



ЭФФЕКТЫ ПОДАВЛЕНИЯ ХАОСА И СУЖЕНИЯ СПЕКТРА В СТАБИЛИЗИРУЕМОМ ШУМОМ НЕУСТОЙЧИВОМ НЕЛИНЕЙНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ

В.С. Маляев, Т.Е. Вадивасова, О.В. Тишина, В.С. Анищенко

В статье исследуется неустойчивый нелинейный осциллятор, в котором рост амплитуды колебаний ограничивается с помощью шумового воздействия. Рассчитываются характеристики стабилизированных шумом колебаний. Показано, что в системе при изменении интенсивности шума можно наблюдать такие эффекты, как подавление экспоненциальной неустойчивости траекторий и сужение спектра колебаний.

Ключевые слова: Шум в нелинейных системах, стабилизация колебаний шумом, случайный аттрактор, когерентный резонанс, стохастическая бифуркация

Введение

В последние годы заметно вырос интерес к исследованию влияния шума на нелинейные системы. Этот интерес связан как с неизбежным присутствием источников шума в любой реальной системе, так и с многообразием явлений, связанных с воздействием случайных сил. В классическом случае квазигармонического автогенератора шум приводит к флуктуациям амплитуды и фазы, к спаду автокорреляционной функции и конечной ширине спектральной линии автоколебаний [1, 2]. В системах с мультистабильностью, когда в фазовом пространстве сосуществуют несколько аттракторов, действие даже очень слабого гауссова шума приводит к объединению аттракторов и их бассейнов притяжения. При этом фазовая траектория с определенной средней частотой переключается между областями объединившихся аттракторов. Так возникают стохастические колебания в бистабильном осцилляторе под действием шума [3, 4]. По этой же причине добавление слабого гауссова шума приближает свойства систем с квазигиперболическими хаотическими аттракторами к свойствам систем с грубыми гиперболическими аттракторами [5].

Аттракторы в системах с гауссовым шумом не принадлежат ограниченной области фазового пространства, поскольку шум в принципе может «вытолкнуть фазовую» траекторию сколь угодно далеко от того аттрактора, которому она принадлежала в системе без шума. Существование аттрактора в зашумленной диссипативной системе означает существование стационарной эргодической вероятностной меры, не зависящей от начального распределения [6]. Исследование бифуркаций в системах с шумом представляет собой сравнительно новое и еще мало разработанное

направление в науке на стыке нелинейной динамики и теории случайных процессов. В [6] такие бифуркации названы стохастическими и разделены на два типа: феноменологические (P-бифуркации) и динамические (D-бифуркации). Феноменологическая бифуркация проявляется в качественной перестройке вероятностной меры и экспериментально наблюдаемом изменении статистических характеристик, в то время, как динамическая бифуркация связана с изменением характера устойчивости траекторий на аттракторе. Стохастическая бифуркация может одновременно принадлежать к этим двум типам, а может являться бифуркацией только одного типа. Стохастические бифуркации могут вызываться непосредственно действием шума и наблюдаться при изменении интенсивности или других статистических характеристик шума, которые таким образом играют роль бифуркационных параметров динамической системы [7, 8].

Шум в нелинейных системах не всегда приводит к росту «беспорядка». Известен ряд явлений, которые можно рассматривать как переход системы под действием шума к более упорядоченному поведению. К таким явлениям можно отнести стохастический резонанс [9–11], когерентный резонанс [12, 13], подавление хаотической динамики [14, 15] и синхронизация ансамбля автогенераторов общим шумом [16]. К этому же ряду явлений можно добавить и недавно обнаруженный эффект стабилизации внешним шумом неустойчивых (растущих по амплитуде) колебаний нелинейного осциллятора [17].

В данной работе рассматривается поведение стабилизируемого шумом нелинейного осциллятора, исследованного в [17]. Нас интересуют, прежде всего, эффекты, не обнаруженные в [17]. Это – индуцированная шумом динамическая бифуркация, приводящая к локальной устойчивости траекторий на аттракторе, а также эффект сужения спектра стохастических колебаний с ростом интенсивности шума. Оба этих эффекта проявляются при шуме, более сильном, чем тот, который рассматривался в [17].

