

ОБРАТНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМЕ ЭНО

И.А. Башкирцева, Л.Б. Ряшко, С.П. Федотов, И.Н. Цветков

В работе рассматриваются стохастически возмущенные предельные циклы дискретных динамических систем в зоне удвоения периода. Исследуется явление обратных стохастических бифуркаций – уменьшение кратности цикла при увеличении интенсивности шума. Предлагается метод анализа обратных стохастических бифуркаций на основе техники функции стохастической чувствительности. Конструктивные возможности данного метода демонстрируются на примере двумерного отображения Эно.

Ключевые слова: Бифуркации, дискретные стохастические системы, модель Эно, стохастическая чувствительность.

Введение

Функционирование большинства реальных систем сопровождается воздействием неконтролируемых случайных возмущений. Присутствие даже малых случайных возмущений может привести к существенным изменениям в динамике системы [1–4]. Известен широкий круг явлений, связанных с воздействием случайных помех: стохастический резонанс [5, 6], индуцированные шумами переходы [2], порождаемый шумами порядок [7, 8] и хаос [9]. Хорошо известно, что фазовый портрет нелинейной системы может быть существенно изменен под воздействием шума [10–12]. Эффекты, связанные с присутствием шума, значительно усиливаются вблизи точек бифуркации. Благодаря высокой чувствительности аттракторов в зонах бифуркаций даже весьма малые шумы могут порождать качественные изменения динамики. Анализ стохастической чувствительности аттракторов нелинейных систем, находящихся под воздействием случайных возмущений, позволяет вести конструктивное исследование подобных изменений [13, 14].

В настоящее время исследования явлений, связанных с воздействием шумов, проводятся в рамках теории стохастических бифуркаций [15, 16]. Изучение перехода «равновесие – цикл» в динамических системах со случайными возмущениями привлекает внимание многих исследователей. Так, например, стохастические бифуркации Хопфа рассматривались в [17–20] для брюсселятора, в [21, 22] для осциллятора

Дуффинга–ван дер Поля, в [23] для осциллятора ван дер Поля, в [24, 25] для системы Хопфа. Анализ скейлинга для дискретных отображений с шумом при переходе к хаосу посвящены работы [26–29].

В данной работе исследуются стохастически возмущенные циклы нелинейной дискретной динамической системы в зоне удвоения периода.

Целью работы является анализ обратных стохастических бифуркаций многомерных дискретных систем на основе метода функций стохастической чувствительности (ФСЧ). Техника ФСЧ была введена ранее для стохастических циклов нелинейных систем с непрерывным временем в [13, 30–32] и для дискретных систем в [33]. Данная работа развивает подход к исследованию обратных стохастических бифуркаций, предложенный для непрерывных систем в работе [34] и для дискретных одномерных систем в [35].

В п. 1 приводится содержательное описание явления обратной стохастической бифуркации (ОСБ) и дается формальный критерий определения ОСБ по виду графика плотности вероятности распределения состояний стохастического цикла. Для построения плотности вероятности представлены два подхода – эмпирический подход и подход, опирающийся на аппарат функций стохастической чувствительности. Здесь дается общее описание последнего для стохастических k -циклов многомерных систем. В п.2 для стохастических циклов системы Эно плотность распределения вероятности случайных состояний определяется эмпирически в результате прямого компьютерного моделирования. Для аппроксимации плотности вероятности предлагается использовать аппарат функций стохастической чувствительности. Для стохастических циклов системы Эно дается оценка критических значений интенсивности возмущений, соответствующих обратным стохастическим бифуркациям.

1. Формализация явления обратной стохастической бифуркации и его анализ

Рассмотрим многомерную дискретную стохастическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t, \quad (1)$$

где $f(x)$ – достаточно гладкая функция, $\sigma(x)$ – $(n \times m)$ -матрица, ξ_t – m -мерный некоррелированный случайный процесс с параметрами

$$E\xi_t = 0, \quad E\xi_t \xi_t^T = I, \quad E\xi_t \xi_k = 0 \quad (t \neq k),$$

где I – единичная $(m \times m)$ -матрица, ε – интенсивность шума.

