



КВАНТОВЫЙ АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР С ОДНОЧЛЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ, ТРЕНИЕМ И ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ*

А. Л. Санин¹, А. А. Смирновский²

¹Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

²Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН

В контексте уравнения Шрёдингера–Ланжевена–Костина проводится численное моделирование динамических закономерностей ангармонического осциллятора с одночленным потенциалом четвёртой степени при импульсном возбуждении колебаний, разных амплитудах внешнего воздействия и коэффициентах трения. Детально исследуется и обсуждается частотный отклик, обусловленный переходами в неэквидистантном энергетическом спектре осциллятора, генерация высших нечетных гармоник, а также роль трения.

Ключевые слова: Квантовый осциллятор 4 степени, уравнение Шрёдингера–Ланжевена–Костина, свободные и вынужденные колебания, трение.

Введение

Классические осцилляторы с полиномиальными потенциалами четвёртой степени исследуются в течение длительного времени, об их свойствах известно достаточно много. Полином, состоящий из квадратичного слагаемого и слагаемого четвёртой степени, представляет собой потенциал консервативного осциллятора Дуффинга, который широко исследовался и исследуется в классической механике, в том числе при наличии трения и внешнего воздействия, зависящего от времени. В зависимости от знака коэффициентов такой осциллятор может быть одноямным или двухъямным. Много исследований связано со случаем, когда коэффициент в слагаемом с четвёртой степенью является малым, то есть является возмущением гармонического осциллятора. Не меньший интерес представляют проблемы, когда слагаемое четвёртой степени является доминирующим, а не малой добавкой. В предельном случае, при отсутствии квадратичного члена, свойства осциллятора будут определяться одночленным потенциалом четвёртой степени. Это пример относительно простого нелинейного осциллятора с частотой, зависящей от энергии (или, другими словами, от

*Статья написана по материалам доклада на X Международной школе «Хаотические автоколебания и образования структур», 7–12 октября 2013 г. Саратов, Россия.

начальных условий). В данном случае классическое уравнение движения включает в себя силу, пропорциональную кубу расстояния от положения равновесия со знаком «минус». Это уравнение анализировалось во многих работах, например, в [1,2]. В более общем случае в уравнение движения также вводится сила трения, пропорциональная скорости с обратным знаком, а также дополнительное внешнее воздействие, зависящее от времени [3]. В [3] внешнее воздействие представляет собой малую добавку, пропорциональную произведению кубического множителя и гармонической по времени функции.

Теория осцилляторов с указанными потенциалами может быть обобщена на случаи движения, когда существенную роль играют квантовые динамические закономерности. В этих случаях классические функции Гамильтона преобразуются в операторы Гамильтона квантовой механики, и получаемые осцилляторы будут представлять собой квантовые аналоги классических, поэтому их называют квантовыми ангармоническими осцилляторами. Под это название подпадают осцилляторы не только с малой ангармонической добавкой, но и с доминирующим слагаемым четвёртой степени по координате. Изучение квантовых ангармонических осцилляторов имеет фундаментальное значение для различных приложений: в молекулярной физике, химии, электронике и нанотехнологиях, в разработках квантовых компьютеров. В научной литературе уделяется исключительное внимание стационарным решениям уравнения Шрёдингера, включающим энергетические спектры и собственные функции [4–6]. Однако анализ динамических задач с учетом начальных условий для перечисленных потенциалов является совершенно недостаточным и представляет скорее открытую проблему. Для квантового осциллятора с двухъямным потенциалом (ему соответствует классический консервативный осциллятор Дуффинга), существует множество статей, отметим некоторые из них [7–10]. Если в уравнение Шрёдингера с двухъямным потенциалом ввести слагаемое, обусловленное трением, а также внешнее воздействие, зависящее от времени, то получим уравнение для квантового диссипативного осциллятора Дуффинга, численное исследование которого проводилось нами ранее [11, 12]. Однако для более детального понимания динамики квантовых волновых пакетов с полиномиальными потенциалами следует рассмотреть более простую модель квантового осциллятора с одночленным потенциалом четвёртой степени. В отличие от квантового гармонического осциллятора, здесь спектр энергии не является эквидистантным, частоты перехода между соседними состояниями будут разными. Цель нашего исследования состоит в изучении частотных свойств квантового осциллятора с одночленным потенциалом четвёртой степени.

Статья состоит из введения, трёх разделов и заключения. В первом разделе обсуждаются основные уравнения и численный метод интегрирования уравнения Шрёдингера–Ланжевена–Костина (ШЛК). Второй раздел посвящён анализу решений стационарного и нестационарного уравнений Шрёдингера. В третьем разделе в рамках уравнения ШЛК обсуждаются свободные и вынужденные колебания осциллятора с трением, генерация высших нечётных гармоник.

1. Основные уравнения и численное интегрирование

Уравнение ШЛК, записанное в безразмерном виде, можно представить как

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + U_{\Sigma} \psi - \frac{ik}{2} \left(\ln \frac{\psi}{\psi^*} - \left\langle \ln \frac{\psi}{\psi^*} \right\rangle \right) \psi. \quad (1)$$

Здесь ζ, τ – координата и время, k – коэффициент трения, i – мнимая единица. Волновая функция ψ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \psi^* \psi d\zeta = 1. \quad (2)$$

Рассматриваемая квантовая система ограничена непроницаемыми стенками в точках $\pm\zeta_L$ (ζ_L – полуширина системы). Символ $\langle \rangle$ означает усреднение по координате, так что

$$\left\langle \ln \frac{\psi}{\psi^*} \right\rangle = \int \psi^* \ln \frac{\psi}{\psi^*} \psi d\zeta. \quad (3)$$

Величина U_Σ состоит из двух слагаемых

$$U_\Sigma = \zeta^4 + U_{\text{ext}}, \quad U_{\text{ext}} = U_0 \zeta \sin(\Omega_{\text{ext}} \tau), \quad (4)$$

где U_0 и Ω_{ext} – амплитуда и частота внешнего воздействия U_{ext} .