1. Исследуемая система. Эффект стабилизации шумом

Уравнения системы имеют вид [17]

$$\begin{cases} \dot{x} = (y - 1)x + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y} = \varepsilon y^\nu - x^2 y, \quad y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $n(t)$ – нормированный источник гауссова белого шума; D – параметр, задающий интенсивность шума. Они описывают некоторые случаи взрывной неустойчивости плазмы в установке токамак [18, 19]. При $1 < \nu < 2$ система (1) имеет два неустойчивых фокуса с координатами $(x; y) = (\pm\sqrt{\varepsilon}; 1)$ и седло в нуле координат. Устойчивые сепаратрисы седла совпадают с осью $y = 0$, а неустойчивые – с осью $x = 0$. Параметры системы выбирались следующими: $\nu = 1.5$, $\varepsilon = 0.1$.

В отсутствие шума в системе (1) нет аттрактора. Фазовая траектория с начальным условием $y > 0$ раскручивается вокруг одного из фокусов, приближаясь к осям координат (рис. 1, *a*). При $t \rightarrow \infty$ амплитуда и период колебаний неограниченно растут. Однако в численных экспериментах этого наблюдать не удастся. Значения переменных x и y в определенные моменты времени становятся все ближе к нулю и в конце-концов достигают «машинного нуля», после чего колебания прекращаются. Систему (1) при $D = 0$ нельзя считать диссипативной. Дивергенция потока является

переменной и в разных точках фазовой плоскости имеет разный знак

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = y - 1 + \varepsilon v y^{v-1} - x^2.$$

Область положительных значений дивергенции расположена вдоль оси ординат. При вращении фазовой траектории вокруг фокуса она попадает то в область с положительной дивергенцией, то в область с отрицательной дивергенцией. Усредненная по времени вдоль конкретной траектории дивергенция $\langle \operatorname{div} \mathbf{f} \rangle$ не устанавливается на определенном уровне, а колеблется, меняя знак. В численных экспериментах удается получить зависимость $\langle \operatorname{div} \mathbf{f} \rangle$ от времени только на небольших временах (из за достижения переменными «машинного нуля»). Пример такой зависимости приведен на рис. 1, б.

Даже очень слабый шум, добавленный в первое уравнение системы (1), не дает траектории приближаться к неустойчивой сепаратрисе седла, что препятствует росту амплитуды и периода колебаний (рис. 2, а). Средняя дивергенция вдоль любой траектории при $t \rightarrow \infty$ стремится к одному и тому же отрицательному уровню (рис. 2, б).

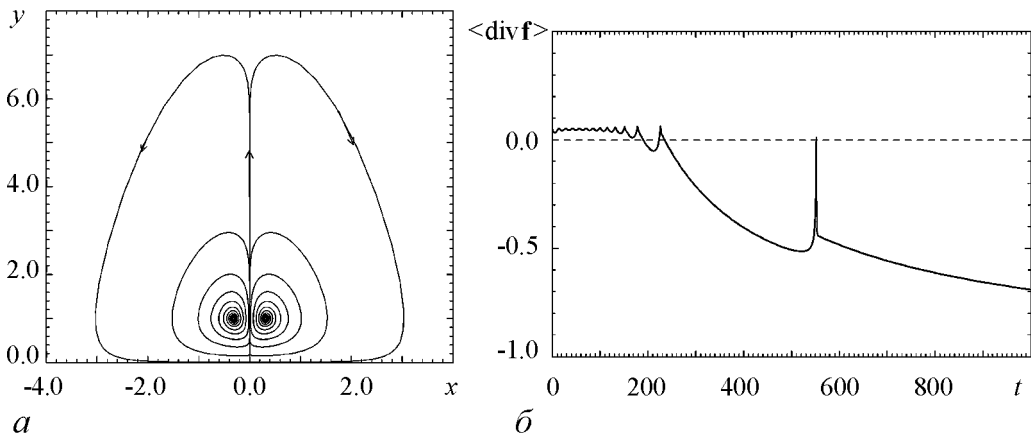


Рис. 1. Фазовый портрет системы (1) без шума (а) и зависимость средней вдоль траектории дивергенции от времени (б)

