

ДИНАМИКА ТРЕХ НЕИДЕНТИЧНЫХ ПО УПРАВЛЯЮЩИМ ПАРАМЕТРАМ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Ю.П. Емельянова, А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина

Рассмотрена цепочка трех диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов с неидентичными управляющими параметрами. Обсуждаются ситуации, когда связь демпфирует различные осцилляторы. Выяснено устройство плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи» с точки зрения расположения областей гибели колебаний, полной синхронизации осцилляторов, двух- и трехчастотной квазипериодичности. Обсуждаются особенности, связанные с неидентичностью по управляющим параметрам. Продемонстрирована возможность режимов полной широкополосной синхронизации и режимов двухчастотной широкополосной синхронизации.

Ключевые слова: Синхронизация, связанные осцилляторы, квазипериодическая динамика.

Введение

Задача о динамике диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов является фундаментальной в теории колебаний и нелинейной динамике [1–10]. Основные эффекты, которые демонстрируют два связанных осциллятора – это взаимный захват с различным соотношением частот, двухчастотные квазипериодические колебания и эффект «гибели» (гашения) колебаний, наблюдающийся при достаточно большой величине диссипативной связи. Традиционно наиболее детально обсуждаются различные аспекты задачи, относящиеся к случаю идентичных по управляющим параметрам λ осцилляторов. Однако случай неидентичных осцилляторов важен и требует специального рассмотрения [10–16]. Для двух осцилляторов соответствующий анализ выявляет еще один своеобразный тип поведения, которому на плоскости параметров отвечает область, разделяющая области гибели колебаний и квазипериодической динамики. При этом синхронизация осцилляторов возможна при сколь угодно большой величине частотной расстройки. В [11–12] для такого режима предложен термин «широкополосная синхронизация» (broadband synchronization [13]). В этом режиме один из осцилляторов, для которого $\lambda_1 < \lambda_2$, в определенной мере подавлен (продемпфирован) связью, а второй доминирует. Различные аспекты такого

режима обсуждались в [11–16]: построены карты динамических режимов на плоскости параметров «частотная расстройка осцилляторов – величина связи», исследована эволюция чисел вращения с ростом частотной расстройки, выполнен бифуркационный анализ и т.д. Соответствующая картина наблюдалась в радиофизическом эксперименте [16].

В настоящей работе обсуждается в аналогичном контексте случай трех диссипативно связанных в цепочку осцилляторов ван дер Поля. В этом случае могут наблюдаться различные ситуации доминирования того или иного осциллятора, так что число возможных вариантов увеличивается. Отметим, что задача о трех- (и более) частотной синхронизации в последнее время привлекает определенное внимание [17–21] в контексте феномена синхронизации квазипериодических колебаний. Так в [21] в фазовом приближении рассмотрена динамика цепочки их трех идентичных осцилляторов. Однако, в случае неидентичных управляющих параметров при условии доминирования хотя бы одного осциллятора, когда величина связи $\mu > \min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, фазовое приближение неприменимо, так что приходится исследовать исходные уравнения.

1. Особенности поведения системы трех связанных неидентичных автоколебательных осцилляторов

Рассмотрим систему трех неидентичных, диссипативно связанных в цепочку осцилляторов ван дер Поля (рис. 1)

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2) \dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2) \dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda_3 - z^2) \dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, y, z – динамические переменные осцилляторов; $\lambda_{1,2,3}$ – управляющие параметры, отвечающие за бифуркации Андронова–Хопфа в автономных осцилляторах; Δ_1 и Δ_2 – частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого; μ – коэффициент диссипативной связи.

Система (1) характеризуется большим числом параметров, так что она может демонстрировать сложную и разнообразную картину колебательных режимов. В значительной степени она зависит от величины и соотношения управляющих параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Обсудим на качественном уровне возникающие особенности такой задачи.

При анализе двух связанных осцилляторов выделяются три существенно разные ситуации [10–16]:

- $\mu < \min(\lambda_1, \lambda_2)$, связь мала и оба осциллятора демонстрируют автоколебательные свойства;
- $\min(\lambda_1, \lambda_2) < \mu < \max(\lambda_1, \lambda_2)$, связь «умеренная», она демпфирует

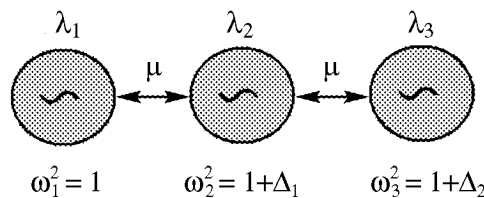


Рис. 1. Схематическое изображение цепочки связанных неидентичных автоколебательных осцилляторов

только наименее возбужденный осциллятор, возможен режим широкополосной синхронизации;

- $\mu > \max(\lambda_1, \lambda_2)$, связь сильная, демпфированы оба осциллятора, возможен режим гашения (гибели) колебаний.

При этом такая классификация не зависит от того, какой из осцилляторов более возбужден, в силу их равноправия с точки зрения положения в цепочке.

Для трех осцилляторов число возможных вариантов увеличивается. Действительно, связь может существенно демпфировать колебания каждого из трех осцилляторов. Обсудим возникающие при этом ситуации. «Выключим» последовательно в каждом уравнении системы (1) воздействие двух оставшихся осцилляторов. (Физически это можно реализовать, например, сильно отстроив эти осцилляторы по частоте.) Тогда приходим к уравнению одиночного осциллятора, но с уменьшенным за счет связи управляющим параметром λ^* , так что

- для первого осциллятора: $\lambda_1^* = (\lambda_1 - \mu)$,
- для второго осциллятора: $\lambda_2^* = (\lambda_2 - 2\mu)$,
- для третьего осциллятора: $\lambda_3^* = (\lambda_3 - \mu)$.

