



## ФЕНОМЕН МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРЫ И СХОДНЫХ С НЕЙ\*

*Д.И. Трубецков*

Математическая модель Лотки–Вольтерры (часто её называют моделью «хищник–жертва») применима для описания различных процессов в биологии, экологии, медицине, в социальных исследованиях, в истории, в радиофизике и других науках.

В настоящем обзоре, который во многом носит методологический характер, рассмотрены варианты этой модели и сходных с ней применительно к анализу ряда природных и социальных явлений.

Обсуждаются следующие модели: модели взаимодействия загрязнения с окружающей средой; модель классовой борьбы; модель бесклассового общества эпохи охотников-собирателей; модель военных действий; вирусная модель инфекционного заболевания; модель распространения эпидемий, включая модель заражения вирусом компьютеров; модель взаимодействия когнитивных и/или эмоциональных мод мозга.

*Ключевые слова:* Математическая модель Лотки–Вольтерры, система «хищник–жертва», анализ природных и социальных явлений.

«...При разрешении юридических казусов, как и при постановке врачом диагноза или во время опытов, проводимых химиком, решающую\* роль играет распознавание типовых моделей».

*Бернхард Шлинк. Возвращение\*\**

### Введение на основе экологических примеров [1–8]

По своей сути модель Лотки–Вольтерры есть математическое описание дарвинского принципа борьбы за существование, который Чарльз Дарвин в своей автобиографии [1] излагает следующим образом. «Изучив множество обстоятельств, я пришел к выводу о существовании борьбы за существование. Однажды пришло мне в голову, что при подобных обстоятельствах благоприятные виды продолжили бы развиваться

\*Материалы статьи были изложены автором в лекциях на международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС–2010), проходившей в г. Саратове 4–9 октября 2010 года.

\*\* Санкт-Петербург: Издательская группа «Азбука-классика», 2010, с. 67

дальше, а неблагоприятные исчезли бы с лица Земли. Вот сейчас у меня и возникла теория, которой следует руководствоваться» (цит. по [2]).

Путь, которым шел Дарвин, хорошо описан в книге [2]. Любопытно, что Дарвин окончательно уверился в своих выводах после прочтения книги «Опыт о законе народонаселения» Томаса Роберта Мальтуса [3]. Это эссе сыграло важную роль в социальной и политической жизни Британии в 90-е годы XVIII века, поскольку его воспринимали как разумное осмысление естественных законов общества. В 30-е годы XIX века мальтузианские доктрины подавляли проведение правительственной политики. Напомним доводы Мальтуса, которые удивительно просты. Поскольку, по словам Мальтуса, у человечества есть естественная склонность к увеличению рода, производство пищи не могло оставаться на прежнем уровне.

Процитируем далее [2, стр. 67].

«Хотя приблизительный баланс существует, как утверждал автор: некоторое количество людей погибает в результате природных факторов (голода или болезней) или человеческих действий (войны, сексуальные воздержания или греховные поступки, например, детоубийство). Это необходимо ради общего баланса существования.

Мальтус пошел дальше, утверждая: ...данная участь (гибель) – удел самого слабого, самого бедного и самого больного члена общества. Избежать уготованной судьбы не представляется возможным, на то есть воля Бога. Напрашивался один простой вывод, но автор предостерегал о нем: если дать нищим милостыню, то человеческий род будет увеличиваться, появится и нехватка пищи».

Викторианское время, казалось бы, подтвердило правоту Мальтуса. Возникли мятежи, связанные с недостатком еды, дискуссии о «Законе о бедных» и общественная реакция на «Хлебные законы». В 1834 году викторианские правящие круги в ответ на поправки к «Закону о бедных» как альтернативу церковным благотворительным обществам организовали работные дома, где люди работали за хлеб и воду.

Дарвин жил в этом мире, был его представителем и вращался в одинаковых с Мальтусом кругах. Он распространяет идеи Мальтуса на все живое: в природе идет борьба за жизнь, борьба за существование, в которой худший и слабейший организм погибает первым, а побеждают более развитые формы, более здоровые и приспособленные. Именно эти особи дают потомство. Организмы быстрее адаптируются к условиям окружающей среды, если подобные случаи борьбы повторяются через некоторые промежутки времени.

Начнем дальнейшее изложение (в качестве напоминания) с моделей взаимодействующих популяций – первых математических моделей Лотки [4] и Вольтерры [5]. Будем следовать в изложении главе 5 книги [6], поскольку это удобно для дальнейшего описания моделей взаимодействия загрязнения с окружающей средой.

Авторы [6, с. 114–115] указывают в первую очередь на работу Вольтерры [5], замечая, что аналогичная модель «была предложена Лоткой [4] несколько ранее (Вольтерра значительно более полно провел анализ этой системы. Лотка каждый раз старался подчеркнуть свой приоритет в записи этой модели)».

Модель Лотки–Вольтерры описывает взаимодействие двух видов – популяции хищников и популяции жертв.

Пусть  $N(t)$  – численность жертв,  $P(t)$  – численность хищников в момент времени  $t$ . Тогда модель Лотки–Вольтерры имеет вид:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP, \quad \frac{dP}{dt} = -dP + cNP, \quad (1)$$

$a, b, c, d$  – положительные постоянные.

Напомним, что система уравнений (1) основана на следующих допущениях:

- при отсутствии хищников жертвы размножаются неограниченно согласно уравнению  $dN/dt = aN$ , которое называют иногда уравнением Мальтуса;
- хищники при отсутствии жертв вымирают согласно уравнению  $dP/dt = -dP$ ;
- слагаемые, пропорциональные произведению  $NP$ , рассматриваются как превращение энергии одного источника в энергию другого (эффект влияния популяции хищников на популяцию жертв, то есть результат их встречи, состоит в уменьшении скорости прироста  $dN/dt$  численности жертв на величину  $NP$ , пропорциональную численности хищников).

Если ввести новые переменные

$$u(\tau) = \frac{N(t)d}{c}, \quad v(\tau) = \frac{P(t)b}{a}, \quad \tau = at, \quad \gamma = \frac{c}{d},$$

то система уравнений (1) примет вид

$$\frac{du}{d\tau} = u - uv, \quad \frac{dv}{d\tau} = \gamma v(u - 1), \quad (2)$$

Система уравнений (2) имеет две неподвижные точки:  $(0, 0)$  – седло и  $(1, 1)$ , для которой собственные значения матрицы Якоби  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$  –  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\gamma}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , то есть положение равновесия  $(1, 1)$  негиперболическое и сделать вывод о его устойчивости на основе линейного анализа нельзя.

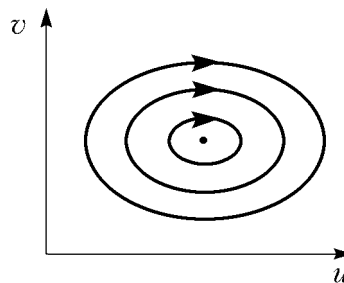
Фазовые траектории системы уравнений (2), как известно, являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dv}{du} = \gamma \frac{(u - 1)v}{(1 - v)u},$$

решение которого

$$\gamma u + v - \ln u^\gamma v = H. \quad (3)$$

Можно показать (см., например, [5,7]), что вблизи  $(1, 1)$  линии уровня функции  $H$  представляют собой замкнутые кривые, соответствующие периодическим решениям системы уравнений (2) (рис. 1). Постоянная  $H$  в выражении (3) определяется начальными условиями, например,  $u(0) = u_0$  и  $v(0) = v_0$ .