Рассматриваем случай, когда детерминированная система (1) (при $\varepsilon = 0$) имеет k -цикл – множество точек $\Gamma = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$, связанных соотношениями

$$f(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, k-1), \quad f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1.$$

Считаем, что последовательность \bar{x}_t определена при всех t с условием периодичности $\bar{x}_{t+k} = \bar{x}_t$. Предполагается, что цикл Γ является экспоненциально устойчивым [36].

Присутствие в системе (1) случайных возмущений приводит к тому, что фазовая траектория покидает детерминированный предельный цикл Γ и формирует

вокруг его элементов множество случайных состояний. При малом значении интенсивности шума отклонения случайных состояний от Γ малы. С достаточно большой доверительной вероятностью области рассеивания, соответствующие различным точкам детерминированного цикла, не пересекаются. С ростом ε величина отклонений растет и становится сравнимой с расстоянием между соседними точками аттрактора. В результате соседние области рассеивания начинают пересекаться между собой. При дальнейшем увеличении ε после некоторого критического значения происходит полное слияние соседних областей. Например, при малых шумах вокруг двух состояний детерминированного 2-цикла наблюдаются две непересекающиеся области рассеивания (рис. 1, *a*, *b*). При увеличении шума эти области начнут пересекаться и при соответствующем уровне интенсивности возмущений сольются в одну – стохастический 2-цикл перейдет в стохастическое равновесие (рис. 1, *в*). Такое качественное изменение фазового портрета системы – уменьшение кратности стохастического цикла при увеличении интенсивности шума – будем называть *обратной стохастической бифуркацией*. После первой ОСБ при дальнейшем увеличении интенсивности шума для многократных стохастических циклов наблюдается серия *старших ОСБ* последовательного уменьшения кратности – вплоть до образования стохастического 1-цикла (равновесия).

Для детального анализа ОСБ в представляемой работе используем функцию плотности вероятности случайных состояний. Данная функция позволяет описывать важные детали слияния соседних областей рассеивания при увеличении шума. Пусть в детерминированном случае ($\varepsilon = 0$) система (1) имеет устойчивый предельный 2-цикл Γ . Тогда при малом значении ε график плотности $p(x, \varepsilon)$ имеет два узких пика (рис. 1, *з*). При увеличении ε ширина пиков растет, и начинается процесс их слияния (рис. 1, *д*). Форма графика при этом остается бимодальной, а общее количество точек локального максимума равно двум. При некотором значении ε происходит *P*-бифуркация [15] – форма графика плотности качественно изменяется и становится унимодальной (рис. 1, *е*). Соседние всплески сливаются в один, и остается только

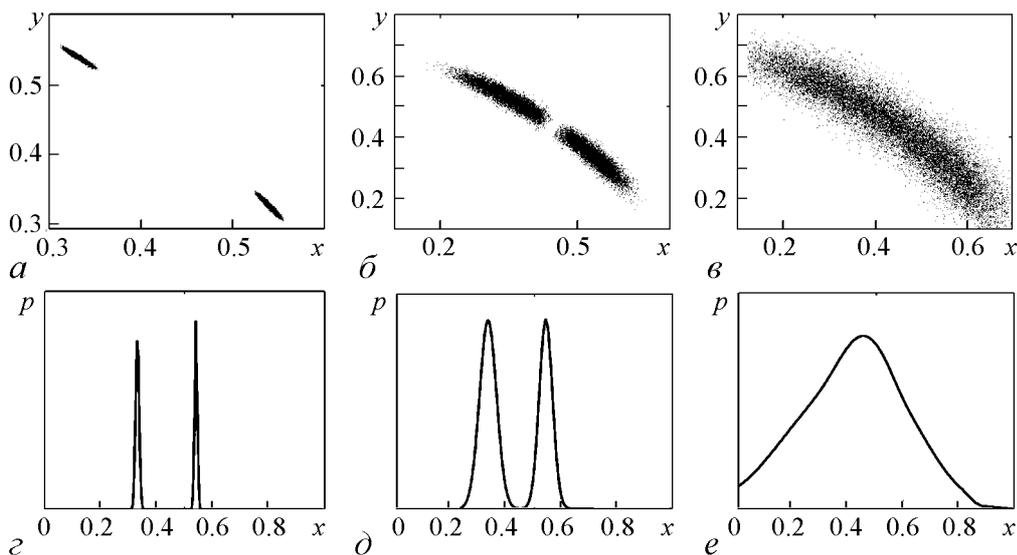


Рис. 1. Случайные состояния стохастической системы Эно при $\mu = 1.72$ для $\varepsilon = 0.001$ (*a*), 0.005 (*b*), 0.03 (*в*) и проекции плотности вероятности для $\varepsilon = 0.001$ (*з*), 0.005 (*д*), 0.03 (*е*)

