

АВТОКОЛЕБАНИЯ В КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОМ И ХАОТИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРАХ В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ ФЛУКТУАЦИЙ

В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова

Представлены результаты классической теории флуктуаций в генераторе квазигармонических колебаний на примере генератора ван дер Поля. Формулируются стохастические уравнения для амплитуды и фазы автоколебаний, анализируются их решения. Рассматриваются автокорреляционная функция и спектр мощности зашумленных автоколебаний. Затем методами численного эксперимента анализируются спектрально-корреляционные характеристики хаотических автоколебательных процессов применительно к генераторам спирального хаоса. Решается задача о статистических характеристиках спирального хаоса как в отсутствие, так и с учетом воздействия шума и проводится сопоставление результатов с классической теорией флуктуаций в генераторе ван дер Поля.

Ключевые слова: Спиральный аттрактор, зашумленные автоколебания, гармонический шум, время корреляции, ширина спектральной линии.

1. Флуктуации в квазигармоническом генераторе

Стохастические уравнения квазигармонического автогенератора. Теория флуктуаций в автоколебательной системе с источником шума была развита в классических работах по статистической радиофизике на примере низкочастотного радиоприемного генератора [1–3]. Основные теоретические результаты касаются квазигармонического режима и получены в условиях ряда упрощающих предположений. Рассматривается аддитивный гауссов δ -коррелированный (белый) шум. Флуктуации фазы и амплитуды во времени предполагаются «медленными» по сравнению с периодом автоколебаний. В рамках спектрально-корреляционного анализа делается предположение о слабом шуме и развитой генерации. В этом случае можно пренебречь флуктуациями амплитуды по сравнению с ее невозмущенным значением.

Эквивалентная схема низкочастотного радиогенератора приведена на рис. 1. Она может быть описана следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2U}{dt_1^2} + \omega_0^2 U = \left(\frac{G_0 - G}{C} - \frac{3bU^2}{C} \right) \frac{dU}{dt_1} - \frac{1}{C} \frac{dI_{ш}(t_1)}{dt_1}, \quad (1)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – частота квазигармонических автоколебаний. Переходя к безразмерной переменной $X = U/U_0$ ($U_0 = 1/\sqrt{3bL\omega_0}$) и безразмерному времени

$t = \omega_0 t_1$, получаем следующее стохастическое дифференциальное уравнение СДУ автогенератора:

$$\dot{X} + X = (\varepsilon - X^2)\dot{X} + \sqrt{2D}n(t), \quad (2)$$

где точками обозначены производные по безразмерному времени t . Безразмерный параметр возбуждения $\varepsilon = (G_0 - G)/(C\omega_0)$ управляет режимом генерации. Реальная случайная сила $(-\omega_0 L)/U_0 \cdot dI_{ш}(t)/dt$ заменяется на эквивалентный гауссов белый шум: $\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$, где $\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ – функция Дирака; D – константа, задающая интенсивность шума. Скобки $\langle \dots \rangle$ означают статистическое усреднение.

Будем полагать колебания автогенератора близкими к гармоническим, что справедливо при $\varepsilon \leq 0.1$ и $D \ll \varepsilon$ и искать решение (2) в виде

$$\begin{aligned} X(t) &= \rho(t) \cos(t + \varphi(t)), \\ \dot{X}(t) &= -\rho(t) \sin(t + \varphi(t)), \end{aligned} \quad (3)$$

где мгновенная амплитуда $\rho(t)$ и случайная компонента фазы $\varphi(t)$ предполагаются медленно меняющимися функциями по сравнению с периодом колебаний $T_0 = 2\pi$. Подставляя выражения (3) в (2) и производя усреднение за период $T_0 = 2\pi$ получаем систему стохастических уравнений для амплитуды и фазы колебаний

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8} \right) \rho - \sqrt{2D} \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n(\theta) \sin(\theta + \varphi) d\theta, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\sqrt{2D}}{\rho} \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n(\theta) \cos(\theta + \varphi) d\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Производя усреднение слагаемых, содержащих источник шума $n(t)$, приходим к классической стохастической модели квазигармонического автогенератора

$$\dot{\rho} = \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8} \right) \rho + \frac{D}{2\rho} + \sqrt{D}n_1(t), \quad \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{D}}{\rho}n_2(t), \quad (5)$$

где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – независимые источники гауссова белого шума, для которых $\langle n_i(t) \rangle = 0$, $\langle n_{ik}(t)n_{ik}(t + \tau) \rangle = \delta_{ik}\delta(\tau)$, $i, k = 1, 2$, δ_{ik} – символ Кронекера.

Флуктуации амплитуды автоколебаний. Первое уравнение системы (5) не содержит фазы колебаний и его можно рассматривать независимо от фазового уравнения. Его решение есть одномерный диффузионный процесс $\rho(t)$ с плотностью вероятности $p_\rho(\rho, t)$, удовлетворяющей следующему уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова:

$$\frac{\partial p_\rho(\rho, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\left(\left(\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{\rho^2}{8} \right) \rho + \frac{D}{2\rho} \right) p_\rho(\rho, t) \right] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 p_\rho(\rho, t)}{\partial \rho^2}. \quad (6)$$