Таким образом, условие того, что первый или третий осцилляторы продемпфированы связью, имеет вид: $\lambda_1 < \mu$ или $\lambda_3 < \mu$. Для второго осциллятора это условие отличается и имеет вид: $\lambda_2 < 2\mu$. То есть связь в два раза сильнее демпфирует центральный осциллятор. Выделенную роль этого осциллятора легко понять физически. Действительно, первый и третий осцилляторы испытывают трение со стороны только одного соседа, а второй – со стороны двух соседей (см. рис. 1). Именно поэтому он более существенно демпфируется связью, чем крайние осцилляторы. Этот факт связан с геометрией цепочки; для связанных, например, в кольцо осцилляторов такая особенность наблюдаться не будет.

Таким образом, в зависимости от соотношения параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и величины связи могут оказаться продемпфированными один, два или три осциллятора. При этом картина может зависеть от того, на краю или в центре цепочки оказывается такой осциллятор. Эти особенности проявляются в устройстве плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи» системы (1) и в характере наблюдаемых режимов.

2. Режимы с продемпфированным центральным осциллятором

Прежде всего, нужно выбрать характерные величины (порядок) управляющих параметров. В основном, будем использовать их значения не очень большие, порядка 0.1, что отвечает ситуации достаточно слабо возбужденных осцилляторов.

Поскольку число существенных параметров велико, то нужно иметь некоторую «стратегию» их выбора. Подходящим вариантом является подход к многочастотным колебаниям в духе концепции Ландау–Хопфа [22]. А именно, будем рассматривать подключение новой колебательной моды к системе двух осцилляторов. При этом возникают два варианта подключения нового осциллятора в цепочку: посередине или с одного из краев.

Возьмем два осциллятора с управляющими параметрами $\lambda = 0.13$ и $\lambda = 0.18$. Частотную расстройку между ними выберем небольшой: $\Delta = 0.15$. Благодаря этому

осцилляторы имеют тенденцию к синхронизации. Рассмотрим сначала случай, когда новый осциллятор помещается посередине между этими двумя. Для добавляемого осциллятора выберем значение управляющего параметра $\lambda = 0.19$. Таким образом, с учетом принятого правила нумераций осцилляторов в цепочке, мы фиксируем следующий набор параметров: $\lambda_1 = 0.13$, $\lambda_2 = 0.19$, $\lambda_3 = 0.18$, $\Delta_2 = 0.15$. Интересная особенность данного выбора параметров состоит в том, что центральный осциллятор наиболее возбужден, но благодаря указанным выше особенностям с ростом связи он будет продемпфирован сильнее своих соседей, поскольку $\lambda_2/2 = \min(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$.

Обратимся теперь к плоскости параметров «частота второго осциллятора – величина связи» (Δ_1, μ) . В системе трех связанных осцилляторов возможны режимы как двухчастотной, так и трехчастотной квазипериодичности, которым отвечают двумерный и трехмерный торы в фазовом пространстве. Для их визуализации используем метод ляпуновских карт [20,21]. В рамках этого метода в каждой точке плоскости параметров (Δ_1, μ) вычислялись ляпуновские показатели системы (1). Затем эта плоскость окрашивалась в определенный цвет в соответствии с величиной двух старших показателей, чтобы визуализировать следующие режимы:

- а) P – область периодических режимов, $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$;
- б) T_2 – двухчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$;
- в) T_3 – трехчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$.

Отметим, что при этом один нулевой показатель, который всегда присутствует в системе и отвечает за выход фазовых траекторий на аттрактор, отброшен. Равенство нулю ляпуновских показателей проверялось с точностью до допуска, величина которого составляла 10^{-2} , точность вычисления самих показателей составляла порядка 10^{-5} . При этом вид карт на плоскости параметров не меняется существенно при увеличении длительности и точности расчетов и определенного уменьшения «невязки».

Полученная таким способом карта показана на рис. 2 сверху. Кроме того, на рис. 2 представлены примеры фазовых портретов трех осцилляторов в некоторых избранных точках, обозначенных на карте буквами *a–z*. Обсудим наблюдаемую картину. Для удобства восприятия типов режимов вдоль правого края карты стрелочками указаны уровни связи, отвечающие значениям $\mu = \lambda_1$, $\mu = \lambda_2/2$ и $\mu = \lambda_3$.

Прежде всего, отмечаем наличие режима гибели колебаний. Этот режим наблюдается, если связь демпфирует сразу все три осциллятора. В рассматриваемом случае $\lambda_3 = \max(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$, поэтому на плоскости параметров область гибели колебаний лежит при уровне связи $\mu > \lambda_3$. При этом с ростом частотной расстройки нижняя граница области гибели колебаний асимптотически стремится к линии $\mu = \lambda_3$.

Из регулярных режимов наблюдается, фактически, один, которому отвечает неподвижная точка в сечении Пуанкаре¹. Это одночастотный режим, когда все три осциллятора взаимно захвачены. Такой режим будем называть режимом *полной синхронизации*. В области небольших расстроек Δ_1 соответствующая область имеет вид языка, но в отличие от случая двух осцилляторов, полная синхронизация трех осцилляторов не возможна при малой связи. Таким образом, полная синхронизация имеет порог по величине связи².

¹При проведении расчетов сечение Пуанкаре выбиралось по обращению в ноль скорости одного (второго) осциллятора.

²Заметим, что эта особенность характерна и для идентичных осцилляторов [21].

