



## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА АНСАМБЛЯ ИЗ ДВУХ ФАЗОУПРАВЛЯЕМЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С КОЛЬЦЕВЫМ ТИПОМ ОБЪЕДИНЕНИЯ

*В.В. Матросов, А.В. Шмелев*

Исследуется нелинейная динамика ансамбля, состоящего из двух фазоуправляемых генераторов, объединенных в кольцо с дополнительными связями по цепям управления. В рамках динамической модели с полутора степенями свободы исследованы условия устойчивости синхронных режимов и закономерности возбуждения и развития несинхронных режимов. Обнаружена богатая картина динамических режимов и бифуркационных переходов, создающая возможности для формирования в системе разнообразных видов колебаний. Рассмотрена возможность управления динамическими режимами генераторов ансамбля с помощью параметров парциальных подсистем и параметров связей.

*Ключевые слова:* Ансамбли автогенераторов, фазовые системы, динамические режимы, аттракторы, бифуркации.

### Введение

Исследование поведения автоколебательных систем в ансамблях является одной из актуальных задач современной нелинейной науки. К анализу динамики моделей связанных активных элементов сводятся многочисленные задачи из самых различных областей физики, биологии, химии (анализ энергосетей, связанных джоузефсоновских контактов и лазеров, антенных решеток, биологически возбудимых сред, нейронных сетей и т.д.). Эффекты коллективной динамики многоэлементных систем определяются, с одной стороны, динамическими свойствами составляющих систему элементов, с другой, топологией связей. Динамика парциального элемента во многом определяется структурой фазового пространства. Здесь в отдельный класс можно выделить динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством [1], поскольку наличие у таких пространств угловых координат расширяет топологию аттракторов систем, а следовательно, и многообразие режимов динамического поведения. Цилиндрические фазовые пространства имеют динамические системы, у

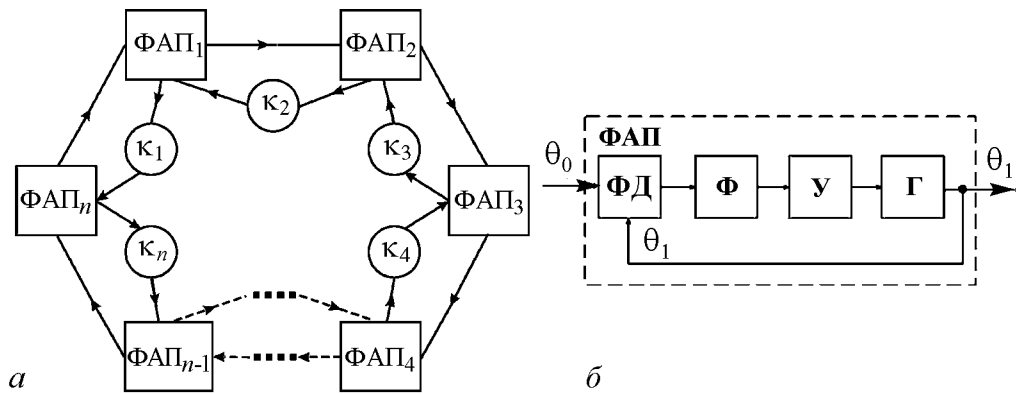


Рис. 1. *a* – схема кольцевого соединения фазоуправляемых генераторов; *б* – схема элемента ансамбля (системы ФАП), где Г – генератор, управляемый напряжением, с локальной цепью управления, включающей: ФД – фазовый дискриминатор, Ф – фильтр, У – элемент управления частотой генератора

которых хотя бы одно из состояний представляется угловой координатой [2–4], а также модельные уравнения, сконструированные для изучения определенных явлений, например, явления фазовой синхронизации [5].

Настоящая работа продолжает исследования коллективной динамики малых ансамблей фазоуправляемых генераторов, индивидуальная динамика которых описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений, определенными в цилиндрических фазовых пространствах. Характерной особенностью рассматриваемых объектов является то, что рассматриваемые генераторы имеют локальные цепи управления (рис. 1). Эти цепи предоставляют дополнительные возможности при объединении фазоуправляемых генераторов в ансамбль [3, 6], то есть объединение фазоуправляемых генераторов в ансамбль возможно не только за счет организации связей непосредственно между генераторами, но и за счет связей по цепям управления. К настоящему времени имеются результаты изучения ансамблей фазоуправляемых генераторов с «каскадным», «параллельным», «перекрестным» и другими типами связей [6–11]. Здесь рассматривается динамика ансамбля фазоуправляемых генераторов, объединенных в кольцо. Интерес к малым ансамблям продиктован тем, что, с одной стороны, многие особенности коллективной динамики больших ансамблей начинают проявляться на стадии объединения небольшого числа элементов, с другой стороны, для исследования моделей ансамблей из небольшого числа элементов, динамика которых описывается моделями сравнительно невысокой размерности, могут быть применены классические методы исследования нелинейных динамических систем и теории бифуркаций.

## 1. Математическая модель ансамбля

Структурные схемы кольца и его базового элемента приведены на рис. 1. Элементом кольца является генератор, управляемый напряжением (ГУН), где в качестве управляющего воздействия выступает напряжение, пропорциональное разности фаз  $\varphi = \theta_1 - \theta_0$  колебаний ГУН и опорного колебания, поступающего на вход системы.

Такие генераторы принято называть генераторами с фазовым управлением. В системах связи и управления эти элементы широко известны как системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) или системы фазовой синхронизации (СФС) [12–14].

Кольцевое объединение генераторов в ансамбль аналогично каскадному [11] – в обоих случаях сигнал с выхода одной системы ФАП является входным (опорным) для другой. Однако в кольце, в силу того, что сигнал с «последней» системы является опорным для «первой» системы (здесь понятия «первой» и «последней» весьма условно), условным является также и понятие «опорный сигнал». Поэтому можно считать, что при кольцевом соединении ФАП опорный сигнал отсутствует. Соответственно при написании динамических уравнений ансамбля с кольцевым типом объединения удобно не привязываться к какому либо опорному сигналу, а представлять эти уравнения в переменных разности фаз колебаний соседних элементов.

