

## ХАОС В ФАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ С МОДУЛИРОВАННОЙ ДОБРОТНОСТЬЮ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

*С.В. Баранов, С.П. Кузнецов, В.И. Пономаренко*

Предложен генератор хаоса на основе осциллятора ван дер Поля с двумя дополнительными цепями запаздывающей обратной связи. Осциллятор пребывает поочередно в режиме возбуждения и затухания в силу периодического изменения параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла. Возбуждение колебаний на каждой новой стадии активности стимулируется сигналом, который возникает в результате смещения на квадратичном нелинейном элементе первой и второй гармоник сигналов, поступивших по цепям обратной связи и порожденных на двух предыдущих стадиях активности. Для разности фаз на последовательных стадиях возбуждения реализуется растягивающее отображение окружности (отображение Бернулли) с хаотической динамикой. Предпринято численное исследование динамики системы; представлены реализации, портреты аттрактора, результаты расчета показателей Ляпунова, оценка размерности, а также спектр генерируемого сигнала. Предложенная система реализована в виде радиотехнического устройства. Представлены экспериментальные данные, находящиеся в качественном соответствии с результатами численных расчетов.

*Ключевые слова:* Осциллятор ван дер Поля, отображение Бернулли, аттрактор Смейла–Вильямса, гиперболический хаос.

### Введение

Примеры систем, в которых имеет место гиперболический аттрактор Смейла–Вильямса, а также систем, демонстрирующих ряд других феноменов, таких как структурно-устойчивый странный нехаотический аттрактор, множество Мандельброта, гиперболическая динамика на торе, предложены недавно в работах [1-6]. Общий принцип, положенный в основу функционирования этих систем, состоит в манипуляции фазами колебаний при передаче возбуждения между парциальными осцилляторами, которые становятся активными попеременно, с тем чтобы трансформация фаз отвечала итерациям отображений с нужным типом сложной динамики.

В качестве альтернативы для реализации принципа манипуляции фазами при передаче возбуждения можно обратиться к системам с запаздыванием. В этом случае достаточно иметь один активный элемент – осциллятор, который попеременно пребывает в стадии активности или затухания, а передача возбуждения с надлежащей трансформацией фазы осуществляется от одной стадии активности к другой с использованием цепи запаздывающей обратной связи.

Представляется, что, с точки зрения практической реализации, эти системы проще, чем класс систем на основе попеременно возбуждающихся осцилляторов. С математической точки зрения, они сложнее, поскольку наличие запаздывания означает формально бесконечную размерность фазового пространства. Аккуратный математический анализ природы аттракторов в таких системах, в том числе строгое обоснование гипотезы гиперболичности, является трудной проблемой, требующей разработки новых подходов.

В работе [7] рассмотрена система на основе неавтономного осциллятора ван дер Поля с запаздыванием, который пребывает поочередно в режиме возбуждения и затухания в силу периодического изменения параметра, ответственного за бифуркацию рождения предельного цикла. Возбуждение колебаний на каждой новой стадии активности стимулируется сигналом, порожденным на предыдущей стадии активности, который поступает через линию задержки и претерпевает нелинейное преобразование с использованием вспомогательного внешнего сигнала на основной рабочей частоте, так что на каждой очередной стадии активности имеет место умножение фазовой переменной на коэффициент 2. В результате для фаз последовательных циклов колебаний реализуется растягивающее отображение окружности (отображение Бернулли) с хаотической динамикой. В работе [8] предложена другая схема, преимущество которой состоит в том, что она функционирует в отсутствие вспомогательного сигнала. Система содержит две цепи запаздывающей обратной связи с разными временами задержки. В этих цепях сигнал претерпевает нелинейное преобразование, соответственно, во вторую и третью гармоники. При их смещении на квадратичном нелинейном элементе возникает сигнал, используемый для стимуляции возбуждения осциллятора на очередной стадии его активности. Недостаток этой схемы – необходимость использования высокой степени нелинейных преобразований, что может быть затруднено на практике.

В настоящей статье вводится в рассмотрение и анализируется система, сочетающая достоинства двух упомянутых выше схем. Ее функционирование подразумевает использование для стимуляции возбуждения на стадиях активности осциллятора только первой и второй гармоник сигналов, проходящих по цепям обратной связи, и не требует вспомогательного сигнала на рабочей частоте. Наряду с численными расчетами, представлены результаты экспериментального исследования радиотехнического устройства, реализованного на основе предложенной схемы.