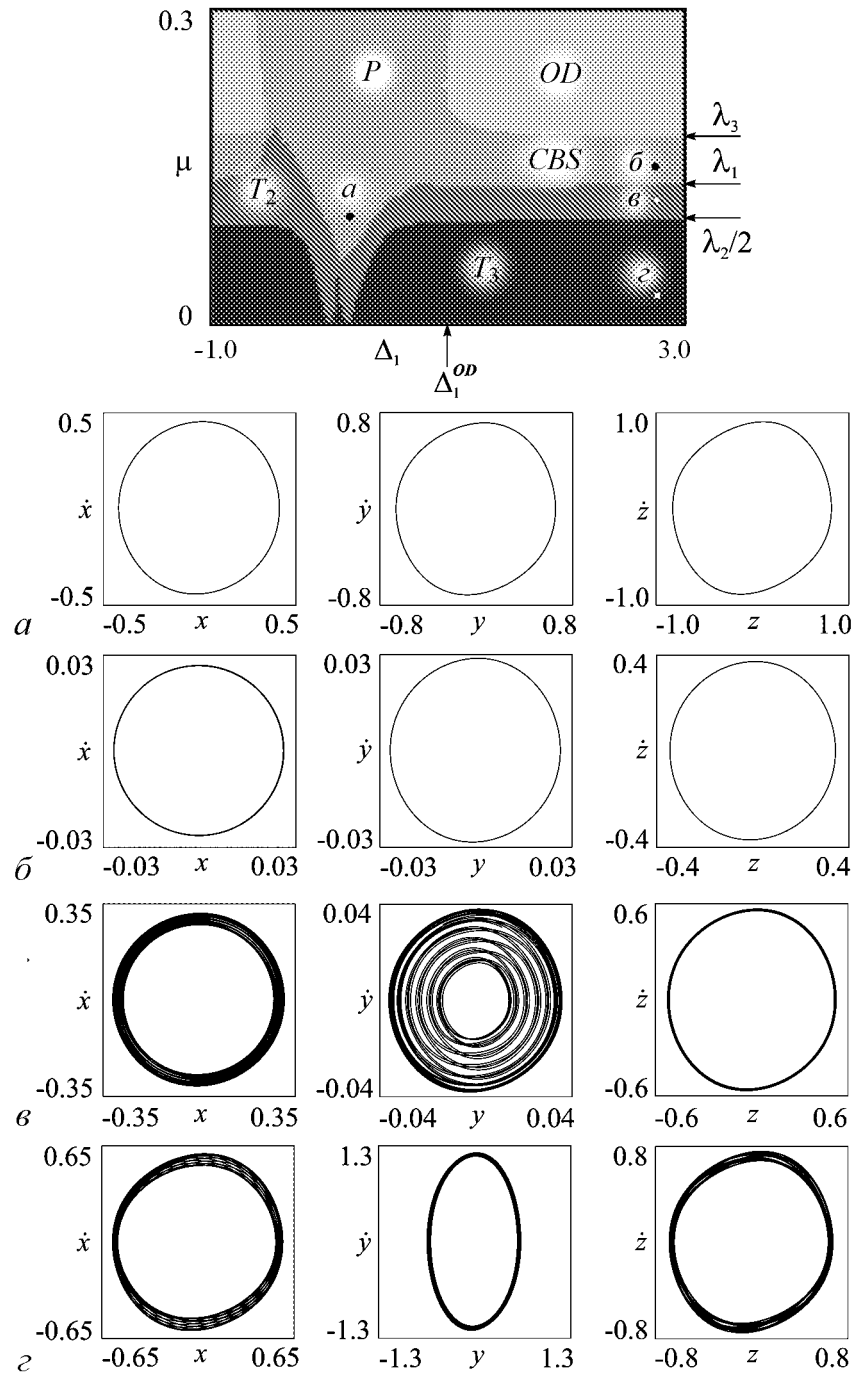


Рис. 2. Карта ляпуновских показателей системы (1), $\lambda_1 = 0.13$, $\lambda_2 = 0.19$, $\lambda_3 = 0.18$, $\Delta_2 = 0.15$. Указана граница высокочастотной области гибели колебаний Δ_1^{OD} . На карте также показаны: OD – область гибели колебаний, CBS – область полной широкополосной синхронизации, P – периодические режимы, T_2 – двухчастотный квазипериодический режим, T_3 – трехчастотный квазипериодический режим

Фазовые портреты трех осцилляторов внутри языка полной синхронизации показаны на рис. 2, а. Можно видеть, что орбиты осцилляторов близки к окружностям, не сильно отличающимся по величине. Таким образом, в этом режиме все осцилляторы примерно равноправны.

Как и в случае двух осцилляторов, в системе возможен и режим широкополосной синхронизации, когда в сколь угодно широком диапазоне частот ($\Delta_1 \rightarrow \infty$) наблюдается захват всех трех осцилляторов. При $\Delta_1 > 2.0$ область такой *полной широкополосной синхронизации CBS* (complete broadband synchronization) располагается в диапазоне $\lambda_1 < \mu < \lambda_3$. Соответствующие фазовые портреты показаны на рис. 2, б. Можно видеть, что все осцилляторы демонстрируют простейшие предельные циклы. При этом третий осциллятор доминирует, а первый и второй подавлены, но равноправны: радиус орбиты третьего осциллятора на порядок больше радиусов орбит первого и второго (см. масштабы по осям координат на фазовых портретах).

Далее, на ляпуновской карте наблюдаются режимы двухчастотной квазипериодичности, располагающиеся, в основном, при $\mu < \lambda_1$. При этом возможен режим, который можно назвать режимом *широкополосной двухчастотной синхронизации*. На карте он имеет место в полосе $\lambda_2/2 < \mu < \lambda_1$ при большой частотной расстройке Δ_1 (фактически, уже при $\Delta_1 > 1.0$). Соответствующие фазовые портреты показаны на рис. 2, в. Можно видеть, что третий осциллятор доминирует, его орбита почти не возмущена. Первый осциллятор достаточно возбужден, и его орбита демонстрирует возмущение квазипериодического характера. Наконец, второй осциллятор существенно подавлен, причем его орбита очень сильно возмущена.