В рассматриваемой схеме ансамбля, наряду с основными связями, организованы дополнительные связи в обратном направлении через сигналы фазовых рассогласований – сигнал с выхода фазового дискриминатора ФАП<sub>*i*</sub> с весовым коэффициентом  $\kappa_i$  подается в цепь управления ФАП<sub>*i-1*</sub>. Согласно [14] уравнения динамики кольца из  $n$  систем ФАП с дополнительными локальными связями могут быть представлены следующими уравнениями в символическом виде:

$$p\theta_i = \omega_i - \Omega_i K_i(p) [F(\theta_i - \theta_{i-1}) + \kappa_{i+1} F(\theta_{i+1} - \theta_i)], \quad i = \overline{1, n}, \quad i = n + 1 = 1. \quad (1)$$

Здесь  $p \equiv d/dt$  – оператор дифференцирования;  $\theta_i$  и  $\omega_i$  – фаза и свободная частота колебаний  $i$ -го генератора;  $K_i(p)$  – операторный коэффициент передачи фильтра в цепи управления  $i$ -го генератора;  $\Omega_i$  – максимальная расстройка частот, которую способна скомпенсировать цепь управления ФАП<sub>*i*</sub>;  $F(\varphi_i)$  – нормированная характеристика фазовых дискриминаторов ( $\varphi_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ );  $\kappa_i$  – параметры дополнительных связей.

В данной работе рассматривается ансамбль из двух ФАП с фильтрами первого порядка в цепях управления ( $K_i(p) = (1 + T_i p)^{-1}$ ,  $T_i$  – постоянные времени фильтров) и синусоидальной характеристикой фазовых дискриминаторов. В этом случае из (1), учитывая условия кольца  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$ , сначала получаем символическое уравнение для разности фаз  $\varphi = \theta_1 - \theta_2$  колебаний генераторов ансамбля

$$\frac{p\varphi}{\Omega_1} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Omega_1} - [K_2(p)(1 - \kappa_1)b + K_1(p)(1 - \kappa_2)]F(\varphi), \quad (2)$$

далее, учитывая характеристику фазовых дискриминаторов и вид фильтров, приходим к следующей динамической системе:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - [(1 - \kappa_1)b + 1 - \kappa_2] \sin \varphi - \\ &- \{1 + [\varepsilon_1(1 - \kappa_1)b + \varepsilon_2(1 - \kappa_2)] \cos \varphi\} y - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\tau = \Omega_1 t$  – безразмерное время. Система (3) определена в трехмерном цилиндрическом фазовом пространстве  $U : \{\varphi \pmod{2\pi}, y, z\}$  и шестимерном пространстве

безразмерных параметров  $\Lambda : \{\gamma = (\omega_2 - \omega_1)/\Omega_1, \varepsilon_1 = T_1\Omega_1 > 0, \varepsilon_2 = T_2\Omega_1 > 0, b = \Omega_2/\Omega_1 > 0, \kappa_1, \kappa_2\}$ . В силу инвариантности системы (3) относительно замены  $\Pi : (-\gamma, -\varphi, -y, -z) \Rightarrow (\gamma, \varphi, y, z)$  достаточно рассмотреть  $\gamma \geq 0$ . Задача исследования динамики ансамбля по модели (3) включает в себя выявление возможных аттракторов модели, установление соответствия между этими аттракторами и динамическими режимами ансамбля, изучение бифуркаций аттракторов, выделение в пространстве параметров областей с различным динамическим поведением.

## 2. Динамические режимы парциального элемента и ансамбля

Рассмотрим соотношение аттракторов модели (3) и динамических режимов ансамбля. Вначале остановимся на динамических режимах парциального элемента – системы ФАП с фильтром первого порядка [12–14]. Динамика парциального элемента описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \quad \varepsilon \frac{dy}{d\tau} = \gamma - y - \sin \varphi, \quad (4)$$

где  $\varphi = \theta_1 - \theta_0$  – разность фаз колебаний с генератора, управляемого напряжением, и опорного колебания, поступающего на вход системы;  $\varepsilon$  – безразмерный параметр, характеризующий постоянную времени фильтра. Уравнения (4) эквивалентны уравнениям модели маятника с «линейным трением», находящимся под действием постоянного вращающего момента [2]. Эти уравнения определены на двумерном фазовом цилиндре. Их анализ показывает, что в фазовом пространстве могут существовать аттракторы двух типов: состояние равновесие и предельный цикл второго рода [1]. Применительно к системам ФАП устойчивое состояние является математическим образом синхронного режима, в котором частоты колебаний с опорного и управляемого генераторов совпадают ( $d\varphi/d\tau = 0$ ). Предельный цикл второго рода является математическим образом регулярного асинхронного режима (регулярного режима биений) [14]. В этом режиме разность фаз  $\varphi$  постоянно нарастает. Таким образом, парциальный элемент ансамбля обладает простой индивидуальной динамикой.

Теперь обсудим возможные динамические режимы кольца из двух фазовых систем. Прежде всего надо отметить, что при объединении двух динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством не произошло увеличения числа циклических координат, а образовалась динамическая система с одной циклической координатой. Это означает, что две системы ФАП, объединенные в кольцо, ведут себя однотипно, то есть они всегда функционируют одинаково. Сохранение числа циклических координат при объединении является следствием кольцевого типа соединения. В фазовом пространстве  $U$  модели (3) могут существовать следующие типы аттракторов.

*Устойчивые состояния равновесия* соответствуют режимам синхронизации, в которых колебания генераторов ансамбля имеют одинаковую частоту, а фазы колебаний могут различаться на некоторую постоянную величину  $\varphi^*$ .