одна точка локального экстремума. При дальнейшем увеличении ε наблюдается один четко выраженный пик. Такое качественное изменение формы графика плотности – переход стохастического 2-цикла в 1-цикл – описывает ОСБ. Бифуркационное значение интенсивности шума, при котором происходит качественное изменение графика плотности $p(x, \varepsilon)$ от бимодальной формы к унимодальной, будем называть *критическим значением шума* и обозначать ε^* . В случае, когда в детерминированной системе (1) наблюдается устойчивый 2^k -цикл, критическим значением первой ОСБ будем называть значение интенсивности шума, при которой график плотности $p(x, \varepsilon)$ переходит от 2^k -модальной формы к 2^{k-1} -модальной.

Таким образом, для анализа ОСБ необходимо знать плотности вероятности при различной интенсивности шума. Для построения плотности вероятности предлагается использовать два подхода: эмпирический и аналитический.

Эмпирический подход к изучению ОСБ опирается на численное моделирование случайной траектории процесса (1). В результате длительного итерационного процесса мы получаем статистический набор данных, по которому строится гистограмма. Для построения эмпирической статистики важным параметром является количество итераций. Значение данного параметра непосредственно влияет на затраты времени, расходуемого на численное моделирование. При малом количестве итераций гистограмма, аппроксимирующая плотность вероятности, содержит значительную шумовую составляющую. Данный факт существенно осложняет применение какого-либо формального критерия, позволяющего по экстремумам судить о качественных изменениях формы графика, сопровождающего ОСБ. Сглаживание графика $p(x, \varepsilon)$ может быть достигнуто либо за счет значительного увеличения времени эмпирического моделирования, либо за счет применения специальной процедуры сглаживания.

Предлагаемый в работе аналитический подход опирается на построение аппроксимации плотности вероятности с помощью аппарата функций стохастической чувствительности.

1.1. Аппарат функции стохастической чувствительности. Рассматриваем случай, когда детерминированная система (1) при $\varepsilon = 0$ имеет k -цикл Γ . Рассмотрим решение x_t^ε стохастической системы (1) с начальным условием $x_1^\varepsilon = \bar{x}_1 + \varepsilon \xi$. При малых ε чувствительность детерминированного решения \bar{x}_t к случайным возмущениям определяется величиной

$$v_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_t^\varepsilon - \bar{x}_t}{\varepsilon} .$$

Для v_t справедлива система

$$v_{t+1} = F_t v_t + S_t \xi_t, \quad S_t = \sigma(\bar{x}_t), \quad (2)$$

где $F_t = \partial f(\bar{x}_t) / \partial x$. Стохастическая динамика последовательности v_t определяется изменением первых двух моментов $m_t = E v_t$, $V_t = E v_t v_t^\top$. Для m_t и V_t справедливы следующие уравнения

$$m_{t+1} = F_t m_t, \quad (3)$$

$$V_{t+1} = F_t V_t F_t^\top + Q_t, \quad Q_t = S_t S_t^\top. \quad (4)$$

с начальными условиями $m_1 = E\xi$, $V_1 = E\xi\xi^\top$. Благодаря k -периодичности коэффициентов F_t и Q_t из (3), (4) следует

$$m_{(l+1)k+1} = Bm_{lk+1}, \quad (5)$$

$$V_{(l+1)k+1} = BV_{lk+1}B^\top + Q, \quad (6)$$

где

$$B = F_k \cdot \dots \cdot F_2 F_1, \quad Q = Q_k + F_k Q_{k-1} F_k^\top + \dots + F_k \cdot \dots \cdot F_2 Q_1 F_2^\top \cdot \dots \cdot F_k^\top.$$

В работе [33] показано, что в случае устойчивого k -цикла Γ детерминированной системы (1) последовательности m_t и V_t сходятся для любых начальных значений:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (V_t - W_t) = 0. \quad (7)$$

Здесь W_t – k -периодическая последовательность матриц ($W_{t+k} = W_t$), которая может быть найдена следующим образом. Матрица W_1 – единственное решение уравнения

$$W = BWB^\top + Q, \quad (8)$$

а W_2, W_3, \dots, W_k находятся рекуррентно

$$W_{t+1} = F_t W_t F_t^\top + Q_t, \quad t = 1, \dots, k-1. \quad (9)$$

Матричную k -периодическую функцию W_t , значения которой W_1, \dots, W_k характеризуют реакцию точек $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ цикла Γ системы (1) на малые случайные воздействия, будем называть *функцией стохастической чувствительности цикла*.