## 1. Основная модель и ее принцип действия

Рассмотрим блок-схему на рис. 1. Основным элементом служит осциллятор ван дер Поля, в котором параметр, управляющий бифуркацией Андронова–Хопфа, медленно изменяется во времени с периодом  $T$ , так что реализуются поочередно стадии возбуждения и затухания колебаний. Сигнал от осциллятора проходит по двум

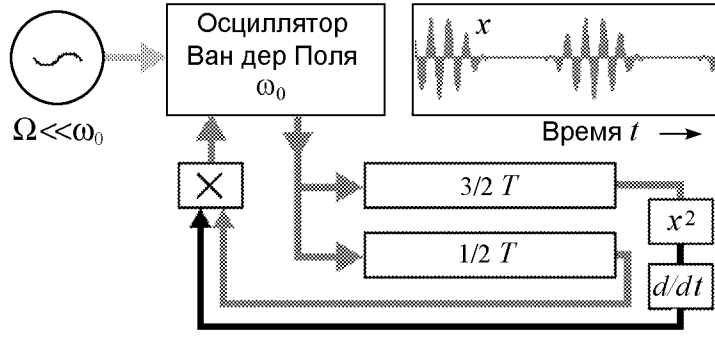


Рис. 1. Блок-схема исследуемой системы с запаздыванием

цепям запаздывающей обратной связи, время задержки в которых различается на  $T$ . На выходе одной из них сигнал подвергается квадратичному нелинейному преобразованию (блок, обозначенный  $x^2$  на схеме), из него отфильтровывается низкочастотная составляющая (блок  $d/dt$ ) и на квадратичном нелинейном элементе (отмечен на схеме косым крестом) производится его смешение с сигналом, поступившим по второй цепи обратной связи. Результирующий сигнал содержит составляющую на разностной частоте, попадающую в резонанс с рабочей частотой осциллятора  $\omega_0$ , и она стимулирует возбуждение осциллятора ван дер Поля в начале очередной стадии активности. Для этого времена задержки подобраны так, чтобы для возбуждения колебаний на  $(n + 1)$ -й стадии сигнал приходил в нужный момент по первой цепи от  $(n - 1)$ -й, а по второй – от  $n$ -й стадии активности.

Подходящей моделью рассмотренного устройства служит дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\ddot{x} - (A \cos(2\pi t/T) + h - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x(t - \frac{1}{2}T)x(t - \frac{3}{2}T)\dot{x}(t - \frac{3}{2}T). \quad (1)$$

Здесь  $x$  – обобщенная координата осциллятора ван дер Поля;  $\varepsilon$  – параметр, характеризующий глубину запаздывающей обратной связи; величина  $A$  определяет глубину модуляции параметра, ответственного за возбуждение осциллятора, относительно среднего уровня, заданного величиной  $h$ .

Примем пока параметр  $h$  нулевым. Тогда осциллятор будет поочередно пребывать в стадиях возбуждения и затухания колебаний равной продолжительности (соответственно, когда  $A \cos(2\pi t/T) > 0$  и  $A \cos(2\pi t/T) < 0$ ). Если предположить, что на стадиях активности с номерами  $n$  и  $n - 1$  имели место колебания с фазами  $\varphi_n$  и  $\varphi_{n-1}$ , соответственно, то есть  $x \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_n)$  и  $x \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_{n-1})$ , то подстановка этих выражений в правую часть дает

$$\begin{aligned} & x(t - \frac{1}{2}T)x(t - \frac{3}{2}T)\dot{x}(t - \frac{3}{2}T) \sim \\ & \sim \sin(\omega_0 t - \frac{1}{2}\omega_0 T + \varphi_n) \sin(\omega_0 t - \frac{3}{2}\omega_0 T + \varphi_{n-1}) \cos(\omega_0 t - \frac{3}{2}\omega_0 T + \varphi_{n-1}) = \\ & = \frac{1}{2} \sin(\omega_0 t - \frac{1}{2}\omega_0 T + \varphi_n) \sin(2\omega_0 t - 3\omega_0 T + 2\varphi_{n-1}) = \\ & = -\frac{1}{4} \cos(\omega_0 t - \frac{5}{2}\omega_0 T + 2\varphi_{n-1} - \varphi_n) + (\dots), \end{aligned} \quad (2)$$

где многоточие означает нерезонансный член на третьей гармонике. Таким образом, фаза колебаний на новой стадии активности будет определяться выражением

$$\varphi_{n+1} = -\varphi_n + 2\varphi_{n-1} + \eta \pmod{2\pi}, \quad (3)$$

где  $\eta$  – некоторая константа. Для разности фаз  $\Delta\varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$  будет иметь место растягивающее отображение окружности (отображение Бернулли)

$$\Delta\varphi_{n+1} = -2\Delta\varphi_n + \eta \pmod{2\pi}, \quad (4)$$

причем константу в уравнении можно устранить сдвигом начала отсчета переменной  $\Delta\varphi_n$ . Отображение для разности фаз демонстрирует хаотическую динамику с показателем Ляпунова  $\Lambda_1 = \ln 2 \approx 0.693$ . Отображение (3) имеет такой же по величине старший показатель Ляпунова и, кроме того, нулевой показатель  $\Lambda_2 = 0$ .

В следующем разделе приведены результаты численного решения дифференциального уравнения с запаздыванием (1) и продемонстрировано, что при надлежащем выборе параметров динамика системы протекает в соответствии с приведенными рассуждениями.

## 2. Численные результаты исследования динамики модели

Для численного решения задачи применялся конечно-разностный метод Рунге–Кутты 4 порядка, модифицированный применительно к системе с запаздыванием. Необходимые для выполнения шагов разностной схемы запаздывающие значения переменной  $x$  выбирались из сохраняемого в процессе вычислений массива данных, полученных на предыдущих шагах; при этом использовалась интерполяционная схема, обеспечивающая нужный порядок точности.