Математическая модель, описываемая системой уравнений (2), структурно

Рис. 1. Фазовые траектории, соответствующие соотношению (3)

неустойчива, то есть малое изменение правых частей в ней может приводить к качественному изменению поведения решения. В этом её основной недостаток. Более того, именно поэтому трудно говорить о совпадении теории с экспериментом.

Одна из причин структурной неустойчивости модели в том, что она является консервативной, то есть имеет первый интеграл. Как подчеркивает автор книги [6], несмотря на указанный основной недостаток модели, система уравнений (1) позволяет сделать нетривиальные выводы, подтвержденные многочисленными наблюдениями. В частности, в [6] сформулирован принцип Вольтерры: если в системе «хищник–жертва», описываемой моделью (1), оба вида истребляются равномерно и пропорционально числу их индивидуумов, то среднее число жертв возрастает, а среднее число хищников убывает.

В книге [6] приведены два примера существования этого эффекта в природе. Один – общественный факт, который привел Вольтерру к его теории борьбы за существование [5]: во время первой мировой войны лов рыбы в Адриатическом море был сильно сокращен, что, к удивлению биологов, привело к увеличению хищников и уменьшению числа жертв. Второй пример менее известен. Согласно [6], принцип Вольтерры показывает двойственный характер применения средств от насекомых (инсектицидов) для сохранения урожая на полях. Почти все такие химические вещества действуют не только на вредителей, но и на их естественных врагов, что зачастую приводит к увеличению числа вредителей и уменьшению, например, птиц, питающихся этими вредителями. Таким образом, согласно принципу Вольтерры, в экосистеме «хищник–жертва» популяция жертв более чувствительна к процессу пропорционального уменьшения особей в популяции.

В терминологии В.И. Арнольда, модель, описываемая системой уравнений (1), называется «жесткой» [8]. Кстати, раздел книги В.И. Арнольда «Жесткие» и «мягкие» математические модели (М.: МЦНО, 2000) называется «Жесткие модели как путь к ошибочным предсказаниям». При малом изменении модели она становится мягкой, когда к правым частям (1) добавляются малые слагаемые, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу или хищников за жертв (конкретные виды уравнений приведем ниже). Тогда в общем виде уравнения (1) можно переписать так:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bPN + \varepsilon f(P, N), \quad \frac{dP}{dt} = -dP + cPN + \varepsilon g(P, N), \quad \varepsilon \ll 1.$$

В зависимости от малых поправок  $\varepsilon f(P, N)$  и  $\varepsilon g(P, N)$  возможны, например, сценарии, показанные на рис. 2.

В смысле интерпретации интересен рис. 2, б. По Арнольду, если  $P$  – бандиты, а  $N$  – трудящиеся, эволюция системы приводит то к резкому увеличению числа бандитов, то к их почти полному вымиранию, поскольку они настолько ограбили трудящихся, что взять уже нечего. Система в конечном счете попадает в область столь больших или столь малых значений  $P$  и  $N$ , что модель становится неприменимой, поскольку изменяются законы эволюции.

Приведем еще несколько усложненных моделей «хищник–жертва».

*Система «хищник–жертва» с учетом внутривидовой конкуренции.*

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) - bNP, \quad \frac{dP}{dt} = -dP \left(1 - \frac{P}{K_2}\right) + cNP,$$

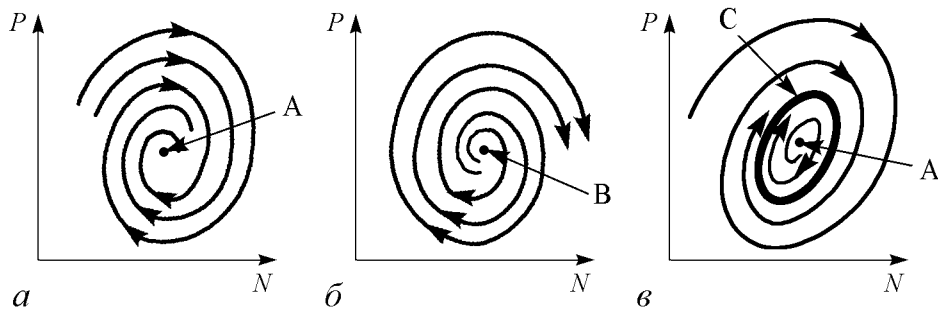


Рис. 2. *a* – состояние равновесия устойчиво: при любых начальных условиях через большое время устанавливается оно же; *б* – состояние равновесия *B* неустойчиво: система идет «вразнос»; *в* – в системе с неустойчивым стационарным состоянием *A* устанавливается с течением времени периодический режим *C* (в отличие от системы (1) (см. рис. 1) имеют место колебания определенной амплитуды, не зависящей от малости отклонения)

где  $K_{1,2}$  – потенциальные емкости экологических систем, которые определяются доступным количеством ресурсов и соответствуют предельным значениям численности популяций. В безразмерных переменных данная система уравнений примет вид

$$\frac{du}{dt} = u(1 - \alpha u - v), \quad \frac{dv}{dt} = v(-\gamma - \beta v + u), \quad (4)$$

где  $N(t) = (a/c)u(\tau)$ ,  $P(t) = av(\tau)/b$ ,  $\tau = at$ ,  $\gamma = d/a$ ,  $\alpha = a/(cK_1)$ ,  $\beta = d/(aK_2)$ .

*Модель конкуренции*

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right) - e N_1 N_2; \quad \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right) - h N_1 N_2. \quad (5)$$

Здесь  $r_1, r_2, e, h$  – положительные постоянные.

Анализ системы уравнений (5) показывает: если  $n$  популяций линейно зависят от  $m$  ресурсов, причем  $m < n$ , то по крайней мере одна из популяций вымирает.

*Модель мутуализма (симбиоза)*

$$\frac{du_1}{dt} = u_1(r_1 + a_{11}u_1 + a_{12}u_2), \quad \frac{du_2}{dt} = u_2(r_2 + a_{21}u_1 + a_{22}u_2). \quad (6)$$

Для описания мутуализма достаточно потребовать, чтобы

$$a_{12} > 0, \quad a_{21} > 0.$$

Детальный анализ приведенных моделей можно найти, например, в книгах [6] и [7].

В заключение раздела, следуя [7] в изложении [6], рассмотрим *обобщенную модель* Лотки–Вольтерры, описываемую системой уравнений

$$\frac{du}{dt} A(u) - B(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = -D(v) + C(u, v), \quad (7)$$

где  $u$  и  $v$  – численности жертв и хищников, соответственно,  $A(u)$  – функция размножения жертв при отсутствии хищников;  $D(v)$  – функция вымирания хищников при отсутствии жертв; функция  $B(u, v)$  описывает выедание хищниками жертв;  $C(u, v)$  – эффективность потребления жертв хищниками. Перечислим возможные дополнительные факторы внутри- и межпопуляционных отношений [6].