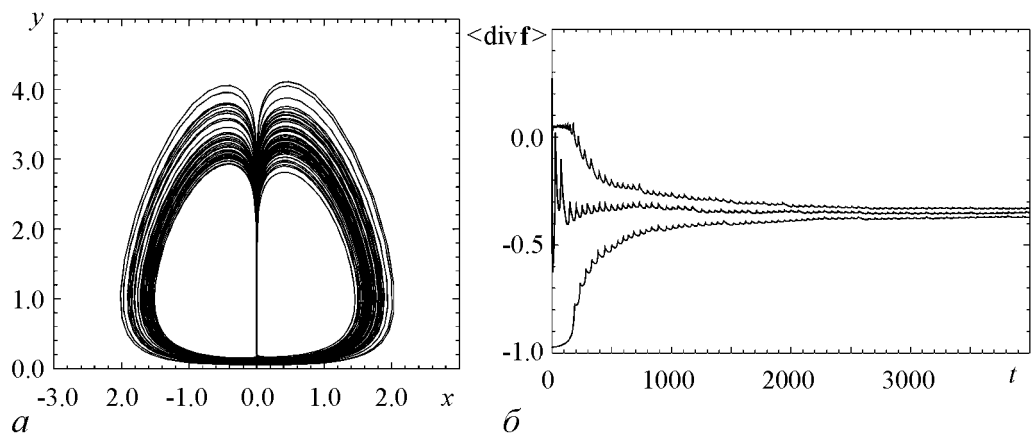


Рис. 2. Фазовый портрет системы (1) при шуме с интенсивностью $D = 10^{-8}$ (а) и зависимости средней дивергенции от времени, вычисленные для трех различных траекторий (б)

Отрицательная средняя дивергенция, также как и установление стационарного вероятностного распределения [17], свидетельствует о существовании в системе аттрактора. Так как система находится под действием шума, то траектории на аттракторе ведут себя нерегулярно. По внешнему виду фазовый портрет (см. рис. 2, а) похож на хаотические аттракторы, существующие в детерминированных системах с размерностью фазового пространства $N \geq 3$. Для того, чтобы установить, является ли аттрактор хаотическим, необходимо вычислить старший показатель Ляпунова. Согласно результатам, приведенным в [17], старший показатель – положителен и в стабилизированной шумом системе существует хаотический аттрактор.

2. Индуцированная шумом динамическая бифуркация в системе (1)

Результаты расчета показателя Ляпунова в [17] были получены для сравнительно слабого шума: $D \leq 10^{-4}$. Полученные нами результаты показывают, что при дальнейшем увеличении интенсивности шума старший показатель Ляпунова становится отрицательным. График зависимости λ_1 от D представлен на рис. 3.