В области малых значений связи имеют место трехчастотные режимы. Пример соответствующих фазовых портретов дан на рис. 2, г. В этом случае предельные циклы автономных систем возмущены слабо, и «приоритет» осцилляторов приходит в соответствие с их непродемпфированными управляющими параметрами: $\lambda_1 = 0.13$, $\lambda_2 = 0.19$, $\lambda_3 = 0.18$. Поэтому самая большая орбита у второго осциллятора, несколько меньшая у третьего и самая малая – у первого.

Обсуждаемая ситуация относилась к случаю малой разницы частот первого и третьего осцилляторов Δ_2 . Увеличим теперь существенно частоту третьего осциллятора, так что $\Delta_2 = 2.0$ (рис. 3). Можно видеть следующие особенности.

Во-первых, в области $\mu < \min(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$, где все осцилляторы «активны», полная синхронизация становится невозможной. Таким образом, различие частот, затрудняет полную синхронизацию осцилляторов, которая становится возможной только при условии подавления связью хотя бы одного осциллятора.

Во-вторых, области гибели колебаний уменьшаются в размерах за счет изменения их частотных границ. Это особенно заметно для высокочастотной области: ее граница сдвигается от $\Delta_1^{OD} \approx 1.0$ на рис. 2 до $\Delta_1^{OD} \approx 3.1$ на рис. 3. Причина состоит в следующем. Для реализации эффекта гибели колебаний требуется не только условие большой связи, но и условие достаточно большой частотной расстройки осцилляторов³. В нашем случае расстройка второго и третьего осцилляторов дается величиной $(\Delta_1 - \Delta_2)$. Таким образом, если растет частота третьего осциллятора Δ_2 , то должна расти и частота второго Δ_1 .

³В противном случае относительная скорость осцилляторов невелика, и даже большая связь не демпфирует осцилляторы. В результате наблюдается не гибель колебаний, а синхронизация с соотношением частот 1:1 [1].

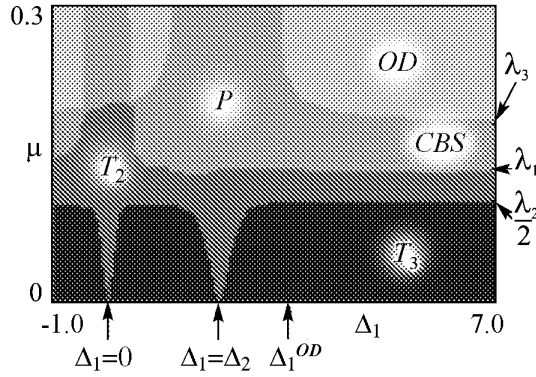


Рис. 3. Карта ляпуновских показателей системы (1), $\lambda_1 = 0.13$, $\lambda_2 = 0.19$, $\lambda_3 = 0.18$. Частота третьего осциллятора $\Delta_2 = 2.0$. Наименее возбужден центральный осциллятор. Указана граница высокочастотной области гибели колебаний Δ_1^{OD} , а также условия резонансов между первым и вторым $\Delta_1 = 0$ и вторым и третьим осцилляторами $\Delta_1 = \Delta_2$

Соответствующие резонансы хорошо видны на ляпуновской карте в виде двух явно выраженных языков двухчастотных торов в области трехчастотной квазипериодичности. В этом случае осцилляторы попарно захвачены, но колебания носят квазипериодический характер, поскольку они возмущены сильно расстроенным по частоте оставшимся осциллятором.

Вспомним теперь, что для реализации режима гибели колебаний необходимы частотные условия. Для пары первый–второй осцилляторы эти условия дают две области гибели колебаний, лежащих слева и справа от точки резонанса $\Delta_1 = 0$ (см. рис. 3). Аналогично, для захваченной пары второй–третий осцилляторы должны наблюдаться две области гибели колебаний: слева и справа от точки резонанса $\Delta_1 = \Delta_2$. «Суммарная» картина и приводит к возможности трех областей гибели колебаний. При этом нижняя по величине связи граница области гибели колебаний определяется максимальным управляющим параметром не каждой пары, а всей системы: $\mu \approx \max(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3) = \lambda_1$. Подчеркнем, что указанный эффект возможен только при достаточно большой частотной расстройке первого и третьего осцилляторов.

3. Режимы с наиболее протемпированным крайним осциллятором

Пока наше обсуждение относилось к случаю, когда наиболее протемпированным был центральный осциллятор. Выберем теперь набор параметров $\lambda_1 = 0.13$, $\lambda_2 = 0.3$, $\lambda_3 = 0.18$, $\Delta_2 = 0.15$. Теперь $\lambda_1 = \min(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$, так что наиболее протемпированным будет крайний (первый) осциллятор. Соответствующая карта представлена на рис. 4.

Нижняя граница области гибели колебаний по-прежнему определяется третьим осциллятором, а второй и первый поменяли приоритет. Теперь нижняя граница области полной широкополосной синхронизации дается значением $\mu = \lambda_2/2$, а двухчастотной широкополосной синхронизации – значением $\mu = \lambda_1$. С другой стороны, в области $\mu < \lambda_1 = \min(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$, в которой активны все осцилляторы,

Наконец, на рис. 3 можно видеть появление дополнительной области гибели колебаний. Этот факт можно объяснить следующим образом. При условии, что Δ_2 велико, первый и третий осцилляторы сильно расстроены по частоте. Поэтому при вариации параметра Δ_1 взаимодействие между осцилляторами носит «парный» характер и наблюдается при выполнении резонансных условий:

- когда близки частоты первого и второго осцилляторов (в нашей нормировке $\Delta_1 \approx 0$);
- когда близки частоты второго и третьего осцилляторов ($\Delta_1 \approx \Delta_2$).

имеет место значительный по размеру язык режима полной синхронизации. Таким образом, полная синхронизация возникает предпочтительно в ситуации, когда наиболее протемпфирован крайний осциллятор.

