* Nature. 1998. Vol. 395. P. 693.
9. Ambiguity in Mind and Nature. New York / Eds P. Kruse, M. Stadler. Springer-Verlag, 1995.
10. *Mensour B. and Longtin A.* // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 205. P. 18.
11. *Beuter A., Milton J.G., Labrie C., and Glass L.* Proc. IEEE Systems Man Cybern. 1989. P. 899.

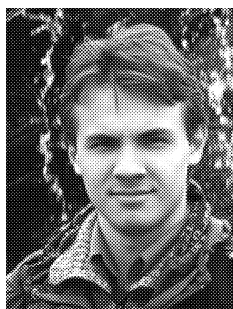
Поступила в редакцию 15.08.2008
После доработки 1.11.2008

SYNCHRONIZATION WAVES IN WEAK-NONLINEAR OSCILLATORY ENSEMBLES

A.K. Kryukov, O.I. Kanakov, G.V. Osipov

Synchronization is studied in ensembles of locally dissipative coupled and conservative coupled weak-nonlinear van der Pol oscillators. In the chain of N elements not less than 2^{N-1} different regimes of global synchronization are stable at the same values of parameters. Cluster synchronization is considered as well. Existing of multiple fronts of synchronization switching is shown. These fronts go one through another without of changing or reflections from free boundaries. Effect of alternated inphase – antiphase synchronization is observed, which was found before in numerical simulations.

Keywords: Synchronization, multistability, numerical methods, modeling, complex Ginzburg–Landau equation, synchronization waves



Крюков Алексей Константинович – родился в 1984 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2007). Аспирант кафедры теории управления и динамики машин факультета ВМК ННГУ. Область научных интересов: структуры синхронизации в нелинейных системах, моделирование динамики биологических сред. Стипендиат некоммерческого фонда «Династия» (2006). Имеет 12 публикаций (в соавторстве) в том числе 2 журнальных. Лауреат стипендии имени академика Г.А. Разуваева (2008).

E-mail: alkryukov@gmail.com

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



Канатов Олег Игоревич – родился в 1981 году, окончил Нижегородский государственный университет (2004). Старший преподаватель кафедры теории колебаний радиофизического факультета ННГУ, кандидат физико-математических наук. Область научных интересов: структуры и локализация энергии в нелинейных решеточных системах, моделирование динамики биологических сред. Награжден именными стипендиями некоммерческого фонда «Династия» и Президента Российской Федерации для аспирантов (2006). Имеет 10 журнальных публикаций и 2 учебно-методических пособия (в соавторстве).

E-mail: okanakov@rf.unn.ru

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



Осипов Григорий Владимирович – родился в Горьком (1960), окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982). В 1986–1988 годах учился в аспирантуре Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» (НСК) АН СССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НСК (1988) по математическому моделированию и доктора физико-математических наук в ННГУ (2004) по радиофизике. С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года в качестве заведующего кафедрой «Теории управления и динамики машин» факультета ВМК. Один из авторов монографий «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал 120 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.

E-mail: osipov@vmk.unn.ru

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23