Начальные условия для системы с запаздыванием подразумевают задание функции  $x(t)$  на отрезке  $[-T, 0]$ , что соответствует бесконечномерному пространству состояний рассматриваемой системы. В начале расчетов соответствующий массив данных обычно заполнялся случайными величинами, далее проводился начальный этап вычислений до выхода системы на аттрактор, и лишь затем осуществлялось выполнение различных процедур обработки данных.

Расчеты показывают, что ожидаемый тип динамики реализуется в достаточно широком диапазоне изменения параметров. Для детального анализа выбран случай  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $T = 8$ ,  $A = 4.0$ ,  $h = 0$ ,  $\varepsilon = 0.05$ . На рис. 2, а показаны зависимости обобщенной координаты осциллятора от времени при указанных параметрах в режиме генерации хаоса. Процесс имеет вид последовательности радиоимпульсов, следующих друг за другом через интервал времени  $T$ . При этом, однако, фаза заполнения от импульса к импульсу меняется хаотическим образом. Это обстоятельство иллюстрируется диаграммой на рис. 2, б, где друг на друга наложено несколько реализаций. Присутствие хаоса обусловлено описанным выше механизмом передачи фазы от предыдущих стадий процесса к последующим. На рис. 3, а показана итерационная диаграмма для фаз в виде трехмерного графика, из которой видно приближительное

соответствие функции двух переменных  $\varphi_{n+1} = f(\varphi_n, \varphi_{n-1})$  и выражения (3). Фаза, отвечающая каждой очередной стадии активности, определяется в момент времени, фиксированный по отношению к сигналу, обеспечивающему медленную модуляцию параметра, по формуле

$$\varphi_n = \begin{cases} \arctan(\omega_0 x / \dot{x}), & \dot{x} > 0, \\ \arctan(\omega_0 x / \dot{x}) + \pi, & \dot{x} < 0. \end{cases} \quad (5)$$

На рис. 3, б приводится итерационная диаграмма для разности фаз  $\Delta\varphi_n$ , вид которой приближенно согласуется с формулой (4).

На рис. 4 показан портрет аттрактора на фазовой плоскости осциллятора ван дер Поля  $(x, \dot{x})$ . На самом деле аттрактор системы с запаздыванием представляет собой объект в бесконечномерном пространстве состояний, так что изображение на рисунке следует рассматривать, как двумерную проекцию этого объекта. На рис. 4, б показан портрет аттрактора в стробоскопическом сечении  $t = nT$ .

Количество показателей Ляпунова для системы с запаздыванием, формально говоря, бесконечно, однако, с точки зрения существенных особенностей динамики, значение имеет лишь некоторое ограниченное их число. Представляется естественным определить его как количество показателей, достаточное для вычисления раз-

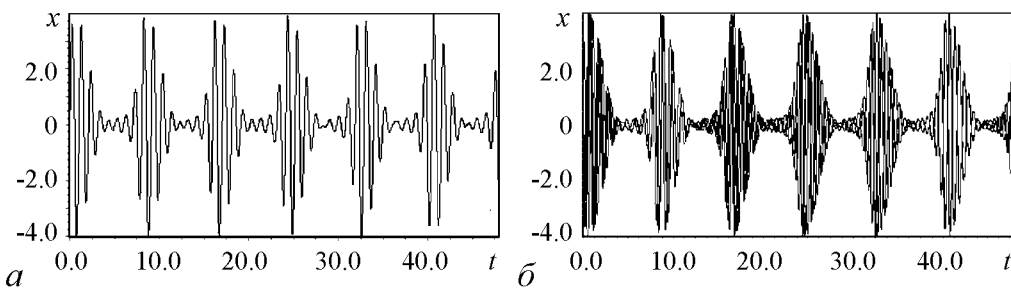


Рис. 2. Зависимости обобщенной координаты осциллятора от времени по результатам численного решения уравнения (1) (а) и результат наложения нескольких реализаций процесса на одном графике (б)

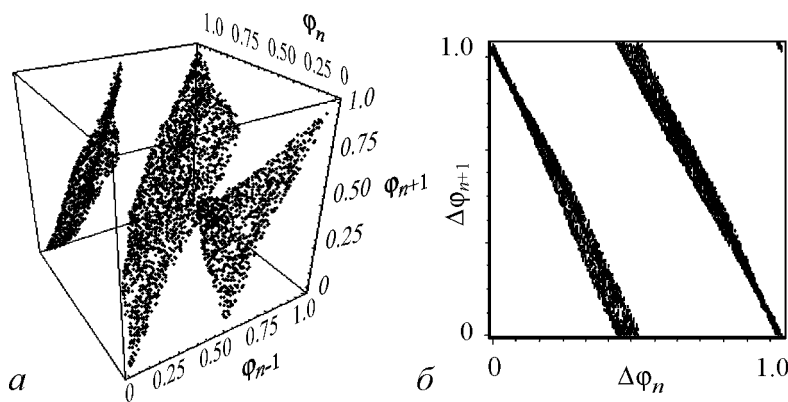


Рис. 3. Диаграммы, иллюстрирующие трансформацию фазы на последовательных стадиях активности осциллятора в режиме хаотической генерации в системе (1)