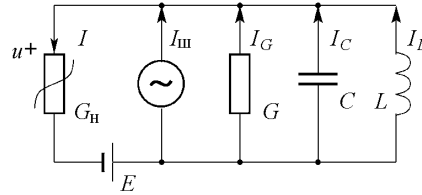


Рис. 1. Эквивалентная схема низкочастотного радиофизического генератора с источниками шума: $G_n(U)$ – нелинейная проводимость с вольт-амперной характеристикой $I = -G_0U + bU^3$; G, C, L – постоянные проводимость, емкость и индуктивность, соответственно; $I_{ш}$ – эквивалентный шумовой ток, учитывающий все источники внутренних шумов системы; E – постоянное питание

Стационарное решение уравнения (6) имеет вид

$$p_{\rho}^{\text{ст}}(\rho) = C\rho \exp \left[-\frac{1}{16D}(\rho^2 - \rho_0^2)^2 \right], \quad (7)$$

где $\rho_0 = 2\sqrt{\varepsilon}$ – невозмущенное (в отсутствие шума) значение амплитуды колебаний; C – нормировочная константа, определяемая из условия

$$\int_0^{\infty} p_{\rho}^{\text{ст}}(\rho) d\rho = 1. \quad (8)$$

На рис. 2 приведены распределения амплитуды, полученные для различных значений интенсивности шума D . При слабом шуме плотность вероятности $p_{\rho}^{\text{ст}}$ существенно отлична от нуля только в окрестности невозмущенного значения амплитуды ρ_0 . Наивероятное значение амплитуды ρ_m , соответствующее максимуму плотности вероятности, практически совпадает с невозмущенным значением ρ_0 и только

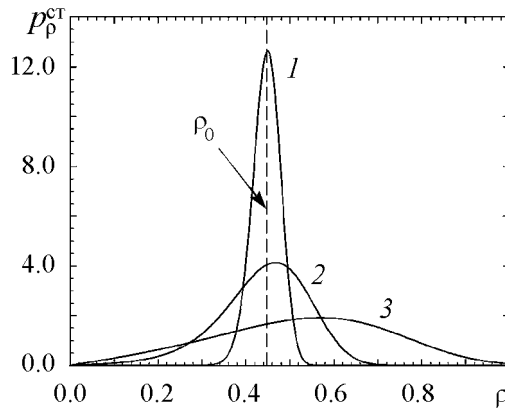


Рис. 2. Стационарные распределения амплитуды, рассчитанные по формуле (7) при различных значениях константы D : 1 – 0.0001; 2 – 0.001; 3 – 0.01. Пунктирной линией отмечено невозмущенное значение амплитуды

при больших интенсивностях шума начинает смещаться вправо от ρ_0 . Кроме того, для слабого шума (кривая 1) график плотности вероятности $p_{\rho}^{\text{ст}}(\rho)$ почти симметричен относительно ρ_0 . Это означает, что среднее значение амплитуды также близко к невозмущенному значению: $\bar{\rho} = \langle \rho(t) \rangle \approx \rho_0$.

При условии слабого шума и достаточно развитой генерации ($D \ll \varepsilon$) флуктуации амплитуды $\tilde{\rho}(t) = \rho(t) - \rho_0$ малы и могут быть описаны следующим линейным СДУ:

$$\dot{\tilde{\rho}} + \varepsilon \tilde{\rho} = \sqrt{D} n_1(t). \quad (9)$$

Оно задает так называемый одномерный процесс Орнштейна–Уленбека. Это –

гауссов диффузионный процесс. Так как в сделанных предположениях $\bar{\rho} \approx \rho_0$, то можно положить $\langle \tilde{\rho}(t) \rangle \equiv 0$. В пределе $t \rightarrow \infty$ процесс, задаваемый СДУ (9), является стационарным процессом с дисперсией

$$\sigma_{\tilde{\rho}}^2 = \langle \tilde{\rho}^2(t) \rangle = \frac{D}{2\varepsilon} \quad (10)$$

и экспоненциально спадающей автокорреляционной функцией

$$\psi_{\tilde{\rho}}(\tau) = \langle \tilde{\rho}(t) \tilde{\rho}(t + \tau) \rangle = \sigma_{\tilde{\rho}}^2 \exp(-\varepsilon|\tau|), \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (11)$$

Случайная фаза автоколебаний. Случайная компонента фазы автоколебаний φ задается вторым уравнением системы (5), правая часть которого зависит от мгновенной амплитуды $\rho(t)$. В случае слабого шума ($D \ll \varepsilon$) и развитой генерации ($0 < \varepsilon < 1$) мы можем пренебречь амплитудными флуктуациями по сравнению с

невозмущенным значением ρ_0 и заменить переменную величину $\rho(t)$ на константу ρ_0 . В таком приближении приходим к модели винеровского процесса для флуктуаций фазы $\varphi(t)$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2B_\varphi} n_2(t), \quad (12)$$

где $B_\varphi = \text{const}$ – коэффициент диффузии фазы, определяемый выражением

$$B_\varphi = \frac{1}{2} \frac{D}{\rho_0^2} = \frac{D}{8\varepsilon}, \quad \rho_0 = 2\sqrt{\varepsilon}. \quad (13)$$

Таким образом, $\varphi(t)$ – это нестационарный гауссов процесс со средним значением, определяемым начальным состоянием $\langle \varphi(t) \rangle = \varphi(t_0)$ и линейно растущей во времени дисперсией

$$\sigma_\varphi^2(t) = \frac{1}{2} B_\varphi \cdot (t - t_0). \quad (14)$$

Очевидно дисперсия полной фазы автоколебаний $\Phi(t) = t + \varphi(t)$ совпадает с $\sigma_\varphi^2(t)$. Из замены (3) следует, что фаза $\Phi(t)$ автогенератора (2) в любой момент времени может быть вычислена как

$$\Phi(t) = \text{arctg} \left(\frac{-\dot{X}(t)}{X(t)} \right) \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Выбор целого k определяется условием непрерывности функции $\Phi(t)$. Результат численного расчета дисперсии мгновенной фазы $\Phi(t)$ автогенератора (2) представлен на рис. 3. Угловой коэффициент численно полученной линейной зависимости полностью совпадает с теоретическим значением $2B_\varphi = D/4\varepsilon = 0.0005$.