*Колебательные (ограниченные по координате  $\varphi$ ) аттракторы* определяют режимы квазисинхронных колебаний [3, 13]. В квазисинхронных режимах разность фаз  $\varphi$  и частот  $y$  колебаний ГУН изменяются в некоторых пределах, однако усредненная разность частот  $\tilde{y}$  равна нулю, то есть для квазисинхронных режимов характерно

совпадение частот в среднем. Колебательные движения модели могут быть как регулярными, так и хаотическими, поэтому квазисинхронные режимы можно разделить на регулярные и хаотические.

*Вращательные (неограниченные по координате  $\varphi$ ) аттракторы* определяют асинхронные режимы или режимы биений [3, 13]. В этих режимах разность фаз  $\varphi$  неограниченно нарастает (убывает), а разность частот изменяется в некоторых пределах, при этом  $\tilde{y} \neq 0$ . Так же как квазисинхронные режимы, режимы биений могут быть как регулярными, так и хаотическими.

В силу существенной нелинейности и высокой размерности модели (3), задачи обнаружения в фазовом пространстве  $U$  аттракторов, анализа их бифуркаций, выделения в пространстве параметров областей существования выявленных аттракторов представляются весьма сложными и, в общем случае, неразрешимыми современными аналитическими методами. В данной работе эти задачи решаются путем компьютерного моделирования с использованием программного комплекса [15], реализующего методы теории колебаний и теории бифуркаций, а также учитывающего особенности динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством.

### 3. Динамика ансамбля с малыми параметрами $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ инерционностей цепей управления

Инерционность систем ФАП определяется постоянными времени фильтров  $T_1$  и  $T_2$ . Если  $T_1 T_2 \ll 1$ , модель (3) имеет малый параметр при производной  $dz/d\tau$ . В этом случае движения в фазовом пространстве  $U$  разделяются на *быстрые* и *медленные*. Поверхность медленных движений  $Q_1 : z = \{\gamma - [(1 - \kappa_1)b + 1 - \kappa_2] \sin \varphi - \{1 + [\varepsilon_1(1 - \kappa_1)b + \varepsilon_2(1 - \kappa_2)] \cos \varphi\}y\} / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  является устойчивой, поведение фазовых траекторий в ее малой окрестности определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{dy}{d\tau} &= \gamma - [(1 - \kappa_1)b + 1 - \kappa_2] \sin \varphi - \\ &\quad - \{1 + [\varepsilon_1(1 - \kappa_1)b + \varepsilon_2(1 - \kappa_2)] \cos \varphi\}y, \end{aligned} \quad (5)$$

заданной на фазовом цилиндре  $U_1 : \{\varphi \pmod{2\pi}, y\}$ .

Если  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ll 1$ , то фазовые траектории модели (5) также разделяются на *быстрые* и *медленные*. Медленные движения удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, \\ y &= \frac{\gamma - [(1 - \kappa_1)b + 1 - \kappa_2] \sin \varphi}{\{1 + [\varepsilon_1(1 - \kappa_1)b + \varepsilon_2(1 - \kappa_2)] \cos \varphi\}} \equiv Q(\varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Устойчивость кривой медленных движений  $y = Q(\varphi)$  описывается выражением  $\sigma = 1 + [\varepsilon_1(1 - \kappa_1)b + \varepsilon_2(1 - \kappa_2)] \cos \varphi$ . В предельном случае ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ) кри-

вая  $y = Q(\varphi)$  устойчива, динамика на ней описывается уравнением

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \gamma - [(1 - \kappa_1)b + 1 - \kappa_2] \sin \varphi. \quad (7)$$

Непрерывная зависимость решений модели (3) от параметров  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  позволяет исследовать динамику этой модели путем последовательного продолжения по параметрам бифуркаций моделей (5) и (7) меньшей размерности. Далее представлены сведения о динамике ансамбля в двух случаях: когда оба элемента ансамбля являются малоинерционными ( $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ll 1$ ) и когда малоинерционным является хотя бы один элемент ансамбля ( $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \ll 1$ ).

**3.1. Случай  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ll 1$ .** Динамическая система (7) определена на окружности  $S = \{\varphi \bmod (2\pi)\}$ . Эта модель допускает существование двух состояний равновесия:  $O_1$  с координатой  $\varphi_1^* = \arcsin(\gamma/[(1 - \kappa_1)b + 1 - \kappa_2])$  и  $O_2$  с координатой  $\varphi_2^* = \pi - \varphi_1^*$ . Оба состояния равновесия могут быть устойчивыми, то есть определять синхронные режимы. Пусть аттрактор  $O_1$  соответствует синхронному режиму  $I_{S1}$ , аттрактор  $O_2$  – синхронному режиму  $I_{S2}$ . Разница между режимами  $I_{S1}$  и  $I_{S2}$  определяется значениями остаточной ошибки по фазе  $\varphi^*$ . Поскольку при  $\gamma = 0$  в синхронном режиме  $I_{S1}$  фазовая ошибка  $\varphi^* = 0$ , а в режиме  $I_{S2}$  эта ошибка  $\varphi^* = \pi$ , то синхронный режим  $I_{S1}$  будем называть синфазным, а  $I_{S2}$  – противофазным.

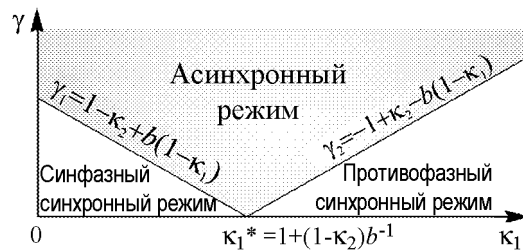


Рис. 2. Структура пространства параметров модели (7) в сечении  $(\kappa_1, \gamma)$

При  $\gamma \neq 0$  разница между фазовыми ошибками  $\varphi_1^*$  и  $\varphi_2^*$  режимов  $I_{S1}$  и  $I_{S2}$  сохраняется. Вне области существования состояний равновесия фазовая переменная  $\varphi$  постоянно возрастает, что соответствует асинхронному режиму. На рис. 2 представлено разбиение плоскости параметров  $(\kappa_1, \gamma)$  на области с различным динамическим поведением.