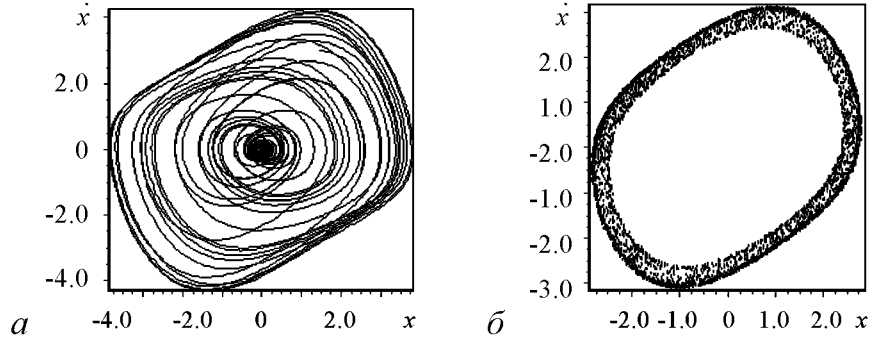


Рис. 4. Двумерная проекция фазового портрета (а) и стробоскопическое отображение (б), полученные при численном решении уравнения (1) в режиме хаотической генерации

мерности по формуле Каплана–Йорке [9,10]

$$D = m + \frac{\sum_{i=1}^m \Lambda_i}{|\Lambda_{m+1}|}, \quad (6)$$

где целое число  $m$  выбрано так, что сумма  $m$  больших показателей Ляпунова еще положительна, а сумма  $m + 1$  показателей уже отрицательна.

Для расчета показателей Ляпунова использовался метод, основанный на алгоритме Бенеттина, с модификациями, соответствующими системе с запаздыванием [9,11]. Проводилось совместное решение уравнений (1) и комплекта уравнений в вариациях для нескольких векторов возмущения  $\tilde{x}(t)$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} + 2x\tilde{x}\dot{x} - (A \cos(2\pi t/T) + h - x^2)\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = \\ = \varepsilon \tilde{x}(t - \frac{1}{2}T)x(t - \frac{3}{2}T)\dot{x}(t - \frac{3}{2}T) + \\ + \varepsilon x(t - \frac{1}{2}T)\tilde{x}(t - \frac{3}{2}T)\dot{x}(t - \frac{3}{2}T) + \varepsilon x(t - \frac{1}{2}T)x(t - \frac{3}{2}T)\dot{\tilde{x}}(t - \frac{3}{2}T). \end{aligned} \quad (7)$$

В численных расчетах вектор возмущения задается мгновенными значениями  $\tilde{x}$ ,  $\dot{\tilde{x}}$  и массивом данных  $\tilde{x}(t)$ , отвечающих значениям переменной на интервале запаздывания. Поскольку система неавтономная, удобно строить вычисления, рассматривая динамику стробоскопически, с периодом  $T$ . По завершении каждого этапа проводится ортогонализация векторов возмущения по Граму–Шмидту и нормализация на фиксированную константу. Показатели Ляпунова получаются из оценки скорости нарастания накапливающихся сумм логарифмов от коэффициентов приращенения норм соответствующих векторов.

На рис. 5 показана зависимость четырех показателей Ляпунова от параметра глубины модуляции  $A$  при фиксированных остальных параметрах. Следует отметить, что старший показатель в широком интервале изменения параметра  $A$  почти постоянен и близок к  $\ln 2$ . В то же время значение второго показателя остается близким к нулю.

При значении параметра глубины модуляции  $A = 4.0$  первые пять показателей Ляпунова таковы:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = 0.69333, \quad \Lambda_2 = 0.00002, \quad \Lambda_3 = -1.13994 \\ \Lambda_4 = -1.33343, \quad \Lambda_5 = -3.80704. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что второй показатель в пределах ошибки вычислений нулевой. Для оценки размерности по формуле Каплана-Йорке нужно принимать во внимание положительный, нулевой и один отрицательный показатель, что дает

$$D = 2 + \frac{\ln 2}{1.1399} \approx 2.6080. \quad (9)$$

На рис. 6 показан спектр колебаний осциллятора в рассматриваемом режиме генерации хаоса. Для его построения проводилась обработка полученной численно достаточно длительной реализации с помощью метода статистической оценки спектральной плотности мощности, рекомендуемого в теории случайных процессов. Процедура состоит в разбиении имеющейся реализации на участки конечной протяженности, выполнении преобразования Фурье для каждого участка и последующем усреднении квадратов амплитуд спектральных компонент.

Из рисунка видно, что спектр сосредоточен в некотором диапазоне вблизи частоты  $f \approx 1$ , то есть  $\omega = 2\pi f \approx \omega_0 = 2\pi$ . Отметим присутствие характерной для хаоса непрерывной составляющей спектра. Дискретные пики в левой части диаграммы обусловлены периодичностью, присутствующей в динамике системы благодаря медленной модуляции параметра возбуждения.

Как было обнаружено, в рассматриваемой системе имеет место сложный мягкожесткий режим возбуждения и гистерезис.

В самом деле, описанный выше режим функционирования подразумевает возбуждение каждого нового цуга колебаний на стадии активности осциллятора благодаря стимулированию сигналом, переданным по цепи запаздывающей обратной связи. Его величина пропорциональна третьей степени характерной амплитуды колебаний на стадии активности. Если задать начальные условия такими, что характерная амплитуда мала, то стимуляции возбуждения не происходит, и колебания отсутствуют. Режим генерации можно восстановить, увеличивая параметр  $h$ , то есть

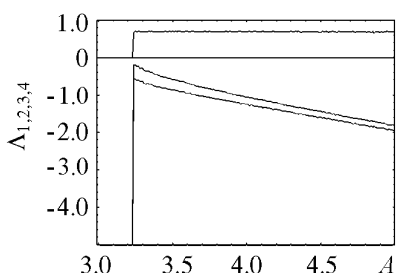


Рис. 5. Зависимость первых четырех показателей Ляпунова от параметра глубины модуляции  $A$ . Вычисления проводились при вариации  $A$  от больших величин к меньшим с наследованием мгновенного состояния системы в момент изменения параметра

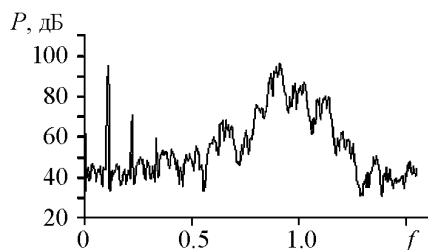


Рис. 6. Спектр мощности сигнала, генерируемого системой, полученный путем обработки численных результатов для модели (1)

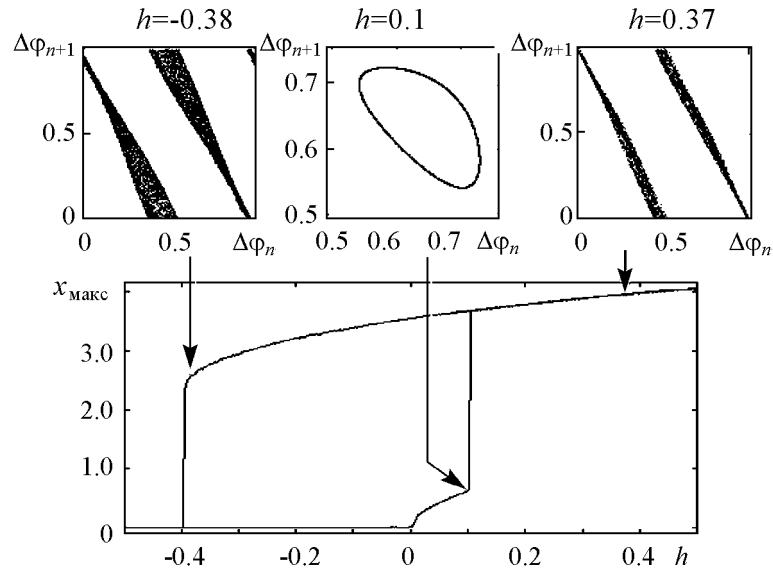


Рис. 7. Диаграмма, иллюстрирующая гистерезис в исследуемой системе. Показана зависимость максимального значения амплитуды колебаний от параметра  $h$ . Движение по параметру осуществляется слева направо вдоль нижней ветви, а затем справа налево вдоль верхней ветви петли гистерезиса

увеличивая долю периода модуляции, в течение которой колебания осциллятора в линейном приближении будут нарастающими. При этом сначала возникают регулярные колебания малой амплитуды, а затем в некоторый момент имеет место скачкообразный переход к хаотическому режиму больших амплитуд. После этого уменьшение величины  $h$  не приводит немедленно к срыву хаотических колебаний, даже в области отрицательных значений  $h$ , поскольку возбуждение в системе передается от предыдущих стадий активности к последующим. Только при некоторой достаточно большой отрицательной величине  $h$  происходит срыв колебаний.

Описанное явление гистерезиса иллюстрируется диаграммой на рис. 7. Вверху на врезках представлены итерационные диаграммы для фаз, отвечающие определенным участкам на петле гистерезиса. (При проведении вычислений в систему добавлялся небольшой шум на уровне  $\Delta x \sim 0.001$ , чтобы обеспечить выход из тривиального невозбужденного состояния при возникновении в системе неустойчивости.)

