



О ВЛИЯНИИ ПОДМЕНЕННЫХ ГАРМОНИК НА ДИНАМИКУ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

В. В. Зайцев, И. В. Стулов

Самарский государственный университет

Описан эффект, возникающий в дискретном времени при взаимодействии автоколебаний с подменными гармониками основной частоты. Показано, что он аналогичен эффекту захвата частоты (синхронизации) автоколебаний внешним гармоническим сигналом. Так как дискретный автогенератор формально является автономной системой, то эффект классифицирован как самозахват частоты или самосинхронизация. Самозахват проанализирован методом медленно меняющихся амплитуд. Указано на то, что через механизм самосинхронизации при определенных условиях осуществляется привязка частоты дискретных автоколебаний к частоте дискретизации.

Ключевые слова: Нелинейная динамика, автоколебательная система, дискретное время, подмена частот, синхронизация, захват частоты.

Введение

Известно, что в спектре дискретного во времени (ДВ) гармонического сигнала, частота которого превышает частоту Найквиста ω_N , наблюдается эффект подмены частот [1]. При дискретизации аналоговых сигналов с целью их последующей цифровой обработки подмена частот устраняется путем применения противоположенных фильтров. Если же частоту ω_N превышает частота ω гармоники, генерируемой в нелинейной дискретной системе, то такая гармоника должна рассматриваться как подменная. Она воспринимается системой как колебание с частотой ω' , вычисляемой с помощью выражения

$$\Omega' = F_t(\Omega - \text{floor}(\Omega)), \quad F_t(\Omega) = \begin{cases} \Omega, & 0 \leq \Omega < 0.5 \\ 1 - \Omega, & 0.5 \leq \Omega < 1 \end{cases}.$$

Оно содержит частоты, нормированные на частоту дискретизации ω_d : $\omega' = \omega_d \Omega'$, $\omega = \omega_d \Omega$. Влияние подмененных гармоник на динамику нелинейных ДВ-осцилляторов особенно велико, если их частоты попадают в полосы пропускания резонансных систем.

В настоящем сообщении анализируется эффект самосинхронизации автоколебательной системы (АКС) томсоновского типа, осциллирующей в дискретном времени. Эффект наблюдается в случае, когда частота подменной гармоники близка к частоте свободных автоколебаний. Внешний сигнал в этих условиях может «навязать» свою частоту автоколебательной системе, то есть имеет место синхронизация (захват частоты) АКС [2]. Стремление подменной гармоники захватить частоту основного сигнала приводит к тому, что в системе устанавливаются автоколебания с частотой Ω_{ss} , удовлетворяющей условию $\Omega_{ss} = F_t(N\Omega_{ss} - \text{floor}(N\Omega_{ss}))$, где N – номер гармоники. В частности, при $N = 3$ $\Omega_{ss} = 1/4$, а при $N = 5$ $\Omega_{ss} = 1/3$ или $\Omega_{ss} = 1/6$. Но так как АКС формально является автономной, то эффект можно классифицировать как самосинхронизацию, или самозахват частоты.

Исследования эффекта проведем радиофизическими методами, используя теорию колебаний, спектральный анализ и цифровую обработку сигналов.

1. Численный эксперимент с дискретным осциллятором ван дер Поля

В качестве объекта исследований примем предложенное в [3] дискретное отображение АКС томсоновского типа

$$\begin{aligned} y[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] = \\ = \gamma (\cos(2\pi\Omega_0)G(y[n-1]) - G(y[n-2])). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь Ω_0 – нормированная на частоту дискретизации собственная частота контура, $\gamma > 0$ – параметр глубины положительной обратной связи, а параметр диссипации определяется добротностью Q аналогового прототипа

$$\alpha = \exp(-\pi\Omega_0/Q).$$

Функция нелинейности активного элемента АКС $G(y)$ в дальнейшем аппроксимируется неполным кубическим полиномом

$$G(y) = y - \frac{1}{3} y^3. \quad (2)$$

В таком случае отображение (1) следует считать одним из вариантов дискретного осциллятора ван дер Поля. Динамика осциллятора подробно исследована в статье [3] (за исключением рассматриваемой здесь самосинхронизации).

Численный эксперимент с ДВ-осциллятором (1) позволяет обнаружить эффект самозахвата. В эксперименте частота Ω_0 принимает ряд значений из заданного интервала. После завершения переходного процесса полученная реализация автоколебаний $y[n]$ обрабатывается по методу аналитического сигнала с использованием дискретного преобразования Гильберта. Таким способом выделяются действительная огибающая $|A[n]|$ и фаза $\psi[n]$ автоколебаний. Частота автоколебаний определяется по процессу изменения фазы $\psi[n]$

$$\Omega_a = \left\langle \frac{\psi[n] - \psi[n-1]}{2\pi} \right\rangle_N,$$

где угловые скобки означают усреднение по времени в пределах реализации длиной N . Физический смысл Ω_a состоит в том, что в гармоническом приближении – это мгновенная частота, а для квазигармонического режима – средняя частота автоколебаний.

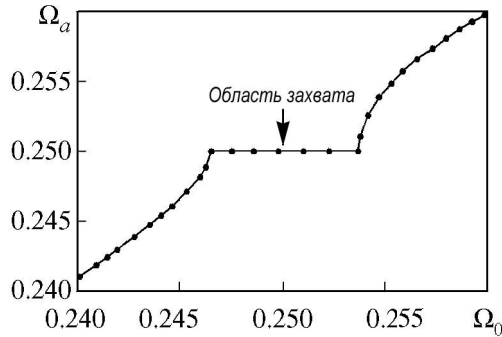


Рис. 1. Частото-частотная характеристика в окрестности $\Omega_{ss} = 0.25$

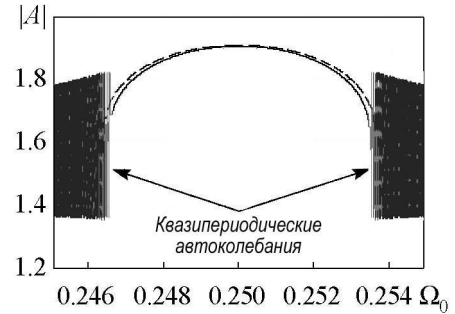


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика в окрестности $\Omega_{ss} = 0.25$

На рис. 1 и рис. 2 представлены результаты численного эксперимента в ДВ-осцилляторе с параметрами $Q = 20$ и $\gamma = 0.2$, в котором частота Ω_0 меняется в окрестности $\Omega_{ss} = 0.25$. На рис. 1 показана зависимость Ω_a от собственной частоты контура.

Зависимость $\Omega_a = f(\Omega_0)$ типична для явления захвата частоты [2, 3]: в окрестности частоты Ω_{ss} расположена область захвата, в которой гармонические автоколебания совершаются с частотой $\Omega_a = \Omega_{ss}$, а при выходе из этой области устанавливается режим квазипериодических автоколебаний. Этот же вывод о типичности относится и к амплитудно-частотной характеристике АКС, изображенной на рис. 2 штриховой линией. А так как исследуемый автогенератор формально автономен, то речь в данном случае может идти о самозахвате (самосинхронизации).

Амплитудный спектр $S_y(\Omega)$ осцилляций $y[n]$ на рис. 3 позволяет выявить механизм самосинхронизации – это взаимодействие основной гармоники с подменной третьей гармоникой $3G$. При смещении спектральной линии автоколебаний на частоте Ω_a в направлении Ω_{ss} линия $3G$ перемещается во встречном направлении. В итоге происходит самозахват частоты. Во втором порядке теории возмущений этот эффект с участием подменной пятой гармоники наблюдается в окрестностях частот $\Omega_{ss} = 1/6$ и $\Omega_{ss} = 1/3$.

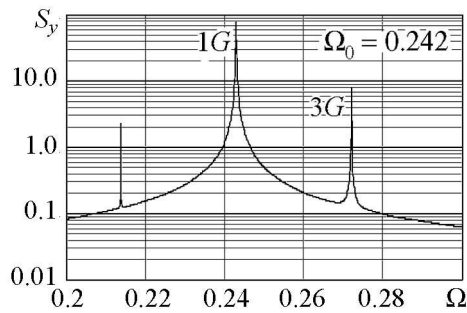


Рис. 3. Амплитудный спектр автоколебаний

2. Анализ самосинхронизации методом медленно меняющихся амплитуд

Динамику процесса самосинхронизации на частоте $\Omega_{ss} = 0.25$ проанализируем в приближении метода медленно меняющихся амплитуд (ММА). Метод широко используется в непрерывном времени. На ДВ-осцилляторы вида (1) он распространен в статье [4].

Генерируемые осциллятором автоколебания представим в виде

$$y[n] = \frac{1}{2}A[n]Z^n + \frac{1}{2}A^*[n]Z^{-n} = \frac{1}{2}A[n]Z^n + \text{к.с.}, \quad (3)$$

где $Z = \exp(j2\pi\Omega_{ss})$; $A[n]$ – комплексная амплитуда – медленная функция дискретного времени, связанная с действительными амплитудой $a[n]$ и фазой $\varphi[n]$ соотношением $A[n] = a[n] \exp(j\varphi[n])$.

Нелинейная функция (2) с аргументом (3) разлагается в ряд Фурье

$$G(y[n]) = \frac{1}{2} G_1(A)Z^n + \frac{1}{2} G_3(A)Z^{3n} + \text{к.с.}$$

с комплексными амплитудами гармоник

$$G_1(A) = \left(1 - \frac{1}{4}|A|^2\right)A, \quad G_3(A) = -\frac{1}{12}A^3. \quad (4)$$

Считая условием медленности приближенное выполнение равенств

$$A[n-1] - A[n-2] = A[n] - A[n-1],$$

для комплексной амплитуды автоколебаний (1) удается получить укороченное уравнение

$$A[n] = A[n-1] - \frac{\pi\Omega_{ss}}{Q}(1 - j\eta)A[n-1] + \frac{\gamma}{2}\left(G_1(A[n-1]) + G_3(A^*[n-1])\right), \quad (5)$$

где $\eta = 2Q(\Omega_0 - \Omega_{ss})/\Omega_{ss}$ – обобщенная расстройка частот. Следует особо отметить, что при выводе (5) учитывается равенство $Z^{-3n} = Z^n$, отражающее эффект подмены частот и обеспечивающее появление слагаемого $G_3(A^*)$ в укороченном уравнении.

Комплексному уравнению (5) (с учетом (4)) соответствует система из двух действительных уравнений для амплитуды $a[n]$ и фазы $\varphi[n]$

$$\begin{aligned} a[n] &= a[n-1] - \frac{\pi\Omega_{ss}}{Q}a[n-1] + \frac{\gamma}{2}G_1(a[n-1]) - \frac{\gamma}{24}a^3[n-1] \cos(4\varphi[n-1]), \\ \varphi[n] &= \varphi[n-1] + \eta \frac{\pi\Omega_{ss}}{Q} \frac{a[n-1]}{a[n]} + \frac{\gamma}{24} \frac{a^3[n-1]}{a[n]} \sin(4\varphi[n-1]). \end{aligned} \quad (6)$$

Некоторые результаты численного решения системы укороченных уравнений (6) отражены на рис. 2 и рис. 4.

На рис. 2 результат решения уравнений (6) для амплитуды $a[n]$ при квазистатическом возрастании частоты Ω_0 представлен непрерывной линией; штриховая линия показывает результат выделения огибающей осцилляций в отображении (1) с параметрами $Q = 20$, $\gamma = 0.2$. Близость графиков

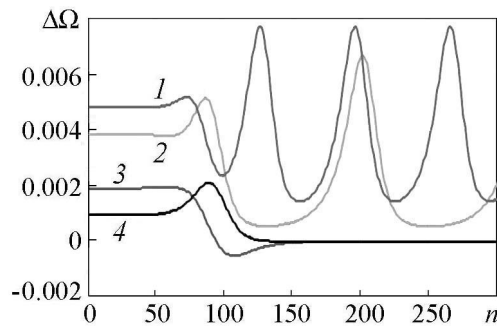


Рис. 4. Динамика поправки на частоту автоколебаний

является аргументом в пользу механизма самозахвата частоты с участием подмененных гармоник.

Рис. 4 иллюстрирует изменение мгновенной частоты автоколебаний в переходном процессе. На нем линиями 1–4 изображены графики временных зависимостей поправки на частоту

$$\Delta\Omega[n] = \frac{\varphi[n] - \varphi[n-1]}{2\pi}$$

для значений $\Omega_0 = 0.255; 0.254; 0.252$ и 0.251 . При этом мгновенная частота автоколебаний равна $\Omega_a[n] = \Omega_{ss} + \Delta\Omega[n]$.

Зависимости 1 и 2 имеют место в области квазипериодических автоколебаний (см. границы области захвата на рис. 1 и рис. 2). На начальных этапах зависимостей 3 и 4 наблюдаются процессы переходов к установившимся значениям φ_0 фазы захваченных автоколебаний. Для них из второго уравнения системы (6) следует соотношение

$$\sin(4\varphi_0) = -24\eta \frac{\pi\Omega_{ss}}{\gamma Q a_0^2}.$$

Устойчивым автоколебаниям соответствуют интервалы значений

$$-3\pi/8 + \pi m/2 < \varphi_0 < -\pi/8 + \pi m/2, \quad \text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

для которых $\cos(4\varphi_0) < 0$.

Амплитуда a_0 захваченных автоколебаний определяется из нелинейного алгебраического уравнения

$$-\frac{\pi\Omega_{ss}}{Q} + \frac{\gamma}{2a_0} G_1(a_0) + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{24} a_0^2\right)^2 - \left(\eta \frac{\pi\Omega_{ss}}{Q}\right)^2} = 0,$$

которое имеет устойчивое решение

$$a_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{2\pi\Omega_{ss}}{\gamma Q} + \frac{1}{3} \sqrt{\left(1 - \frac{2\pi\Omega_{ss}}{\gamma Q}\right)^2 - 32\left(\frac{\pi\eta}{\gamma Q}\right)^2}}. \quad (7)$$

Расчет по формуле (7) дает график зависимости $a_0(\eta)$, совпадающий с графиком амплитудной характеристики захваченных автоколебаний на рис. 2 (непрерывная линия; $\Omega = 20, \gamma = 0.2$).

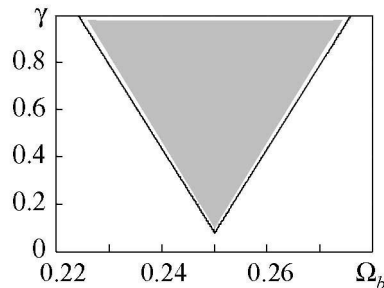


Рис. 5. Язык Арнольда для значений $Q = 20, \gamma = 0.2$ и $\Omega_{ss} = 0.25$

Условие неотрицательности второго подкоренного выражения в формуле (7) позволяет определить границы $\pm\eta_b$ области самозахвата

$$\eta_b = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\gamma Q}{2\pi\Omega_{ss}} - 1 \right). \quad (8)$$

Область самозахвата (язык Арнольда) выделена на рис. 5 темным цветом. Отметим, что язык Арнольда не простирается до значений $\gamma = 0$, а начинается в

точке $\gamma_{st} = \pi/2Q$. Наличие такого порога имеет простое объяснение: значение γ_{st} – это порог самовозбуждения, ниже которого автоколебания отсутствуют. Поэтому отсутствует и самозахват.

Следует отметить, что полученные аналитические результаты справедливы в условиях применимости метода ММА. При значительных превышениях порога генерации (при $\gamma \sim 1$) эти условия нарушаются и, следовательно, зависимости (7) и (8) имеют лишь качественный характер.

Заключение

Рассмотренный здесь эффект самосинхронизации ДВ-автогенератора является спецификой нелинейной динамики в дискретном времени и не наблюдается во времени непрерывном. Дело в том, что в нелинейной ДВ-системе всегда присутствует сигнал тактовой частоты. Привязка частоты автоколебаний к субгармоникам тактовой частоты реализуется через механизм взаимодействия основной и подменных гармоник автоколебаний. Это же взаимодействие при высоких уровнях возбуждения в неизохронных системах может приводить к хаотизации ДВ-автоколебаний [5].

Заметим также, что проведенный анализ полностью согласуется с выводами качественной теории динамических систем. Действительно, в режиме самозахвата аттрактор дискретного отображения (1) на плоскости $(x[n-1], x[n])$ представляет собой совокупность неподвижных точек с рациональным числом вращения Ω_{ss} . По теореме о структурно устойчивых диффеоморфизмах окружности (см., например, [6]) такой аттрактор устойчив по отношению к малым вариациям параметров отображения, в частности, к вариациям частоты Ω_0 . Зависимость $\Omega_{ss} = f(\Omega_0)$ имеет вид так называемой чертовой лестницы. При этом горизонтальная часть графика на рис. 1 отображает одну ступеньку лестницы.

Библиографический список

1. *Оппенгейм А., Шафер Р.* Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
2. *Пиковский А., Розенблюм М, Крутс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
3. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* Лекции по нелинейной динамике. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 516 с.
4. *Зайцев В.В.* О дискретных отображениях осциллятора ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17, № 1. С. 35.
5. *Зайцев В.В., Зайцев О.В., Яровой Г.П.* Статистические оценки хаотических автоколебаний дискретного осциллятора ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2001. Т. 4, № 1. С. 18.
6. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

Поступила в редакцию 7.09.2015
После доработки 9.12.2015

ABOUT INFLUENCE OF THE CHANGED HARMONICS ON DYNAMICS OF SELF-OSCILLATIONS IN DISCRETE TIME

V. V. Zaitsev, I. V. Stulov

Samara State University

The effect arising in discrete time at interaction of self-oscillations with higher harmonics of the main frequency is described. It is shown that it is similar to effect of capture of the frequency (synchronization) of self-oscillations by an external harmonic signal. As the discrete oscillator formally is autonomous system, the effect is classified as self-capture of frequency or self-synchronization. Self-capture is analysed by method of slow-changing amplitudes. It is specified that via the mechanism of self-synchronization the binding of frequency of discrete self-oscillations to sampling frequency is carried out.

Keywords: Nonlinear dynamics, self-oscillatory system, discrete time, change of frequencies, synchronization, capture of frequency.

References

1. *Oppenheim A., Schaffer R.* Discrete-time signal processing. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1999. 870 p.
2. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kruhts J.* Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001. 402 p.
3. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E.* Lectures on nonlinear dynamics. M.-Izhevsk: SPC «Regular and chaotic dynamics», 2011. 516 p. (in Russian).
4. *Zaitsev V.V.* About discrete mapping the van der Pol oscillator. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy.* 2014. Vol. 17, № 1. P. 35 (in Russian).
5. *Zaitsev V.V., Zaitsev O.V., Yarovoy G.P.* Statistical estimates of characteristics of chaotic self-oscillations of the discrete van der Pol oscillator // *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy.* 2001. Vol. 4, № 1. P. 18 (in Russian).
6. *Arnold V.I.* Additional chapters in the theory of ordinary differential equations. Nauka, Moscow, 1978. 304 p. (in Russian).



Зайцев Валерий Васильевич – родился в с. Борское Куйбышевской области (1952). Окончил Куйбышевский государственный университет (1975) и аспирантуру при Горьковском государственном университете (1980, кафедра А.Н. Малахова). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1980). Профессор, заведующий кафедрой радиофизики Самарского государственного университета. Область научных интересов: автоколебательные системы, статистическая радиофизика, компьютерное моделирование а радиофизике. Автор более 100 статей в периодической печати.

443011 Самара, ул. Академика Павлова, д. 1
Самарский государственный университет
E-mail: zaitsev@samsu.ru



Стулов Игорь Валерьевич – родился в Самаре (1989). Окончил Самарский государственный университет (2011). Аспирант физического факультета СамГУ. Область научных интересов: автоколебательные системы.

443011 Самара, ул. Академика Павлова, д. 1
Самарский государственный университет
E-mail: stulov@ssu.samara.ru