**3.2. Случай  $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \ll 1$ .** Модель (5) описывает динамику ансамбля в случаях, когда хотя бы одна из объединяемых систем имеет малоинерционную цепь управления. Рассмотрим динамику ансамбля в одном из предельных случаев, когда цепь управления ФАП2 является безинерционной ( $\varepsilon_2=0$ ). Другие параметры подобраны таким образом, чтобы наиболее полно отразить особенности динамики модели (5). Результаты моделирования динамики системы (5) при  $\varepsilon_2=0$ ,  $\kappa_1=3$ ,  $\kappa_2=-12$ ,  $b=6$  приведены на рис. 3. Разбиение плоскости  $\{\varepsilon_1, \gamma\}$  на рис. 3, а определяется следующими пятью бифуркационными кривыми:

*линия 1* – кривая  $\gamma^{fold} = 1 - \kappa_2 + b(1 - \kappa_1)$  бифуркации двукратного состояния равновесия  $O_{1,2}$ ; при пересечении этой линии сверху вниз на фазовом цилиндре  $U_1$  появляются состояния равновесия  $O_1$  типа устойчивый узел и  $O_2$  – седло (рис. 3, в);

*линия 2* – кривая бифуркации Андронова–Хопфа, определяемая равенством  $\varepsilon_1^{Hopf} = [(\kappa_1 - 1)b \cos \varphi_1^*]^{-1}$ ; при пересечении этой линии сверху вниз (слева направо) состояние равновесия  $O_1$  мягко теряет устойчивость, в результате чего на фазовом цилиндре  $U_1$  появляется устойчивый предельный цикл 1-го рода  $L_0$  (рис. 3, д);

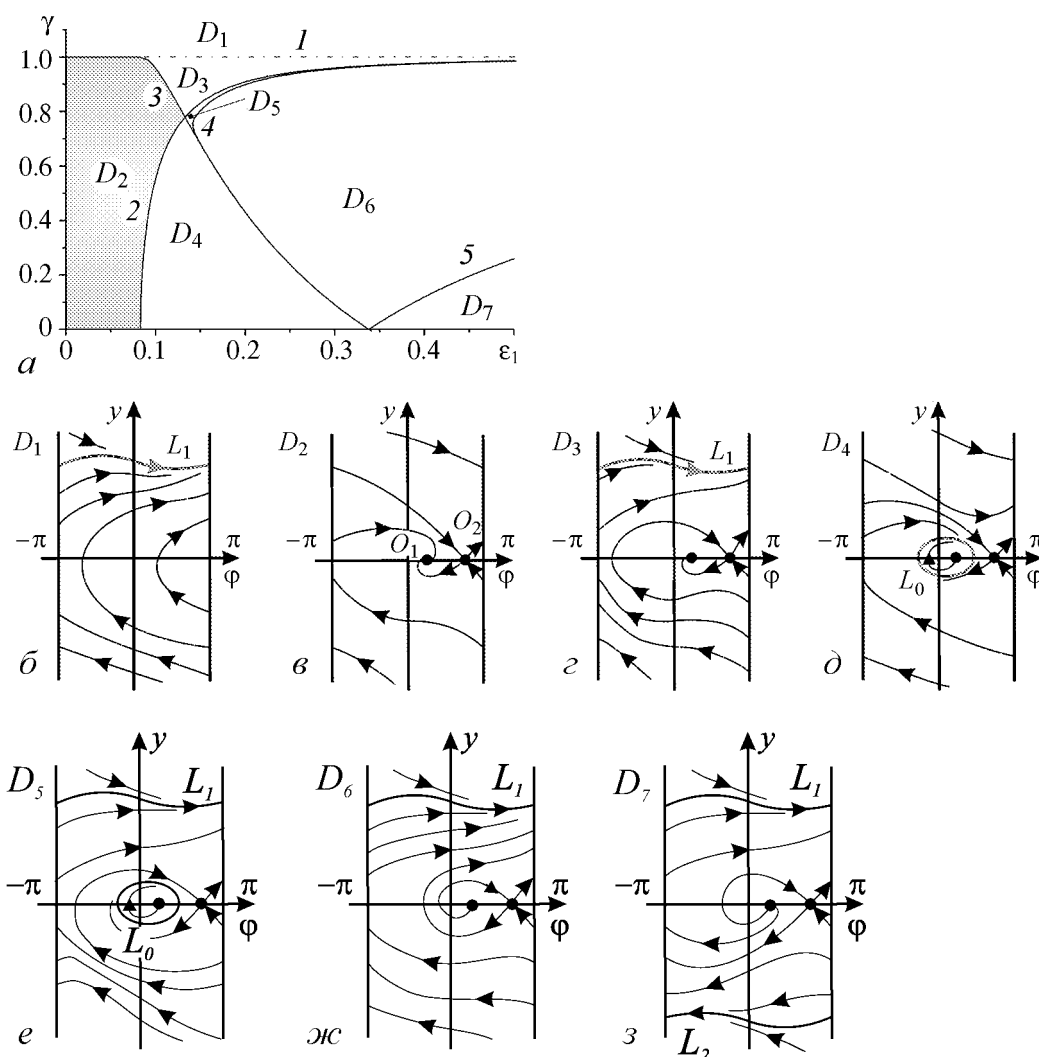


Рис. 3. Структура плоскости параметров  $\{\varepsilon_1, \gamma\}$  и фазовые портреты модели (5)

*линия 3* – кривая бифуркации петли сепаратрис 2-го рода, образованной сепаратрисами седла  $O_2$  (седло-узла  $O_{1,2}$ ), расположенными на фазовом цилиндре  $U_1$  в области  $y > 0$ ; при пересечении этой линии снизу вверх на фазовом цилиндре  $U_1$  появляется устойчивый предельный цикл 2-го рода  $L_1$  (рис. 3, *з*);

*линия 4* – кривая бифуркации петли сепаратрис 1-го рода, образованной сепаратрисами, расположенными слева от состояния равновесия  $O_2$ ; на этой линии предельный цикл  $L_0$  «влипает» в петлю сепаратрис;

*линия 5* – кривая бифуркации петли сепаратрис 2-го рода, образованной сепаратрисами, расположенными на фазовом цилиндре  $U_1$  в области  $y < 0$ ; при пересечении этой линии сверху вниз на фазовом цилиндре  $U_1$  появляется устойчивый предельный цикл 2-го рода  $L_2$  (рис. 3, *з*).