- Нелинейная зависимость скорости размножения популяций жертв от плотности при малых значениях плотности (отсутствие достаточного количества брачных пар):  $A(u) = au^2/(N + u)$ , где  $a$  и  $N$  – положительные постоянные.
- Внутривидовая конкуренция жертв:  $A(u) = au(1 - u/K)$ .
- Насыщение хищников:  $B_1(u) = bu/(1 + \alpha u)$  – трофическая функция хищника.
- Нелинейный характер выедания хищниками жертв:  $B_1(u) = bu^2/(1 + \alpha u)$ .
- Конкуренция хищников за жертв:  $B_2(v) = bv/(1 + \beta v)$ . При этом  $B(u, v) = B_1(u)B_2(v)$ .
- Конкуренция хищников за отличные от жертв ресурсы:  $C(v) = v/(1 + v/K_1)$ .
- Нелинейный характер зависимости скорости размножения хищника от плотности популяции при малых значениях плотности:  $C_2(v) = cv/(N_v + v)$ , при этом  $C(u, v) = C_1(u)C_2(v)$  и  $C_1(u) = B_1(u)$ ,  $D_2(v) = cv$ , то есть  $C(u, v) = cv/(N_v + v) B_1(u)$ .

### 1. Математическая модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой, трактуемая как модель «хищник–жертва» [6,9]

Ситуацию «загрязнение–природа» можно трактовать как частный случай модели «хищник–жертва», когда природа выступает в качестве жертвы, а загрязнение – хищника. Главное предположение, лежащее в основе модели, состоит в том, что окружающая среда активно абсорбирует и перерабатывает загрязнение вплоть до определенного предела.

Из качественных соображений в системе окружающая среда – загрязнение возможны три следующих принципиально различных сценария взаимодействия.

1. При малых выбросах загрязнения окружающая среда его полностью перерабатывает (устойчивая ситуация).

2. При увеличении выбросов загрязнения в зависимости от внешних условий и случайных причин окружающая среда может находиться в удовлетворительном состоянии, а может и погибнуть (бистабильная ситуация)\*.

3. Наконец, третья ситуация соответствует экологической катастрофе – полному вымиранию природы.

Предположим, что общий фон загрязнения и состояние окружающей среды можно характеризовать следующими переменными: концентрацией загрязнения  $\mathcal{P}$  и плотностью биомассы  $\mathcal{E}$ , соответственно. В том случае, если существует постоянно действующий источник загрязнения, процесс эволюции загрязнения можно описать уравнением

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = a - b\mathcal{P}, \quad (8)$$

где  $a$  – мощность источника загрязнения за единицу времени,  $b$  – коэффициент естественного уничтожения загрязнения (такое уничтожение называют «мертвым»), или

---

\*Бистабильная ситуация может реализоваться, когда в окрестности некоторых предприятий растительный покров остается только местами. Это следует из наблюдений и может служить во многом запоздалым сигналом для принятия срочных мер по спасению природы.

естественной диссипацией). При начальном условии  $\mathcal{P}(t = 0) = \mathcal{P}_0$  решение уравнения (8) имеет вид:

$$\mathcal{P}(t) = \frac{a}{b} + \left( \mathcal{P}_0 - \frac{a}{b} \right) e^{-bt},$$

то есть со временем концентрация загрязнения уменьшается естественным образом.

Предположим далее, что загрязнение находится в постоянном взаимодействии с окружающей средой, которая оказывает очищающий эффект на загрязнение. Будем также считать систему «окружающая среда – загрязнение» замкнутой. Тогда процесс взаимодействия с окружающей средой можно описать следующей системой уравнений:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = a - b\mathcal{P} - f(\mathcal{E}, \mathcal{P}), \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = g(\mathcal{E}) - h(\mathcal{E}, \mathcal{P}), \quad (9)$$

где функция  $f(\mathcal{E}, \mathcal{P}) \geq 0$  – описывает поглощение и переработку загрязнения окружающей средой;  $g(\mathcal{E})$  – слагаемое, описывающее динамику окружающей среды в отсутствие загрязнения;  $h(\mathcal{E}, \mathcal{P})$  – функция, описывающая вредное влияние загрязнения на окружающую среду.

Примем в качестве функций взаимодействия загрязнения и живой природы

$$f(\mathcal{E}, \mathcal{P}) = c\mathcal{E}\mathcal{P} \quad \text{и} \quad h(\mathcal{E}, \mathcal{P}) = d\mathcal{E}\mathcal{P},$$

где  $c$  и  $d$  – постоянные коэффициенты.

Будем считать, что при отсутствии загрязнения поведение окружающей среды можно описать логистическим уравнением, то есть  $g(\mathcal{E}) = r\mathcal{E}(1 - \mathcal{E}/K)$ , где  $r$  – постоянный коэффициент, а  $K$  – соответствует максимальному значению  $\mathcal{E}$  при  $d\mathcal{E}/dt = 0$ . Подставив выражения для  $f(\mathcal{E}, \mathcal{P})$ ,  $h(\mathcal{E}, \mathcal{P})$ , и  $g(\mathcal{E})$  в систему уравнений (9), получим

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = a - b\mathcal{P} - c\mathcal{E}\mathcal{P}, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = r\mathcal{E} \left( 1 - \frac{\mathcal{E}}{K} \right) - d\mathcal{E}\mathcal{P}. \quad (10)$$

Переходя в системе уравнений (10) к безразмерным переменным

$$\mathcal{P} = \frac{bu}{d}, \quad \mathcal{E} = \frac{bv}{c}, \quad \tau = bt, \quad \alpha = \frac{ad}{b^2}, \quad u_0 = \frac{r}{b}, \quad p = \frac{r}{cK},$$

получаем простейшую математическую модель взаимодействия загрязнения с окружающей средой в виде следующих уравнений:

$$\frac{du}{dt} = \alpha - u - uv, \quad \frac{dv}{dt} = v(u_0 - u) - pv^2. \quad (11)$$

Легко видеть, что система уравнений (10) есть система хищник–жертва, где в качестве жертвы выступает загрязнение (не биологический объект), а в качестве хищника – биологически активная окружающая среда.

В системе уравнений (11) параметр  $\alpha$  можно трактовать как обобщенную мощность источника загрязнения;  $u_0$  – предельно допустимая концентрация для данной экосистемы (если  $u > u_0$ ,  $dv/dt < 0$ , и природа вымирает);  $p$  – характеристика экосистемы – коэффициент внутривидовой конкуренции природы.

Положения равновесия системы уравнений (11), соответствующие условиям  $du/dt = 0$  и  $dv/dt = 0$ , нетрудно найти из уравнений

$$\alpha - u(1 + v) = 0, \quad -v(u - u_0) - pv^2 = 0.$$

Тогда  $A_1 = (\alpha, 0)$ ;  $A_2 = ((u_0 + p + Q)/2, (u_0 - p - Q)/(2p))$ ;

$$A_3 = ((u_0 + p - Q)/2, (u_0 - p + Q)/(2p)), \quad Q = \sqrt{(u_0 + p)^2 - 4\alpha p}.$$

Второе и третье положения равновесия существуют, если  $[(u + p)^2 - 4\alpha P] > 0$ . Стандартный линейный анализ на устойчивость указанных положений равновесия приводит к параметрическому портрету системы уравнений (11), приведенному на рис. 3. На рис. 4 приведены соответствующие фазовые портреты системы уравнений (11).

Если параметры принадлежат области IV, то все траектории за исключением устойчивого многообразия  $A_1$  стремятся при  $t \rightarrow \infty$  к  $A_3$  (рис. 4, а). Области II соответствует фазовый портрет на рис. 4, б. В области III существует единственный глобальный аттрактор  $A_1$  (рис. 4, в).