Для этих режимов представим характеристики с помощью чисел вращения. Числа вращения определим следующим образом. Выберем для каждого осциллятора свое сечение Пуанкаре, по обращению в ноль его скорости. За некоторый большой промежуток времени подсчитываем числа возвратов N_x, N_y, N_z в каждое сечение. Затем определяем числа вращения первого осциллятора относительно второго $w_{1-2} = N_x/N_y$ и второго относительно третьего $w_{2-3} = N_y/N_z$.

Обратимся к рис. 5, на котором показаны примеры полученных таким образом зависимостей чисел вращения w_{1-2} и w_{2-3} от частотной расстройки осцилляторов Δ_1 . Графики отвечают трем маршрутам $\mu = \text{const}$ на рис. 4 в случае слабой, «умеренной» и большой связи. Заметим, что последний случай отвечает значению связи $\lambda_1 < \mu < \lambda_2, \lambda_3$, когда первый осциллятор сильно протемпфирован, и соответствующий маршрут целиком лежит в области двухчастотных торов.

При малой связи на рис. 5, *a* имеются две «полочки» $w_{1-2} = 1$ и $w_{2-3} = 1$, отвечающие взаимному захвату первого–второго и второго–третьего осцилляторов с соотношением частот 1:1. Из ляпуновской карты на рис. 4 видно, что эти полочки возникают при последовательном прохождении через два языка двухчастотных торов. При этом области захвата разделены небольшой полосой трехчастотных торов, что также видно на рис. 5, *a*.

При умеренной связи на рис. 5, *б* последовательно наблюдаются: трехча-

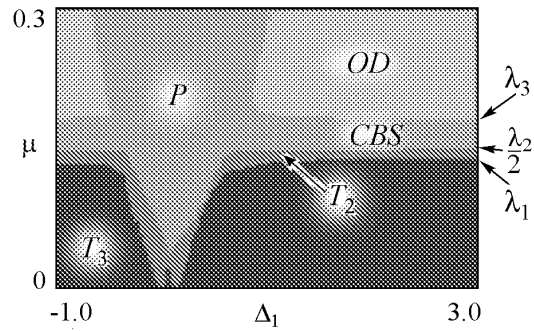


Рис. 4. Карта ляпуновских показателей системы (1), $\lambda_1 = 0.13$, $\lambda_2 = 0.3$, $\lambda_3 = 0.18$, $\Delta_2 = 0.15$. Наименее возбужден крайний осциллятор

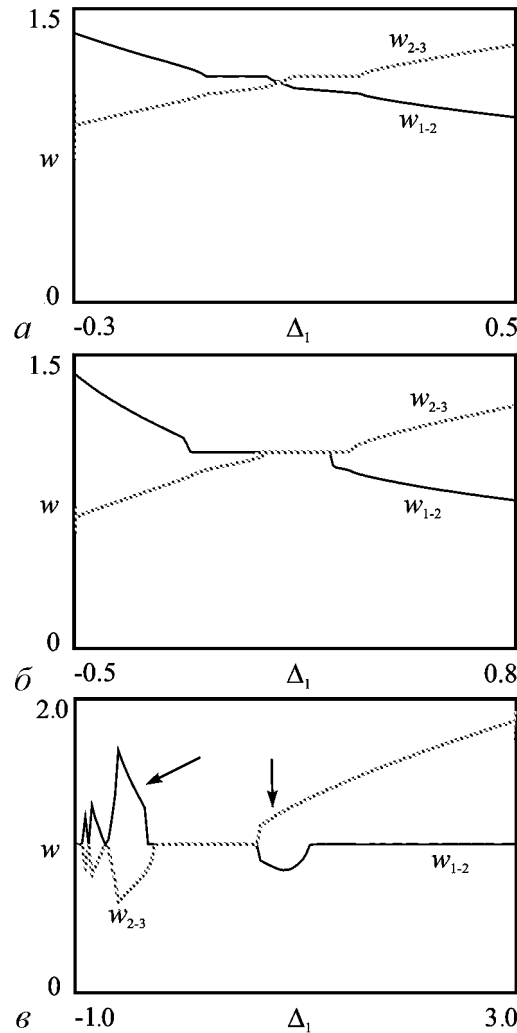


Рис. 5. Графики чисел вращения w_{1-2} и w_{2-3} . Параметр связи $\mu = 0.03$ (*a*), $\mu = 0.06$ (*б*), $\mu = 0.143$ (*в*); остальные параметры отвечают рис. 4

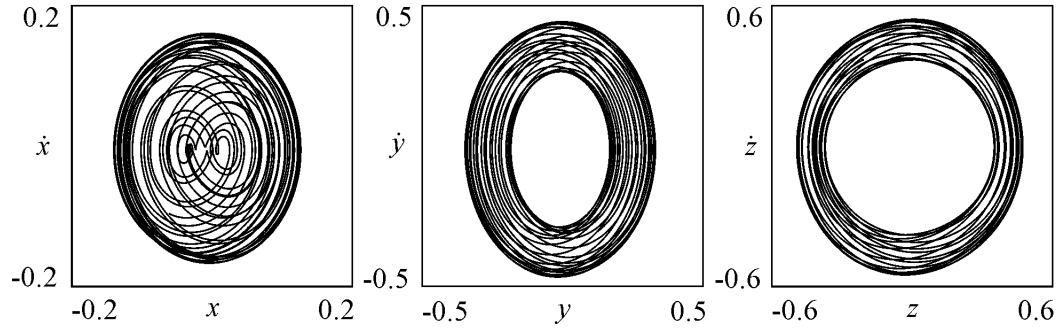


Рис. 6. Фазовые портреты в режиме подавления колебаний первого осциллятора, $\lambda_1 = 0.13$, $\lambda_2 = 0.3$, $\lambda_3 = 0.18$, $\Delta_1 = 1.1$, $\Delta_2 = 0.15$, $\mu = 0.132$

стотные колебания, захват первого–второго осцилляторов, полная синхронизация трех осцилляторов, взаимный захват второго–третьего осцилляторов и снова область трехчастотных колебаний.