*Линии 1–5* разбивают плоскость параметров на семь областей  $D_1 – D_7$  с различным фазовыми портретами. При значениях параметров из области  $D_1$  структуре фазового пространства модели (5) соответствует единственная особая траектория –

устойчивый предельный цикл  $L_1$  (рис. 3, б). Этот аттрактор определяет режим биений  $I_{A1}$ , при котором разность фаз  $\varphi$  постоянно нарастает, а усредненная разность частот  $\tilde{y} = y_0 > 0$ . В области  $D_2$  фазовый портрет системы (5) имеет две особые траектории: устойчивое состояние равновесия  $O_1$  и седловое  $O_2$  (рис. 3, в). Это область глобальной устойчивости ансамбля, здесь всегда реализуется синфазный синхронный режим  $I_{S1}$ . В области  $D_3$  в фазовом пространстве  $U_1$  существует два аттрактора: состояние равновесия  $O_1$  и предельный цикл  $L_1$  (рис. 3, г). Бассейны притяжения этих аттракторов разграничивают сепаратрисы седла  $O_2$ . В зависимости от начальных условий здесь в ансамбле могут реализоваться как синхронный режим  $I_{S1}$ , так и асинхронный режим  $I_{A1}$ . В области  $D_4$  единственным аттрактором модели (5) является предельный цикл  $L_0$  (рис. 3, д). Цикл  $L_0$  определяет квазисинхронный режим ансамбля  $I_{K1}$ , в котором разность фаз  $\varphi$  и частот  $y$  изменяются в некоторых пределах, но усредненная разность частот  $\tilde{y} = 0$ . В области  $D_5$  предельный цикл  $L_0$  существует совместно с предельным циклом  $L_1$  (рис. 3, е). Это область бистабильного поведения ансамбля, когда возможна как реализация квазисинхронного режима  $I_{K1}$ , так и асинхронного  $I_{A1}$ . Бассейны притяжения аттракторов  $L_0$  и  $L_1$  разграничивают сепаратрисы седла  $O_2$ . В области  $D_6$  фазовый портрет системы определяют предельный цикл  $L_1$  и неустойчивые состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 3, ж). Поскольку в области  $D_6$  единственным аттрактором модели (5) является цикл  $L_1$ , то поведение ансамбля в этой области аналогично поведению ансамбля при значениях параметров из области  $D_1$ . В области  $D_7$  структуру фазового пространства определяют неустойчивые состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$ , а также устойчивые предельные циклы 2-го рода  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 3, з). Аттракторы  $L_1$  и  $L_2$  определяют асинхронные режимы биений  $I_{A1}$  и  $I_{A2}$ , которые различаются знаками усредненных значений разности частот  $\tilde{y}$ : в режиме  $I_{A1}$  усредненное значение  $\tilde{y} > 0$ , в режиме  $I_{A2}$  –  $\tilde{y} < 0$ .

Сравнивая динамику моделей (5) и (7), отметим главное отличие в поведении этих систем: модель (5), в отличие от модели (7), допускает существование квазисинхронных режимов. При этом кривая  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{Hopf}(\gamma, \kappa_1, b)$  при  $\gamma = 0$  имеет минимум  $\varepsilon_1^{min} = [(\kappa_1 - 1)b]^{-1}$ . Из последнего выражения видно, что  $\varepsilon_1^{min}$  стремится к нулю при  $\kappa_1 \rightarrow \infty$  или  $b \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что квазисинхронные колебания кольца из двух фазоуправляемых генераторов могут появиться даже в случае очень малоинерционных цепей управления ФАП, но это возможно либо при сильной неоднородности элементов ( $b \gg 1$ ), либо при очень сильной дополнительной связи ( $\kappa_1 \gg 1$ ). Анализ движений модели (5) при  $\varepsilon_1=0$ , а также при  $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ll 1$  не выявил каких-либо новых особенностей в динамике рассматриваемой модели.

#### 4. Динамика ансамбля с инерционными цепями управления

Особенности динамики модели (3) характеризует приведенный на рис. 4 параметрический портрет  $\{\varepsilon_2, \gamma\}$ . Он получен путем продолжения по параметру  $\varepsilon_2$  бифуркационных кривых параметрического портрета  $\{\varepsilon_1, \gamma\}$  модели (5) на уровне  $\varepsilon_1=4$ . При  $\varepsilon_1=4$  в области положительных  $\gamma$  система (5) содержит области  $D_1, D_3, D_5, D_6$  и  $D_7$  с соответствующими фазовыми портретами на рис. 3, б, г, е, ж, з. При  $\varepsilon_2 \ll 1$  динамика модели (3) аналогична динамике модели (5), параметрические



портреты этих моделей определяют *линии 1-4*, которые принадлежат соответственно одним и тем же бифуркационным поверхностям. При увеличении  $\varepsilon_2$  установленные структуры фазового и параметрических пространств трансформируются, эти изменения связаны как с аттракторами, выявленными ранее, так и возникающими вновь. Линии на рис. 4, не имеющие обозначений, соответствуют бифуркациям аттракторов вращательного типа, причем здесь приведены бифуркационные кривые только тех аттракторов, у которых среднее значение  $\bar{y} > 0$ . Кривые, соответствующие бифуркациям аттракторов со средним значением  $\bar{y} < 0$ , получаются из приведенных бифуркационных кривых аттракторов вращательного типа путем зеркального отображения их относительно оси абсцисс. Аналогичным способом из *линии 3* получается *линия 5*, которая имеет место на рис. 2, а, а на рис. 4 не приведена.