Используя функцию стохастической чувствительности в случае гауссовых шумов ξ_t , построим аппроксимацию плотности вероятности распределения случайных состояний стохастического k -цикла.

Случайные состояния x_t^ε нелинейной системы (1) при малых ε можно аппроксимировать суммой

$$x_t^\varepsilon \approx x_t + z_t, \quad (10)$$

где x_t, z_t – решения системы стохастического линейного расширения

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad x_t \in \Gamma, \quad (11)$$

$$z_{t+1} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_t) z_t + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t. \quad (12)$$

В силу линейности уравнения (12) и гауссовости шума ξ_t , решение z_t уравнения (12) также является гауссовым процессом.

При начальном условии $A_i = \{x_1 = \bar{x}_i\}$, связанном с произвольной фиксированной точкой \bar{x}_i устойчивого детерминированного цикла, компонента $z_{t,i}$ решения системы (11), (12), независимо от распределения начального состояния z_1 , сходится к некоторому гауссову процессу $\bar{z}_{t,i}$. Этот установившийся процесс имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием $E\bar{z}_{t,i} = 0$ и периодической ковариационной матрицей, связанной с функцией стохастической чувствительности соотношением $\text{cov}(\bar{z}_{t,i}, \bar{z}_{t,i}) = \varepsilon^2 W_{t+i-1}$.

При условии A_i для случайного состояния \bar{x}_t^ε стохастического цикла нелинейной системы (1) в силу (10) справедлива аппроксимация

$$\bar{x}_t^\varepsilon \approx \bar{x}_{t+i-1} + \bar{z}_{t,i},$$

где правая часть – нормально распределенный вектор с математическим ожиданием \bar{x}_{t+i-1} и ковариационной матрицей $\varepsilon^2 W_{t+i-1}$. Соответствующая условная плотность распределения имеет вид

$$p(x/A_i) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{(2\pi)^n \det W_{t+i-1}}} \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} (x - \bar{x}_{t+i-1})^\top W_{t+i-1}^{-1} (x - \bar{x}_{t+i-1})\right).$$

Считая события A_i равновероятными ($p(A_i) = 1/k$), по формуле полной вероятности имеем $p(x) = 1/k \sum_{i=1}^k p(x/A_i)$. В силу k -периодичности функции стохастической чувствительности W_t и \bar{x}_t , получаем окончательную формулу

$$p(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\varepsilon \sqrt{(2\pi)^n \det W_i}} \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} (x - \bar{x}_i)^\top W_i^{-1} (x - \bar{x}_i)\right). \quad (13)$$

Как видим, функция $p(x)$ однозначно определяется состояниями \bar{x}_t цикла невозмущенной детерминированной системы и набором матриц W_t – значений функции стохастической чувствительности. Конструктивный алгоритм расчета функции стохастической чувствительности представлен в (8), (9).

Точность аппроксимации стационарной плотности распределения (13) зависит от того, насколько сумма $\bar{x}_t + \bar{z}_t$, формируемая стохастическим линейным расширением (11), (12) близка к состоянию \bar{x}_t^ε нелинейной системы (1). Чем меньше интенсивность шума, тем, естественно, выше точность. При увеличении ε усиливающиеся нелинейные эффекты могут сопровождаться ростом погрешности.

Практические возможности использования аппроксимации (13) в исследовании обратных стохастических бифуркаций проиллюстрируем на примере системы Эно.

2. Анализ обратных стохастических бифуркаций циклов системы Эно

Рассмотрим стохастическую систему Эно

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 - \mu x_t^2 - 0.5y_t + \varepsilon \xi_{1,t}, \\ y_{t+1} &= x_t + \varepsilon \xi_{2,t}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\xi_{1,t}$, $\xi_{2,t}$ – последовательности независимых гауссовых случайных величин, $E\xi_{1,t} = E\xi_{2,t} = 0$; $E\xi_{1,t}^2 = E\xi_{2,t}^2 = 1$; $E\xi_{1,t}\xi_{2,t} = 0$; ε – интенсивность шумов.

