



## САМООРГАНИЗАЦИЯ И БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ РЕЗАНИЕМ

*В.Л. Заковоротный<sup>1</sup>, Фам Динь Тунг<sup>2</sup>, В.С. Быкадор<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет

<sup>2</sup>Вьетнамский государственный технический университет им. Ле Куй Дона

Рассматриваются проблемы нелинейной динамики процессов обработки материалов резанием. На примере процесса точения предлагается математическая модель динамической системы, учитывающая динамическую связь, формируемую процессом резания. При этом принимаются во внимание следующие главные особенности динамической связи: зависимость сил резания от площади срезаемого слоя, запаздывания сил по отношению к упругим деформационным смещениям инструмента относительно обрабатываемой заготовки, ограничения, накладываемые на движения инструмента при сближении задней грани инструмента с обработанной частью заготовки, зависимость сил от скорости резания. Динамическая подсистема инструмента представлена линейной системой в плоскости, нормальной к поверхности резания. Главное внимание в статье уделено анализу формируемых в окрестности точки равновесия стационарных аттракторов (орбитально асимптотически устойчивых предельных циклов и двумерных инвариантных торов). Приводятся данные по бифуркационным преобразованиям стационарных аттракторов. Даются рекомендации по проектированию систем, имеющих требуемые стационарные аттракторы в пространстве состояния.

*Ключевые слова:* Динамическая система, аттракторы, бифуркации, процесс резания материалов.

### Введение

Проблемы динамики процесса резания являлись предметом исследований многих авторов, которые выполнены в течение последних 40–50 лет. При этом главное внимание уделялось двум вопросам: условиям и механизмам возбуждения автоколебаний [1–5]; анализу устойчивости процесса резания [6–10]. Под устойчивостью процесса резания во всех случаях понимается устойчивость заданной и неизменной во времени точки равновесия, рассматриваемой в подвижной системе координат, движение которой определяется траекториями исполнительных элементов. Динамика процесса резания рассматривается на основе изучения взаимодействия подсистем со стороны инструмента и обрабатываемой заготовки через динамическую связь, формируемую процессом резания. Основные свойства динамической системы можно раскрыть, используя базовую динамическую модель упругих деформационных

смещений инструмента в плоскости, нормальной к поверхности резания [11–13]. Динамическая связь представляет модель сил резания в координатах состояния системы [14–19]. При этом учитываются: нелинейная зависимость сил резания от технологических режимов [16–18], периодические изменения параметров динамической системы [18–20, 22], закономерности формирования новых поверхностей [23, 24]. При рассмотрении устойчивости системы с периодически изменяющимися параметрами, а также при моделировании формирования новых поверхностей резания используется теория Флоке [25]. В статье развиваются указанные выше представления о динамической системе резания и уделяется главное внимание вопросам динамической самоорганизации системы, а также ее бифуркациям в параметрическом пространстве.

### Базовая математическая модель

Уравнение динамики процесса (рис. 1) можно представить в виде [14]

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + h \frac{dX}{dt} + cX = F \left( X, \frac{dX}{dt}, S_{\text{п}}, V \right), \quad (1)$$

где  $m = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$ ,  $h = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} \end{bmatrix}$ ,  $c = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} \end{bmatrix}$  – соответственно матрицы инерционных, диссипативных и упругих коэффициентов подсистемы инструмента;  $X = \{X_1, X_2\}^T$  – вектор упругих деформационных смещений инструмента в плоскости, нормальной к поверхности резания;  $F(X, dX/dt, S_{\text{п}}, V) = \{F_1(X, dX/dt, S_{\text{п}}, V), F_2(X, dX/dt, S_{\text{п}}, V)\}^T$  – вектор сил резания, представленный в координатах состояния системы и зависящий от технологических режимов ( $S_{\text{п}}$  – величины продольной подачи и  $V$  – скорости резания). Это динамическая связь, формируемая процессом резания. Упругие деформационные смещения рассматриваются в подвижной системе координат, двигающейся вдоль заготовки со скоростью движения суппорта  $V_c$ . Угловая скорость вращения заготовки и скорость резания  $V$  считаются постоянными.