Таким образом, описанная математическая модель соответствует трем качественно описанным выше ситуациям.

Однако в начале этого раздела в качестве главного предположения было указано, что модель содержит пороговую величину загрязнения, которая способна переработать природа. Этот эффект нужно учесть в математической модели.



Рис. 3. Параметрический портрет системы уравнений (11). При фиксированном  $u_0$  вся область допустимых параметров разбивается на четыре множества

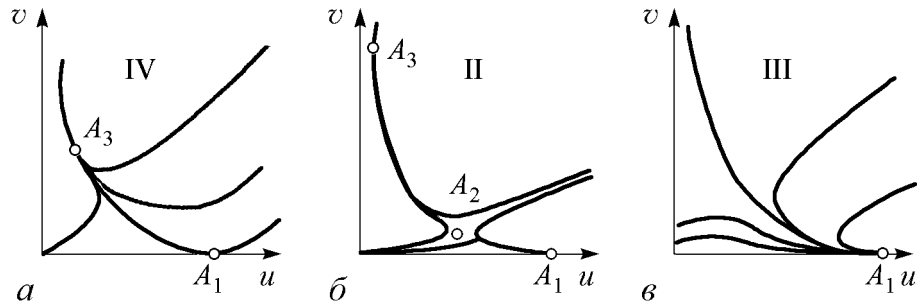


Рис. 4. Фазовые портреты системы уравнений (11)



Для этого в книге [6, с. 134] предлагается использовать одну из трофических функций, описывающих процесс насыщения, например,

$$f(\mathcal{E}, \mathcal{P}) = \frac{c\mathcal{E}\mathcal{P}b/d}{A + \mathcal{P}}. \quad (12)$$

Тогда при малой концентрации загрязнения  $f(\mathcal{E}, \mathcal{P}) \approx c\mathcal{P}\mathcal{E}$ , при высокой концентрации  $f(\mathcal{E}, \mathcal{P}) \approx c\mathcal{E}$ , что более реалистично, чем первоначальное выражение.

После приведения системы уравнений (9) к безразмерному виду с учетом соотношения (12) и переобозначений в [6, с. 135] получена следующая система уравнений:

$$\frac{du}{dt} = \alpha - u - \frac{uv}{\lambda + u}, \quad \frac{dv}{dt} = v(u_0 - u) - pv^2, \quad (13)$$

где  $\lambda = A(d/b) > 0$  описывает степень влияния природы на загрязнение: чем больше его величина, тем меньше степень поглощения живой природы и наоборот.

По мнению авторов книги [6] параметр  $\lambda$  можно считать количественной характеристикой восприимчивости данной экосистемы к выбросам загрязнения.

В книге [6] также указано, что в системе уравнений (13) возможны одно, два или три состояния равновесия такого же характера, как и для системы (11). Причем авторы [6] подчеркивают, что априорные предположения относительно выбора тех или иных функциональных зависимостей в этой модели в большей степени адекватны действительности, чем выбранные модели (11).

## 2. Математическая модель очистки сточных вод [6,9]

Рассмотрим далее модель очистки сточных вод, основанную на следующих простых представлениях.

Будем рассматривать загрязнитель как «жертву», а биологически активный ил как «хищника». Процесс биохимического окисления загрязнителя будем трактовать как «поедание» его микроорганизмами активного ила.

Предположим, что имеется постоянный источник загрязнения, а активный ил способен перерабатывать загрязнение до определенного предела. Считаем, что изменение концентрации активного ила в чистой воде убывает по экспоненциальному закону.

Тогда динамику очистки сточных вод можно описать уравнениями

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = a - bD(\mathcal{P}) - cf(\mathcal{P}, \mathcal{E}), \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -d\mathcal{E} + eh(\mathcal{P}, \mathcal{E}),$$

где  $\mathcal{P}(t)$  – концентрация загрязнения воды,  $\mathcal{E}(t)$  – плотность биомассы активного ила,  $D(\mathcal{P})$  – функция диссипации, характеризующая естественный распад загрязнения;  $f(\mathcal{P}, \mathcal{E})$  и  $h(\mathcal{P}, \mathcal{E})$  – трофические функции, характеризующие процесс очистки загрязнителя биологически чистым илом;  $a > 0$  – мощность источника загрязнения;  $d > 0$  – постоянная, характеризующая скорость убывания активного ила в чистой воде;  $c$  и  $e$  – положительные постоянные.

Допустим, что  $D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ , а трофические функции «хищника» и «жертвы» одинаковы и имеют вид:

$$f(\mathcal{P}, \mathcal{E}) = h(\mathcal{P}, \mathcal{E}) = \frac{\mathcal{P}\mathcal{E}}{r + \mathcal{P}}, \quad \text{где } r > 0 \text{ – постоянная.}$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{dP}{dt} = a - bP - \frac{cP\mathcal{E}}{r + P}, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -d\mathcal{E} + \frac{eP\mathcal{E}}{r + P}. \quad (14)$$

После введения безразмерных переменных  $\tau = at$ ,  $P = ru(\tau)$ ,  $\mathcal{E} = (rd/c) \cdot v(\tau)$  система уравнений (14) принимает вид

$$\frac{du}{d\tau} = \alpha - \beta u - \frac{uv}{1 + u}, \quad \frac{dv}{d\tau} = -v + \frac{\gamma uv}{1 + u}, \quad (15)$$

где  $\alpha = a/(rd)$ ,  $\beta = b/d$ ,  $\gamma = e/d$ . Неподвижные точки системы (15)  $A_1(u_1, v_1) = (\alpha/\beta, 0)$  и  $A_2(u_2, v_2) = (1/(\gamma - 1), [\alpha(\gamma - 1) - \beta]\gamma/(\gamma - 1))$ .

Стандартный линейный анализ показывает, что точка  $A_1(u_1, v_1)$  является седловой при  $\beta < \alpha(\gamma - 1)$  и  $\gamma > 0$  и устойчивым узлом при  $\beta > \alpha(\gamma - 1)$ .

Если увеличивать значение параметра  $\alpha$  при фиксированных значениях  $\beta$  и  $(\gamma - 1)$ , что соответствует увеличению интенсивности источника загрязнения, то возникает устойчивое состояние равновесия  $A_2(u_2, v_2)$ . Если параметр  $\alpha$  мал (мала интенсивность загрязнения), то масса биологически активного ила стремится к нулю. Поскольку загрязнитель является пищей для биологически активного ила, при недостаточной интенсивности загрязнителя биологически активный ил исчезает.

Разумно предположить, что существует некоторое пороговое значение концентрации загрязнения  $P^*$ , при превышении которого очищающая способность ила уменьшается, и рассмотреть трофические функции вида

$$f(P, \mathcal{E}) = \mathcal{E}P e^{-rP}, \quad r = \text{const} > 0.$$

В этом случае величина порогового значения загрязнения  $P^* = 1/r$ . В реальности в описываемом процессе есть еще одна компонента – процесс аэрации – насыщения ила кислородом, который значительно повышает способность переработки биологически активным илом загрязнителя. С учетом сказанного математическая модель очистки примет вид:

$$\frac{dP}{dt} = a - bP - cf(P, \mathcal{E}), \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -d\mathcal{E} + ef(P, \mathcal{E})Q(t), \quad \frac{dQ}{dt} = -hQ + R, \quad (16)$$

где  $a, b, c, d, e = \text{const} > 0$ . Здесь  $Q(t)$  – концентрация кислорода, а  $R > 0$  определяет величину притока кислорода в систему в единицу времени.