Однако при большой связи на рис. 5, в картина изменяется: после прохождения области полной синхронизации возникает захват не второго–третьего, а снова первого–второго осцилляторов. Этот эффект связан с неидентичностью осцилляторов. В рассматриваемом случае первый осциллятор сильно протемпирован, и поэтому именно он, а не третий, захватывается вторым. Отметим, что в соответствии с рис. 5, в захват первого и второго осцилляторов реализуется в широкой полосе частот, как минимум, до $\Delta_1 = 3.0$. Это режим *двухчастотной широкополосной синхронизации*, обусловленный подавлением первого осциллятора при $\lambda_1 < \mu$.

Отметим также, что на графиках чисел вращения (рис. 5, в) имеются отмеченные стрелочками области, внутри которых эти графики приходят в противоречие с ляпуновской картой (см. рис. 4). Действительно, в этом случае наблюдаются двухчастотные режимы, а на графиках чисел вращения они не фиксируются. Причина становится понятной, если обратиться к фазовым портретам (см. рис. 6), отвечающим такой области значений параметров. На рис. 6 хорошо видно, что траектория первого осциллятора имеет многочисленные петли и периодически посещает окрестность начала координат. Поэтому фаза и, соответственно, число вращения для этого осциллятора плохо определены. Причина в неидентичности осцилляторов: в рассматриваемом случае первый осциллятор сильно протемпирован, что и предопределяет такой вид его фазовых траекторий. Таким образом, число вращения является не вполне удачной характеристикой режимов неидентичных осцилляторов в области, где хотя бы один из них протемпирован.

4. Случай идентичных осцилляторов

Обратимся теперь к случаю идентичных по управляющим параметрам осцилляторов, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Соответствующая карта ляпуновских показателей для значений параметров $\lambda = 0.2$ и $\Delta_2 = 0.15$ показана на рис. 7. В фазовом приближении случай идентичных осцилляторов рассмотрен в [21], поэтому интересным является вопрос, какие особенности в этом случае демонстрирует исходная система (1).

На рис. 7 можно видеть, что, как и для двух идентичных осцилляторов, режим полной широкополосной синхронизации отсутствует. Однако возникает новый тип режима – двухчастотная широкополосная синхронизация. Этот режим наблюдается при сколь угодно большой частотной расстройке Δ_1 в интервале значений связи $\lambda/2 < \mu < \lambda$. Причина появления этого режима состоит в «выделенной» роли центрального осциллятора. Хотя все осцилляторы идентичны и имеют одинаковую степень возбуждения, центральный испытывает трение со стороны не одного, а двух соседей и с ростом величины связи оказывается более протемпированным. При этом в области $\lambda/2 < \mu < \lambda$ он легко захватывается соседними осцилляторами, и возникает режим двухчастотной квазипериодичности. Такой тип поведения не описывается в рамках фазового приближения [21].

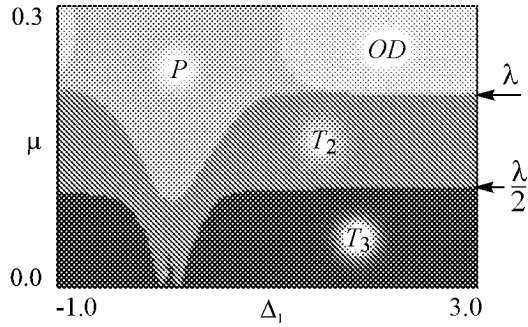


Рис. 7. Карта ляпуновских показателей системы (1) в случае идентичных по управляющим параметрам осцилляторов; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = 0.2$, $\Delta_2 = 0.15$

5. Случай больших значений управляющих параметров

Выше рассмотрен случай, когда значения управляющих параметров невелики. Пусть теперь эти параметры сопоставимы с единицей. Увеличим по сравнению с ситуацией, изображенной на рис. 2, все параметры в 10 раз, так что $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 1.9$, $\lambda_3 = 1.8$, $\Delta_2 = 1.5$. Соответствующие карты и характерные фазовые портреты показаны на рис. 8.

В этом случае внутри основного языка полной синхронизации все осцилляторы равноправны, но вид фазовых портретов на рис. 8, а заметно отличается от окружности, что обусловлено большими значениями управляющих параметров. В области полной широкополосной синхронизации появились режимы периода 3, для которых характерно появление на фазовом портрете второго осциллятора дополнительных петель (рис. 8, б). При этом, как и в случае малых λ , сохраняется ситуация, когда первый и второй осцилляторы подавлены по сравнению с третьим. Интересно, что в этом режиме каждый осциллятор имеет какую-то свою, характерную форму фазового портрета.

Наиболее существенные изменения происходят в области трехчастотной квазипериодичности. Внутри нее появляются выраженные языки двухчастотных торов⁴. Фазовые портреты осцилляторов для двух наиболее характерных языков представлены на рис. 8, в и г. Можно видеть, что в этом случае доминирует (хотя и незначительно) второй осциллятор, у которого наибольшее значение управляющего параметра. Таким образом, демпфирующее влияние связи невелико. При этом внутри двух указанных языков наиболее возмущены квазипериодическим образом разные осцилляторы: третий – на рис. 8, в, и первый – на рис. 8, г. Это отвечает тому, что в ситуации

⁴По аналогии с классической задачей синхронизации можно предположить, что границам этих языков отвечают седло-узловые бифуркации двухчастотных торов, простейшие примеры которых обсуждались в [17–21].