При отсутствии случайных возмущений ($\varepsilon = 0$) детерминированная модель Эно (14) имеет на интервале $1.6 \leq \mu \leq 2.5$ различные типы динамики с чередующимися зонами порядка и хаоса. На интервале, где наблюдаются бифуркации удвоения периода, можно выделить зоны структурной устойчивости – интервалы I_0, I_1, \dots – с постоянной кратностью циклов, разделенные точками бифуркаций. На интервале I_n наблюдаются 2^n -циклы. Для детерминированной системы (14) имеем следующие интервалы структурной устойчивости: $I_0 \approx (1.6, 1.68)$, $I_1 \approx (1.68, 2.31)$,

$I_2 \approx (2.31, 2.41)$ и т.д. При этом на I_0 имеем одну точку покоя $\bar{x}_{0,1}(\mu) = \bar{y}_{0,1}(\mu) = (\sqrt{9 + 16\mu} - 3)/(4\mu)$, на I_1 имеем 2-цикл с состояниями

$$\bar{x}_{1,1}(\mu) = \frac{3 + \sqrt{16\mu - 27}}{4\mu},$$

$$\bar{y}_{1,1}(\mu) = \frac{3 - \sqrt{16\mu - 27}}{4\mu},$$

$$\bar{x}_{1,2}(\mu) = \bar{y}_{1,1}(\mu),$$

$$\bar{y}_{1,2}(\mu) = \bar{x}_{1,1}(\mu).$$

Для 2-цикла системы Эно ($\mu = 1.72$) изменение эмпирической плотности вероятности, полученной прямым численным моделированием, в зависимости от интенсивности добавленного возмущения представлено на рис. 2 (серый цвет). Переход от бимодальной к унимодальной форме графика плотности происходит при $\varepsilon^* \approx 0.018$. В связи с большими затратами времени на численное моделирование цикла и сглаживание графика эмпирической плотности вероятности получена только грубая оценка критического значения.

Перейдем к теоретическому анализу ОСБ, позволяющему избежать больших затрат времени, связанных с численным моделированием. Для 2-цикла ($\mu = 1.72$) на рис. 2 приведены графики плотности p , полученные из теоретической аппроксимации (13) с использованием ФСЧ. Как видно из рис. 2, теоретическая аппроксимация плотности вероятности (черный цвет) хорошо соответствует эмпирическим данным. При $\varepsilon = 0.001$ теоретическая кривая практически совпадает с эмпирической. При увеличении ε наблюдается некоторое количественное расхождение, вызванное нелинейностью. Однако качественное соответствие – наличие бимодальной формы – сохраняется.

При изменении значений ε в интервале (0.001; 0.03) количество локальных максимумов изменяется, и график плотности преобразуется соответственно от бимодальной к унимодальной форме. Таким образом, критическое значение первой ОСБ перехода 2-цикла в 1-цикл принадлежит интервалу (0.001; 0.03). Более точно, $\varepsilon^* = 0.0176$. Для определения модальности графика теоретической аппроксимации

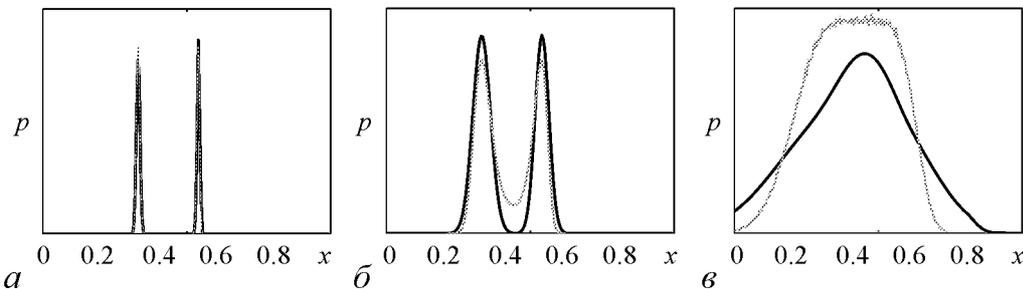


Рис. 2. Проекция плотности вероятности циклов системы Эно: эмпирическое построение (серый цвет), теоретическая аппроксимация (черный цвет) для $\mu = 1.72$ при $\varepsilon = 0.001$ (а), 0.01 (б), 0.03 (в)

плотности вероятности использовался следующий алгоритм: из каждой точки детерминированного аттрактора по методу «наискорейшего спуска» находились ближайшие локальные максимумы и далее по количеству различных локальных максимумов определялась модальность графика.