Проведенный авторами книги [6] анализ системы уравнений (16) в предположении, что  $f(P, \mathcal{E}) = P g(\mathcal{E})$ , где  $g(\mathcal{E})$  – гладкая монотонно возрастающая неотрицательная функция (причем  $g(0) = 0$ ), показывает, что при достаточно близких значениях параметра  $R$ , определяющего количество поступающего в систему кислорода, всегда можно добиться стабильности системы.

### 3. Моделирование классовой борьбы [10,11]

Запишем уравнения модели «хищник–жертва» в виде следующей системы:

$$\frac{dx}{dt} = a(y_1 - y)x, \quad \frac{dy}{dt} = -b(x - x_1)y, \quad (17)$$

где  $x, y$  – численность популяций,  $x_1$  и  $y_1$  – их стационарные значения,  $a$  и  $b$  – постоянные.

Эта модель используется для описания малых городских ареалов [10]. В этом случае переменная  $x$  в системе уравнений (17) означает площадь землепользования,  $y$  – земельную ренту,  $a, b, x_1, y_1$  – некоторые параметры.

Интересное приложение модели для описания классовой борьбы дано Гудвином [10,11]. Рассмотрим, следуя [11], два типа граждан: рабочих и капиталистов.

Рабочие тратят весь свой доход  $wL$  на потребление, капиталисты накапливают свой доход  $Y - wL$ , где  $Y$  – продукция производства. Цена потребительских товаров нормирована к единице.

Пусть  $K$  означает капитал,  $a = a_0 e^{gt} = Y/L$  – производительность труда, возрастающую с постоянной скоростью  $g$ ,  $k = K/Y$  – коэффициент капиталоемкости продукции,  $N = N_0 e^{nt}$  – предложение на рынке рабочей силы, которое увеличивается с темпом роста  $n$ . Доля затрат на оплату труда по отношению к национальному доходу составляет  $wL/Y = w/a$ . Следовательно, доля прибыли капиталистов составляет  $(1 - w/a)$ . Поскольку сбережения можно определить как  $S = Y - wL = (1 - w/a)Y$ , доля инвестиций составляет  $dK/dt = S = (1 - w/a)Y$  или  $(dK/dt)(1/K) = (1 - w/a)(Y/K)$ ; при этом выбытием капитала пренебрегаем.

При постоянном значении капиталоемкости  $k = K/Y$  получаем  $dk/dt = 0$  и

$$Y \frac{dK}{dt} = K \frac{dY}{dt}. \quad (18)$$

Далее, поскольку  $a = a_0 e^{gt} = Y/L$ , после дифференцирования по времени имеем

$$\frac{dY}{dt} \frac{1}{Y} - \frac{dL}{dt} \frac{1}{L} = g. \quad (19)$$

Кроме того, из (18) с учетом того, что  $dK/dt = (1 - w/a)L$ , следует

$$\frac{dY}{dt} \frac{1}{Y} = \frac{dK}{dt} \frac{1}{K} = \left(1 - \frac{w}{a}\right) \frac{1}{k}. \quad (20)$$

Из соотношений (19) и (20) окончательно находим:

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \left(1 - \frac{w}{a}\right) \frac{1}{k} - g. \quad (21)$$

Введем новые переменные:  $y = w/a$  – доля затрат на оплату труда;  $x = L/N$  – коэффициент занятости.

После простых преобразований, с учетом (21) получаем

$$\frac{dx}{dt} = x \left[ \frac{1-y}{k} - (g+n) \right], \quad (22)$$

$$\frac{dy}{dt} = y \left[ \frac{1}{w} \frac{dw}{dt} - \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right], \quad (23)$$

где  $(da/dt)(1/a) = g$ .

Будем считать ставку заработной платы быстрой переменной, удовлетворяющей условиям:

$$\frac{dw}{dt} = wf(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) < 0, \quad \frac{df}{dx} > 0.$$

Линейная аппроксимация  $f(x)$  в виде  $(dw/dt)(1/w) = -r + bx$  превращает (23) в следующее уравнение:

$$\frac{dy}{dt} \frac{1}{y} = -r + px - g. \quad (24)$$

Объединяя (22) и (24), приходим к модели Гудвина, описываемой системой уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x \left[ \frac{1}{k} - (g + n) - \frac{y}{k} \right], \quad \frac{dy}{dt} = y[-(g + r) + px]. \quad (25)$$

Очевидно, что система уравнений (25) эквивалентна системе уравнений (17), поэтому все выводы общего характера, справедливые для системы (17), верны и для модели Гудвина.

Заметим, что модель Гудвина, учитывающая взаимодействие между уровнем занятости и законодательно установленной долей отчислений на оплату труда, весьма напоминает классические модели политической экономии (её иногда называют неомарксистской). Модель вновь привлекает внимание к трудам экономистов-классиков, таких как Риккардо, Смит, Маркс. Увы, модель структурно неустойчива.

Итак, модель «хищник»–«жертва» может быть использована для моделирования явлений взаимосвязи городской земельной ренты и интенсивности землепользования, безработицы и динамики экономического роста.

#### 4. Модель «хищник–жертва» для описания бесклассового общества – общества эпохи охотников-собирателей [12]

Для этой эпохи характерна низкая плотность населения и общинная (родовая) организация человеческого сообщества. Человек полностью зависел от природы, шла постоянная борьба за выживание, а главным из добываемых ресурсов была пища. Человек был частью экосистемы и отличался от других стайных хищников, по-существу, лишь умением использовать для собственных нужд огонь и примитивные орудия труда. Изменение численности населения в конкретном ареале, в основном, определялось состоянием ресурсной базы и может быть описано моделью «хищник–жертва» – системой уравнений (1). Теперь в этих уравнениях  $N$  – численность популяции объектов охоты («жертв»);  $P$  – численность древних охотников («хищников») в рассматриваемом ареале;  $cNP$  – скорость рождения «хищников»;  $dP$  – смертность «хищников»;  $aN$  – скорость гибели «жертв» (считается, что их пищевая база неограниченна);  $bNP$  – скорость гибели «жертв» за счет их истребления «хищниками» (считается, что это единственная причина смертности «жертв»). Решения этих уравнений анализировались во Введении). Поскольку охотники-собиратели потребляли то, что было произведено в природе без их участия, численность популяции определялась внешними условиями, повлиять на которые они не могли (в модели численность охотников-собирателей колеблется около среднего значения

$P_0 = a/b$ . Заметим, что именно этим объясняется относительная стабильность численности населения Земли на протяжении всего каменного века до эпохи неолита.

Когда человек приручил животных и научился возделывать культурные растения, он превратился из охотника-собирателя в скотовода и земледельца. Таким образом, значительно увеличился коэффициент  $a$  и равновесная численность людей, поскольку величина коэффициента  $b$ , характеризующего потребление, осталась примерно на прежнем уровне.