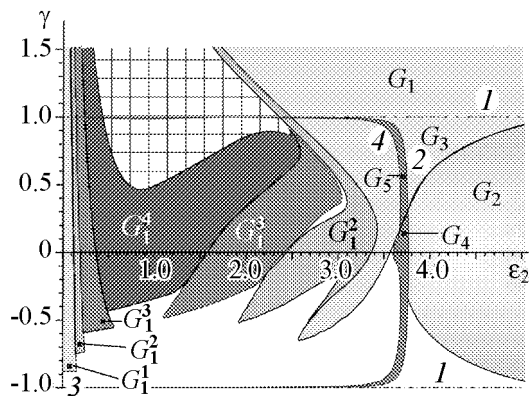


Рис. 4. Структура пространства параметров модели (3) в сечении  $(\varepsilon_2, \gamma)$  при  $b=6$ ,  $\kappa_1=3$ ,  $\kappa_2=-12$ ,  $\varepsilon_1=4$

На рис. 4 выделены следующие области существования динамических режимов с различными характеристиками.

$G_2$  – область глобальной устойчивости системы (3), когда единственным аттрактором модели является состояние равновесия  $O_1$ , отвечающее за режим синхронизации  $I_{S1}$ ; при значениях параметров из области  $G_2$  режим синхронизации  $I_{S1}$  реализуется при любых начальных условиях, такую область принято называть областью захвата в синхронный режим  $I_{S1}$  [3].

$G_4$  – область захвата в квазисинхронный режим  $I_{K1}$ , здесь единственным аттрактором модели (3) является колебательный предельный цикл  $L_0$  (рис. 5, e).

$G_1, G_1^2, G_1^3, G_1^4$  – области захвата в режимы биений  $I_{A1}, I_{A2}, I_{A3}, I_{A4}$ , являющиеся областями существования предельных циклов  $L_1, L_1^{(2)}, L_1^{(3)}, L_1^{(4)}$  (рис. 5, a-z) с периодами  $T, 2T, 3T, 4T$ , соответственно; зона размещения областей  $G_1^k$ , для  $k > 4$  отмечена штриховкой.

$G_3$  и  $G_5$  – области бистабильного поведения, при значениях параметров из этих областей в фазовом пространстве  $U$  цикл  $L_1$  существует совместно либо с устойчивым состоянием равновесия  $O_1$  (область  $G_3$ ), либо с циклом  $L_0$  (область  $G_5$ ).

Рассмотрим подробнее некоторые перестройки фазового и параметрического портретов (см. рис. 5) модели (3), которые происходят с увеличением значений параметра  $\varepsilon_2$ . При увеличении  $\varepsilon_2$  изменения в первую очередь затрагивают предельный цикл  $L_1$  (a). Он либо теряет устойчивость через бифуркацию удвоения периода, порождая при этом устойчивый предельный цикл удвоенного периода  $L_1^{(2)}$  (б), либо исчезает в результате одной из трех бифуркаций: двукратного предельного цикла, петли сепаратрис 2-го рода, замкнутого контура из сепаратрис седло-фокусов  $O_2$  и  $O_1$ . Таким образом, с ростом  $\varepsilon_2$  меняется характер границы области существо-

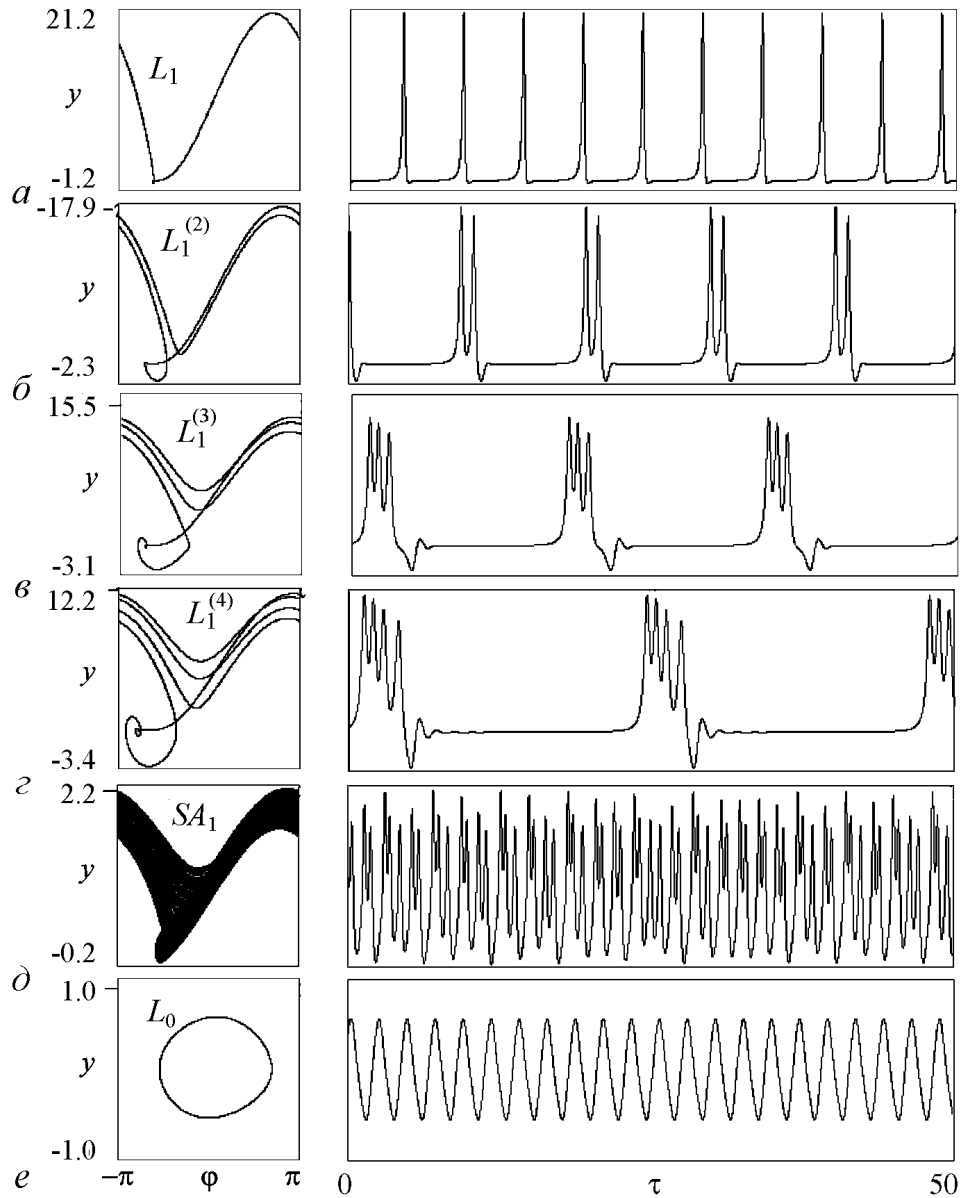


Рис. 5. Примеры аттракторов модели (3), соответствующие режимам регулярных (a–d) и хаотических (e) биений, а также регулярному квазисинхронному режиму (e)