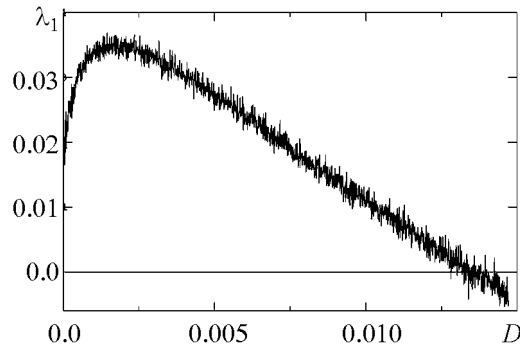


Рис. 3. Зависимость старшего показателя Ляпунова λ_1 от интенсивности шума D

Таким образом, в точке $D_0 \approx 0.014$ имеет место индуцированная шумом D-бифуркация, состоящая в исчезновении экспоненциальной неустойчивости (то есть режима динамического хаоса) при увеличении интенсивности шума. Подобная бифуркация при изменении интенсивности шума наблюдается в осцилляторе Дуффинга с гауссовым белым шумом при условии слабой диссипации [20]. Однако там с ростом шума происходит возникновение, а не подавление хаоса. В определенном смысле рассматриваемая система (1) с двумя потенциальными «горками» противоположна осциллятору Дуффинга, в котором шум переключает фазовую траекторию между двумя потенциальными «ямками». Однако характер вызванной шумом бифуркации в обоих случаях одинаков – это динамическая бифуркация не приводит к заметным изменениям наблюдаемых характеристик колебаний. Разумеется, с ростом интенсивности шума статистические характеристики колебаний изменяются, однако это происходит постепенно. Непосредственно до точки бифуркации и после нее не обнаруживается различий в характере вероятностного распределения и значениях моментов первого и второго порядка.

Обнаруженная стохастическая D-бифуркация приводит к качественному изменению случайного аттрактора. Используемое здесь понятие случайного аттрактора не надо путать с аттрактором, существующем в пространстве динамических переменных системы, находящейся под действием шума. Под случайным аттрактором понимается множество точек, к которому стремятся траектории множества идентичных систем с разными начальными состояниями, но находящихся под одним и тем же случайным воздействием [6,20] Это множество точек будет постоянно изменяться во времени, но спустя некоторый переходный период топология множества устано-

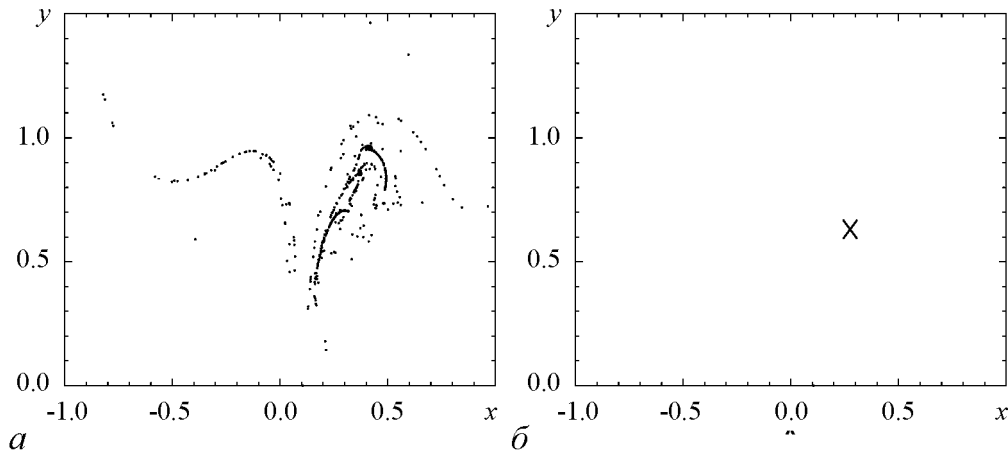


Рис. 4. Вид случайного аттрактора: *a* – до бифуркации подавления хаоса ($D = 0.01$); *б* – после бифуркации ($D = 0.015$). В случае (*б*) точки, принадлежащие случайному аттрактору, отмечены крестиком

вится неизменной. В режиме хаоса случайный аттрактор имеет сложную структуру, похожую на фрактальные множества, возникающие в сечении хаотических аттракторов детерминированных систем (рис. 4, *a*). После бифуркации траектории системы (1) становятся устойчивыми, и случайный аттрактор вырождается в точку (рис. 4, *б*). С физической точки зрения, данное изменение топологии случайного аттрактора означает, что после бифуркации ансамбль идентичных стохастических осцилляторов (1) вне зависимости от начальных условий синхронизируется общим шумом с интенсивностью $D > D_0$.

3. Спектрально-корреляционный анализ ограниченных шумом колебаний

В данной работе был проведен анализ эволюции спектров мощности и корреляционных функций стабилизированных шумом колебаний при изменении интенсивности шума D . Для вычисления спектра применялось быстрое преобразование Фурье с последующим усреднением на ансамбле окон. Значения спектральной плотности мощности нормировались на максимальное значение и представлялись в логарифмических единицах. Корреляционная функция рассчитывалась в предположении стационарности и эргодичности колебаний по формуле

$$\psi_x(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle - \bar{x}^2, \quad (2)$$

где скобками $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по времени, а \bar{x} есть стационарное среднее значение. Затем корреляционная функция нормировалась на свое максимальное значение при $\tau = 0$

$$\Psi_x(\tau) = \frac{\psi_x(\tau)}{\psi_x(0)}.$$

Спектры имеют максимум на нулевой частоте, что соответствует процессу случайных переключений между двумя половинами фазовой плоскости, разделенными неустойчивой сепаратрисой седла. С ростом шума средняя частота переключений возрастает и спектральный пьедестал поднимается. Форма спектра колебаний $x(t)$

хотя и близка к лоренциану, но с заметными отклонениями. Ширина спектральной линии определяется, по-видимому, не только средней частотой переключений, но и особенностями поведения траекторий в каждой из полуплоскостей. Численные эксперименты показали, что характер спектра мощности ограниченных шумом колебаний не претерпевает качественных изменений при изменении знака старшего показателя Ляпунова в точке D_0 . Однако с изменением интенсивности шума спектр постепенно меняется, причем, если спектр колебаний $y(t)$ с ростом шума становится все более широким, то ширина спектра колебаний $x(t)$ на уровне половинной мощности зависит от интенсивности D немонотонным образом. Фрагменты спектров колебаний $x(t)$ для различных значений интенсивности шума, иллюстрирующие эффект сужения спектральной линии с ростом шума, и зависимость полуширины линии $\Delta\omega$ от интенсивности D представлены на рис. 5, *a* и рис. 5, *б*, соответственно.

Сужение основной спектральной линии можно связать с еще одним эффектом, проявляющимся в спектре колебаний $x(t)$. Он заключается в том, что при увеличении D в спектре появляется второй (локальный) максимум, соответствующий вращению в окрестности фокусов. Это происходит благодаря тому, что шум большей интенсивности выбрасывает траекторию дальше из окрестности сепаратрисы (линии $x = 0$) и она, попадая ближе к фокусу, чаще совершает вращательные движения.

Плотность вероятности $p(x)$ показывает перераспределение вероятностной меры из окрестности нуля в окрестность фокусов. Фрагменты графиков функций $p(x)$ для $D = 10^{-4}$ и $D = 10^{-3}$ приведены на рис. 6.

Перераспределение плотности вероятности между окрестностью фокусов и окрестностью сепаратрисы сопровождается заметным сужением основной спектральной линии. Таким образом, можно говорить об эффекте некоторой регуляризации колебаний под действием шума, подобном эффекту когерентного резонанса. При дальнейшем росте интенсивности шума второй спектральный максимум снова исчезает, а основная линия становится несколько шире (как и в случае когерентного резонанса).

Соответствующее поведение демонстрируют корреляционные функции колебаний $x(t)$ (рис. 7). Видно, что при $D = 0.5 \cdot 10^{-3}$ корреляционная функция имеет на хвосте осцилляции, которые отражают вращение изображающей точки вокруг фокусов.

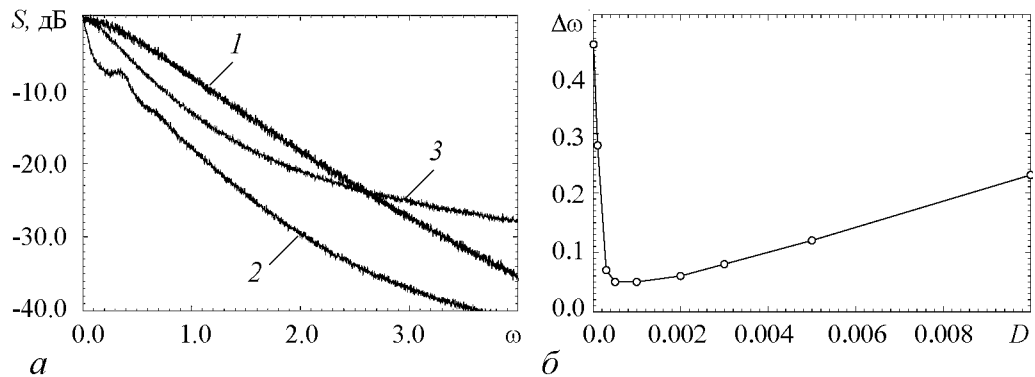


Рис. 5. *a* – фрагменты спектров мощности колебаний $x(t)$ при различных значениях интенсивности шума D : 1 – 10^{-5} ; 2 – $0.5 \cdot 10^{-3}$; 3 – 10^{-2} ; *б* – зависимость полуширины спектра от интенсивности шума

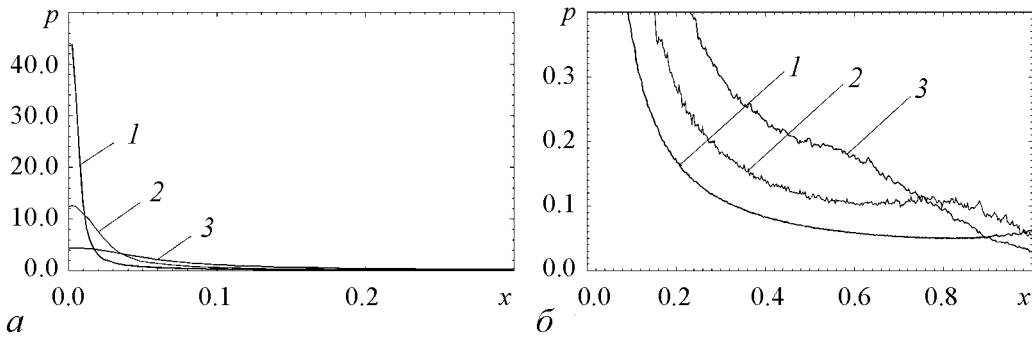


Рис. 6. Фрагменты распределения $p(x)$ для различных значений интенсивности шума D : 1 – 10^{-5} ; 2 – 10^{-4} ; 3 – $0.5 \cdot 10^{-3}$

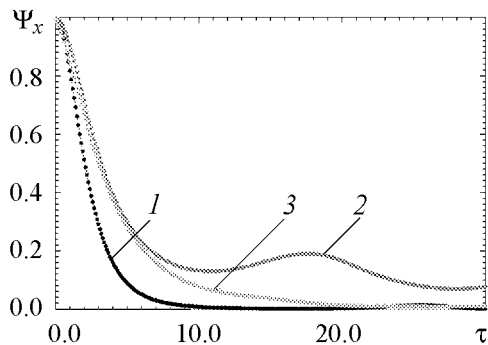


Рис. 7. Корреляционные функции $\Psi_x(\tau)$ при различных значениях интенсивности шума D : 1 – 10^{-5} ; 2 – $0.5 \cdot 10^{-3}$; 3 – 10^{-2}

Выводы

Проведенные численные эксперименты позволили изучить явление стабилизации системы (1) внешним шумовым сигналом, в результате чего удалось обнаружить следующие новые эффекты.

1. Обнаружена стохастическая бифуркация, приводящая к подавлению экспоненциальной неустойчивости колебаний с увеличением интенсивности шума. Таким образом, шум не только стабилизирует неустойчивый осциллятор, препятствуя росту амплитуды колебаний, но при большой интенсивности приводит к подавлению хаоса.

2. Обнаружен эффект, подобный когерентному резонансу: ширина спектра колебаний $x(t)$ зависит от интенсивности шума немонотонно. При некоторой интенсивности шума наблюдается минимальная ширина спектральной линии и наиболее медленный спад корреляционной функции.

Работа выполнена в рамках АВЦП МО и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы».

Библиографический список

1. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
2. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
3. Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica. 1940. Vol. 7. P. 284.

4. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.
5. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И. Статистические свойства динамического хаоса // Успехи физ. наук. 2005. Т. 175, № 2. С. 163.
6. Arnold L. Random dynamical systems. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1998.
7. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
8. Graham R. Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // Noise in Nonlinear Dynamical Systems. Vol. 1: Theory of continuous Fokker-Planck systems / Ed. by. F. Moss and P.V.E. McClintock. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
9. Benzi R., Sutera A., Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // J. Phys. A: Math. Gen. 1981. Vol. 14. P. L453.
10. Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S. Stochastic resonance in bistable systems // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 349.
11. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гаер Л. Стохастический резонанс: индуцированный шумом порядок // УФН. 1999. Т. 42, № 1. С. 7.
12. Pikovsky A.S., Kurths Yu. Coherence Resonance in a noise-driven excitable system // Phys.Rev.Lett. 1997. Vol. 78, P. 775.
13. Linder B., Schimansky-Geier L. Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60, № 6. P. 7270.
14. Sánchez E., Matías M.A., Pérez-Muñuzuri V. Analysis of synchronization of chaotic systems by noise: An experimental study // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56, № 4. P. 40.
15. Короновский А.А. и др. Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, единый тип поведения связанных хаотических систем // Док. РАН. 2006. Т. 407, № 6. С. 761.
16. Goldobin D.S., Pikovsky A. Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise// Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 045201 (4).
17. Finn J.M., Tracy E.R., Cooke W.E., Richardson A.S. Noise stabilised random attractor // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. Page/Article 026220.
18. Zohm H. Edge-localized modes (ELMs)// Plasma Phys. Contr. Fusion. 1996. Vol. 38. P. 105.
19. Connor J.W. Are view of models for ELMs // Plasma Phys. Contr. Fusion. 1998. Vol. 40. P. 191.
20. Arnold L., Imkeller P. Stochastic bifurcation of the noisy Duffing oscillator. Report, Institut für Dynamische Systeme. Universität Bremen, 2000.

Поступила в редакцию 19.06.2008

CHAOS SUPPRESSION AND SPECTRUM NARROWING IN A NOISE-STABILIZED UNSTABLE NONLINEAR OSCILLATOR

V.S. Malyaev, T.E. Vadivasova, O.V. Tishina, V.S. Anishchenko

In the present paper we study an unstable nonlinear oscillator in which the growth of amplitude of oscillations is limited by noise influence. We calculate the characteristics of noise-stabilized fluctuations. It is shown when the noise intensity changes, the system

can demonstrate different effects such as the suppression of exponential instability of trajectories and the narrowing of the spectrum of fluctuations.

Keywords: Noise in nonlinear systems, noise stabilization of oscillations, random attractor, coherent resonance, stochastic bifurcation.



Маляев Владимир Сергеевич – родился в ноябре 1980 года в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет по специальности радиофизика (2002). С 2003 года является аспирантом кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Основные научные интересы – стохастические процессы. Автор нескольких научных публикаций.

E-mail: val@chaos.ssu.runnet.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012 Саратов, Астраханская, 83



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

E-mail: tanya@chaos.ssu.runnet.ru

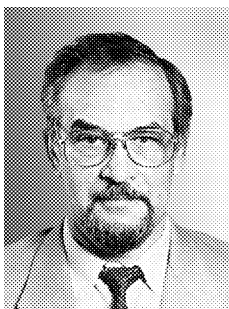
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012 Саратов, Астраханская, 83



Тишина Ольга Владимировна – студентка пятого курса физического факультета СГУ кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: нелинейная динамика, статистическая радиофизика, влияние шума на процессы в нелинейных системах.

E-mail: olgatshn@rambler.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012 Саратов, Астраханская, 83



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410012 Саратов, Астраханская, 83