## 5. Сходная идеология людей для описания военных действий [13,14,8]

В книге [13] Фредерик Ланчестер – английский эрудит и инженер – предложил простую модель борьбы двух противников (скажем, двух армий), которая носит его имя. Заметим, что такая же модель была предложена офицером царской армии М.О. Осиповым в 1915 году [14]. Поэтому справедливо называть эту модель моделью Ланчестера–Осипова. Далее в изложении будем следовать работе [8]. В данной модели состояние системы описывается точкой  $(x, y)$  положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки  $x$  и  $y$  – численности противостоящих армий. Уравнения модели имеют следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad \frac{dy}{dt} = -ax. \quad (26)$$

Здесь  $a$  и  $b$  – мощность оружия армии  $x$  и армии  $y$ , соответственно. Другими словами, каждый солдат армии  $x$  убивает за единицу времени  $a$  солдат армии  $y$  (и соответственно каждый солдат армии  $y$  убивает  $b$  солдат армии  $x$ ). Таким образом, общая эффективность всех выстрелов армии  $x$  дается как  $ax$ , а для армии  $y$  – как  $by$ . В работе [8] предполагается, что непрерывная аппроксимация достаточно хороша, и скорость изменения численности войск пропорциональна эффективности выстрелов противной стороны. «Жесткая», по В.И. Арнольду, модель (26) допускает точное решение в виде:

$$ax^2 - by^2 = \text{const}. \quad (27)$$

Изменение численности армий  $x$  и  $y$  происходит вдоль гиперболы, заданной уравнением (27) (рис. 5). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки. Гиперболы разделены прямой  $\sqrt{ax} = \sqrt{by}$ . Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось  $y$ . Это означает, что в ходе войны численность армии  $x$  уменьшается за конечное время до нуля. Армия  $y$  выигрывает, противник уничтожен. Если же начальная точка лежит ниже прямой, выигрывает армия  $x$ . На прямой, как пишет Арнольд, война «к всеобщему удовлетворению» заканчивается истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены. Из соотношения (27) следует, что на прямой  $\sqrt{ax} = -\sqrt{by}$ . Тогда первое уравнение системы (26) принимает вид:  $dx/dt = -\sqrt{abx}$ . Его решением является  $x = Ce^{-\sqrt{abt}}$ , где  $C = \text{const}$ , и очевидно, что  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

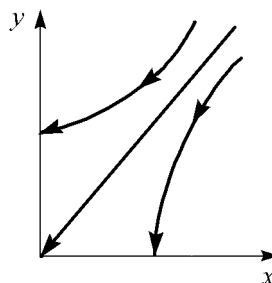


Рис. 5. «Жесткая» модель войны

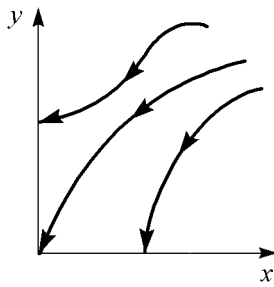


Рис. 6. «Мягкая» модель войны

$$\frac{dx}{dt} = -b(x, y)y, \quad \frac{dy}{dt} = -a(x, y)x?$$

Эта система уравнений уже не решается в явном виде. Но модель за счет изменений  $a(x, y)$  и  $b(x, y)$  становится «мягкой». Кривые на плоскости  $(x, y)$  уже не гиперболы и разделяет их не прямая (рис. 6). Но основной качественный вывод остается прежним: ситуации « $x$  выигрывает» и « $y$  выигрывает» разделены нейтральной линией «обе армии уничтожают друг друга за бесконечное время».

## 6. Простейшая вирусная модель инфекционного заболевания [15,16]

В 1974 году Г. Белл предложил простейшую модель иммунной реакции, в которой взаимодействие между антигеном и антителом описывается в терминах «хищник–жертва».

Изложим вариант теории Г. Белла [15], исходя из более общей модели Г.И. Марчука [16].

Основными факторами в модели инфекционного заболевания являются следующие:

- концентрация патогенных размножающихся антигенов  $V(t)$ ;
- концентрация антител  $F(t)$ ; под антителами понимают субстраты иммунной системы, нейтрализующие антигены (иммуноглобулины, рецепторы клеток);
- концентрация плазмочелюток  $C$  – носителей и продуцентов антител – предполагается постоянной;
- степень поражения органа-мишени не учитывается.

Уравнение, описывающее изменение числа антигенов (чужеродных клеток, проникающих в организм), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \beta V - \gamma FV. \quad (28)$$

Первое слагаемое в уравнении (28) – скорость прироста антигенов за счет размножения;  $\beta$  – коэффициент размножения антигенов; слагаемое  $\gamma FV$  описывает число антигенов, нейтрализуемых антителами  $F$  в единицу времени;  $\gamma$  – коэффициент, связанный с вероятностью нейтрализации антигена антителами при встрече с ними.

Для получения второго уравнения подсчитаем баланс числа антител, реагирующих с антигеном. Будем иметь

$$dF = \rho C dt - \eta \gamma FV dt - \mu_f F dt. \quad (29)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (29) описывает генерацию антител плазмочными клетками за время  $dt$ ;  $\rho$  – скорость производства антител плазмочкой. Второе слагаемое ( $\eta\gamma FVdt$ ) описывает уменьшение числа антител за счет связи с антигенами, причем на нейтрализацию одного антигена приходится  $\eta$  антител. Третье слагаемое ( $\mu_f Fdt$ ) описывает уменьшение популяции антител за счет старения;  $\mu_f$  – коэффициент, обратно пропорциональный времени распада антител. Разделив уравнение (29) на  $dt$ , получим

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - (\mu_f + \eta\gamma V)F. \quad (30)$$

Если при  $t < t_0$   $V(t) \equiv 0$ , то начальные условия имеют вид

$$V(t_0) = V_0, \quad F(t_0) = F_0. \quad (31)$$

Пусть в дальнейшем  $t_0 = 0$ .

Рассмотрим два предельных случая динамики болезни. Допустим, что организм не производит антител данной специфичности, то есть  $F(t) = F_0 = 0$  для всех  $t \geq 0$  и  $\rho = 0$ . Тогда из (28) следует, что

$$\frac{dV}{dt} = \beta V \quad \text{и} \quad V(t) = V_0 e^{\beta t}, \quad (32)$$

где  $V_0$  – доза заражения (начальная концентрация антигенов) при  $t = 0$ . Очевидно, что такое решение соответствует течению болезни с летальным исходом, так как нет компенсирующего рост антигенов факторов. Второй предельный случай: присутствующие в организме антитела (специфические к данному антигену) достаточны для того, чтобы уничтожить все проникшие в организм антигены, не включая в действие механизм антителообразования. В этом случае в уравнении (28)  $\beta \ll \gamma F$ . Предполагая дозу заражения  $V_0$  малой, можно считать величину  $F$  постоянной, определяемой нормальным уровнем антител  $F^*$ . Тогда уравнение (28) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F^*) V$$

и его решение записывается так:

$$V = V_0 e^{-(\gamma F^* - \beta)t}.$$

В предельном случае, когда  $B = 0$

$$V = V_0 e^{-\gamma F^* t}, \quad (33)$$

что соответствует высокому иммунологическому барьеру.

Решения (32) и (33) представлены на рис. 7. При заданных значениях коэффициентов модели и начальных условиях и естественно, что все семейство разнообразных динамик заболевания уложится в заштрихованной области на рис. 7 [16].