Если $k = 0$, $U_{\text{ext}} = 0$, то из уравнения (1) можно получить уравнение для собственных функций ϕ_n и собственных значений ε_n

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \zeta^4 \right) \phi_n = \varepsilon_n \phi_n, \quad (5)$$

n – номер состояния.

Уравнения (1) и (5) являются инвариантными относительно выбора базисных единиц измерения. Диссипативные свойства системы зависят от величины коэффициента трения k , величина $\ln(\psi/\psi^*)$ может быть представлена в виде

$$\ln \left(\frac{\psi}{\psi^*} \right) = i (2 \arg(\psi) + 2n\pi), \quad (6)$$

где $\arg(\psi) = \arctg(\text{Im } \psi / \text{Re } \psi)$ – главное значение фазы. Следует отметить, что физически корректные решения имеют место, когда фаза является непрерывной функцией координаты ζ .

Граничные условия на стенках системы и начальное условие задавались в виде

$$\psi(\pm\zeta_L, \tau) = 0, \quad \psi(\zeta, \tau = 0) = \psi_0(\zeta). \quad (7)$$

В качестве начального условия использовалось стационарное решение (5) для основного состояния, а колебания возбуждались под действием одиночного кратковременного импульса

$$U_0 = -F_0 \zeta, \quad \tau \in (0; \Delta\tau), \quad (8)$$

где F_0 – величина силы, действующей в течение короткого промежутка времени $\Delta\tau$, много меньшего времени наблюдения (расчёта) T .

Численное интегрирование нестационарного уравнения (1) было проведено при заданных начальном и граничных условиях при помощи итерационного конечно-разностного метода установления по псевдовремени, являющегося разновидностью метода простых итераций. Производные по координате аппроксимировались со вторым порядком точности, временная производная также вычислялась со вторым порядком точности (по методу Кранка–Николсона), исключая моменты, где потенциал U_0 изменялся скачком. В процессе вычислений контролировалось условие нормировки (2), которое сохранялось с точностью до 10^{-6} . Реализованный численный

метод тестировался на различных задачах (например, на задачах для гармонического осциллятора).

Динамика квантового волнового пакета исследовалась при помощи анализа распределения плотности вероятности $N = \psi^* \psi$ во времени, а также средних значений динамических переменных: координаты $\langle \zeta \rangle$, скорости $\langle V \rangle$ и стандартных отклонений $\sigma_\zeta = \sqrt{\langle (\Delta \zeta)^2 \rangle}$, $\sigma_V = \sqrt{\langle (\Delta V)^2 \rangle}$ (под знаком радикала стоят среднеквадратичные отклонения координаты и скорости). Произведение $\sigma_\zeta \sigma_V$ определяет соотношение неопределённостей как функцию времени.

С помощью метода быстрого преобразования Фурье проведён анализ квадратов модулей $|\Phi_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)|^2$, зависящих от частоты Ω и отражающих функциональную зависимость $\langle \zeta \rangle$ от времени. В дальнейшем используется обозначение $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega) = |\Phi_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)|^2$.

2. Волново-пакетная динамика на частотах перехода

Для интерпретации динамических закономерностей необходимо знать спектр энергий стационарного уравнения Шрёдингера [11] с учётом того, что рассматриваемая система является пространственно-ограниченной. Расчёты энергетического спектра и частот переходов между соседними уровнями проведены для двух размеров ямы: $\zeta_L = 3$ и $\zeta_L = 7$. Соответствующие кривые, выражающие зависимость от номера состояния, даны на рис. 1. Для большего размера потенциальной ямы кривая не имеет излома и хорошо аппроксимируется функцией $1.84x^{1/3}$. В этом случае динамические свойства обусловлены только потенциалом четвёртой степени (для рассматриваемого на рис. 1 интервала номеров состояний). Для меньшего размера потенциальной ямы кривая зависимости $\Delta \epsilon_n$ от n имеет излом и состоит из двух участков. До излома кривые для двух ям совпадают, а затем постепенно расходятся.

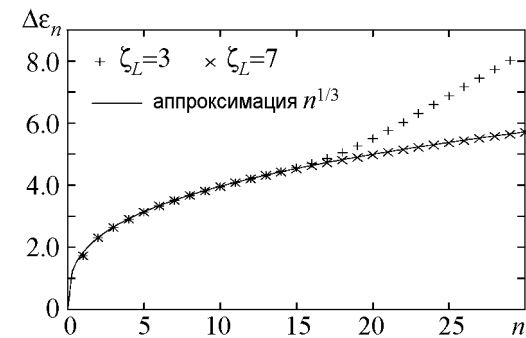


Рис. 1. Разности энергетических уровней $\Delta \epsilon_n$ как функция номера состояния n

Для ямы меньшего размера зависимость $\Delta \epsilon_n$ от n , начиная с некоторых значений n , становится прямой и соответствует уровням ямы без потенциала четвёртой степени (то есть уровням «пустой ямы»). Если размер ямы взять ещё меньше, то расхождение начинается ещё раньше (от меньшего значения номера состояния n). Спектр энергий для $\zeta_L = 3$ и разности энергий между соседними состояниями даны в табл. 1.