Для 4-цикла ($\mu = 2.32$) с помощью аппроксимации (13) получена оценка критического значения интенсивности шума $\varepsilon^* = 0.0026$. Переход от четырехмодальной формы плотности к бимодальной для данного значения параметра представлен на рис. 3.

Величина ε^* критической интенсивности шума, отвечающая первой ОСБ перехода от 2-цикла к 1-циклу, зависит от параметра μ . Графики функции $\varepsilon^*(\mu)$, полученные эмпирическим моделированием (серый цвет) и найденные с помощью ФСЧ (черный цвет) представлены на рис. 4. Как видим, метод, основанный на аппроксимации (13) с использованием ФСЧ, позволяет достаточно точно найти бифуркационные значения, отвечающие первой ОСБ.

Проследим изменение бифуркационного значения интенсивности при смене интервалов структурной устойчивости. На рис. 5 представлен график поведения критического значения интенсивности шума первой ОСБ $\varepsilon^*(\mu)$ на интервалах $I_1 \cup I_2$. Как видно из данного рисунка, график $\varepsilon^*(\mu)$ демонстрирует самоподобие на интервалах I_k . На каждом из этих интервалов функция $\varepsilon^*(\mu)$ сначала возрастает, а затем стабилизируется.

Точность полученных теоретических оценок первой ОСБ при приближении к левым концам интервалов I_1 и I_2 увеличивается. Это объясняется тем, что соседние точки циклов в этих зонах близки друг к другу и ОСБ происходит уже при малых шумах, для которых аппроксимация (13) имеет достаточно высокую точность.

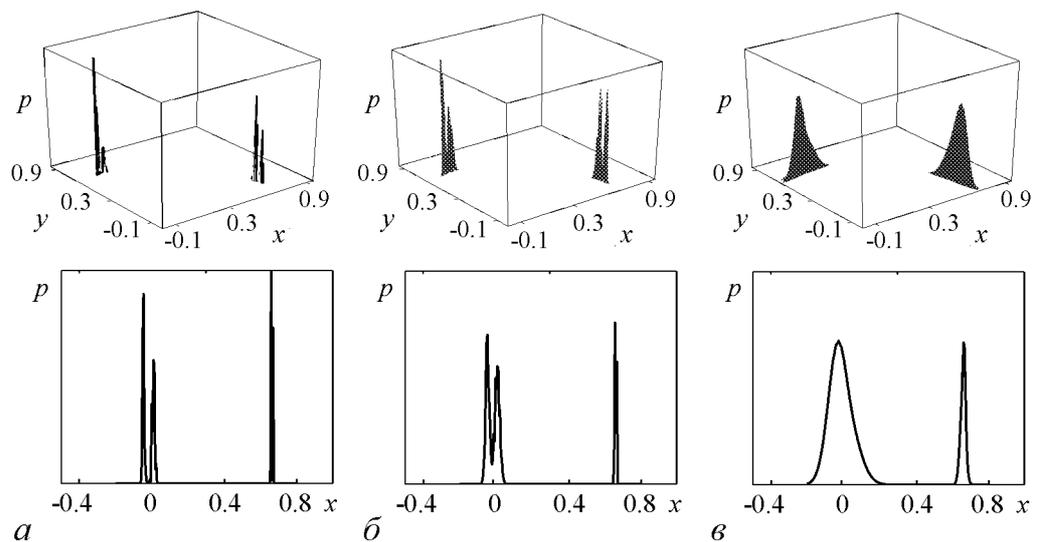


Рис. 3. Теоретическая плотность вероятности циклов системы Эно для $\mu = 2.32$ при $\varepsilon = 0.0005$ (а), 0.001 (б), 0.005 (в)