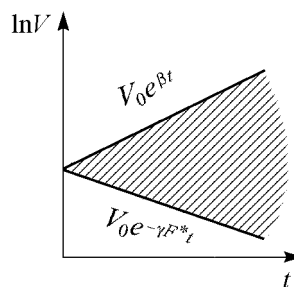


Рис. 7. Область заболеваний, ограниченная решениями для двух предельных случаев

## 7. Сходные модели распространения эпидемий [17,6]

Рассмотрим SIR–модель Кермака–МакКендрика, полагая, что особи популяции могут быть в трех различных состояниях:

- $S(t)$  – здоровые особи, которые находятся в группе риска и могут подхватить инфекцию;
- $I(t)$  – заразившиеся переносчики болезни;
- $R(t)$  – те, кто выздоровел и перестал распространять болезнь (в эту категорию относят, например, приобретших иммунитет или даже умерших).

Типичная эволюция особи популяции описывается следующей диаграммой:  
 $S \rightarrow I \rightarrow R$ .

Построим феноменологическую модель, соответствующую диаграмме, используя следующие допущения:

- 1) популяция замкнута и имеет постоянный размер  $N$ ;
- 2) промежуток времени, когда заболевший остается опасным для окружающих, распределен по экспоненциальному закону со средним  $1/\gamma$ ;
- 3) контакты случайны и равновозможны (однородное перемешивание).

При этих допущениях будем иметь:

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda S, \quad \frac{dI}{dt} = \lambda I - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

где  $\lambda$  – так называемая сила инфекции, которая в данном случае равна произведению количества контактов в единицу времени, сделанных одним здоровым (обозначим это количество как  $cN$ ), вероятности передать ему инфекцию при контакте  $p$  и вероятности встретить заболевшего  $I(t)/N$ . Обозначим  $\beta = cp$ . Тогда получаем  $\lambda = \beta I$  и приходим к стандартной форме уравнений:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I, \quad \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0 \text{ и}$$

$$S(t) + I(t) + R(t) = N. \quad (34)$$

Третье уравнение в приведенной системе избыточно и, поскольку  $dS/dt \leq 0$ , то естественно считать фазовым пространством треугольник  $S(t) + I(t) \leq N$ .

Из первого и второго уравнений системы (34) следует, что

$$\frac{dI}{dS} = \frac{(\beta S - \gamma)I}{\beta SI} = -1 + \frac{\sigma}{S}, \quad \sigma = \frac{\gamma}{\beta}, \quad I \neq 0. \quad (35)$$

Учитывая начальные условия  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$ , найдем первый интеграл  $I + S - \sigma \ln S = I_0 + S_0 - \sigma \ln S_0$ , с помощью которого можно построить фазовые кривые на плоскости  $(S, I)$  (рис. 8). Кривые, приведенные на рис. 8, б, хорошо совпадают с данными по эпидемии чумы в Бомбее 1906 года.

В книге [6] предложено использовать модель, рассмотренную выше, с некоторой модификацией для анализа заражения вирусом компьютеров. Постановка задачи следующая.

Пусть  $S$  – число компьютеров, которые подвергаются заражению вирусом,  $I$  – часть компьютеров, зараженных вирусом и не имеющих антивирусного программного обеспечения,  $R$  – часть компьютеров, имеющих должную антивирусную защиту (иммунитет). Тогда уравнения модели имеют вид (см. систему уравнений (34)):

$$\frac{dS}{dt} = -aSI, \quad \frac{dI}{dt} = aSI - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI.$$



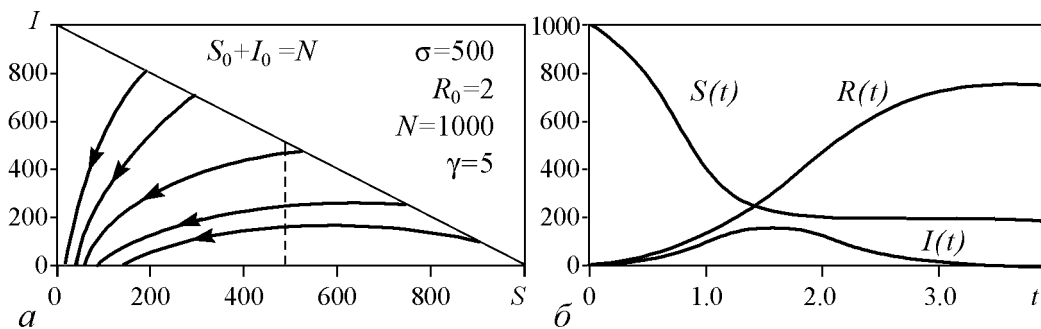


Рис. 8. Пример конкретного расчета по уравнениям (34) и (35)

Основная идея модификации этой классической модели эпидемии состоит во введении элемента цикличности, то есть элемента регулирующего добавления новых подверженных эпидемии компьютеров. В каждый новый отрезок времени число инфицированных компьютеров вычисляется на основе количества инфицированных компьютеров, оставшихся от предыдущего момента, а число подверженных эпидемии компьютеров разыгрывается как случайная величина по закону Пуассона с распределением  $\rho_m = (\lambda^m/m!)e^{-\lambda}$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Решение задачи в [6] не приводится. Авторы [6] предлагают следующий путь решения. Построить график функции  $I(t)$ , численно решая приведенную выше систему уравнений с начальными условиями  $S(0) = 100$ ,  $I(0) = 1$ ,  $R(0) = 0$ ,  $\lambda = 10$ ,  $a = 0.23$ ,  $b = 0.5$ . Добавление новых элементов предлагается производить при  $t_k = k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 100$ .

Возможно, кого-то из читателей заинтересует решение этой задачи и её многочисленных вариантов.

### 8. Обобщенная модель Лотки–Вольтерры для описания взаимодействия когнитивных и/или эмоциональных мод мозга [18]

Согласно работе [18], крупномасштабные когнитивные паттерны (моды или представления, наблюдаемые в эксперименте) в рабочем режиме мозга должны подавлять друг друга, что естественно должно происходить последовательно во времени. Иными словами, работающий мозг демонстрирует когнитивную и эмоциональную активность в виде цепочки сменяющих друг друга во времени комбинаций функциональных мод, а сами эти комбинации определяются родом ментальной активности.

По мнению авторов [18], «...конкуренция за конечные ресурсы одна из главных действующих сил, управляющих процессами мозга. Эти ресурсы – энергия (кислород и глюкоза) и информация (внимание и память). Важно, что информационные ресурсы – продукт деятельности самого мозга, то есть они могут по-разному влиять на эмоции и когнитивные функции (например, за счет управления вниманием) и должны быть включены в общую динамическую модель, определяющую рабочее пространство. ...Моды, представляющие в рабочем пространстве эмоции и когнитивные функции, взаимно обмениваются информацией и конкурируют в борьбе за энергетические и информационные ресурсы».

Авторы [18] претендуют на новую парадигму, заключающуюся в утверждении: «эмоции и когнитивные функции – это переходные динамические процессы, связанные с

функционально определяемым взаимодействием различных подсистем мозга, их конкуренцией и синхронизацией (координацией) во времени». Упомянутые выше процессы конкуренции когнитивных и эмоциональных мод между собой, а также эмоциональных и когнитивных мод друг с другом в работе [18] предлагается описывать системами уравнений типа Лотки–Вольтерры в следующей обобщенной форме:

$$\tau \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t) \left[ \mu_i(E) - \sum_{i=1}^n \varphi_{i,j}(E)x_i(t) \right] + x_i(t)\eta(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (36)$$

Здесь  $x_i(t)$  характеризует активность  $i$ -й моды (численность  $i$ -й популяции в экологии);  $n$  – число взаимодействующих мод (популяций);  $\mu_i(E)$  – поступающая в систему информация или доступные ресурсы;  $\varphi_{i,j}(E)$  – элементы матрицы взаимодействия;  $\eta(t)$  – мультипликативный шум, присутствующий в системе;  $\tau$  – характерное время, определяющее процесс.