Кроме переменной $\varphi(t) \in (-\infty; \infty)$ часто рассматривают случайную фазу, принимающую значения в ограниченном интервале $[-\pi; \pi]$ или $[0; 2\pi]$,

$$\phi(t) = \varphi(t) + 2\pi\nu, \quad (16)$$

где ν – некоторая целочисленная случайная функция. Представляя колебания в виде $X(t) = \rho(t) \cos(t + \varphi(t))$ можно заменить переменную $\varphi(t)$ на переменную $\phi(t)$. В силу 2π -периодичности косинуса процесс $X(t)$ от этого не изменится, однако использовать ограниченную переменную $\phi(t)$ в некоторых случаях оказывается удобнее, поскольку она имеет в пределе $t \rightarrow \infty$ стационарное равномерное распределение.

Автокорреляционная функция и спектр автоколебаний в присутствии шума. В рамках квазигармонического приближения можно получить известное выражение для автокорреляционной функции (АКФ) колебаний в зашумленном автогенераторе, задаваемом укороченными СДУ (5)

$$\psi_X(\tau) = \frac{1}{2} (\psi_\rho(\tau) + \rho_0^2) e^{-B_\varphi |\tau|} \cos \tau, \quad \tau = t_2 - t_1, \quad (17)$$

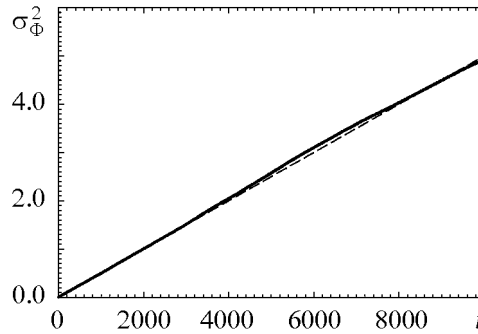


Рис. 3. Зависимость дисперсии мгновенной фазы Φ от времени, полученная численно для системы (2) при $\varepsilon = 0.05$, $D = 0.0001$ (сплошная линия) и по формуле (14) (штриховая линия)

где $\psi_\rho(\tau)$ определяется выражением (11). При выводе выражений (17), флуктуации амплитуды относительно невозмущенного значения ρ_0 предполагаются малыми, так что в фазовом уравнении можно положить $\rho(t) = \rho_0$. Тем самым мы пренебрегаем статистической зависимостью мгновенной фазы от мгновенной амплитуды и приходим к модели винерова процесса для фазы φ . При малой интенсивности шума $D \ll \varepsilon$ такое приближение является вполне приемлемым. На рис. 4 представлена нормированная АКФ колебаний генератора (2) $\Psi_X(\tau) = \psi_X(\tau)/\psi_X(0)$, полученная численно непосредственно из определения АКФ процесса $X(t)$

$$\psi_X(\tau) = \langle X(t)X(t+\tau) \rangle - \langle X(t) \rangle \langle X(t+\tau) \rangle, \quad (18)$$

где в предположении эргодичности процесса $X(t)$ статистическое усреднение $\langle \dots \rangle$ заменялось усреднением по времени. Для сравнения на том же графике пунктиром

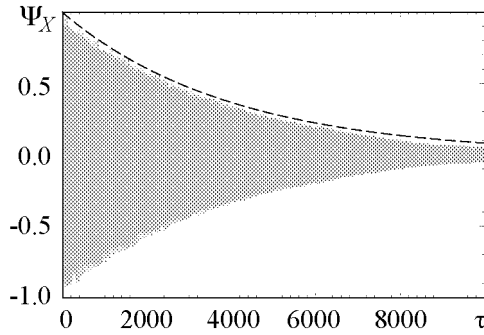


Рис. 4. Нормированная АКФ колебаний $X(t)$ в системе (2) при $\varepsilon = 0.05$, $D = 0.0001$, рассчитанная по формуле (18) (серый цвет), и нормированная огибающая, соответствующая теоретическому выражению (17) (штриховая линия)

нанесена нормированная огибающая теоретической автокорреляционной функции, рассчитанная при тех же значениях параметров ε и D по формуле (17). Можно видеть, что приближенная теория и численный результат находятся в полном соответствии. С ростом интенсивности шума флуктуации амплитуды будут возрастать и их влияние на поведение мгновенной фазы станет существенным. В этом случае результаты вычислений по формуле (17) и данные численного моделирования могут заметно отличаться.

Спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$ связана с АКФ следующим соотношением:

$$G_X(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_X(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau + 4\pi \bar{X}^2 \delta(\omega), \quad j = \sqrt{-1}, \quad \omega \geq 0. \quad (19)$$

Учитывая, что среднее значение \bar{X} равно нулю, получаем спектр в виде суммы двух лоренцианов, со спектральными максимумами на частоте невозмущенных автоколебаний, приведенной к единице:

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= G_I(\omega) + G_{II}(\omega), \\ G_I(\omega) &= \frac{\rho_0^2 B_\varphi}{B_\varphi^2 + (\omega - 1)^2}, \\ G_{II}(\omega) &= \frac{\sigma_\rho^2 (B_\varphi + \varepsilon)}{(B_\varphi + \varepsilon)^2 + (\omega - 1)^2} \approx \frac{\sigma_\rho^2 \varepsilon}{\varepsilon^2 + (\omega - 1)^2} \quad (B_\varphi \ll \varepsilon). \end{aligned} \quad (20)$$

Слагаемое G_I связано с флуктуациям фазы. Ширина этой компоненты на уровне половинной мощности равна $2B_\varphi$, а значение в максимуме есть ρ_0^2/B_φ . Поскольку при слабом шуме величина B_φ очень мала, то лоренциан G_I является очень узким и высоким. Напротив, слагаемое G_{II} определяется, главным образом, флуктуациями амплитуды. Ширина этой компоненты на уровне половинной мощность есть примерно 2ε , то есть относительно велика, а значение в максимуме, приблизительно

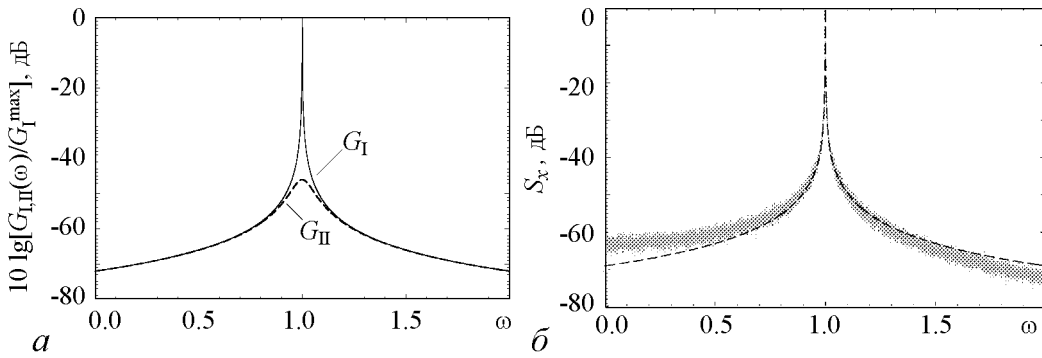


Рис. 5. Спектральные характеристики автогенератора при $\epsilon = 0.05$, $D = 0.0001$: a – нормированные функции $G_I(\omega)$ и $G_{II}(\omega)$, рассчитанные по формулам (20) в децибелах; b – нормированный спектр колебаний $X(t)$, полученный численно для системы (2) (серая сплошная линия) и теоретически по формулам (20) (штриховая линия)

равное σ_p^2/ϵ , мало. Таким образом, при условии слабого шума и развитой квазигармонической генерации спектр автоколебаний состоит из узкой спектральной линии на частоте автогенерации, ширина которой определяется коэффициентом диффузии фазы и широкополосного низкого пьедестала, в основном связанного с амплитудными флуктуациями.

Рассчитанные по формулам (20) слагаемые G_I и G_{II} , отнормированные на величину $G_I^{\max} = G_I(1)$, представлены на рис. 5, a . На рис. 5, b приведен нормированный спектр колебаний генератора (2)

$$S_X(\omega) = 10 \lg \left[\frac{G_X(\omega)}{G_X^{\max}} \right], \quad (21)$$

полученный численно. Здесь $G_X^{\max} = G_X(1)$. Штриховой линией показан теоретический спектр. При выбранных параметрах данные приближенной теории достаточно хорошо соответствуют численному эксперименту.

2. Спектрально-корреляционный анализ автоколебаний в генераторах спирального хаоса (численные исследования)

Спиральный хаотический аттрактор детально изучен и представляет собой очень распространенный пример негиперболического хаотического аттрактора, типичный для широкого класса динамических систем. Для спирального хаотического аттрактора характерно почти регулярное вращение фазовой траектории вокруг состояния равновесия и наличие четко выраженного спектрального максимума на частоте, соответствующей средней частоте вращения. По указанным причинам к спиральному аттрактору можно применить амплитудно-фазовое описание [2, 3].

Классический пример автогенератора хаоса – осциллятор Рёсслера. Уравнения осциллятора имеют вид

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu). \quad (22)$$

В (22) будем полагать, что $\alpha = \beta = 0.2$, а μ рассматривать в качестве управляющего параметра. В зависимости от выбора значения μ система может находиться в режиме периодических автоколебаний, спирального или винтового хаотического аттрактора.

Другим примером служит модифицированный генератор с инерционной нелинейностью (ГИН)

$$\dot{x} = mx + y - z + bx^3, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = -gz + gf(x). \quad (23)$$

В качестве нелинейной характеристики $f(x)$ в (23) может быть выбрана любая положительно определенная при $x > 0$ функция, не являющаяся четной. Будем полагать

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|). \quad (24)$$

Параметры m и g управляют режимом автогенератора, который, как и в осцилляторе Рёсслера, может быть периодическим или хаотическим.