вания предельного цикла  $L_1$ , а также появляется область  $G_1^2$  существования предельного цикла  $L_1^{(2)}$ . При дальнейшем увеличении  $\varepsilon_2$  предельный цикл  $L_1^{(2)}$  испытывает те же бифуркации, через которые проходил предельный цикл  $L_1$  с той лишь разницей, что петля сепаратрис, в которую исчезает предельный цикл  $L_1^{(2)}$ , является двухободной, а сепаратрисный контур образован сепаратрисами состояний равновесия  $O_2(\varphi_2^* - 2\pi, 0, 0)$ ,  $O_1(\varphi_1^*, 0, 0)$ , и  $O_2(\varphi_2^*, 0, 0)$ . В результате бифуркаций предельного цикла  $L_1^{(2)}$  происходит рождение предельных циклов  $L_1^{(4)}$  (e) или  $L_1^{(3)}$  (d). В пространстве параметров появляются области  $G_1^4$  или  $G_1^3$ . Структура границ об-

ластей  $G_1^4$  и  $G_1^3$  аналогична структуре областей  $G_1$  и  $G_1^2$ . Дальнейшее увеличение  $\varepsilon_2$  в зависимости от значений фиксированных параметров может привести либо к появлению циклов  $L_1^{(k)}$  кратности  $k > 4$ , либо к обратной ситуации, то есть к уменьшению индекса кратности циклов  $k$ . Структура границ областей  $G_1^k$  существования предельных циклов  $L_1^{(k)}$  качественно сохраняется, они состоят из бифуркационных кривых двукратных предельных циклов кратности  $k$ , удвоения периодов циклов,  $k$ -обходных петель сепаратрис 2-го рода и контуров, составленных из сепаратрис состояний равновесия  $O_1$  и  $O_2$ , которые до замыкания контура охватывают фазовый цилиндр  $k$  раз. Области существования предельных циклов  $L_1^k$  с соседними числами кратности либо примыкают к друг к другу по бифуркационным кривым сепаратрисных связок и двойных предельных циклов, либо разделены буферными зонами со сложной динамикой. В областях со сложной динамикой модель (3) характеризуется наличием хаотического вращательного аттрактора. Эти области могут перекрываться с областями с регулярной динамикой, в результате в пространстве параметров возникают зоны мультистабильного поведения ансамбля.

Вращательные аттракторы модели (3) определяют режимы биений, эволюции этих режимов с ростом параметра  $\varepsilon_2$  иллюстрируют диаграммы, представленные на рис. 6. Здесь на рис. 6, *a* изображена однопараметрическая диаграмма отображения Пуанкаре для значений  $\gamma = 0.7$ ; на рис. 6, *б* представлены зависимости  $\tilde{y}(\varepsilon_2)$  для различных значений  $\gamma$ . Из представленных диаграмм видно, что бифуркационный переход от одного аттрактора к другому сопровождается скачкообразными изменениями в характеристиках динамического режима, в частности, переходом режима биений на новую частоту. Переходы через буферные зоны со сложной динамикой скачки частоты сглаживают.

Заметим, что в силу инвариантности преобразования в фазовом пространстве  $U$  существуют предельные циклы  $L_2^{(k)}$  со средним значением  $\tilde{y} < 0$ , которые испытывают бифуркации, аналогичные бифуркациям предельных циклов  $L_1^{(k)}$ , причем аттракторы со средними значениями большими и меньшими нуля могут существовать одновременно, что еще больше усложняет динамику ансамбля.

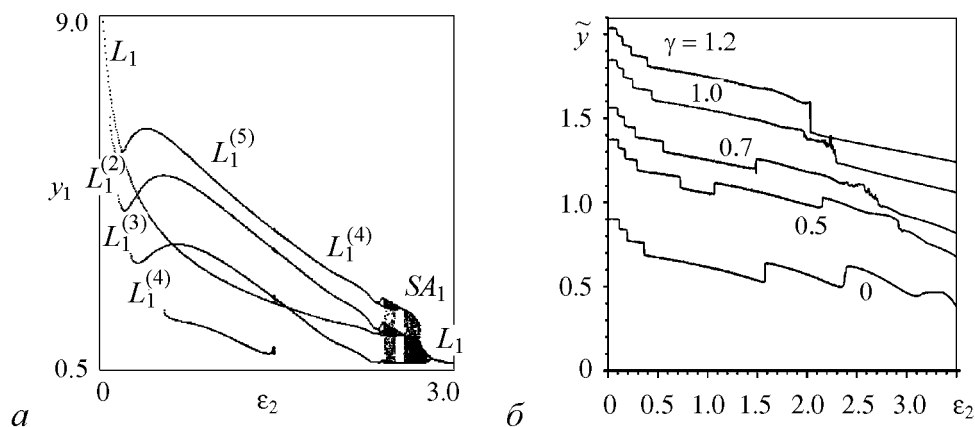


Рис. 6. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре модели (3) при  $\gamma = 0.7$  (*a*); зависимости усредненных значений разности частот колебаний генераторов ансамбля от параметра  $\varepsilon_2$  (*б*)

Численное моделирование динамики ансамбля показывает, что при рассматриваемых значениях параметров увеличение  $\varepsilon_2$  в конечном счете приводит к синхронизации колебаний генераторов ансамбля. Переход из области параметров с асинхронными режимами в область  $G_S = G_2 \cap G_3$  существования синхронного режима  $I_{S1}$  осуществляется через область  $G_K = G_4 \cap G_5$  существования квазисинхронного режима  $I_{K1}$ . Режиму  $I_{K1}$  в фазовом пространстве  $U$  соответствует устойчивый колебательный предельный цикл  $L_0$  (рис. 5e) вокруг состояния равновесия  $O_1$ . Режим  $I_{K1}$  глобально устойчив в области  $G_4$ , в области  $G_5$  он существует совместно с режимом биений  $I_{A1}$ . При увеличении  $\varepsilon_2$  предельный цикл  $L_0$  стягивается в точку, делая устойчивым состояние равновесия  $O_1$ . В результате в ансамбле устанавливается режим  $I_{S1}$ , который глобально устойчив в области  $G_2$ , а в области  $G_3$  он существует совместно с режимами биений различной сложности. На рис. 4 область  $G_2$  ограничена бифуркационными кривыми: петли сепаратрис 2-го рода седла  $O_2$ , удвоения периода цикла  $L_1$  и нейтрального состояния равновесия  $O_1$ , которое находится из условия  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + [\varepsilon_1^2(1 - \kappa_1)b + \varepsilon_2^2(1 - \kappa_2)] \cos \varphi_1^* = 0$  (бифуркация Андронова–Хопфа). Примечательно, что в рассматриваемом примере при  $\varepsilon_2 > 5.37$  в интервале  $-1 < \gamma < 1$  синхронный режим  $I_{S1}$  существует и глобально устойчив, то есть *полоса захвата* в режим синхронизации совпадает с *полосой удержания*. Как показали численные эксперименты, совпадение полос захвата и удержания сохраняется и при больших значениях  $\varepsilon_2$  вплоть до значений  $\varepsilon_2 = 10^3$ . Отсюда следует, что при кольцевом соединении систем ФАП большая инерционность этих систем может выступать в качестве стабилизирующего фактора, что несвойственно ни парциальным системам, ни изученным к настоящему времени ансамблям фазоуправляемых генераторов с другими типами соединений.

### Заключение

Результаты проведенных исследований свидетельствуют, что объединение двух фазовых систем в кольцо и введение дополнительных связей существенным образом изменяет динамику парциальных элементов. Показано, что в ансамбле наряду с режимами синхронизации и простых регулярных биений, характеризующих индивидуальную динамику элементов, могут реализоваться регулярные квазисинхронные, сложные регулярные и хаотические режимы биений. Установлено, что в ансамбле существуют синхронные режимы двух типов: синфазный и противофазный. Наличие синфазного или противофазного режима определяется параметрами дополнительных связей  $\kappa_1, \kappa_2$  и соотношением полос удержания  $b$ . Получены аналитические условия устойчивости синхронных режимов, в пространстве параметров выделены области глобальной устойчивости синхронных режимов, изучены механизмы срыва и установления режима синхронизации при различных соотношениях параметров системы, а также сценарии развития хаотических асинхронных режимов.

*Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракт № П2308).*

## Библиографический список

1. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
3. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982.
4. Неймарк Ю.И. Математические модели в естествознании и технике. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2004.
5. Пиковский А., Роземблум М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
6. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФАН, 1989.
7. Матросов В.В., Корзинова М.В. Коллективная динамика каскадного соединения фазовых систем // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 2. С. 10.
8. Матросов В.В. Динамика двух параллельно связанных фазоуправляемых генераторов с малоинерционными цепями управления // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 1. С. 25.
9. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Динамические режимы и бифуркации при взаимодействии двух систем синхронизации через перекрестные связи // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 4. С. 52.
10. Матросов В.В. Динамика двух фазоуправляемых генераторов с малоинерционными цепями управления, связанных через нелинейный элемент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 15.
11. Матросов В.В., Шалфеев В.Д. Динамический хаос в фазовых системах. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2007.
12. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ. Под ред. Ю.Н. Бакаева и М.В. Капанова. М.: Сов. радио, 1978.
13. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
14. Капанов М.В. Элементы теории систем фазовой синхронизации. М.: МЭИ, 2006.
15. Матросов В.В. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н. Новгород: ННГУ, 2002.

Нижегородский  
государственный университет

Поступила в редакцию 3.12.2009  
После доработки 25.03.2010

## NONLINEAR DYNAMICS OF A RING OF TWO COUPLED PHASE LOCKED LOOPS

*V.V. Matrosov, A.V. Shmelev*

Nonlinear dynamics of the ensemble consisting of two phase-locked generators, which are coupled in a ring with feedback, is discovered. The conditions of stability of the synchronous regimes and appropriatenesses of excitation and progress of the non-synchronous regimes are examined within the bounds of the dynamic model with one and a half degrees of freedom. The extensive image of the dynamic regimes and bifurcating transitions, creating resources for the formation in the system of various types of oscillations, is discovered. The ability of control of the dynamic regimes of the generators by the use of the partial subsystem's parameters and the link parameters is examined.

*Keywords:* Coupled auto-oscillation systems, phase systems, dynamic regimes, attractors, bifurcations.



*Матросов Валерий Владимирович* – родился в 1960 году, окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982) по специальности «прикладная математика». Защитил диссертации на соискание ученических степеней кандидата физико-математических наук (1994), доктора физико-математических наук (2007). С 1999 года работает на радиофизическом факультете ННГУ, в настоящее время профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования. Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, является соавтором двух монографий и трех учебных пособий.

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
E-mail: matrosov@rf.unn.ru



*Шмелев Алексей Вячеславович* – родился в 1986 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). Аспирант кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета ННГУ. Область научных интересов – кольцевые ансамбли систем фазовой автоподстройки частоты, моделирование динамики нелинейных систем. Имеет 6 публикаций.

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
E-mail: bzzz2004@bk.ru