Таблица 1

Спектр энергий, разности между уровнями (частоты переходов)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
ϵ_n	0.668	2.394	4.697	7.336	10.244	13.379	16.712	20.221
$\Delta \epsilon_n$	1.726	2.303	2.639	2.907	3.135	3.333	3.509	3.669

В рассматриваемой безразмерной задаче разности энергий $\Delta\varepsilon_n$ между соседними уровнями равны частотам переходов, то есть $\Delta\varepsilon_n = \Omega_n$. Частоты переходов Ω_n , представленные здесь, обнаруживаются в динамических режимах, которые обсуждаются ниже. Число возбуждаемых частот Ω_n в динамических задачах зависит от амплитуды начального условия и внешнего гармонического воздействия. Отметим, что с ростом номера состояния n возрастают величина $\Delta\varepsilon_n$ и частота перехода Ω_n , но разница $\Omega_{n+1} - \Omega_n$ уменьшается. В соответствии с графиком (см. рис. 1) излом кривой происходит при некотором критическом $n > 16$. Для $n > 20$ характер зависимости близок к линейному.

Волновая функция основного состояния может быть найдена аналитически на основе вариационного метода Ритца или другим удобным способом [4–6]. В данной работе она рассчитывалась численно.

Свободные колебания, возникающие при воздействии одиночного импульса на основное состояние осциллятора с одночленным потенциалом четвёртой степени, исследовались нами при разных амплитудах импульса F_0 , но с одной и той же длительностью импульса $\Delta\tau = 0.5$. Длительность временной развёртки T варьировалась от 1000 до 5000. Рассматривались режимы колебаний как при отсутствии трения ($k = 0$), так и с его учётом ($k > 0$). Наиболее простыми по свойствам и картинам распределения являются режимы при малых F_0 , например, при $F_0 = -1$. В этом случае распределение плотности вероятности N на плоскости (ζ, τ) имеет форму «ёлки», ветви которой не уменьшаются по длине, а лишь варьируются периодически (рис. 2, а; тёмный цвет соответствует большим значениям плотности вероятности N). Временная реализация $\langle\zeta\rangle$ приведена на рис. 2, б, её частотный отклик представлен на рис. 2, в. Для данного значения F_0 эффективно возбуждаются две спектральные фурье-компоненты на частотах $\Omega_1 = 1.7257$ и $\Omega_2 = 2.3032$. Это соот-

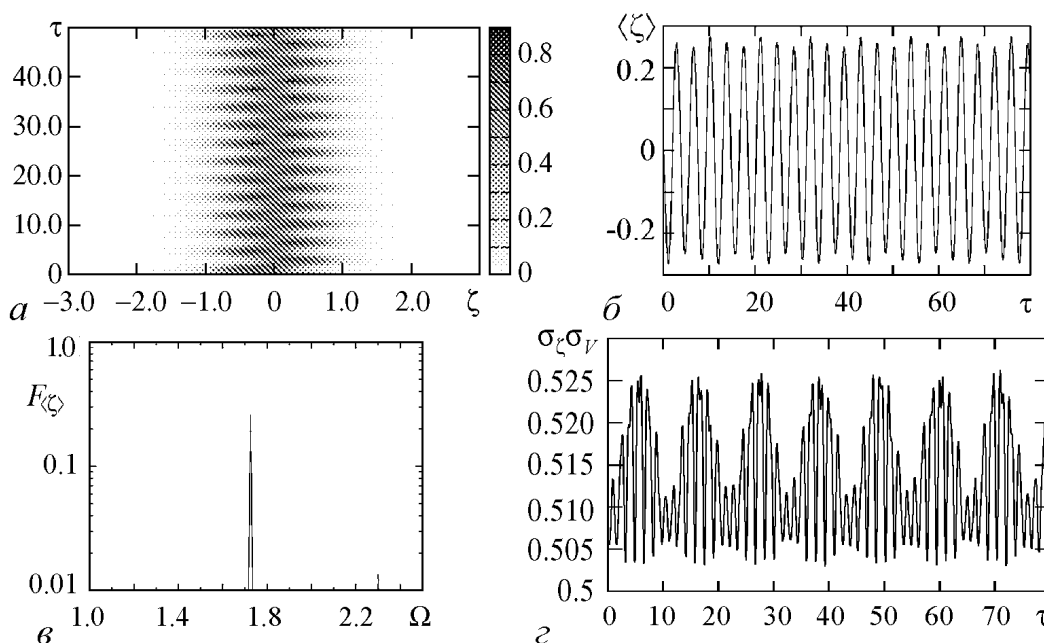


Рис. 2. Распределение плотности вероятности N (а), временная реализация средней координаты (б), частотный отклик $F_{\langle\zeta\rangle}(\Omega)$ (в) и произведение неопределённостей (г) при $F_0 = -1$

ветствует возбуждению энергетических уровней ε_2 и ε_3 . Разница $\Omega_2 - \Omega_1$ определяет неглубокую амплитудную модуляцию, достаточно хорошо заметную на временной реализации $\langle \zeta \rangle$. Наиболее интенсивной является спектральная компонента на частоте Ω_1 с $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1) \approx 0.3$, компонента на частоте Ω_2 меньше основной компоненты более чем на порядок: $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_2) \approx 0.06 F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1)$. Для рассматриваемых свободных колебаний при $F_0 = -1$ график зависимости произведения стандартных отклонений от времени дан на рис. 2, з. Отметим, что картина колебаний представляет собой биеения. Минимальные значения произведения неопределённостей немного выше 0.5. Максимальное значение превосходит минимальное всего на 0.025.