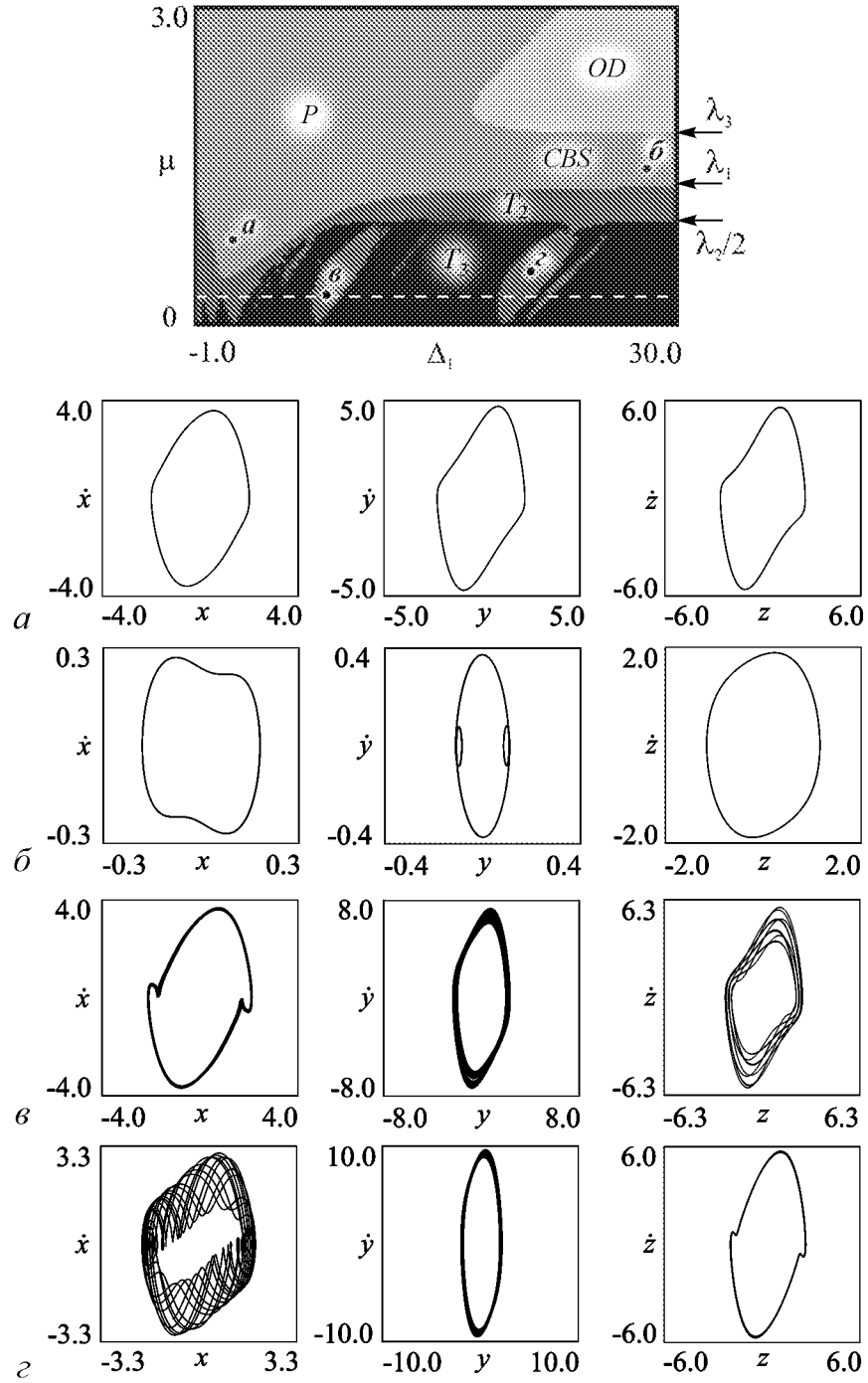


Рис. 8. Карта ляпуновских показателей системы (1), $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 1.9$, $\lambda_3 = 1.8$, $\Delta_2 = 1.5$; $a-z$ – фазовые портреты в соответствующих точках

рис. 8, в взаимно захвачены первый-второй, а в ситуации рис. 8, г – второй-третий осцилляторы.

Этот факт легко обосновать, рассчитав числа вращения. На рис. 9 показаны графики зависимостей чисел вращения w_{1-2} и w_{2-3} от частотной расстройки Δ_1 для фиксированного уровня связи, отвечающего белой пунктирной

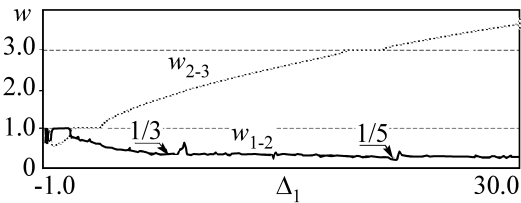


Рис. 9. Зависимости чисел вращения w_{1-2} и w_{2-3} от частотной расстройки Δ_1 ; $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 1.9$, $\lambda_3 = 1.8$, $\Delta_2 = 1.5$. Значение параметра связи $\mu = 0.32$

линии на рис. 8. На них можно видеть характерные полочки $w_{1-2} = 1/3$ и $w_{2-3} = 3$. Таким образом, в этом случае наблюдается кратная синхронизация с соотношением частот 1:3. Расчеты показывают, что в полосе широкополосной двухчастотной синхронизации также взаимно захвачены второй и третий осцилляторы. В этом режиме второй осциллятор сильнее всех протемпирован связью, поскольку $\lambda_2/2 < \lambda_1, \lambda_3$.

Заключение

В цепочке трех диссипативно связанных неидентичных осцилляторов ван дер Поля связь может подавлять колебания любого из трех осцилляторов. В силу геометрии цепочки, осциллятор, находящийся в ее центре, испытывает большее (в два раза) диссипативное воздействие. Картина синхронизации зависит от положения наиболее протемпированного связью осциллятора в цепочке.

В системе возможен режим полной широкополосной синхронизации, когда захват всех трех осцилляторов наблюдается в сколь угодно широком диапазоне частотных расстроек. Такой режим возникает в ситуации, когда за счет диссипативной связи оказываются протемпированными два осциллятора. Сверху он ограничен областью гибели колебаний, граница которой задается условием на величину связи $\mu = \max(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$.