### 3. Эксперимент

На рис. 8 показана схема экспериментального устройства. Его основой служит генератор ван дер Поля, выполненный с использованием операционного усилителя DA1, вносящего отрицательное сопротивление в колебательный контур  $LC$  ( $L = 10$  мГн,  $C1 = 5$  мкФ). Нелинейность обеспечивается элементом в виде двух параллельных цепочек полупроводниковых диодов. Частота автоколебаний составляет около 700 Гц. Параметр надкритичности генератора модулируется внешним сигналом с частотой 71 Гц, подаваемым на затвор полевого транзистора VT1. Сигнал генератора ван дер Поля возводится в квадрат при помощи аналогового умножителя DA2 и дифференцируется схемой на операционном усилителе DA4. Сигналы с выхода схемы дифференцирования и с генератора ван дер Поля подаются на два входа



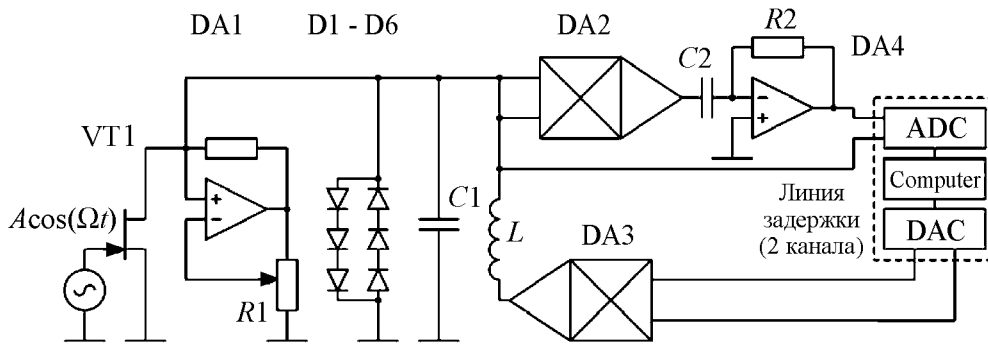


Рис. 8. Схема экспериментального устройства

аналого-цифрового преобразователя и в компьютер, где реализована двухканальная линия задержки (времена задержки 21 и 7 мс, соответственно, что составляет примерно  $3/2$  и  $1/2$  периода модуляции параметра). Выходные сигналы подаются на входы аналогового умножителя, выход которого подключен к катушке индуктивности колебательного контура генератора ван дер Поля. Таким образом, данное устройство качественно соответствует уравнению (1). Для анализа фазовых соотношений сигнал генератора ван дер Поля (напряжение на конденсаторе  $C1$ ) записывался в компьютер при помощи дополнительного не показанного на схеме аналого-цифрового преобразователя.

На рис. 9 показаны реализация хаотического сигнала, полученная в эксперименте, и спектр колебаний осциллятора в режиме генерации хаоса, которые качественно неплохо согласуются, соответственно, с рис. 2, *a* и рис. 6.

На рис. 10, *a* приводится итерационная диаграмма для фаз в виде трехмерного графика, а на рис. 10, *б* – итерационная диаграмма для разности фаз  $\Delta\varphi_n$ . Отметим соответствие фазовых итерационных диаграмм качественным рассуждениям раздела 1, а также, с точностью до аддитивной добавки, диаграммам, полученным в численных расчетах и обсуждавшимся в разделе 2.

На рис. 11, *a* показан полученный в эксперименте портрет аттрактора на фазовой плоскости осциллятора. Напомним, что аттрактор системы с запаздыванием представляет собой объект в бесконечномерном пространстве состояний, так что

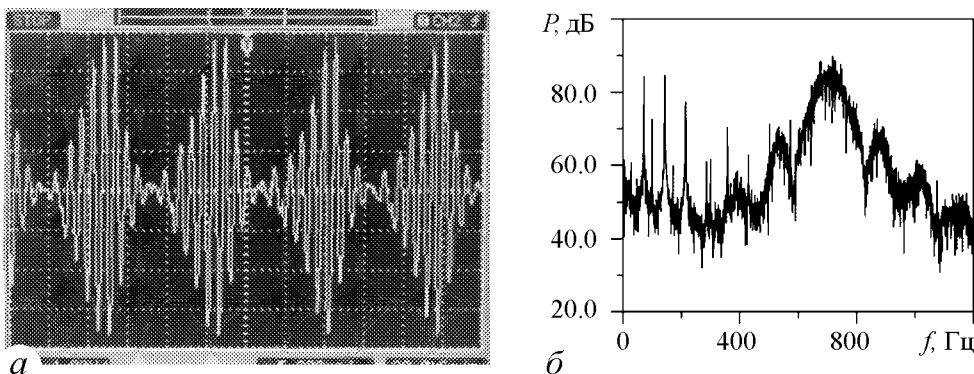


Рис. 9. Реализация хаотического сигнала в эксперименте (*a*) и спектр генерации (*б*)

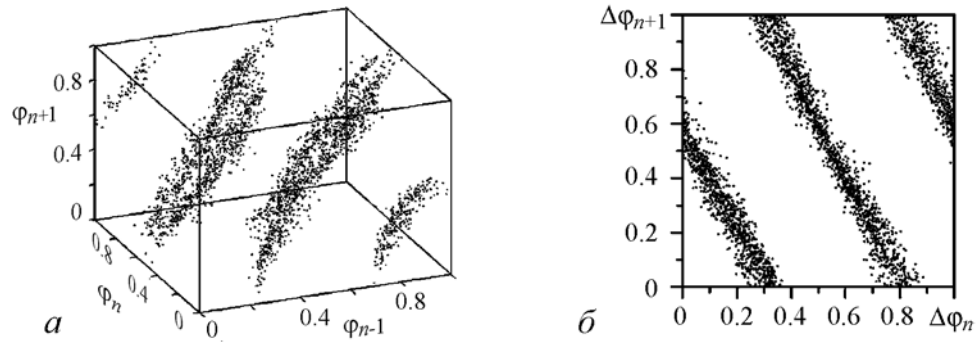


Рис. 10. Итерационная диаграмма для фаз в виде трехмерного графика (а), построенная по результатам эксперимента, и диаграмма для разностей фаз (б)

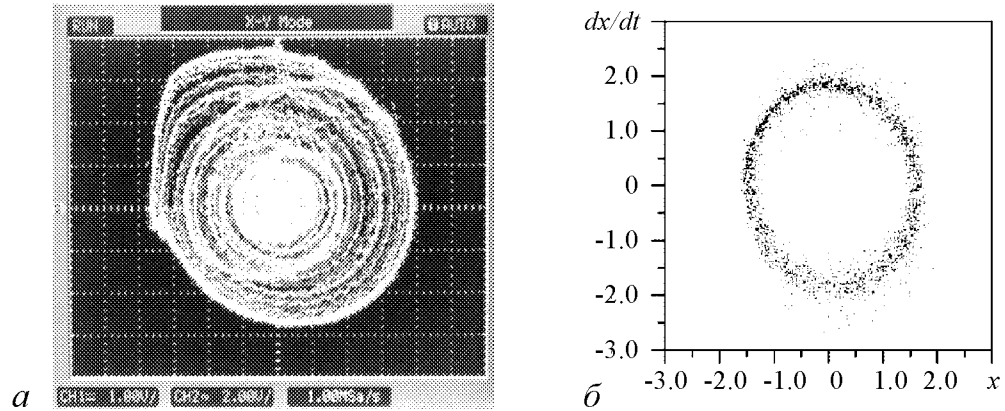


Рис. 11. Портрет аттрактора в проекции на фазовую плоскость осциллятора (а), сфотографированный с экрана осциллографа, и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении (б), построенный путем обработки экспериментальных данных

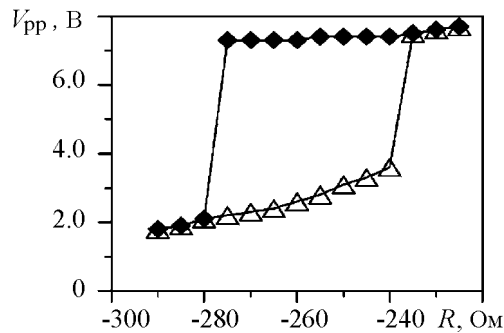


Рис. 12. Диаграмма, иллюстрирующая гистерезис при возбуждении колебаний в экспериментальном устройстве. Представлена зависимость напряжения  $V_{pp}$  («от пика до пика») порождаемого системой сигнала от величины отрицательного сопротивления, вносимого в колебательный контур благодаря присутствию операционного усилителя

представленное на рисунке изображение следует рассматривать как двумерную проекцию этого объекта. На рис. 11, б приводится портрет аттрактора в стробоскопическом сечении. Эти рисунки находятся в разумном качественном соответствии с результатами численных расчетов (см. рис. 4).

В эксперименте нашло подтверждение присутствие в системе отмеченного в предыдущем разделе эффекта жесткого возбуждения. При регулировке отрицательного сопротивления, вносимого в колебательный контур благодаря наличию операционного усилителя, можно было наблюдать гистерезис, что иллюстрирует рис. 12. При постепенном движении по параметру слева направо

вдоль нижней ветви графика интенсивных колебаний в системе нет; они возникают при переходе некоторого порога, но сохраняются при обратном движении по параметру в относительно широком диапазоне, где ранее они отсутствовали.

### Заключение

В настоящей работе введена в рассмотрение неавтономная система с запаздывающей обратной связью, генерирующая колебания в виде последовательности импульсов, фаза заполнения которых изменяется хаотически, так что разность фаз между соседними импульсами подчиняется растягивающему отображению окружности. В широкой области параметров система характеризуется присутствием одного положительного показателя Ляпунова, слабо зависящего от параметров, и показателя, близкого к нулю, тогда как остальные показатели отрицательны. (Их полное количество, формально говоря, бесконечно в силу бесконечной размерности фазового пространства системы с запаздыванием.)

Как можно предположить, данная система должна быть отнесена к классу систем с частично гиперболическим аттрактором [12,13] ввиду наличия в точках на аттракторе нейтрального направления, ассоциирующегося с близким к нулю показателем Ляпунова. Строгое обоснование этой гипотезы представляется достаточно сложной математической проблемой в силу бесконечной размерности фазового пространства системы.

В отличие от систем с аттрактором Смейла–Вильямса, обсуждавшихся в работах [1,2], рассмотренная схема использует единственный активный элемент в виде осциллятора ван дер Поля, что делает ее более простой в практическом отношении. В отличие от системы с запаздыванием, предложенной в работе [7], она не требует для своего функционирования вспомогательного сигнала на частоте, близкой к рабочей частоте осциллятора. Наконец, в сравнении со схемой, рассмотренной в работе [8], она характеризуется более низкой степенью нелинейности, что также представляется преимуществом с точки зрения радиотехнической реализации.

Системы, подобные рассмотренной в настоящей работе, могут представлять интерес как генераторы хаоса, в том числе, для применения в схемах скрытой коммуникации [14]. Одно из преимуществ данного класса систем обусловлено тем, что хаос в них выражается в случайном изменении фазы генерируемой последовательности радиоимпульсов. Как можно полагать, это открывает возможность реализации схем, в которых передача сигнала в канале связи будет гораздо менее чувствительной к помехам, потерям и искажениям, нежели в предложенных до сих пор вариантах. (Это подобно хорошо известному в традиционной радиотехнике преимуществу частотной или фазовой модуляции в сравнении с амплитудной.) Другое преимущество состоит в структурной устойчивости или грубости хаотического аттрактора (если справедлива гипотеза о его гиперболической природе). На практике это будет означать нечувствительность свойств генерируемого хаоса по отношению к вариациям параметров и характеристик элементов устройства, техническим флуктуациям и т.п.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00426, а также гранта Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Программы развития научного потенциала высшей школы № 2.1.1/1738.*

## Библиографический список

1. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 144101.
2. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *ЖЭТФ.* 2006. Т. 129, № 2. С. 400.
3. *Isaeva O.B., Jalnine A.Yu. and Kuznetsov S.P.* Arnold’s cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // *Phys. Rev.* 2006. Vol. E 74. 046207.
4. *Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П.* О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // *ЖТФ.* 2007. Т. 77, № 4. С. 10.
5. *Кузнецов С.П., Исаева О.Б., Осбалдестин А.Н.* Феномены комплексной аналитической динамики в системе связанных неавтономных осцилляторов с поочередным возбуждением // *Письма в ЖТФ.* 2007. Т. 33, вып. 17. С. 69.
6. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В.* Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 15, № 6. С. 75.
7. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // *Письма в ЖТФ.* 2008. Т. 34, вып. 18. С. 1.
8. *Kuznetsov S.P. and Pikovskiy A.S.* Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks // *Europhysics Lett.* 2008. Vol. 84. 10013.
9. *Farmer D.J.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // *Physica D. Nonlinear Phenomena.* 1980. Vol. 4, Issue 3. P. 366
10. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
11. *Балякин А.А., Рыскин Н.М.* Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 15, №6. С. 3.
12. *Hasselblatt B., Pesin Y.* Hyperbolic dynamics. *Scholarpedia* 2008; 3(6):2208.
13. *Pesin Y., Hasselblatt B.* Partial hyperbolicity, *Scholarpedia*, [http://www.scholarpedia.org\\_2008\\_](http://www.scholarpedia.org_2008_).
14. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.

*Саратовский филиал ИРЭ РАН  
Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 13.04.2009  
После доработки 15.06.2009*

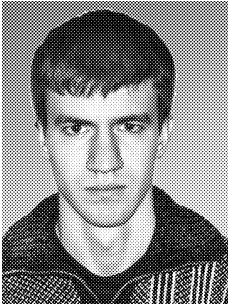
## CHAOS IN THE PHASE DYNAMICS OF Q-SWITCHED VAN DER POL OSCILLATOR WITH ADDITIONAL DELAYED FEEDBACK LOOP

*S.V. Baranov, S.P. Kuznetsov, V.I. Ponomarenko*

We present chaos generator based on a van der Pol oscillator with two additional delayed feedback loops. Oscillator alternately enters active and silence stages due to

periodic variation of the parameter responsible for the Andronov–Hopf bifurcation. Excitation of the oscillations on each new activity stage is forced by signal resulting from mixing of the first and the second harmonics of signals from previous activity stages, transported through the feedback loops. The phase difference between each two neighboring successive activity stages evolves in accordance to the Bernoulli doubling map, with chaotic dynamics. We discuss results of numerical studies: time dependences of variables, attractor portraits, Lyapunov exponents, and power spectrum. The proposed system is implemented as an electronic device, and experimental data are found to be in good correspondence with the computations.

*Keywords:* van der Pol oscillator; Bernoulli doubling map; Smale–Williams solenoid; hyperbolic chaos.



*Баранов Станислав Владимирович* – родился в Саратове (1985). С 1998 по 2002 год обучался в Лицее прикладных наук Саратова. В 2002 году поступил в Саратовский госуниверситет на факультет нелинейных процессов, который окончил в 2007 году. В настоящее время учится в аспирантуре. Область научных интересов – динамический хаос, сложная динамика систем с запаздывающей обратной связью, различные численные характеристики сложной динамики. Принимал участие в конференциях. Автор 3 публикаций.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: stanislav@baranov.me



*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: spkuz@rambler.ru



*Пономаренко Владимир Иванович* – родился в 1960 году в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 130 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com