Колебательные процессы усложняются с увеличением F_0 . Причина этого – появление новых спектральных частотных компонент. Исследуемый осциллятор становится многочастотным. Временная реализация для средней координаты $\langle \zeta \rangle$ и соответствующий ей частотный отклик $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ при амплитуде одиночного импульса $F_0 = -5$ представлены на рис. 3. Компонента на частоте Ω_1 практически не изменяется, $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1) \approx 0.3$, однако спектральная компонента на частоте Ω_2 резко возрастает до значения $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_2) \approx 0.5$. Кроме того, появляются дополнительные спектральные компоненты на частотах $\Omega_3 = 2.6389$ и $\Omega_4 = 2.9086$ с амплитудами $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_3) \approx 0.3$ и $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_4) \approx 0.07$. По сравнению с предыдущим вариантом (для $F_0 = -1$), здесь временная реализация становится более сложной (что обусловлено прежде всего перечисленными спектральными компонентами). Кроме частот, заключённых на промежутке [1.6; 3], появляются спектральные компоненты с высокими частотами, однако их интенсивность очень слабая.

С последующим увеличением F_0 возбуждаются состояния с более высокими номерами и энергиями, следовательно, появляются новые спектральные компоненты. Для сравнения с предыдущими режимами мы рассмотрим результаты вычислений для $F_0 = -10$. Временная реализация и частотный спектр для этого случая представлены на рис. 4. Последующее усложнение временной реализации $\langle \zeta \rangle$ обусловлено появлением новых спектральных компонент и перераспределением энергии по спектру. Здесь число спектральных компонент на промежутке $1.6 < \Omega < 3.9$ возрастает до десяти, две из них имеют значения $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ ниже 0.01, а остальные – выше 0.01. Спектральная компонента с максимальным значением $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega) \approx 0.13$ реализуется на частоте $\Omega_5 = 3.1350$. Компоненты на более высоких частотах ($\Omega > \Omega_5$) ослабевают, то есть значения $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ уменьшаются. Отметим, что все спектральные компоненты имеют частоты Ω , совпадающие с частотами переходов Ω_n между соседними состояниями (см. табл. 1). Спектральная компонента с максимальным значением $F_{\langle \zeta \rangle}$ смещается в сторону более высоких частот при увеличении амплитуды

одиночного импульса F_0 . Зависимость $F_{\langle \zeta \rangle}$ от амплитуды импульса F_0 для первых двух частот Ω_1 и Ω_2 представлена в табл. 2.

Здесь также уместно отметить определённое соответствие классическим результатам для нелинейного осциллятора с одночленным потенциалом четвертой степени. В классическом случае частота осциллятора пропорцио-

Таблица 2

Значения $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_n)$
для $n = 1, 2$ при разных F_0

F_0	$F_{\langle \zeta \rangle}(1.7257)$	$F_{\langle \zeta \rangle}(2.303)$
-1	0.4	0.015
-5	0.28	0.415
-10	0.0025	0.019

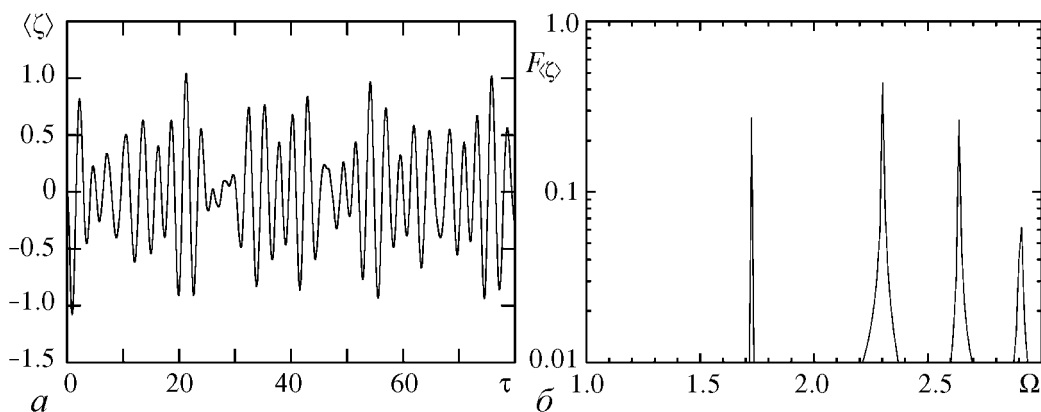


Рис. 3. Временная реализация для средней координаты (а) и частотный отклик $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ (б) при $F_0 = -5$

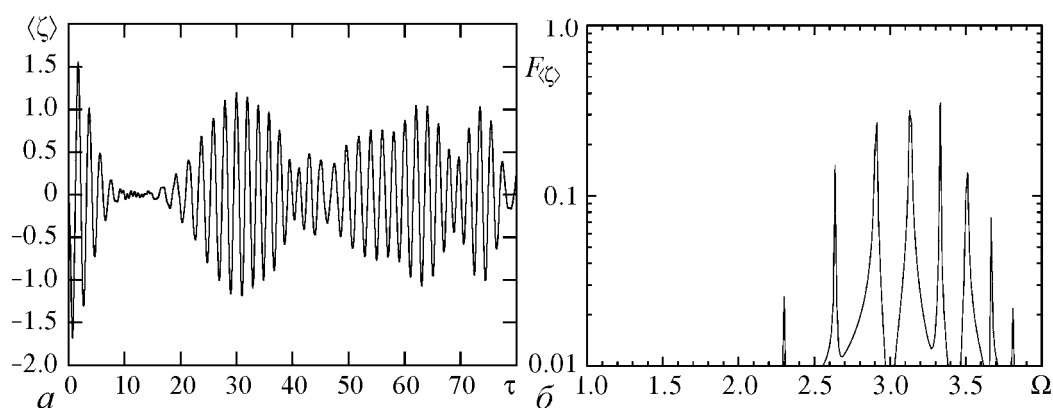


Рис. 4. Временная реализация для средней координаты (а) и частотный отклик $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ (б) при $F_0 = -10$

нальна корню четвёртой степени от энергии системы [1,3]. В рассматриваемом нами квантовом случае после окончания воздействия одиночного импульса на систему волновой пакет приобретает дополнительную энергию, и с её ростом (при увеличении F_0) возрастает частота наиболее интенсивной спектральной линии. Кроме того, в системе возбуждаются новые спектральные компоненты и осциллятор становится многочастотным. При воздействии $F_0 = -10$ также возникают две спектральные компоненты для $\Omega > 7.8$, обусловленные переходами между состояниями «пустой» ямы, где воздействие потенциала $U = \zeta^4$ уже практически не проявляется.