Если учесть специфику ресурсов, за которые борются когнитивные и эмоциональные моды, подсистем уравнений (36) должно быть три: моды эмоций, когнитивные моды и ресурсы (внимание, память, энергия). Особенно велика роль внимания. В статье [18] для простоты считается, ...что описание конкуренции за внимание между эмоциями и когнитивными функциями не требует спецификации отдельных мод, и поэтому можно ограничиться рассмотрением конкурентной борьбы за внимание «в целом» эмоций  $\tilde{B} = \sum_{i=1}^n B_i$  и «в целом» когнитивных мод  $\tilde{A} = \sum_{i=1}^n A_i$ . Тогда базовые уравнения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \tau_A \frac{dA_i(t)}{dt} &= A_i(t) \left[ \sigma_i(I, \tilde{B}, D)R_A - \sum_{j=1}^N \rho_{ij}(D)A_j(t) \right] + A_i(t)\eta(t), \quad i = 1, \dots, N, \\ \tau_B \frac{dB_i(t)}{dt} &= B_i(t) \left[ \zeta_i(S, \tilde{A}, D)R_B - \sum_{j=1}^M \xi_{ij}(D)B_j(t) \right] + B_i(t)\eta(t), \quad i = 1, \dots, M, \\ \tau_{R_A} \frac{dR_A(t)}{dt} &= R_A(t) \left[ \tilde{A} - (R_A(t) + \Phi_A(I, D)R_B(t)) \right], \\ \tau_{R_B} \frac{dR_B(t)}{dt} &= R_B(t) \left[ \tilde{B} - (R_B(t) + \Phi_B(S, D)R_A(t)) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

В этих уравнениях  $A_i$  и  $B_i$  – неотрицательные переменные, соответствующие когнитивным и эмоциональным модам, общая интенсивность которых обозначается  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$ , соответственно;  $I$  – информация от внешнего мира;  $S$  – характеристика эмоционального влияния от внешнего мира (в случае отрицательных эмоций – стресс);  $D$  – уровень принимаемых лекарств;  $\tau_A$  и  $\tau_B$  – характерные времена сознательной и эмоциональной активностей;  $\eta(t)$  – мультипликативный шум; коэффициенты  $\Phi_A$  и  $\Phi_B$  определяют интенсивность борьбы за внимание со стороны эмоций и мышления. Зависимость параметров  $\sigma_i$  и  $\zeta_i$  от  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$ , соответственно, описывает прямое влияние активности когнитивных процессов на эмоции и эмоций на мышление. В статье [18]

представлен компьютерный анализ выписанных выше уравнений при наличии внешнего стимула  $S(t)$ , характеризующего уровень стресса. Обсуждается также взаимодействие настроения и мышления. Анализируется взаимодействие трех компонент активности мозга: поведения, эмоциональной памяти и когнитивной деятельности при отсутствии внешних воздействий.

### Вместо заключения

В замечательной книге Ю.И. Неймарка [19, с. XIV и с. XVI] есть такие слова.

«Что такое модель? Слово “модель” из итальянского языка и означает “копия, образец, прототип”, изучив который, мы познаем оригинал. Значит, математическая модель – это прототип какой-то части мира – объекта, системы, устройства, машины, процесса, прибора, изучая который, мы постигаем эту часть мира...»

Если модель типовая (см. эпиграф) или, как говорят, эталонная, то с её помощью можно постичь не одну, а разные части мира. Именно такой моделью является математическая модель Лотки–Вольтерры. Разумеется, представленный обзор охватывает только часть её возможных приложений и не претендует на всеобщность.

### Библиографический список

1. *Ch. Darwin. Autobiography.* 1958. С. 120.
2. *Браун Джанет.* Чарльз Дарвин. Происхождение видов / Сер. «10 книг, изменивших мир». М.: АСТ: аст., 2009. 220 с.
3. *Malthus T.R.* An essay on the principle of population, as it affects the future improvement of society. 1798.  
<http://www.faculty.rsu.edu/felwell/Theorists/Malthus/essay2.htm>
4. *Lotka A.* Elements of Physical Biology. Baltimore, 1925. Reprinted by Dover in 1956 as Elements of Mathematical Biology.
5. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование / Пер. с франц. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. 288 с.
6. *Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П.* Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 400 с.
7. *Базыкин А.Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
8. *Арнольд В.И.* «Жесткие» и «мягкие» модели // Природа. 1998. № 4. С. 3.
9. *Братусь А.С., Мещерин А.С., Новожилов А.С.* Математические модели взаимодействия загрязнения с окружающей средой // Вестник МГУ. Сер. Вычислительная математика и кибернетика. 2001. Т. 6. С. 140.
10. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и переменны в нелинейной экономической теории / Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 335 с.
11. *Goodwin R.M.* A Growth Model // *Socialism and Growth.* Cambridge: University Press, 1967.
12. *Малков С.Ю.* Социальная самоорганизация и исторический процесс. Глава 2. М.: УРСС, 2009.
13. *Lanchester F.W.* Aircraft in warfare: The down of the fourth arm. London, Constable, 1916.

14. *Осинов М.О.* О влиянии численности вступающих в бой сил на их потери // Военный сборник, июнь-октябрь, 1915.
15. *Bell G.* Prey – predator equations simulating on immune response // *Math. Biosci.* 1973. № 16. С. 291.
16. *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии и медицине. Глава 2. М.: Наука, 1985.
17. *Kermack W.O. and Mc.Kendrick A.G.* Contribution to the mathematical theory of epidemics // *Proceedings of Royal Statistical Society A.* 1927. Vol. 115. P. 700.
18. *Рабинович М.И., Мюезинолу М.К.* Нелинейная динамика мозга: эмоции и интеллектуальная деятельность // *УФН.* 2010. № 4.
19. *Неймарк Ю.И.* Математические модели в естествознании и технике. Н. Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2004.

*Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 11.02.2011*

## PHENOMENON OF LOTKA–VOLTERRA MATHEMATICAL MODEL AND SIMILAR MODELS

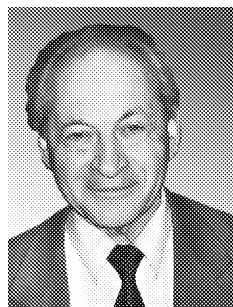
*D.I. Trubetskov*

Lotka–Volterra mathematical model (often called «predator–prey» model) is applicable for different processes description in biology, ecology, medicine, in sociology investigations, in history, radiophysics, etc.

Variants of this model is considered methodologically in this review.

The next models are observed: model of contamination or other dirty interaction with surroundigs; model of class struggle; model of classless society – epock of hunters-gatherers; military operations model; model of virus infection diseases; model of epidemic spreading, so virus of computers infection spreading; model of cognitive and(or) emotion cerebral modes.

*Keywords:* Lotka–Volterra mathematical model, «predator–prey» system, analysis of natural or society phenomena.



*Трубецков Дмитрий Иванович* – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: TrubetskovDI@nonlin.sgu.ru