Мгновенную фазу $\Phi(t)$ автогенераторов (22) и (23) введем аналогично фазе в генераторе ван дер Поля (15) как угол вращения изображающей точки на плоскости динамических переменных x, y

$$\Phi(t) = \left| \arctg \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right) \pm \pi k \right|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Величина $\pm \pi k$ выбирается таким образом, чтобы фаза была непрерывной функцией времени. Мгновенная амплитуда колебаний есть длина радиус-вектора, исходящего из начала координат,

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}. \quad (26)$$

Рассмотрим режим спирального аттрактора в модели (22) при $\mu = 6.5$. Вид (x, y) -проекции (рис. 6, *a*) соответствует режиму спирального аттрактора. Распределение амплитуды $\rho(t)$ хаотических колебаний (рис. 6, *б*) сильно отличается от аналогичного распределения в зашумленном квазигармоническом генераторе (см. рис. 2) и в окрестности среднего значения амплитуды $\rho_0 = \langle \rho(t) \rangle$ является далеким от гауссова. Разумеется, автоколебания осциллятора Рёсслера сильно отличаются от квазигармонических автоколебаний зашумленного осциллятора ван дер Поля. В то же время, с точки зрения поведения мгновенной фазы и связанных с ней характеристик наблюдается много общего. Распределение флуктуаций мгновенной фазы $\varphi(t) = \Phi(t) - \langle \Phi(t) \rangle$, рассчитанное на ансамбле фазовых траекторий одинаковой длины, достаточно хорошо аппроксимируется гауссовым законом (рис. 6, *в*). Дисперсия мгновенной фазы хаотических автоколебаний растет почти линейно (рис. 6, *г*) подобно тому, как она росла в квазигармоническом осцилляторе с шумом (см. рис. 3).

Можно оценить по методу наименьших квадратов угловой коэффициент линейного роста дисперсии. Половину этого коэффициента называют эффективным коэффициентом диффузии мгновенной фазы хаотических автоколебаний B_{φ} . Для рассматриваемого режима в модели (22) было получено значение $B_{\varphi} = 0.00018 \pm 10^{-5}$. Напомним, что в данном случае диффузия фазы связана не с шумом, а только с детерминированной динамикой системы (22), в которой шум отсутствует.

Остановимся более подробно на спектрально-корреляционных характеристиках спирального хаоса. Как показывают расчеты, АКФ колебаний $x(t)$ в системе (22) в режиме спирального аттрактора очень хорошо аппроксимируется выражением (17), где вместо B_{φ} следует взять B_{φ} . На рис. 7, *a* приведен результат расчета АКФ колебаний $x(t)$ в системе (22) по формуле (18) с учетом нормировки. Там же изображена

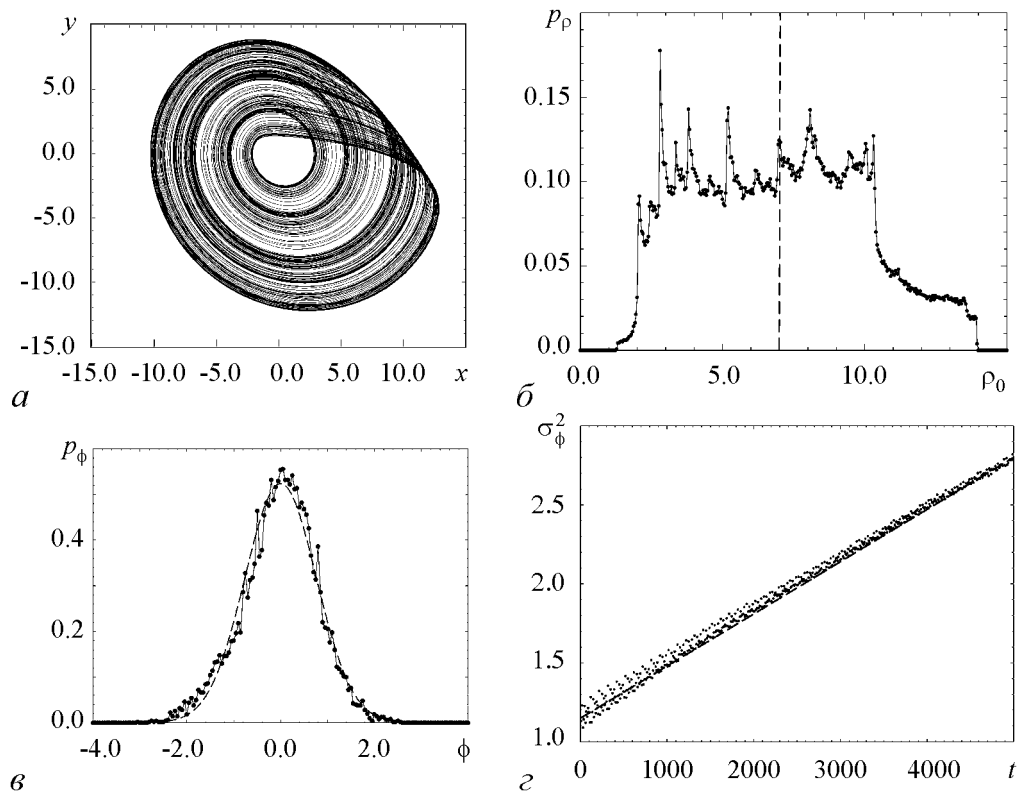


Рис. 6. Характеристики спирального аттрактора в модели (22) при $\mu = 6.5$: *a* – (x, y) -проекция аттрактора; *b* – распределение амплитуды хаотических колебаний; *c* – распределение флуктуаций мгновенной фазы в момент $t = 1000$ при начальном распределении в пределах интервала $[-\pi/30; \pi/30]$ и его гауссова аппроксимация (штриховая линия); *d* – зависимость дисперсии мгновенной фазы от времени (точки) и ее линейная аппроксимация (штриховая линия)

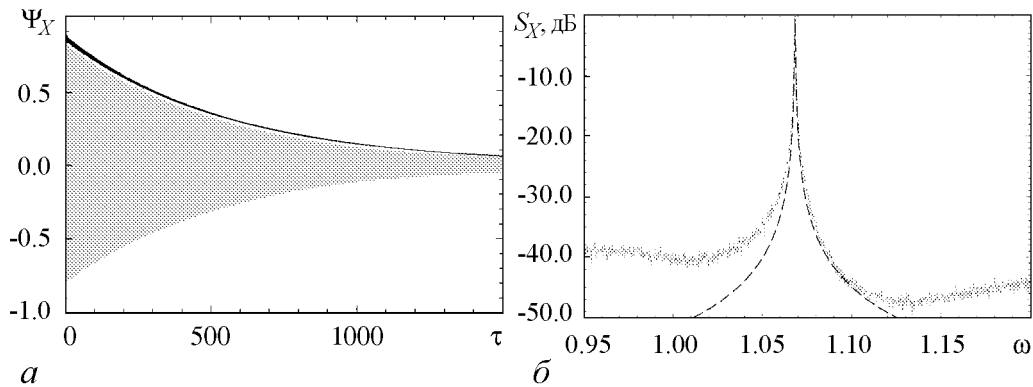


Рис. 7. Результаты спектрально-корреляционного исследования хаотических автоколебаний в системе Рёсслера (22) при $\mu = 6.5$: *a* – нормированная АКФ колебаний $x(t)$ в системе (22), рассчитанная по формуле (18) (серые точки), и нормированная огибающая, соответствующая выражению (17) при $B_\phi = B_{\phi_0}$ (черные точки); *b* – фрагмент нормированного спектра колебаний $x(t)$ (сплошная серая кривая) и аппроксимация основной спектральной линии по формуле (27) (штриховая линия). При аппроксимации использовались численно полученные значения коэффициента эффективной диффузии фазы B_{ϕ_0} и частоты максимума ω_0 : $B_{\phi_0} = 0.00018 \pm 10^{-5}$; $\omega_0 = 1.0683 \pm 10^{-4}$

нормированная огибающая, соответствующая выражению (17) при $B_\varphi = B_{\text{эф}}$ и численно полученных значениях $\psi_\rho(\tau)$. Таким образом, учитывалось поведение не только фазы, но и амплитуды колебаний, так как в рассматриваемом хаотическом режиме флуктуации амплитуды являются существенными. На рис. 8 приведены результаты расчета ненормированной автокорреляционной функции амплитудных флуктуаций $\psi_\rho(\tau)$. Как видно из графика, $\psi_\rho(\tau)$ при $\tau = 0$ имеет значительную величину и резко

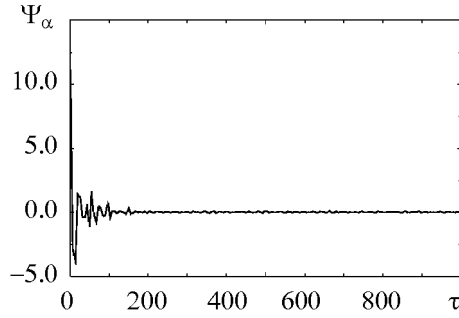


Рис. 8. Результаты расчета ненормированной автокорреляционной функции амплитудных флуктуаций $\psi_\rho(\tau)$ для системы Рёсслера (22) при $\mu = 6.5$

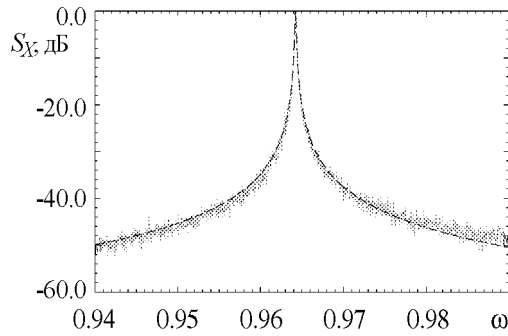


Рис. 9. Фрагмент нормированного спектра колебаний $x(t)$ в (23) при $m = 1.35$, $g = 0.21$, $b = 0.0001$ (сплошная серая линия) и аппроксимация основной спектральной линии по формуле (27) с коэффициентом эффективной диффузии фазы $B_{\text{эф}} = 0.00008 \pm 10^{-5}$ и частотой максимума $\omega_0 = 0.9642 \pm 10^{-4}$ (штриховая линия)

без учета амплитудных флуктуаций. Последние проявляются в спектре в форме широкополосного пьедестала на уровне менее -40 дБ. Ширина основной спектральной линии на уровне половинной мощности определяется коэффициентом эффективной диффузии фазы и, в пределах погрешности численных расчетов, равна $2B_{\text{эф}}$.

Аналогичные результаты были получены для генератора с инерционной нелинейностью (23) (рис. 9) и для других моделей хаотических автогенераторов в режиме спирального аттрактора, что позволяет говорить об их универсальном характере.