3. Свободные и вынужденные колебания ангармонического осциллятора с трением

Квантовые осцилляторы с квадратичным потенциалом и более сложные (с двухъямным потенциалом) исследовались в ряде работ [11–13] в контексте уравнения Шрёдингера–Ланжевена–Костина. Основываясь на результатах, связанных с переходом системы из возбуждённого состояния в основное [11], авторы статьи [13] предложили использовать диссипативную систему в качестве кубита. Независимо от возможных приложений, представляет интерес рассмотрение колебаний изучаемого

нами квантового осциллятора как при малом значении коэффициента трения, так и при доминирующем влиянии трения.

Рассмотрим сначала случай затухания колебаний квантового осциллятора без внешнего периодического воздействия. Когда коэффициент трения $k = 0.1$, а амплитуда возбуждающего сигнала $F_0 = -1$, мы имеем медленный процесс затухания колебаний средней координаты $\langle \zeta \rangle$ (рис. 5, *a*). Для классического осциллятора с квадратичным потенциалом в случае доминирующего влияния трения на систему возможно аperiодическое затухание колебаний, в результате чего осциллятор возвращается в равновесное состояние. Здесь возможны два типа временной эволюции: для одного из них обобщённая координата уменьшается, проходит через равновесное значение, меняет знак и асимптотически стремится к равновесию; для другого – координата уменьшается и асимптотически стремится к равновесию без изменения знака. Для рассматриваемой нами квантовой системы при заданном значении $F_0 = -1$ и варьируемом значении коэффициента трения k от 1.7 до 6.9 имеется определённая аналогия с временной эволюцией классического линейного осциллятора с квадратичным потенциалом и трением. На рис. 5, *b–г* даны картины эволюции для $k = 1.7, 3.4, 6.9$ (это примерно $\Omega_1, 2\Omega_1$ и $4\Omega_1$). Во всех случаях первый минимум на графике соответствует моменту выключения начального возбуждающего импульса, с ростом коэффициента трения его величина уменьшается. На рис. 5, *б* отчётливо наблюдаются ещё два экстремума (локальный максимум и минимум), но при $k = 3.4$ (рис. 5, *в*) все экстремумы, кроме первого, практически исчезают. Данное значение k примерно соответствует $2\Omega_1$, а как следует из теории для классического линейного осциллятора с трением, именно это значение является критическим (осциллятор пе-

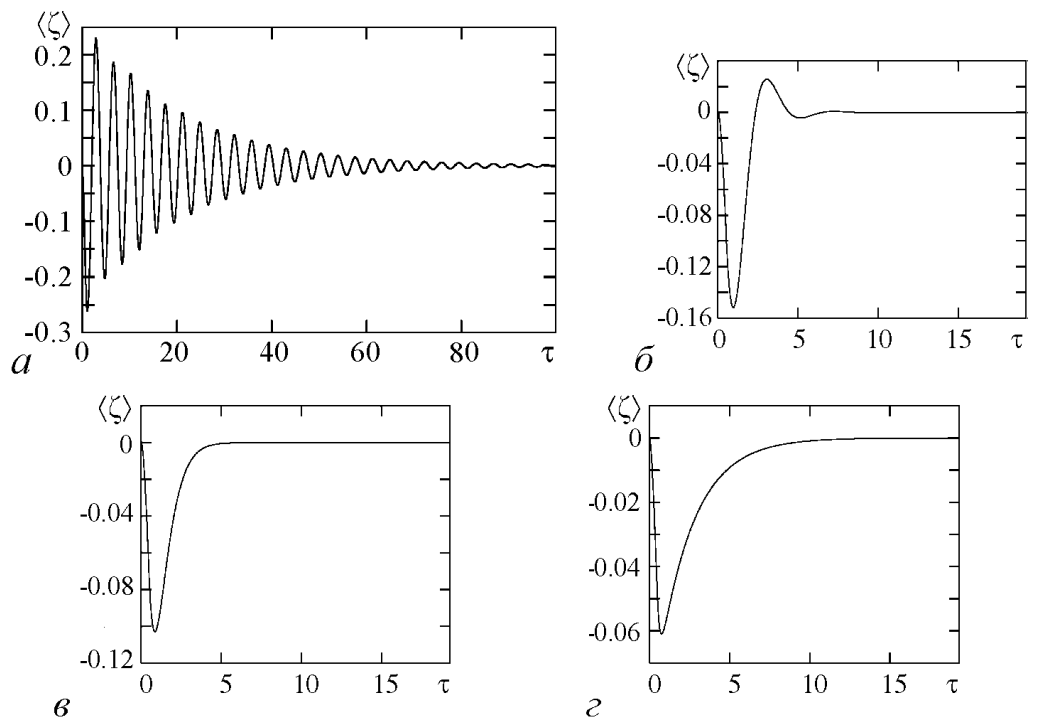


Рис. 5. Эволюция при $F_0 = -1$ и разных k : 0.1 (*a*), 1.7 (*б*), 3.4 (*в*), 6.9 (*з*)

рестаёт совершать колебания, затухание происходит по экспоненциальному закону). Также, в соответствии с классической механикой, при дальнейшем увеличении k (например, до $k = 6.9$, как на рис. 5, z) скорость затухания уменьшается. В целом, несмотря на некоторые различия, имеется определённое сходство со свойствами переходного процесса для классического осциллятора с квадратичным потенциалом при доминирующем влиянии трения на колебания.

Вынужденные колебания квантового осциллятора с одночленным потенциалом четвёртой степени при наличии трения исследовались для разных амплитуд внешнего гармонического воздействия, но с одной и той же частотой $\Omega_{\text{ext}} = 1.7257$, равной частоте перехода Ω_1 между основным и первым возбуждённым состояниями; коэффициент трения во всех расчётах полагался $k = 0.1$. Начальное состояние системы соответствовало основному состоянию. Для случая слабого внешнего воздействия с амплитудой $U_0 = 0.1$ на рис. 6, $a, б$ представлены распределение плотности вероятности N на плоскости (ζ, τ) и средняя координата как функция времени. На рис. 6, a , как и ранее, более тёмным участкам рисунка соответствуют большие значения N . Временная реализация для средней координаты $\langle \zeta \rangle$ (см. рис. 6, $б$) характеризуется переходным участком до момента времени $\tau \approx 70$, а затем режим колебаний становится практически установившимся. На переходном участке происходит монотонный рост амплитуды колебаний, а в установившемся режиме наблюдается незначительная амплитудная модуляция. Произведение стандартных

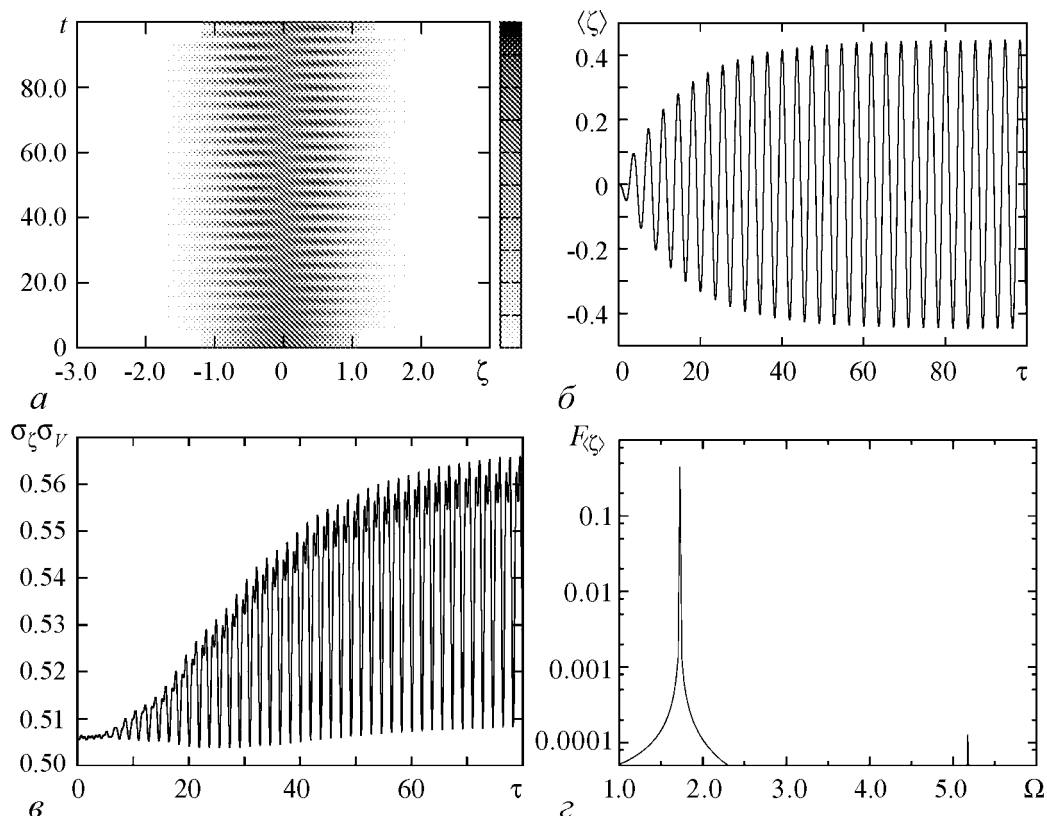


Рис. 6. Распределение плотности вероятности N (a), средняя координата $\langle \zeta \rangle$ как функция времени ($б$), произведение стандартных отклонений ($в$) и частотный спектр (z) при $U_0 = 0.1$

отклонений в виде функции времени дано на рис. 6, в. Оно осциллирует с малым отклонением от минимального значения 0.5. На рис. 6, г видно, что при слабом внешнем воздействии эффективно возбуждается одна спектральная компонента на частоте Ω_{ext} , другая спектральная компонента на частоте $3\Omega_{\text{ext}}$ возбуждается очень слабо. При увеличении U_0 картина процессов изменяется. Для $U_0 = 1$ средняя координата $\langle \zeta \rangle$ и произведение стандартных отклонений на промежутке $\tau \in [400; 500]$ представлены на рис. 7 (колебания являются установившимися). По сравнению с предыдущим вариантом величина $F_{\langle \zeta \rangle}(3\Omega_{\text{ext}})$ возрастает более чем на три порядка, и немного увеличивается спектральная компонента на частоте Ω_{ext} . Сравнивая отношение $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_{\text{ext}})/F_{\langle \zeta \rangle}(3\Omega_{\text{ext}})$ для $U_0 = 0.1$ и $U_0 = 1$, получаем в первом случае величину порядка 10^4 , а во втором – 10^2 . Это означает, что при увеличении амплитуды внешнего воздействия на порядок амплитуда колебаний на кратной высшей гармонике возрастает также примерно на порядок.

Если $U_0 = 5$, то амплитуда колебаний заметно возрастает по сравнению с вариантом для $U_0 = 1$ (рис. 8, а), также возрастает амплитуда колебаний стандартных отклонений (рис. 8, б). Кроме того, происходит последующее перераспределение энергии колебаний по спектру и, наряду со спектральными компонентами на частотах Ω_{ext} , $3\Omega_{\text{ext}}$, возникает компонента на частоте $5\Omega_{\text{ext}}$ (рис. 8, в).

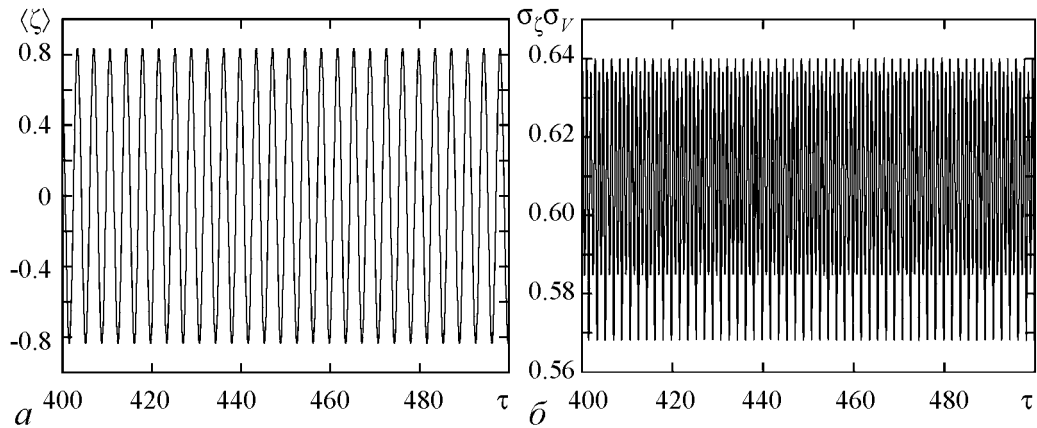


Рис. 7. Средняя координата (а) и произведение стандартных отклонений (б) при $U_0 = 1$

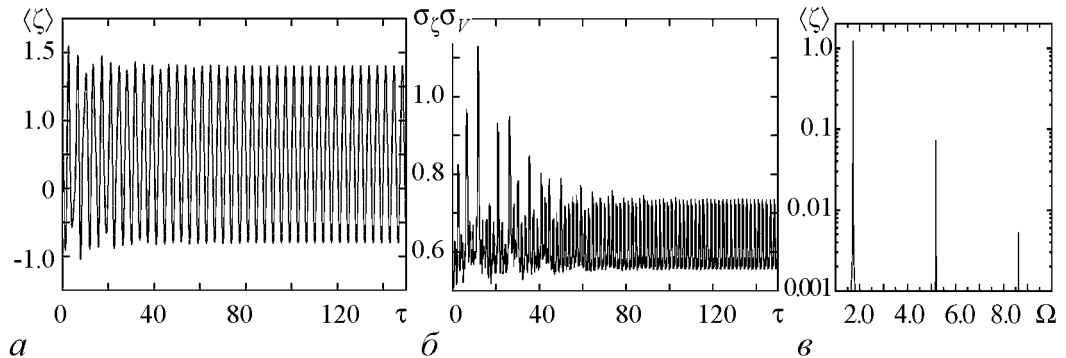


Рис. 8. Средняя координата (а), произведение стандартных отклонений (б) и фурье-спектр средней координаты (в) при $U_0 = 5$

Характерной особенностью рассматриваемых режимов колебаний является малое число спектральных компонент: кроме основной частоты Ω_{ext} и её высших нечётных гармоник с $3\Omega_{\text{ext}}$, $5\Omega_{\text{ext}}$, другие спектральные компоненты отсутствуют. Данная особенность обусловлена наличием трения в системе, которое даже при таком малом значении коэффициента трения играет роль селектора. Другой особенностью рассмотренных режимов является слабая зависимость амплитуды колебаний на основной частоте Ω_{ext} от амплитуды внешнего воздействия U_0 и, наоборот, сильная зависимость величины $F_{\langle \zeta \rangle}$ для высших нечётных гармоник.

Заключение

Квантовый ангармонический осциллятор с одночленным потенциалом четвёртой степени, ограниченный стенками непроницаемой ямы, исследован с разных позиций. На основе стационарного уравнения Шрёдингера изучен его энергетический спектр и рассчитаны разности энергий между соседними квантовыми уровнями. Установлена нелинейная степенная зависимость разности энергий от номера состояния, аналогичная зависимости частоты от энергии для классического ангармонического осциллятора с одночленным потенциалом; при определённых размерах квантовой системы эта зависимость имеет излом. До излома характер спектра обусловлен потенциалом четвёртой степени, после влияния потенциала резко ослабевает, и уровни энергий практически соответствуют спектру «пустой» ямы. Разности энергий между соседними уровнями определяют частоты колебаний осциллятора в динамическом режиме при заданных начальных условиях в случае решения нестационарного уравнения Шрёдингера.

Для исследуемой системы без трения изучены временные реализации средней координаты волнового пакета, произведения стандартных отклонений и частотные спектры. Показано, что возбуждаемые колебания являются многочастотными, при этом число генерируемых частот увеличивается с ростом амплитуды одиночного возбуждающего импульса (или, другими словами, с ростом энергии волнового пакета); частоты совпадают с частотами переходов между соседними уровнями, и с увеличением амплитуды возбуждающего импульса происходит перераспределение энергии по частотному спектру с возникновением новой наибольшей по интенсивности спектральной компоненты.

В рамках уравнения Шрёдингера–Ланжевена–Костина исследованы колебания ангармонического осциллятора с диссипативной силой, пропорциональной скорости движения с обратным знаком. Проведено численное интегрирование уравнения ШЛК при разных коэффициентах трения, изучены процессы затухания колебаний в режиме слабой диссипации и, наоборот, когда трение играет доминирующую роль в системе. Показана качественная аналогия с процессами затухания колебаний классического осциллятора с квадратичным потенциалом. При разных амплитудах внешнего периодического воздействия и одной и той же его частоте, равной частоте перехода между основным и первым возбуждённым состояниями, проанализированы вынужденные колебания при неизменном коэффициенте трения. Установлено, что с увеличением амплитуды внешнего воздействия происходит рост числа выс-

ших нечётных гармоник, соответствующие им амплитуды спектральных компонент также увеличиваются. При этом в спектре отсутствуют другие частоты, что обусловлено влиянием трения, которое, можно сказать, играет роль «селектора» частот. Таким образом, рассмотренная динамическая модель квантового осциллятора может представлять собой базу для объяснения и понимания конкретных квантово-механических систем.

Библиографический список

1. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Пер. с англ. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 320 с.
2. *Paramikos G., Robnik M.* WKB approach applied to 1D time-dependent nonlinear Hamiltonian oscillators // *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical*. 2012. Vol.45, № 1. P. 0152069(1–16).
3. *Bartachelli M.V., Berretti A., Deane J.H.B., Gentile G., S.A. Gourley.* Selection rules for periodic orbits and scaling laws for a driven damped quartic oscillator // *Nonlinear analysis. Elsevier. Real world applications*. 2008. Vol. 9. P. 1966.
4. *Banerjee K., Bhatnagar S.P., Choudhry V., Kanwal S.S.* The anharmonic oscillator // *Proc. R. Soc. London*. 1978. A. 360. P. 575.
5. *Jafarpour M., Afchar D.* Calculation of energy eigenvalues for the quantum anharmonic oscillator with a polynomial potential // *J. Phys. A: Math. Gen.* V. 35. 2002. P. 87.
6. *Jafarpour M., Afchar D.* Energy levels for the pure λx^{2m} potentials // *Journal Sciences, Islamic Republic of Iran*. 2007. Vol. 18, № 1. P. 75.
7. *Dittrich T., Grossmann F., Jung P., Oelschlägel B., Hänggi P.* Localization and tunneling in periodically driven bistable systems // *Physica A*. 1993. Vol. 194, № 1–4. P. 173–182.
8. *Roy A., Bhattacharjee J.K.* Chaos in the quantum double well oscillator: the Ehrenfest view revisited // *Phys. Lett. A*. Vol. 288, № 1. 2001. P. 1–3.
9. *Bagmanov A.T., Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* Dynamical tunneling in system with non-monotonous potential and impenetrable walls // *Proc. of SPIE. Bellingham, WA*. 2006. Vol. 6253. P. 625303(1-9).
10. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A., Bagmanov A.T.* Motion, tunneling and quantum revivals of wave packets into systems with distributed potential and boundary walls // *Proc. of SPIE*. 2007. Vol. 6597. P. 659705.
11. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* Oscillatory motion in confined potential systems with dissipation in the context of the Schrodinger–Langevin–Kostin equation // *Phys. Lett. A*. 2007. Vol. 372, № 1. P. 21.
12. *Санин А.Л., Смирновский А.А.* Физика. Квантовая динамика. Санкт-Петербург: Изд. Политехн. универ., 2012. 280 с.
13. *de Falco D., Tamascelli D.* Quantum annealing and the Schrodinger–Langevin–Kostin equation // *J. Phys. Rev. A*. 2009. Vol. 79. P. 012315.

Поступила в редакцию 26.03.2014
После доработки 24.04.2014

QUANTUM ANHARMONIC OSCILLATOR WITH ONE-TERM POTENTIAL, FRICTION AND EXTERNAL FORCE

A.L. Sanin¹, A.A. Smirnovsky²

¹St.Petersburg State Polytechnical University

²Ioffe Physical-Technical Institute of the Russian Academy of Sciences

In the context of the Schrodinger–Langevin–Kostin equation, the quantum anharmonic oscillator with one-term 4-degree potential has been numerically investigated. The generated frequencies of the oscillator are defined by the non-equidistant energy spectra, the number of discrete frequencies depends on the initial state energy. Due to increasing of initial state energy, spectra are displaced in the direction of higher frequencies. Influence of friction on transition from excited state into ground one is also investigated. Role of friction on the generation of discrete spectral lines is also discussed.

Keyword: Quantum quartic oscillator, Schroedinger–Langevin–Kostin equation, free and driving oscillations, friction.

Санин Андрей Леонардович – родился в Ленинграде (1935). Окончил Ленинградский политехнический институт в 1963 (инженер-физик). В настоящее время работает на кафедре «Теретическая физика» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, доктор физико-математических наук, профессор кафедры. Область научных интересов: качественный анализ и численное моделирование электронных волн и структур; квантовая динамика гамильтоновых и диссипативных систем. Имеет более 200 публикаций в журналах и других изданиях, включая монографии («Структуры и хаос - проблемы физики», «Электронная синергетика», «Синергетика», «Физика. Квантовая динамика»).



195251 С.-Петербург, ул. Политехническая, 29
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
E-mail:andrelsanin@yandex.ru

Смирновский Александр Андреевич – родился в Ленинграде в 1982. Окончил магистратуру Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПбГПУ) в 2005 году по направлению «Прикладные математика и физика», кандидат физико-математических наук. В настоящее время работает научным сотрудником в Физико-техническом институте им. А.Ф. Иоффе РАН и доцентом в СПбГПУ. Область научных интересов: квантовая механика, гидроаэродинамика, численное моделирование. Опубликовал более 20 статей.



194021 С.-Петербург, ул. Политехническая, 26
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН
E-mail:smirta@mail.ru