В системе возможен также режим, который можно назвать широкополосной двухчастотной синхронизацией. Он располагается в области значений управляющих параметров, когда сильно протемпированным является один из осцилляторов. Ниже этой области располагаются режимы трехчастотных квазипериодических колебаний. Для них ни один осциллятор не протемпирован, и соотношение размеров аттракторов определяется соотношением управляющих параметров осцилляторов.

В случае близких частот крайних осцилляторов, при подключении в центр цепочки наименее «активного» осциллятора ($\lambda_2/2 < \lambda_1, \lambda_3$) область полной синхронизации имеет форму языка с порогом по величине связи. При увеличении частотной расстройки крайних осцилляторов полная синхронизация в области $\mu < \min(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$ становится невозможной. Кроме того, происходит уменьшение размеров областей гибели колебаний за счет изменения их частотных границ. Причина состоит в том, что для реализации эффекта гибели колебаний нужно не только условие большой связи, но и условие достаточно большой частотной расстройки осцилляторов. Еще одна особенность состоит в возникновении дополнительной об-

ласти гибели колебаний, что связано с «парным» характером взаимодействия осцилляторов и с выполнением резонансных частотных условий. Соответствующие резонансы хорошо выявляются на карте ляпуновских показателей и имеют вид двух выраженных языков двухчастотных торов в области трехчастотной квазипериодичности.

В случае, когда наиболее протемпированным оказывается крайний осциллятор, в области $\mu < \min(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$ имеется значительный по своему размеру язык режима полной синхронизации. Таким образом, полная синхронизация возникает предпочтительно в ситуации, когда наиболее протемпирован крайний осциллятор.

Для идентичных осцилляторов ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$) в области значений связи $\lambda/2 < \mu < \lambda$ возникает режим двухчастотной широкополосной синхронизации, что обусловлено выделенной ролью центрального осциллятора, который даже в случае равенства управляющих параметров оказывается более протемпированным за счет связи.

В случае, когда управляющие параметры осцилляторов сопоставимы с единицей, возникают высшие резонансы, отвечающие захватам пар первый–второй или второй–третий осцилляторы с соотношением частот 1:3, 1:5 и т.д. Им отвечают соответствующие языки двухчастотных торов, погруженные в область трехчастотной квазипериодичности.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-02-00707-а и программой «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738. Ю.П. Емельянова благодарит также Фонд содействия отечественной науке.

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
3. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
4. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
5. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 403.
6. Rand R., Holmes P.J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1980. Vol. 15. P. 387.
7. Storti D.W., Rand R.H. Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1982. Vol. 17, № 3. P. 143.
8. Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M. Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. P. 171.
9. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. О динамике двух связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга с диссипативной связью // Изв. вузов. ПНД. 2003. Т. 11, № 6. С. 48.

10. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D*. 2004. Vol. 189, № 1-2. P. 8.
11. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов ван дер Поля, неидентичных по управляющему параметру // *Письма в ЖТФ*. 2007. Т. 33, вып. 15. С. 15.
12. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, № 4. С. 3.
13. *Kuznetsov A.P., Roman Yu.P.* Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // *Physica D*. 2009. Vol. 238, № 16. P. 1499.
14. *Астахов В.В., Коблянский С.А Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Бифуркационный анализ динамики диссипативно связанных генераторов ван дер Поля // *Успехи современной радиоэлектроники*, 2008. Вып. 9. С. 61.
15. *Астахов В.В., Коблянский С.А., Шабунин А.В.* Бифуркационный анализ режимов синхронизации и гашения колебаний в связанных генераторах с инерционной нелинейностью // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 2. С. 79.
16. *Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Селезнев Е.П.* Синхронизация связанных автоколебательных осцилляторов с неидентичными параметрами // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 2. С. 62.
17. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // *Europhysics Letters*. 2009. Vol. 86. P. 30003.
18. *Анищенко В.С., Астахов С.В, Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика*. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
19. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
20. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010 Т. 18, № 4. С. 17.
21. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2010. Т. 6, № 4. С. 693.
22. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // *ДАН СССР*. 1944. Т. 44, № 8. С. 339.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского
Саратовский филиал ИРЭ
им. В.А. Котельникова РАН*

*Поступила в редакцию 28.03.2011
После доработки 12.10.2011*

DYNAMICS OF THREE COUPLED VAN DER POL OSCILLATORS WITH NON-IDENTICAL CONTROLLING PARAMETERS

Yu.P. Emelianova, A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina

We consider the chain of three dissipatively coupled self-oscillating systems with non-identical controlling parameters. We observe situations, when coupling damps different oscillators. The structure of the frequency mismatch – coupling value parameter plane is investigated with a view to the location of oscillator death area, complete synchronization area, two- and three-frequency quasiperiodic regimes. Features, connected with non-identity in controlling parameters, are considered. A possibility of complete broadband synchronization regimes and two-frequency broadband synchronization regimes is demonstrated.

Keywords: Synchronization, coupled oscillators, quasiperiodic dynamics.



Емельянова Юлия Павловна – родилась в 1987 году в Венгрии в Сешфехерваре, окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского с красным дипломом в 2009 году. Занимается научной работой под руководством профессора, д.ф.-м.н. А.П. Кузнецова с 2002 года. Научные интересы – исследование особенностей синхронизации связанных автоколебательных систем. Победитель стипендиальной программы Фонда некоммерческих программ «Династия» (2008–2009), лауреат стипендии Президента РФ как «студент-отличник, проявивший выдающиеся способности в учебной и научной деятельности» (2008–2009), а также программы «Лучшие аспиранты РАН» Фонда содействия отечественной науке за 2010 год по направлению «Инженерные и технические науки». Автор более 20 публикаций, в том числе 9 статей в российских и международных журналах, а также 1 учебного пособия.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: yuliaem@gmail.com



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском госуниверситете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). В настоящее время старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 80 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 3 учебно-методических пособий.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru