



СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РАВНОВЕСИЙ И ЦИКЛОВ ОДНОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

И.А. Баширцева, Л.Б. Ряшко, И.Н. Цветков

На примере нелинейной популяционной модели Ферхюльста исследуется чувствительность циклов системы к случайным возмущениям. Анализ стохастической чувствительности осуществляется с использованием систем первого приближения. Демонстрируется соответствие полученных в численном эксперименте результатов теоретическим. Выявлена закономерность роста чувствительности циклов системы Ферхюльста при переходе к хаосу через каскады бифуркаций удвоения периода.

Ключевые слова: Модель Ферхюльста, циклы, стохастическая чувствительность.

Введение

В литературе часто встречается утверждение об аналогии между переходами динамических систем от движений одного типа к движениям другого типа (например, от состояния равновесия к периодическому движению) и известными в статистической физике фазовыми переходами второго рода [1, 2]. Идея такой аналогии ведет свое начало от работы Г. Хакена [3] и в дальнейшем развита Ю.Л. Климонтовичем [4]. Эта аналогия оказалась весьма полезной, так как позволяет использовать методы теории фазовых переходов, например методы скейлинга и ренормализационной группы [5–7].

Регулярные аттракторы (равновесия и циклы) динамических систем, задаваемых детерминированными дискретными отображениями, являются классическими и наиболее изученными объектами современной теории устойчивости [8]. Прежде всего следует отметить исследования переходов от порядка к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода в соответствии с законом Фейгенбаума [9–14]. Анализ устойчивости периодических орбит данных систем и оценки показателей Ляпунова приведены в работах [15–18].

В настоящее время внимание исследователей привлекает изучение реакций таких систем на внешние аддитивные и внутренние параметрические случайные возмущения. Большое число работ посвящено исследованию как переходных процессов, так и установившихся режимов – стохастических аттракторов [19–21]. В работах [22–26] показано влияние внешних возмущений на показатели Ляпунова и на интенсивность сплошного спектра цикла. Анализ скейлинга в цепи удвоения периода циклов при переходе к хаосу для стохастически возмущенных дискретных динамических систем посвящены работы [27–29].

Полное вероятностное описание случайных состояний системы требует построения функции плотности распределения. Изменение вероятностного распределения во времени задается соответствующим дискретным функциональным уравнением, решение которого даже в одномерном случае связано с большими сложностями. Здесь, наряду с известными проблемами численного решения, возникает необходимость знания закона распределения действующих случайных возмущений. Такая подробная вероятностная информация, как правило, недоступна. Типичной является ситуация, когда известными являются лишь оценки первых двух моментов. В этих обстоятельствах представляет интерес задача получения асимптотических характеристик первых двух моментов случайных состояний динамической системы для возмущений малой интенсивности. Действительно, для случая малых шумов, когда случайные состояния стохастических аттракторов локализируются вблизи соответствующих аттракторов детерминированных систем, отклонения случайно возмущенных траекторий от невозмущенных детерминированных решений можно описать линейными приближениями. Для систем с непрерывным временем, задаваемых стохастическими дифференциальными уравнениями, такой подход реализован на основе теории квазипотенциала с последующей аппроксимацией с помощью функции стохастической чувствительности [30–33].

Метод функции стохастической чувствительности (ФСЧ) для систем из двух стохастических дифференциальных уравнений впервые был описан в [30], где с помощью этого метода была найдена зона сверхчувствительности циклов брюсселятора к случайным возмущениям. Возможности метода ФСЧ для систем Лоренца и Ресслера в зоне удвоения периода исследованы в [31, 32]. В работе [33] представлен общий метод построения ФСЧ для циклов трехмерных систем, использующий технику спектрального разложения. Исследованию возможностей ФСЧ в задачах конструирования систем с циклами, имеющими заданные вероятностные характеристики, и подавления хаоса, посвящена работа [34].

Данная работа посвящена распространению аналогичного подхода на дискретные динамические системы.

В разделе 1 вводится конструкция функции стохастической чувствительности для равновесий и циклов общей одномерной дискретной динамической системы. Здесь для значений ФСЧ получены явные параметрические формулы. В разделе 2 на основе метода ФСЧ проводится анализ стохастически возмущенного квадратичного отображения – модели Ферхюльста. Детально исследована стохастическая чувствительность аттракторов (равновесий и циклов) в зонах структурной устойчивости. Показано, что при переходе от порядка к хаосу в цепи бифуркаций удвоения периода стохастическая чувствительность аттракторов растет как геометрическая прогрессия.

1. Функция стохастической чувствительности

Рассмотрим стохастическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t, \quad (1)$$

где $f(x)$ – достаточно гладкая функция, а ξ_t – некоррелированный случайный процесс с параметрами

$$E\xi_t = 0, \quad E\xi_t^2 = 1, \quad E\xi_t \xi_k = 0 \quad (t \neq k),$$

E – знак математического ожидания. Функция $\sigma(x)$ позволяет учесть зависимость интенсивности помех от состояния системы. Пусть \bar{x}_t – решение детерминированной системы (1) при $\varepsilon = 0$. Рассмотрим x_t^ε – решение (1) с начальным условием $x_0^\varepsilon = \bar{x}_0 + \varepsilon\xi$. При малых ε чувствительность детерминированного решения \bar{x}_t к случайным возмущениям определяется величиной

$$v_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_t^\varepsilon - \bar{x}_t}{\varepsilon}.$$

Для v_t справедлива система

$$v_{t+1} = a_t v_t + \sigma_t \xi_t, \quad (2)$$

где $a_t = df(\bar{x}_t)/dx$, $\sigma_t = \sigma(\bar{x}_t)$, $v_0 = \xi$. Стохастическая динамика последовательности v_t определяется изменением первых моментов $m_t = Ev_t$, $V_t = Ev_t^2$. Для m_t и V_t справедливы следующие уравнения:

$$m_{t+1} = a_t m_t, \quad (3)$$

$$V_{t+1} = a_t^2 V_t + \sigma_t^2 \quad (4)$$

с начальным условием $m_0 = E\xi$, $V_0 = E\xi^2$.

В данной работе исследуется стохастическая чувствительность стационарного и периодических решений. Пусть в системе (1) при $\varepsilon = 0$ имеется устойчивое равновесие $\bar{x}_t \equiv \bar{x}$. В этом случае системы (2) – (4) имеют вид

$$v_{t+1} = a v_t + \sigma \xi_t,$$

$$m_{t+1} = a m_t,$$

$$V_{t+1} = a^2 V_t + \sigma^2,$$

где $a = df(\bar{x})/dx$, $\sigma = \sigma(\bar{x})$. Неравенство $|a| < 1$ является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости равновесия \bar{x} . При этом последовательности m_t и V_t стабилизируются следующим образом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_t = w = \frac{\sigma^2}{1 - a^2}. \quad (5)$$

При малом ε в системе (1) вокруг устойчивого равновесия \bar{x} формируется стационарное распределение состояний \bar{x}_t^ε с дисперсией $D(\bar{x}_t^\varepsilon)$. Рассмотрим отношение

$$w = \frac{1}{\varepsilon^2} D(\bar{x}_t^\varepsilon).$$

Величина $\varepsilon^2 w$ является первым приближением $D(\bar{x}_t^\varepsilon)$. Связывая в системе (1) значения входа ε^2 и выхода $D(\bar{x}_t^\varepsilon) \approx \varepsilon^2 w$, w играет роль *коэффициента стохастической чувствительности* равновесия \bar{x} .

Рассмотрим теперь случай, когда система (1) при $\varepsilon = 0$ имеет k -цикл Γ – множество точек $\Gamma = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$, связанных соотношениями

$$f(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, k-1), \quad f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1.$$

Считаем, что последовательность \bar{x}_t определена при всех t с условием периодичности $\bar{x}_{t+k} = \bar{x}_t$. Предполагается, что цикл Γ является экспоненциально устойчивым. В этом случае системы (2)–(4) имеют периодические коэффициенты

$$a_{t+k} = a_t, \quad \sigma_{t+k} = \sigma_t.$$

Пусть $a = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$. Неравенство $|a| < 1$ является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла. При этом последовательность m_t стремится к нулю, а последовательность V_t сходится к периодической последовательности w_t ($w_{t+k} = w_t$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (V_t - w_t) = 0.$$

Элементы последовательности w_t могут быть найдены следующим образом: величина w_1 находится по явной формуле $w_1 = q/(1 - a^2)$, $q = \sigma_k^2 + a_k^2 \sigma_{k-1}^2 + \dots + (a_k \cdot \dots \cdot a_2)^2 \sigma_1^2$, а остальные w_i находятся рекуррентно (см. Приложение)

$$w_i = a_{i-1}^2 w_{i-1} + \sigma_{i-1}^2 \quad (i = 2, \dots, k).$$

Условие $|a| < 1$ гарантирует у системы (1) при малых шумах существование стационарно распределенного решения. Величины $\varepsilon^2 w_t$ являются первым приближением дисперсии этого стационарно распределенного решения в окрестности точки \bar{x}_t цикла Γ .

Значения w_1, \dots, w_k введенной здесь k -периодической функции w_t характеризуют реакцию точек $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ цикла Γ на малые случайные воздействия системы (1). Функцию w_t будем называть *функцией стохастической чувствительности цикла*.

Явные формулы для значений функции стохастической чувствительности.

Случай 2-цикла. Для цикла, состоящего из двух точек \bar{x}_1, \bar{x}_2 , имеем

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 + a_2^2 \sigma_1^2}{1 - a_1^2 a_2^2}, \quad w_2 = \frac{\sigma_1^2 + a_1^2 \sigma_2^2}{1 - a_1^2 a_2^2}.$$

Случай k -цикла. Пусть цикл Γ состоит из точек $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$. Тогда для каждой точки \bar{x}_i функция стохастической чувствительности находится по явной формуле

$$w_i = \frac{\sigma_{k+i-1}^2 + \sigma_{k+i-2}^2 a_{k+i-1}^2 + \dots + \sigma_i^2 \prod_{j=1; j \neq i}^k a_j^2}{1 - \prod_{j=1}^k a_j^2}. \quad (6)$$

Величины $m = \min_{i=1, \dots, k} w_i$, $M = \max_{i=1, \dots, k} w_i$ характеризуют диапазон изменения стохастической чувствительности состояний k -цикла. Их отношение M/m может служить показателем неравномерности стохастической чувствительности цикла. Величину M удобно использовать в качестве характеристики стохастической чувствительности аттрактора в целом; будем называть ее показателем стохастической чувствительности.

2. Система Ферхюльста

Рассмотрим стохастическую систему Ферхюльста

$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t) + \varepsilon \xi_t, \quad (7)$$

где ξ_t – независимые случайные величины с параметрами $E\xi_t = 0$, $E\xi_t^2 = 1$, а ε – интенсивность шумов.

При отсутствии случайных возмущений ($\varepsilon = 0$) детерминированная модель (7) имеет на интервале $0 \leq \mu \leq 4$ различные типы динамики. Зоны порядка чередуются с зонами хаоса (рис. 1). На интервале $I = (1, \mu_\infty)$, где наблюдаются бифуркации удвоения периода, можно выделить зоны структурной устойчивости с постоянной кратностью циклов, разделенные точками бифуркаций – интервалы I_0, I_1, \dots . На интервале I_n наблюдаются 2^n -циклы с состояниями $\bar{x}_{n,i}(\mu)$ ($i = 1, \dots, 2^n$). Точки аттрактора удобно упорядочить так, чтобы первой была точка цикла $\bar{x}_{n,1}$, являющаяся ближайшей к 0.5: $1 = \operatorname{argmin}_{i=1, \dots, 2^n} |\bar{x}_{n,i}(\mu) - 0.5|$. Для системы (7) имеем $I_0 = (1, 3)$, $I_1 \approx (3, 3.45)$, $I_2 \approx (3.45, 3.54)$ и т.д. При этом на I_0 имеем одну устойчивую точку покоя $\bar{x}_{0,1}(\mu) = 1 - 1/\mu$, на I_1 имеем 2-цикл с состояниями

$$\bar{x}_{1,1}(\mu) = \frac{\mu + 1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}, \quad \bar{x}_{1,2}(\mu) = \frac{\mu + 1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}.$$

С ростом параметра μ точки бифуркации накапливаются к значению $\mu_\infty = 3.5699\dots$

Рассмотрим бифуркационную диаграмму системы (7) при $\varepsilon = 0.001$. Под воздействием случайных возмущений траектории покидают аттрактор детерминированной системы (7), формируя вокруг него стохастический аттрактор с соответствующим стационарным вероятностным распределением. В присутствии шума тонкая структура детерминированного аттрактора размывается (рис. 2). Как видно из рисунка, разброс случайных состояний неоднороден. При изменении параметра μ на интервале структурной устойчивости дисперсия заметно меняется, резко возрастая вблизи точек бифуркации. На интервале I_1 наблюдается различие в разбросе случайных состояний вокруг точек $\bar{x}_{1,1}(\mu)$, $\bar{x}_{1,2}(\mu)$, соответствующих детерминированному 2-циклу: нижняя ветка размывается сильнее верхней.

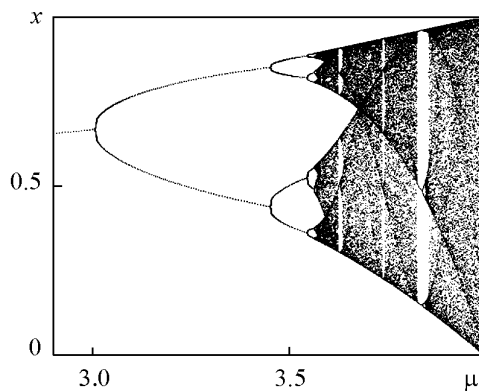


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма детерминированной модели Ферхюльста при отсутствии возмущений

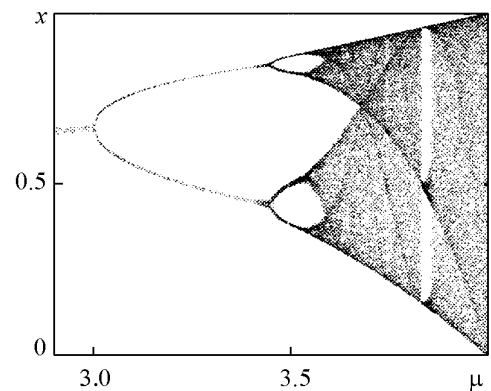


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в присутствии шума интенсивностью $\varepsilon = 0.001$

Детальную картину указанных особенностей зависимости разброса траекторий для различных точек аттрактора от параметра μ дает функция стохастической чувствительности. На каждом интервале структурной устойчивости I_n определен набор функций $w_{n,i}(\mu)$ ($i = 1, \dots, 2^n$), где $w_{n,i}(\mu)$ задает стохастическую чувствительность $\bar{x}_{n,i}$ i -го состояния 2^n -цикла при $\mu \in I_n$. Значения функции стохастической чувствительности на интервале I_n находятся по рекуррентным формулам

$$w_{n,1}(\mu) = \frac{q_n}{1 - a_n^2}, \quad a_n = a_{n,1} \dots a_{n,k}, \quad k = 2^n, \quad a_{n,i} = \mu(1 - 2\bar{x}_{n,i}(\mu)), \quad (8)$$

$$q_n = 1 + a_{n,k}^2 + a_{n,k}^2 a_{n,k-1}^2 + \dots + a_{n,k}^2 \dots a_{n,2}^2, \quad (9)$$

$$w_{n,i+1}(\mu) = a_{n,i}^2 w_{n,i}(\mu) + 1. \quad (10)$$

На интервалах I_0 и I_1 для функции стохастической чувствительности соответствующих аттракторов – равновесия $\bar{x}_{0,1}(\mu)$ и 2-цикла с состояниями $\bar{x}_{1,1}(\mu)$, $\bar{x}_{1,2}(\mu)$ – можно получить явное представление

$$w_{0,1}(\mu) = \frac{1}{1 - (2 - \mu)^2},$$

$$w_{1,1}(\mu) = \frac{2 + 2\sqrt{D} + D}{D(2 - D)}, \quad w_{1,2}(\mu) = \frac{2 - 2\sqrt{D} + D}{D(2 - D)}, \quad D = (\mu - 3)(\mu + 1).$$

По данным прямого численного моделирования решений стохастической системы (7) для выборки случайных состояний, разбросанных в окрестности точки $\bar{x}_{n,i}(\mu)$, можно найти эмпирическую дисперсию $D_{n,i}(\mu)$.

Величины $\bar{w}_{n,i}(\mu) = (1/\varepsilon^2)D_{n,i}(\mu)$ характеризуют стохастическую чувствительность аттракторов системы (7) при фиксированной интенсивности ε действующих шумов. На рис. 3 сплошными линиями изображены ветви функции стохастической чувствительности $w_{n,i}(\mu)$ на интервалах I_0, I_1, I_2, I_3 и звездочками отмечены значения $\bar{w}_{n,i}(\mu)$, полученные прямым численным моделированием решений системы (7) при шумах различной интенсивности. Как видим, при малых возмущениях теоретические кривые хорошо совпадают с эмпирическими данными. Однако, в силу высокой чувствительности системы вблизи точек бифуркаций, стохастическая чувствительность, полученная с помощью линейного приближения, не совпадает с эмпирическими данными для конечного шума. Эта разница становится более заметной с ростом кратности цикла и увеличением интенсивности возмущений.

В поведении ветвей функции стохастической чувствительности наблюдаются следующие общие закономерности. На интервале структурной устойчивости стохастическая чувствительность ведет себя достаточно регулярно: при приближении к концам интервала (точкам бифуркации) – неограниченно возрастает, выпукла вниз, имеет минимум в центральной части интервала. Стохастическая чувствительность элементов цикла существенно различается. При этом, чем выше кратность цикла, тем больше перепад значений функции стохастической чувствительности (см. рис. 3).

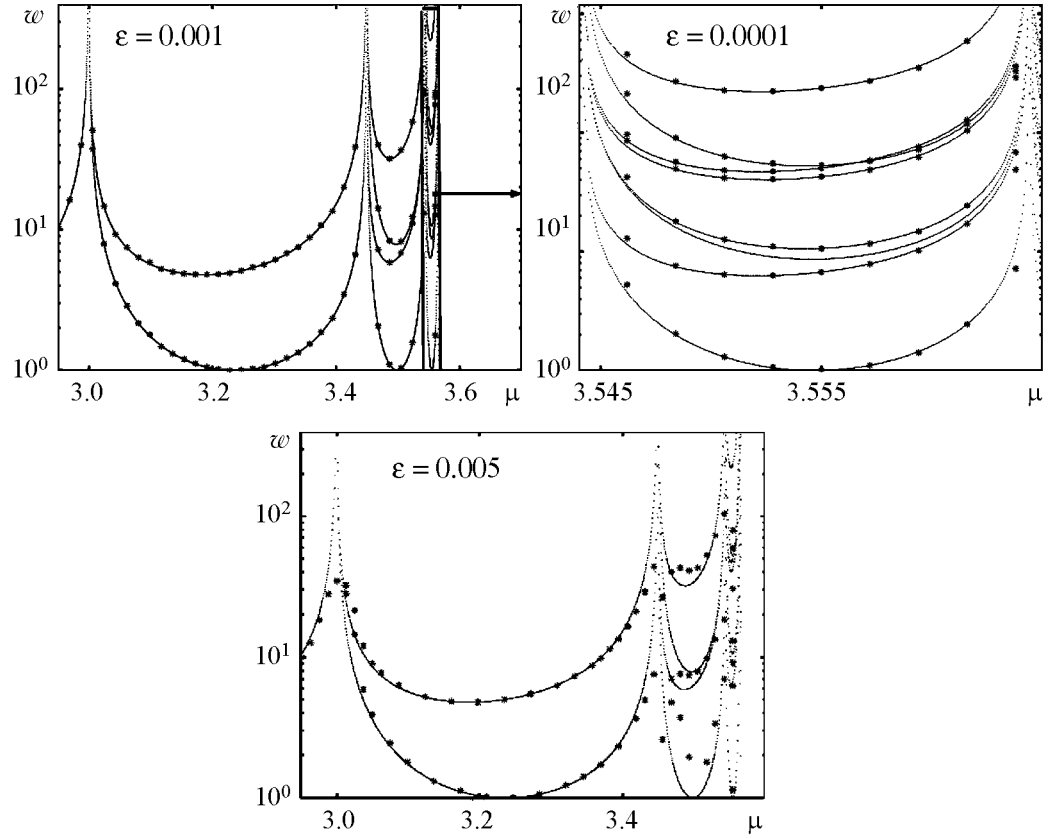


Рис. 3. Функции стохастической чувствительности

Рассмотрим функции m и M , задаваемые на каждом отдельном интервале I_n соотношениями

$$m(\mu) = \min_{i=1, \dots, 2^n} w_{n,i}(\mu), \quad M(\mu) = \max_{i=1, \dots, 2^n} w_{n,i}(\mu).$$

Рассмотрим зависимость функций $m(\mu)$, $M(\mu)$ и показателя неравномерности стохастической чувствительности $K = M/m$ от параметра μ . На каждом интервале I_n существует значение μ_n , при котором показатель $M(\mu)$ принимает наименьшее значение

$$\mu_n = \operatorname{argmin}_{\mu \in I_n} M(\mu), \quad M_n = \min_{\mu \in I_n} M(\mu).$$

Рассмотрим величины

$$m_n = m(\mu_n), \quad K_n = \frac{M(\mu_n)}{m(\mu_n)}.$$

Среди всех стохастических 2^n -циклов, наблюдаемых на интервале I_n , цикл, отвечающий значению $\mu = \mu_n$, является наименее чувствительным. Будем называть его *стохастическим суперциклом*. Следует отметить, что уже в случае 2-цикла стохастический суперцикл отличается от детерминированного суперцикла: $\mu_{\text{det}} = 1 + \sqrt{5} \approx 3.236$; $\mu_{\text{stoch}} \approx 3.185$. Наиболее чувствительным в 2^n -цикле является состояние $\bar{x}_{n,1}$, а наименее чувствительным – следующее за ним $\bar{x}_{n,2}$.

Из формулы (8) следует, что при всех $\mu \in I$ выполняется неравенство $m \geq 1$. На каждом интервале I_n имеем $\min_{\mu \in I_n} m(\mu) = 1$, причем минимум достигается в точках детерминированного суперцикла. Значения $m(\mu)$ в центральной части каждого интервала I_n мало отличаются от 1. Следовательно, $m_n \approx 1$, $K_n \approx M_n$. Значения μ_n , M_n для интервалов I_n структурной устойчивости системы (7) представлены в таблице.

Таблица

n	μ_n	M_n	$\eta_n = \frac{M_{n+1}}{M_n}$
0	2.0	1.0	4.7775
1	3.1855	4.7775	6.7042
2	3.4876	32.0296	6.9088
3	3.5522	221.2874	6.9777
4	3.56615	1544.0766	6.9899
5	3.56911	10793.038	6.9928
6	3.56977	75474.078	6.9934
7	3.56990	527822.22	6.9935

Как видим, в цепи бифуркаций удвоения периода стохастическая чувствительность циклов неограниченно возрастает. Для больших n последовательность M_n ведет себя как геометрическая прогрессия со знаменателем η

$$\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 6.99 \dots$$

При увеличении n растет неравномерность стохастической чувствительности циклов. Если у 2-цикла чувствительность состояний различается в 5 раз, то уже для 32-цикла это различие достигает 10^4 .

В работах [23, 27–29] рассматривалось влияние внешнего шума на свойство самоподобия участков бифуркационной диаграммы. Показано, что, если уменьшать интенсивность воздействия в $\mu_F = 6.61903\dots$ раз при переходе через точки бифуркации, то для некоторых участков бифуркационной диаграммы наблюдается самоподобие. Используя метод функций стохастической чувствительности, значение μ_F можно связать с показателем роста чувствительности η_n следующей формулой:

$$\mu_F^2 = \eta \alpha^2,$$

где $\alpha = -2.5029\dots$ – вторая константа Фейгенбаума.

Введенная конструкция функции стохастической чувствительности позволяет охватить и случай мультипликативных шумов. Для системы Ферхюльста с мультипликативными шумами наблюдается подобный геометрический рост стохастической чувствительности при удвоении периода, при этом предел соответствующей последовательности η_n не зависит от вида шума. Похожие свойства были обнаружены для некоторых потоковых систем. Для систем Лоренца и Ресслера авторами была получена [32, 33] константа роста чувствительности, близкая к 6.99.

Заключение

В данной статье были рассмотрены детерминированные и стохастические циклы системы Ферхюльста в зоне бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.

Для исследования отклика циклов на малые случайные возмущения предлагается использовать функцию стохастической чувствительности. Получена явная формула вычисления функции чувствительности в каждой точке цикла детерминированной системы.

Для системы Ферхюльста со случайными возмущениями представлена стохастическая бифуркационная диаграмма, дающая общую картину чувствительности циклов системы к случайным возмущениям. Показано общее повышение чувствительности при переходе к хаосу. Точную количественную оценку влияние шума на предельные циклы детерминированной системы дает функция стохастической чувствительности. Данная функция позволяет сравнить между собой восприимчивость всех состояний цикла к случайным воздействиям и проследить изменения чувствительности как на интервале структурной устойчивости, так и при переходе к циклам большей кратности. Для построения функции чувствительности использовался эмпирический подход, а также метод, основанный на использовании систем первого приближения.

Показано явное увеличение чувствительности системы Ферхюльста к случайным возмущениям в цепи бифуркаций удвоения периода. Установлен показатель геометрического роста чувствительности стохастических суперциклов. Следует также отметить хорошее соответствие эмпирических данных теоретическим результатам.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 09-01-00026, № 09-08-00048, Федерального агентства по образованию № 2.1.1/2571, ФЦП 02.740.11.02.02.

Приложение

Утверждение. Пусть у системы (1) при $\varepsilon = 0$ имеется устойчивый k -цикл Γ . Тогда последовательность m_t стремится к нулю, а последовательность V_t сходится к периодической последовательности w_t ($w_{t+k} = w_t$), элементы которой могут быть найдены следующим образом: величина w_1 находится по явной формуле $w_1 = q/(1 - a^2)$, $q = \sigma_k^2 + a_k^2 \sigma_{k-1}^2 + \dots + (a_k \cdot \dots \cdot a_2)^2 \sigma_1^2$, а остальные w_i находятся рекуррентно

$$w_i = a_{i-1}^2 w_{i-1} + \sigma_{i-1}^2 \quad (i = 2, \dots, k).$$

Доказательство. Последовательные k итераций систем (3)–(4) с учетом периодичности a_t и σ_t можно записать в виде

$$m_{(l+1)k+1} = am_{lk+1} \quad (11)$$

$$V_{(l+1)k+1} = a^2 V_{lk+1} + q. \quad (12)$$

Неравенство $|a| < 1$ является необходимым условием экспоненциальной устойчивости цикла Γ . С учетом этого из уравнения (11) следует, что для любого k последовательность m_{lk+1} стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$. Следовательно, в силу системы (3), и вся последовательность m_t стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим произвольную последовательность V_t , задаваемую системой (4), и разность $\Delta_t = V_t - w_t$. Из (12) и определения w_t следует, что

$$\Delta_{(l+1)k+1} = a^2 \Delta_{lk+1}, \quad \Delta_{lk+i+1} = a_i^2 \Delta_{lk+i}. \quad (13)$$

В условиях $|a| < 1$ из (13) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_t = 0$. Таким образом, утверждение доказано.

Библиографический список

1. *Полак Л.С., Михайлов А.С.* Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. М.: Наука, 1983.
2. *Стенли Г.* Фазовые переходы и критические явления. М.: Мир, 1973.
3. *Naken H.* Synergetics – a field beyond irreversible thermodynamics // Lect. Notes in Phys. Berlin: Springer. 1978. Vol. 84. P. 140.
4. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1983.
5. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980.
6. *Вильсон К.Дж.* Ренормализационная группа и критические явления // УФН. 1983. Т. 141. Вып. 2. С. 109.
7. *Hu B.* Introduction to real-space renormalization-group methods in critical and chaotic phenomena // Phys. Rep. 1982. Vol. 91, № 5. P. 233.
8. *Elaydi S.N.* An introduction to difference equations. Springer, 1999.
9. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
10. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
11. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1979. Vol. 21, № 6. P. 669.
12. *Feigenbaum M.J.* The transition to aperiodic behavior in turbulent systems // Comm. Math. Phys. 1980. Vol. 77, № 1. P. 65.
13. *Hauser P. R., Tsallis C., Curado M. F.* Criticality of the routes to chaos of the $1 - \alpha|x|^z$ map // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 30, № 4. P. 2074.
14. *Derida B., Gervois A., Pomeau Y.* Universal metric properties of bifurcations of endomorphisms // J. Phys. A. 1979. Vol. 12, № 3. P. 269.
15. *Пиковский А.С.* О стохастических свойствах простейшей модели стохастических автоколебаний // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 7. С. 883.
16. *Huberman B.A., Rudnick J.* Scaling behavior of chaotic flows // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, № 3. P. 54.
17. *Huberman B.A., Zisook A. B.* Power spectra of strange attractors // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, № 10. P. 624.
18. *Huberman B.A., Hirsch J. E., Scalapino D. J.* Theory of intermittency // Phys. Rev. A. 1982. Vol. 25, № 1. P. 519.
19. *Анищенко В. С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч. 1,2. Саратов: Изд-во СГУ, 1986.
20. *Неймарк Ю.И.* О возникновении стохастичности в динамических системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17, № 4. С. 602.
21. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
22. *Crutchfield J.P., Farmer J., Huberman B.A.* Fluctuation and simple chaotic dynamics // Phys. Rep. 1982. Vol. 92, № 2. P. 45.
23. *Crutchfield J.P., Packard N.H.* Symbolic dynamics of noisy chaos // Physica D. 1983. Vol. 7D, № 1-3. P. 201.
24. *Gutierrez J., Iglesias A., Rodriguez M.A.* Logistic map driven by dichotomous noise // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. P. 2507.

25. *Hall P., Wolf R. C. L.* Properties of invariant distributions and Lyapunov exponents for chaotic logistic maps // *Journal of the Royal Statistical Society.* 1995. Vol. 57. P. 439.
26. *Linz S.J., Lucke M.* Parametric modulation of instabilities of a nonlinear discrete system // *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 33. P. 2694.
27. *Кузнецов А.П., Капустина Ю.В.* Свойство скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // *Изв. вузов Прикладная нелинейная динамика.* 2000. Т. 8, № 6. С. 78.
28. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Седова Ю.В.* О свойствах скейлинга при воздействии шума в отображении окружности с числом вращения, заданным золотым средним // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т. 13, № 5, 6. С. 56.
29. *Crutchfield J. P., Nauenberg M., Rudnick J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46, № 14. P. 933.
30. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced brusselator // *Phys. A.* 2000. Vol. 278. P. 126.
31. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // *Dynamic systems and applications.* 2002. Vol. 11, № 2. P. 293.
32. *Башикирцева И.А., Ряшко Л.Б., Стихин П.В.* Стохастическая чувствительность циклов системы Ресслера при переходе к хаосу // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Т. 11, № 6. С. 32.
33. *Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // *Mathematics and Computers in Simulation.* 2004. Vol. 66. P.55.
34. *Bashkirtseva I., Ryashko L.* Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2005. Vol. 26. P. 1437.

*Поступила в редакцию 4.02.2008
После доработки 6.04.2009*

STOCHASTIC SENSITIVITY OF EQUILIBRIUM AND CYCLES FOR 1D DISCRETE MAPS

I.A. Bashkirtseva, L.B. Ryashko, I.N. Tsvetkov

The response problem of equilibrium and cycles for stochastically forced Verhulst population model is considered. Theoretical and empirical approaches are used for stochastically sensitivity analysis. The theoretical approach is based on the first approximation method and the empirical approach is based on direct numerical simulation. The correspondence between the two approaches for Verhulst population model is demonstrated. The increase of discrete system sensitivity to external noise in the period-doubling bifurcation zone under transition to chaos is shown.

Keywords: Verhulst model, cycles, stochastic sensitivity.



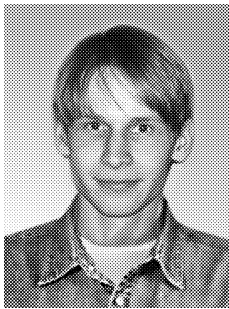
Башкирцева Ирина Адольфовна – родилась в 1965 году, окончила Уральский госуниверситет (1987), кандидат физико-математических наук (1997), доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных стохастических систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет
E-mail: irina.bashkirtseva@usu.ru



Ряшко Лев Борисович – родился в 1953 году, окончил Уральский госуниверситет (1975), доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет
E-mail: lev.ryashko@usu.ru



Цветков Иван Николаевич – родился в 1983 году, окончил Уральский госуниверситет (2006), аспирант кафедры математической физики. Область научных интересов – анализ чувствительности стохастических дискретных систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет
E-mail: itsvet@e1.ru