Влияние белого шума на хаотические автоколебания в режиме спирального аттрактора. Исследуем, как повлияет аддитивный белый шум на поведение мгновенной фазы хаотических автоколебаний в режиме спирального аттрактора. Рассмотрим модель (22), добавив в нее белый гауссов шум $n(t)$ ($\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$),

$$\dot{X} = -Y - Z + \sqrt{2D}n(t), \quad \dot{Y} = X + \alpha Y, \quad \dot{Z} = \beta + Z(X - \mu), \quad (29)$$

Именно с амплитудными флуктуациями связан спад на начальном участке АКФ, который заметен на графике рис. 7, а. Фрагмент нормированного спектра колебаний $x(t)$ в том же режиме представлен на рис. 7, б. Пунктирной линией изображена аппроксимация спектральной линии по формуле

$$S_x(\omega) = 10 \lg \left[\frac{G_x(\omega)}{G_x^{\max}} \right] = 10 \lg \left[\frac{B_{\text{эф}}^2}{B_{\text{эф}}^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right], \quad (27)$$

где $\omega_0 = 1.0683 \pm 10^{-4}$ — численно полученная частота главного спектрального максимума, совпадающая в пределах погрешности вычислений со средней частотой хаотических колебаний $\omega_{\text{ср}}$, определяемой выражением

$$\omega_{\text{ср}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t_0 + T) - \Phi(t_0)}{T}. \quad (28)$$

Таким образом, основная спектральная линия в режиме спирального аттрактора хорошо аппроксимируется лоренцианом в соответствии с (20), причем даже

где D – параметр, управляющий интенсивностью шумового воздействия. Численное исследование модели (29) и других моделей спирального хаоса показывает, что воздействие слабого белого шума не приводит к качественным изменениям поведения системы, в частности, характера поведения мгновенной фазы, однако, может существенно увеличить скорость перемешивания за счет увеличения коэффициента эффективной диффузии фазы. Исследуем зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{эф}$ от интенсивности белого шума в системе (29). Как следует из теории квазигармонического автогенератора, диффузия фазы прямо-пропорциональна интенсивности шума D . Можно предположить линейный характер зависимости $B_{эф}(D)$ и в случае хаотического генератора, но при этом необходимо учесть, что хаотические автоколебания в отсутствие шума обладают собственным коэффициентом эффективной диффузии фазы $B_{эф}(0)$. Тогда получим

$$B_{эф} = c_1 D + c_2, \quad (30)$$

где c_1 – некоторый коэффициент пропорциональности, определяемый характеристиками хаотических колебаний, а $c_2 = B_{эф}(0)$ – коэффициент эффективной диффузии фазы хаотических автоколебаний при $D = 0$. На рис. 10 в логарифмическом масштабе представлена зависимость $B_{эф}$ от интенсивности шума D , полученная численно для модели (29). Штриховой линией изображена ее линейная аппроксимация (30). Коэффициенты c_1 и c_2 находились по методу наименьших квадратов. В целом данные численного эксперимента разбросаны в окрестности линейной зависимости, причем полученное в результате линейной аппроксимации значение $c_2 = 0.00020$ близко к численно найденному значению коэффициента диффузии: $B_{эф}(0) = 0.00018$. Соответственно с ростом $B_{эф}$ возрастает скорость экспоненциального затухания АКФ хаотических колебаний и ширина основной спектральной линии.

Исследование динамики мгновенной фазы и спектральных характеристик автогенератора со спиральным аттрактором в физическом эксперименте. Статистические характеристики источников шума, неизбежно присутствующих в реальных устройствах, не всегда удается правильно определить. Поэтому, установленные для математической модели закономерности в реальности могут нарушаться. Чтобы подтвердить наблюдаемость установленных закономерностей, в реальных системах были проведены соответствующие физические эксперименты. Была создана измерительная установка, включающая исследуемую систему, компьютер, АЦП, и генератор гауссова широкополосного шума с полосой частот от 0 до 100 кГц (рис. 11).

В качестве исследуемой системы был выбран модифицированный ГИН, представляющий собой реальный радиотехнический автогенератор с мостом Вина и цепочкой инерционной нелинейности, контролирующей коэффициент усиления усилительного каскада. В безразмерных переменных математическая модель ГИН задается системой уравнений (23). Значения параметров m и g выбирались соответствующими режиму спирального хаоса. При заданной настройке моста Вина основная частота хаотических колебаний f_0 составляла 18.5 кГц. Частота дискретизации АЦП

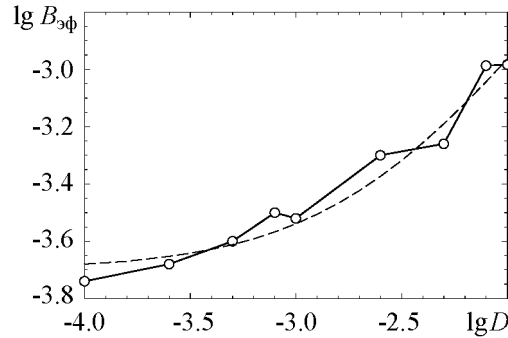


Рис. 10. Зависимость коэффициента эффективной диффузии фазы $B_{эф}$ от интенсивности шума D (сплошная кривая) и ее линейная аппроксимация по методу наименьших квадратов (штриховая линия)

выбиралась равной 694.44 кГц. Кроме внутренних источников шума на экспериментальный генератор воздействовал широкополосный шум от внешнего генератора, интенсивность которого можно было регулировать.

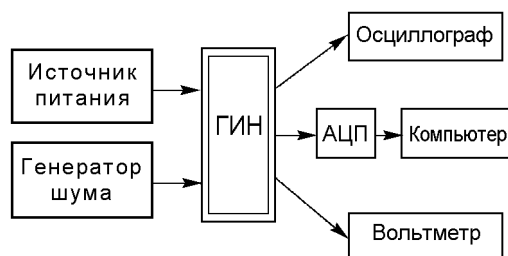


Рис. 11. Схема экспериментальной установки

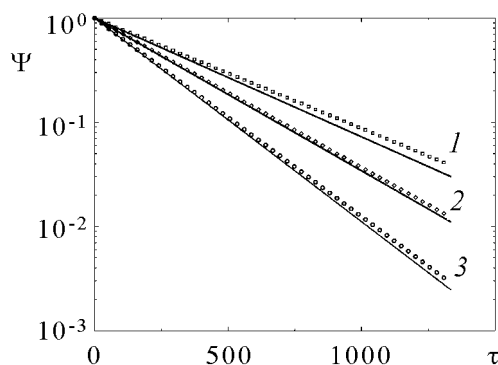


Рис. 12. Огибающие автокорреляционных функций (сплошные линии), полученные в эксперименте при различных значениях дисперсии внешнего шума D : 1 – 0, 2 – 0.0005 мВ, 3 – 0.001 мВ, и их экспоненциальные аппроксимации («кружочки») с декрементами затухания $B_{эф}$: 0.00024, 0.00033, 0.000439, соответственно

эффективной диффузии мгновенной фазы, найденный по экспериментальным данным (флуктуации амплитуды в ГИН относительно малы, так что при аппроксимации АКФ их можно не учитывать).

Аналогичные результаты физических экспериментов, находящиеся в полном соответствии с результатами численных исследований, были получены также для аналоговой модели осциллятора Рёсслера. Таким образом, физические эксперименты показали, что спектрально-корреляционные свойства хаотических автоколебаний в режиме спирального аттрактора и их связь с коэффициентом эффективной диффузии фазы являются достаточно грубыми по отношению к характеристикам источников шума и четко наблюдаются в экспериментах.

Заключение

Результаты анализа статистических характеристик колебаний зашумленного квазигармонического генератора на примере классической модели ван дер Поля показали следующее. Воздействие слабого δ -коррелированного шума приводит к установлению в генераторе случайных колебаний, математической моделью которых служит так называемый «гармонический шум»

$$X(t) = \rho(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (31)$$

Здесь $\rho(t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(t)$ – случайная амплитуда, $\varphi(t)$ – случайная фаза процесса $X(t)$. Причем, в силу фильтрующих свойств резонансного контура генератора, флуктуации амплитуды $\tilde{\rho}(t)$ и фазы $\varphi(t)$ являются медленно меняющимися функциями в сравнении с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ колебаний генератора.

Автокорреляционная функция случайного процесса $X(t)$ выражается следующим образом:

$$\psi_X(\tau) = \frac{1}{2}(\psi_\rho(\tau) + \rho_0^2) \exp(-B_\varphi|\tau|) \cos \omega\tau, \quad (32)$$

где $\psi_\rho(\tau)$ – АКФ амплитудных флуктуаций. Для квазигармонического зашумленного генератора амплитудные флуктуации малы и огибающая АКФ $\psi(\tau)$ спадает с ростом τ экспоненциально. Скорость спада определяется коэффициентом диффузии случайной фазы B_φ , которая представляет собой нестационарный винеровский процесс.

Выражения (31) и (32) могут быть применены к описанию статистических процессов в генераторах спирального (или фазокогерентного) хаоса. В этом случае вместо коэффициента диффузии фазы B_φ нужно использовать эффективный коэффициент диффузии фазы $B_{\varphi\text{эф}}$. При этом отметим, что в режиме спирального хаоса даже в отсутствие флуктуаций $B_{\varphi\text{эф}} > 0$. Этот факт еще раз убедительно свидетельствует о том, что режим детерминированного хаоса проявляет свойства случайного процесса, несмотря на то, что обусловлен детерминированными динамическими закономерностями.

Работа выполнена в рамках АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы на 2009–2010 годы» Министерства образования и науки РФ (грант № 2.2.2.2/229) и при поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF).

Библиографический список

1. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
2. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И. Статистические свойства динамического хаоса // УФН. 2005. Т. 175, № 2. С. 163.
3. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. М.: Интеллект, 2009.

Поступила в редакцию 23.06.2009

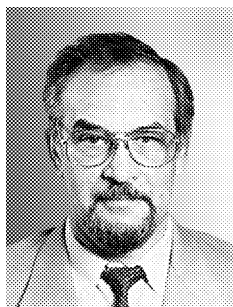
SELF-SUSTAINED OSCILLATIONS IN QUASIHARMONIC AND CHAOTIC OSCILLATORS IN THE PRESENCE OF FLUCTUATIONS

V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova

The paper presents the results of the classical theory of fluctuations in the quasi-harmonic van der Pol oscillator. Stochastic equations for amplitude and phase of self-sustained oscillations are formulated and then their solutions are analyzed. The auto-correlation function and power spectrum of noisy self-sustained oscillations are studied.

Then the spectral and correlations characteristics of chaotic self-sustained oscillations are numerically analyzed in spiral chaos oscillators. Statistical characteristics of spiral chaos are explored both without and in the presence of fluctuations, and the obtained results are compared with the classical theory of fluctuations in the van der Pol oscillator.

Keywords: Spiral attractor, noisy self-sustained oscillations, harmonic noise, correlation time, spectral line width.



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 350 научных работ, среди которых 14 монографий на русском и английском языках и 6 учебников. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Саратовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: wadim@info.sgu.ru



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vadivasovate@yandex.ru



Стрелкова Галина Ивановна – окончила Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (1993), защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1998). С 1994 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики ведущим инженером, с 2008 года – доцентом. Область научных интересов – теория колебаний, нелинейная динамика, синхронизация. Опубликовала в соавторстве научную монографию «Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах», 35 научных статей и 3 учебных пособия.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: strelkovagi@info.sgu.ru