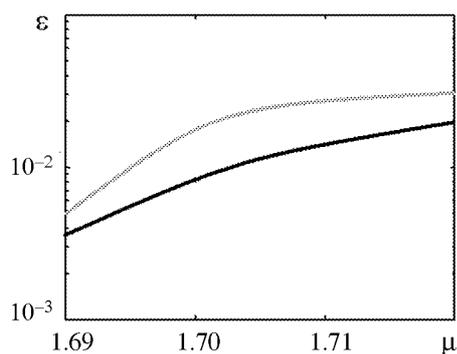


Рис. 4. Диаграмма первой ОСБ системы Эно: эмпирическая оценка (серый цвет), теоретическая оценка (черный цвет)

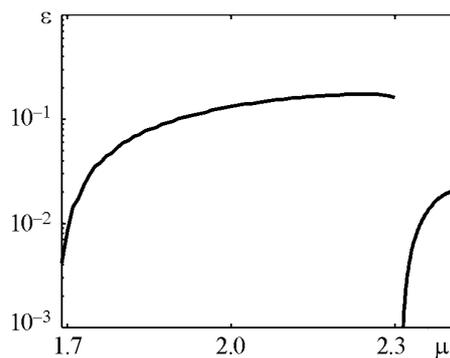


Рис. 5. Диаграмма теоретической оценки первой ОСБ системы Эно

Заключение

В данной статье рассмотрены обратные стохастические бифуркации циклов многомерных дискретных систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. Предложен формальный критерий обратной стохастической бифуркации, связанный с качественным изменением графика плотности вероятности стохастического цикла. Для отыскания данной плотности вероятности рассмотрен эмпирический и теоретический подход. Теоретический анализ использует аппарат функций стохастической чувствительности. Для двумерного отображения Эно представлено сравнение результатов теоретического и эмпирического анализа обратных стохастических бифуркаций. Показано, что результаты, полученные с использованием аппарата функций стохастической чувствительности, хорошо соответствуют эмпирическому моделированию и не требуют огромных вычислительных затрат.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ NN 09-01-00026, 09-08-00048, 10-01-96022урал, Федерального агентства по образованию N 2.1.1/9498, ФЦП 02.740.11.0202.

Библиографический список

1. *Stratonovich R.L.* Topics in the Theory of Random Noise. New York: Gordon and Breach, 1963.
2. *Horsthemke W., Lefever R.* Noise-Induced Transitions. Berlin: Springer, 1984.
3. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // *Physics Reports*. 2000. Vol. 323, № 1. P. 1.
4. *Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L.* Effects of noise in excitable systems // *Physics Reports*. 2004. Vol. 392. P. 321.
5. *Gammaitoni L., et al.* Stochastic resonance // *Rev. Mod. Phys.* 1998. Vol. 70. P. 223.
6. *McDonnell M.D., Stocks N.G., Pearce C.E.M., Abbott D.* Stochastic resonance: From Suprathreshold Stochastic Resonance to Stochastic Signal Quantization. Cambridge University Press, 2008.

7. *Matsumoto K., Tsuda I.* Noise-induced order // *J. Stat. Phys.* 1983. Vol. 33. P. 757.
8. *Gassmann F.* Noise-induced chaos-order transitions // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55. P. 2215.
9. *Gao J.B., Hwang S.K., Liu J.M.* When can noise induce chaos? // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 82. P. 1132.
10. *Mayer-Kress G., Haken H.* The influence of noise on the logistic model // *J. Stat. Phys.* 1981. Vol. 29. P.149.
11. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
12. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: ИКИ, 2003.
13. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator // *Physica A.* 2000. Vol. 278. P. 126.
14. *Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic dynamo model for subcritical transition // *Phys. Rev.E.* 2006. Vol. 73. P.066307.
15. *Arnold L.* Random Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1998.
16. *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Стохастические бифуркации // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2009. Т. 17, № 5. С. 3.
17. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to external multiplicative noise // in *Fluctuations and Sensitivity in Equilibrium Systems* / Eds W. Horsthemke and D.K. Kondepudi. Berlin: Springer. 1984. P. 143.
18. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1631.
19. *Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 36. P. 834.
20. *Arnold L., Bleckert G., Schenk-Hoppe K.* The stochastic Brusselator: Parametric noise destroys Hopf bifurcation // In *Stochastic Dynamics.* New-York: Springer. 1999. P. 71.
21. *Namachchivaya N.Sri.* Hopf bifurcation in the presence of both parametric and external stochastic excitations // *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 110. P. 923.
22. *Schenk-Hoppe K.R.* Bifurcation scenarios of the noisy Duffing–van der Pol oscillator // *Nonlinear dynamics.* 1996. Vol. 11. P. 255.
23. *Leung H.K.* Stochastic Hopf bifurcation in a biased van der Pol model // *Physica A.* 1998. Vol. 254. P. 146.
24. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2009. Vol. 39. P. 72.
25. *Башкирцева И.А., Перевалова Т.В., Ряшко Л.Б.* Анализ индуцированных шумом бифуркаций в системе Хопфа // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2010. Т. 18, № 1. С. 37.
26. *Crutchfield J. P., Nauenberg M., Rudnick J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46, № 14. P. 933.

27. *Crutchfield J. P., Farmer J., Huberman B. A.* Fluctuation and simple chaotic dynamics // *Phys. Rep.* 1982. Vol. 92, № 2. P. 45.
28. *Кузнецов А.П., Канустина Ю.В.* Свойство скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2000. Т.8, № 6. С. 78.
29. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Седова Ю.В.* О свойствах скейлинга при воздействии шума в отображении окружности с числом вращения, заданным золотым средним // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т.13, № 5. С. 56.
30. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // *Dynamic Systems and Applications.* 2002. Vol. 11. P. 293.
31. *Ryagin M., Ryashko L.* The analysis of the stochastically forced periodic attractors for Chua's circuit // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 2004. Vol. 14. P. 3981.
32. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations // *Chaos, Solitons and Fractals,* 2005. Vol. 26. P. 1437.
33. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I.* Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems // *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis.* 2010. Vol. 17. P. 501.
34. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Stikhin P.* Noise-induced backward bifurcations of stochastic 3D-cycles // *Fluctuation and Noise Letters.* 2010. Vol. 9, № 1. P. 89.
35. *Башикирцева И.А., Ряшко Л.Б., Федотов С.В., Цветков И.Н.* Обратные стохастические бифуркации циклов дискретных систем // *Нелинейная динамика.* 2010. Т. 6, № 4. С. 737.
36. *Elaydi S. N.* An Introduction to Difference Equations. Springer: Berlin, 1999.

*Уральский государственный
университет им. А.М. Горького
University of Manchester*

*Поступила в редакцию 14.07.2010
После доработки 29.03.2011*

BACKWARD STOCHASTIC BIFURCATIONS OF THE HÉNON MAP

I.A. Bashkirtseva, L.B. Ryashko, S.P. Fedotov, I.N. Tsvetkov

We study the stochastically forced limit cycles of discrete dynamical systems in a period-doubling bifurcation zone. A phenomenon of a decreasing of the stochastic cycle multiplicity with a noise intensity growth is investigated. We call it by a backward stochastic bifurcation. In this paper, for such a bifurcation analysis we suggest a stochastic sensitivity function technique. The constructive possibilities of this method are demonstrated for analysis of the two-dimensional Hénon model.

Keywords: Bifurcations, discrete stochastic systems, Hénon model, stochastic sensitivity.



Башкирцева Ирина Адольфовна – родилась в 1965 году. Окончила Уральский госуниверситет (1987). Кандидат физико-математических наук (1997), доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных стохастических систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М. Горького
E-mail: irina.bashkirtseva@usu.ru



Ряшко Лев Борисович – родился в 1953 году. Окончил Уральский госуниверситет (1975). Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике и монографии «Стохастические аттракторы нелинейных динамических систем» (в соавторстве с И.А. Башкирцевой).

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М. Горького
E-mail: lev.ryashko@usu.ru



Федотов Сергей Петрович – родился в 1960 году, окончил Уральский государственный университет. Доктор физико-математических наук (1993), профессор математики в университете Манчестера (Англия). Автор ряда научных работ и монографии «Reaction-Transport Systems Mesoscopic Foundations, Fronts, and Spatial Instabilities» (Series: Springer Series in Synergetics, 2010, with Vicenc Mendez, Werner Horsthemke).

School of Mathematics, University of Manchester
Oxford Road, Manchester, M13, 9PL, UK
E-mail: sergei.fedotov@manchester.ac.uk



Цветков Иван Николаевич – родился в 1983 году, окончил Уральский госуниверситет (2006), кандидат физико-математических наук (2010). Область научных интересов – анализ чувствительности стохастических дискретных систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М. Горького
E-mail: itsvet@e1.ru