Сила резания формируется в виде суммы двух составляющих, действующих на переднюю грань инструмента  $F^{(1)}$  и на его заднюю грань  $F^{(2)}$ , то есть  $F = F^{(1)} + F^{(2)}$  (рис. 1, а). Причем силы  $F^{(1)}$  и  $F^{(2)}$  являются сепарабельными. Технологические режимы, глубина резания  $t_p$  и величина подачи  $S_{\text{п}}$ , в установившемся состоянии при заданной геометрии инструмента однозначно определяют ширину срезаемого слоя  $b$  и его толщину  $a$ , так как  $a = S_{\text{п}} \sin \varphi$ ,  $b = t_p / \sin \varphi$  ( $\varphi$  – главный угол инструмента в плане (рис. 1, б)). Деформационные смещения в направлении, нормальном к плоскости ( $X_1 - X_2$ ) не принимаются во внимание, так как выполняется соотношение  $S_{\text{п}} \ll t_p$ . Рассмотрим случай, когда жесткость подсистемы заготовки считается на порядок большей, чем инструмента, и поэтому ее деформационными смещениями можно пренебречь. Заметим, что учет упругих деформационных смещений заготовки не представляет сложности. Параметры  $m$ ,  $h$  и  $c$  можно определить по правилам, изложенным, например, в [11].

Главная проблема при моделировании динамической системы состоит в представлении сил  $F(X, dX/dt, S_{\text{п}}, V)$  в координатах состояния при заданных технологических режимах. Будем следовать известным представлениям о динамической

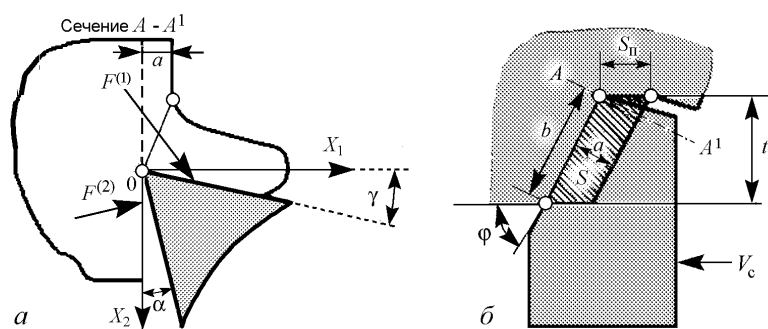


Рис. 1. Ориентация осей деформационных смещений (а) и геометрические соотношения (б), определяющие формирование площади  $S$  срезаемого слоя

связи, формируемой процессом резания. Эти представления, отдельные элементы которых изложены в выше цитированных работах, базируются на следующих особенностях формирования сил резания: они возрастают при увеличении площади срезаемого слоя  $S$ ; существуют запаздывания сил по отношению к вариациям упругих деформационных смещений [3, 6–9]; они изменяются при варьировании скорости резания [4]; при сближении задней грани инструмента и обработанной части заготовки имеет место непропорционально быстрое нарастание сил, действующих на заднюю грань инструмента [6, 10]; существует запаздывание тангенциальных составляющих сил по отношению к их нормальным составляющим.

При моделировании сил используется гипотеза о неизменности их ориентации в установившемся состоянии. Она определяется для силы  $F^{(1)}$  угловыми коэффициентами  $\chi_1$  и  $\chi_2$ . Для силы  $F^{(2)}$  – угловыми коэффициентами  $\chi_1^{(1)}$  и  $\chi_2^{(1)}$ . Они в основном зависят от переднего угла  $\gamma$  инструмента (угловые коэффициенты  $\chi_1$  и  $\chi_2$ ) и от заднего угла  $\alpha$  (угловые коэффициенты  $\chi_1^{(1)}$  и  $\chi_2^{(1)}$ ). Кроме этого при резании наблюдается приращение сил, обусловленное изменением скорости резания, которая через температурно-скоростной фактор изменяет силы, проекции которых определяются угловыми коэффициентами  $\chi_1^{(2)}$  и  $\chi_2^{(2)}$ . Этим свойствам соответствуют следующие представления сил в координатах состояния и технологических режимах:

$$\left\{ \begin{aligned}
 F_1(X_1, X_2, V, S_{\text{п}}, t_{\text{р}}) &= \chi_1 \rho b [a - y_1] - \chi_1^{(2)} \alpha_1 \left\{ \left[ V - \frac{dX_2}{dt} \right] - \alpha_2 \left[ V - \frac{dX_2}{dt} \right]^3 \right\} + \\
 &\quad + \chi_1^{(1)} F^{(0)} \exp \left[ -\frac{dX_1/dt}{T_3} \right], \\
 F_2(X_1, X_2, V, S_{\text{п}}, t_{\text{р}}) &= \chi_2 \rho b [a - y_2] - \chi_2^{(2)} \alpha_1 \left\{ \left[ V - \frac{dX_2}{dt} \right] - \alpha_2 \left[ V - \frac{dX_2}{dt} \right]^3 \right\} + \\
 &\quad + \chi_2^{(1)} F^{(0)} \exp \left[ -\frac{dX_1/dt}{T_3} \right], \\
 T_1 \frac{dy_1}{dt} + y_1 &= X_1, \\
 T_2 \frac{dy_2}{dt} + y_2 &= X_1,
 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

где  $a, b$  – соответственно толщина и ширина срезаемого слоя, мм, определяются глубиной резания  $t_{\text{р}}$  и величиной подачи  $S_{\text{п}}$  (см. рис. 1, б);  $T_1, T_2$  – постоянные вре-

мени, с, моделирующие запаздывание сил по отношению к деформационным смещениям;  $\rho$  – давление, кг/мм<sup>2</sup>, стружки на переднюю грань инструмента;  $F^{(0)}$  – сила резания, кг, действующая на заднюю грань инструмента в состоянии равновесия;  $T_3$  – параметр, мм/с, определяющий крутизну нарастания силы, действующей на заднюю грань инструмента (зависит от заднего угла инструмента  $\alpha$ );  $V$  – скорость резания, м/мин;  $\alpha_1$ , кг·с/мм и  $\alpha_2$ , (с/мм)<sup>2</sup> – параметры кинетической характеристики процесса резания, определяющие тангенциальную составляющую силы, действующей на заднюю грань инструмента. Здесь зависимость главной составляющей силы резания от скорости учитывает два противоречивых фактора. Первый фактор определяет влияние скорости резания на предел прочности материала через температуру, производство которой зависит от мощности резания, возрастающей при увеличении скорости. Поэтому при увеличении скорости резания силы уменьшаются. Второй фактор связан через процесс резания с образованием квазивязких диссипативных структур в области контакта инструмента и заготовки. Поэтому, начиная с некоторой скорости, возрастает вязкое (зависящее от скорости) сопротивление и суммарные силы увеличиваются.

Кроме этого в системе (1) принято во внимание, что главные составляющие сил, определяемые площадью срезаемого слоя, запаздывают относительно деформационных смещений. Также по мере увеличения частоты периодических движений инструмента относительно заготовки имеет место уменьшение коэффициента преобразования вариаций упругих деформационных смещений с изменениями сил. Эти свойства учитываются введением промежуточных координат  $y_1$ , мм и  $y_2$ , мм в последних двух уравнениях системы (1). Если  $dy_1/dt = dy_2/dt = 0$ , то  $y_1 = y_2 = X_1$ . В системе (1) справедливо  $T_2 > T_1$ . Тем самым учитывается, что всегда запаздывание сил  $F_2$  больше, чем силы  $F_1$ .

Таким образом, исследованию подлежит следующая система, которая учитывает все отмеченные выше свойства формирования сил резания:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 X_1}{dt^2} + h_{1,1} \frac{dX_1}{dt} + h_{2,1} \frac{dX_2}{dt} + c_{1,1} X_1 + c_{2,1} X_2 = \\ = \chi_1 \rho b [a - y_1] + \chi_1^{(1)} F^{(0)} \exp \left[ -\frac{dX_1/dt}{T_3} \right] - \chi_1^{(2)} \alpha_1 \left\{ \left[ V - \frac{dX_2}{dt} \right] - \alpha_2 \left[ V - \frac{dX_2}{dt} \right]^3 \right\}, \\ m \frac{d^2 X_2}{dt^2} + h_{1,2} \frac{dX_1}{dt} + h_{2,2} \frac{dX_2}{dt} + c_{1,2} X_1 + c_{2,2} X_2 = \\ = \chi_2 \rho b [a - y_2] + \chi_2^{(1)} F^{(0)} \exp \left[ -\frac{dX_1/dt}{T_3} \right] - \chi_2^{(2)} \alpha_1 \left\{ \left[ V - \frac{dX_2}{dt} \right] - \alpha_2 \left[ V - \frac{dX_2}{dt} \right]^3 \right\}, \\ T_1 \frac{dy_1}{dt} + y_1 = X_1, \\ T_2 \frac{dy_2}{dt} + y_2 = X_1. \end{array} \right. \quad (3)$$

Главная проблема, рассматриваемая в настоящей статье, связана с анализом аттракторов, которые формируются в окрестности равновесия системы (2). Поэтому вначале рассмотрим свойства равновесия и, прежде всего, условия потери его устойчивости.

### Свойства равновесия системы

В общем случае траектории движения исполнительных элементов станка с учетом геометрии заготовки при продольном точении определяются скоростью подачи  $V_{\text{п}}(t)$  по перемещению (фазовой траекторией движения суппорта), скоростью резания  $V^{(0)}(t)$  и функцией изменения глубины резания  $t_{\text{р}}^{(0)}(t)$  без учета упругих деформационных смещений. Реальная траектория движения вершины инструмента отличается на величину упругих деформационных смещений. Эти траектории задают технологические режимы (подачу  $S_{\text{п}}(t)$ , глубину  $t_{\text{р}}(t)$  и скорость резания  $V(t)$ ), то есть

$$\begin{cases} S_{\text{п}}(t) = \int_{t-T}^t \{V_{\text{п}}(t) - v(t)\} dt, \\ t_{\text{р}}(t) = t_{\text{р}}^{(0)}(t) - X_1 \cos \varphi, \\ V(t) = V^{(0)}(t) - \frac{dX_2}{dt}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $T$  – время одного оборота заготовки;  $v(t)$  – скорость упругих деформационных смещений инструмента в направлении оси вращения заготовки. Таким образом, в общем случае параметры системы (2) являются функциями времени и для анализа устойчивости траекторий необходимо рассматривать линеаризованное уравнение в вариациях, которое имеет изменяющиеся во времени параметры. В рамках настоящего исследования ограничимся случаем, когда  $t_{\text{р}}^{(0)} = \text{const}$ ,  $V_{\text{п}} = \text{const}$ ,  $V^{(0)} = \text{const}$ . Тогда в подвижной системе координат стационарная траектория есть точка равновесия  $(X_1^*, X_2^*)$ , определяемая из условия  $d^2 X_i / dt^2 = dX_i / dt = 0$  ( $i = 1, 2$ ). Следовательно, из (2) получаем

$$\begin{cases} (c_{1,1} + \chi_1 \rho b) X_1^* + c_{2,1} X_2^* = \chi_1 \rho b a + \chi_1^{(1)} F^{(0)} - \chi_1^{(2)} \alpha_1 [V - \alpha_2 V^3], \\ (c_{1,2} + \chi_2 \rho b) X_1^* + c_{2,2} X_2^* = \chi_2 \rho b a + \chi_2^{(1)} F^{(0)} - \chi_2^{(2)} \alpha_1 [V - \alpha_2 V^3]. \end{cases} \quad (5)$$

Система (3) является линейной, и она задает единственную точку равновесия, то есть при изменении параметров и внешних воздействий ветвления точек равновесия не наблюдается. Для определения ее устойчивости, как известно [26], необходимо определить линеаризованное в окрестности равновесия уравнение в вариациях относительно  $(X_1^*, X_2^*)$  после замены  $X_1(t) = X_1^* + x_1(t)$  и  $X_2(t) = X_2^* + x_2(t)$ . При этом учтем, что при анализе устойчивости точки равновесия  $x_1(t) \rightarrow 0$ ,  $x_2(t) \rightarrow 0$ ,  $dx_1/dt \rightarrow 0$ ,  $dx_2/dt \rightarrow 0$ . Тогда при отбрасывании членов второго порядка малости получаем

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h_{\Sigma} \frac{dx}{dt} + c_{\Sigma} x = 0, \quad (6)$$

где  $h_{\Sigma} = \begin{bmatrix} h_{1,1} - \chi_1 \rho b T_1 + \chi_1^{(1)} F^{(0)} / T_3 & h_{2,1} - \chi_1^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2) \\ h_{1,2} - \chi_2 \rho b T_2 + \chi_2^{(1)} F^{(0)} / T_3 & h_{2,2} - \chi_2^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2) \end{bmatrix}$ ,  $c_{\Sigma} = \begin{bmatrix} c_{1,1} + \chi_1 \rho b & c_{2,1} \\ c_{1,2} + \chi_2 \rho b & c_{2,2} \end{bmatrix}$ ,  $x = \{x_1, x_2\}^T$  – вектор вариаций упругих деформационных смещений.

Из (5) получаем характеристический полином линеаризованной в окрестности равновесия системы

$$\Delta(p) = \begin{bmatrix} mp^2 + (h_{1,1} - \chi_1 \rho b T_1 + \chi_1^{(1)} F^{(0)} / T_3)p + (c_{1,1} + \chi_1 \rho b) & \Leftrightarrow \\ (h_{1,2} - \chi_2 \rho b T_2 + \chi_2^{(1)} F^{(0)} / T_3)p + (c_{1,2} + \chi_2 \rho b) & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (h_{2,1} - \chi_1^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2))p + c_{2,1} \\ \Leftrightarrow mp^2 + (h_{2,2} - \chi_2^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2))p + c_{2,2} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Видно, что условия потери устойчивости определяются как свойствами динамической подсистемы инструмента, так и параметрами и моделями представления сил в координатах состояния. В частности, если конструктивно выполнить динамическую систему инструмента ортогональной и одновременно обеспечить выполнение условия  $h_{2,1} = \chi_1^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2)$ , то система будет устойчивой при соблюдении следующих требований:  $h_{1,1} > \chi_1 \rho b T_1 - \chi_1^{(1)} F^{(0)} / T_3$ ,  $h_{2,2} > \chi_2^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2)$ . Ранее показано [11], что недиагональные элементы матрицы  $c$  зависят от ориентации эллипса жесткости подсистемы инструмента в рассматриваемой плоскости. Этот случай, несмотря на некоторую его условность, подчеркивает, что главные факторы, вызывающие потерю устойчивости, связаны с формированием запаздывающих аргументов в преобразовании деформационных смещений в силы резания. Они указывают также на значение угла наклона скоростной зависимости сил по мере увеличения скорости резания в установившемся состоянии.

В общем же случае главный механизм потери устойчивости связан с образованием ускоряющих сил, которые формируются симметричной составляющей матрицы скоростных коэффициентов. Суммарная матрица  $h_\Sigma$  в (5) несимметрична. Следовательно, она представима в виде суммы симметричной  $h_\Sigma^{(0,C)}$  и кососимметричной  $h_\Sigma^{(0,K)}$  составляющих.

Из (5) необходимым условием устойчивости является

$$h_\Sigma^{(0,C)} = \begin{bmatrix} h_{1,1} - \chi_1 \rho b T_1 + \chi_1^{(1)} F^{(0)} / T_3 & \Leftrightarrow \\ h_{1,2} - 0,5(\chi_2 \rho b T_2 - \chi_2^{(1)} F^{(0)} / T_3 + \chi_1^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2)) & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow h_{1,2} - 0,5(\chi_2 \rho b T_2 - \chi_2^{(1)} F^{(0)} / T_3 + \chi_1^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2)) \\ \Leftrightarrow h_{2,2} - \chi_2^{(2)} (\alpha_1 - 3 \alpha_2 V^2) \end{bmatrix} > 0, \quad (8)$$

из которого вытекают все известные условия потери устойчивости. Увеличение запаздывающего аргумента  $T_1$  и коэффициента  $\alpha_1$ , определяющего «падающую» характеристику приращения сил при увеличении скорости резания, способствуют преобразованию матрицы  $h_\Sigma^{(0,C)}$  из положительно определенной в отрицательно определенную. В результате система может потерять устойчивость равновесия, так как гироскопические силы, формируемые матрицей  $h_\Sigma^{(0,K)}$ , не могут стабилизировать равновесие при условии  $h_\Sigma^{(0,C)} < 0$  [27, 28].

Характеристический полином (6) позволяет в параметрическом пространстве проанализировать области устойчивости. Однако нас, в основном, будут интересо-

вать условия, при которых система теряет устойчивость равновесия и в его окрестности формируются различные аттракторы. Проанализируем этот вопрос на примере. Заметим, что зачастую примеры являются более показательными, чем анализ общего уравнения.

### Бифуркации аттракторов динамической системы резания

Система (2) моделирует два взаимосвязанных колебательных контура, которые имеют два источника самовозбуждения. Один обусловлен запаздыванием сил резания по отношению к деформационным смещениям. Другой вызван существованием участка вариаций скорости, на котором увеличению скорости соответствует уменьшение сил резания. Этот участок обусловлен действием так называемого температурно-скоростного фактора, поэтому в системе в зависимости от параметров могут существовать три состояния. Первое – асимптотически устойчивая точка равновесия. Второе – орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл. Третье – двумерный инвариантный тор.

Рассмотрим систему, параметры динамической модели инструмента которой приведены в таблице. Значения элементов матрицы жесткости выбраны достаточно малыми для того, чтобы увеличить чувствительность формируемых аттракторов к изменениям параметров динамической связи, обусловленной процессом резания. Осуществляется процесс продольного точения стали марки 20Х четырехгранными неперетачиваемыми пластинками из сплава Т16К6. Основные геометрические параметры инструмента:  $\gamma = 6^\circ$ ,  $\alpha = 2^\circ$ ,  $\varphi = 45^\circ$ .

Частоты системы без взаимного влияния колебательных контуров ( $h_{1,2} = h_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1} = 0$ ) и динамической связи, формируемой процессом резания, соответственно равны:  $\omega_{0,1}^{(1)} = 1020$  Гц,  $\omega_{0,2}^{(1)} = 332$  Гц. Частоты системы с учетом динамической связи, формируемой процессом резания, –  $\omega_{0,1}^{(2)} = 1540$  Гц,  $\omega_{0,2}^{(2)} = 840$  Гц. Давление стружки на переднюю поверхность инструмента –  $\rho = (450 \dots 600)$  кг/мм<sup>2</sup>. Коэффициенты ориентации силы резания в плоскости равны:  $\chi_1 = 0.6$ ,  $\chi_2 = 0.8$ ,  $\chi_1^{(1)} = 1$ ,  $\chi_2^{(1)} = 0$ ,  $\chi_1^{(2)} = 0.8$ ,  $\chi_2^{(2)} = 0.6$ . Они удовлетворяют условиям нормировки, например,  $(\chi_1)^2 + (\chi_2)^2 = 1$ . Чтобы варьировать основные параметры динамической характеристики процесса, изменялись технологические режимы: скорость резания в пределах (60 ... 160) м/мин; глубина резания в пределах (0.5 ... 3.0) мм. Величина подачи выбрана неизменной и равной 0.1 мм/об. Все параметры идентифицированы по правилам, изложенным в [11].

Проанализируем подробно бифуркационную диаграмму в плоскости двух параметров ( $\alpha_1 - T_3$ ) (рис. 2). На этой иллюстрации в качестве примера показаны

Таблица

Параметры динамической системы резания

$m, \text{кг} \cdot \text{с}^2/\text{мм}$	$h, \text{кг} \cdot \text{с}/\text{мм}$	$c, \text{кг}/\text{мм}$
$\begin{bmatrix} 0.98 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0.98 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 30 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1020 & 25 \\ 25 & 108 \end{bmatrix}$

точки «1, 2, 3, 4», для которых на рис. 3 приведены фазовые траектории в сечениях фазового пространства. На рис. 2 приведены также области D-разбиения для лиnearизованного в окрестности

равновесия уравнения. Они показаны пунктирными кривыми. На участках «А-О» и «О-Д» пунктирные кривые совпадают с границами бифуркационной диаграммы, поэтому они сливаются с границами областей D-разбиения. Они определяют четыре области: область (А-О-Д), в которой все корни характеристического полинома расположены в отрицательной комплексной полуплоскости; области (А-О-Е) и (F-О-Д), в которых пара комплексно-сопряженных корней расположена в положительной комплексной полуплоскости; область (Е-О-F), в которой две пары комплексно-сопряженных корней расположены в положительной комплексной полуплоскости. Как видно, границы областей D-разбиения не совпадают с границами бифуркаций аттракторов в параметрическом пространстве. Для объяснения этого можно рассмотреть фазовые траектории на рис. 3, соответствующие точке «2». Временные диаграммы для этого случая приведены на рис. 4. Здесь хорошо видно, что двухчастотный процесс с течением времени преобразуется в одночастотный, то есть имеет место затягивание высокочастотных колебаний к низкочастотным. Аналогичная ситуация возникает и в области (С-О-F). Однако здесь низкочастотный процесс стягивается к высокочастотному. Эти эффекты связаны с нелинейными диссипативными свойствами, которые учитываются в правой части системы (2).

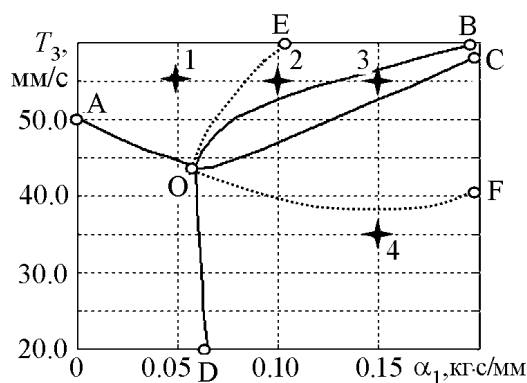


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в плоскости  $(\alpha_1 - T_3)$ : (А-О-Д) – область устойчивости равновесия; (В-О-С) – область формирования двумерного инвариантного тора; (А-О-В) – область формирования орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла на низкой частоте; (С-О-Д) – область формирования орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла на высокой частоте

Спектральные характеристики колебаний в направлении  $X_1$  для точек «2,3,4» (см. рис. 2) приведены на рис. 5, а,в,д, а траектории установившихся колебаний в плоскости  $(X_1 - X_2)$  приведены на рис. 5, б,г,е. Важно подчеркнуть, что при этом меняется расположение ориентации колебаний в плоскости  $(X_1 - X_2)$  и их размах в направлении  $X_1$ , в котором инструмент оставляет следы на обрабатываемой поверхности. При переходе от низкочастотных автоколебаний к высокочастотным размахам соответственно уменьшается с 0.065 мм до 0.006 мм. При этом изменяется ориентация направления колебаний в плоскости  $(X_1 - X_2)$ . Анализ влияния упруго диссипативных параметров подсистемы инструмента на формируемые аттракторы показывает, что качественно бифуркационная диаграмма остается соответствующей рис. 2. Варьирование параметров матрицы  $s$  приводит к смещениям корней характеристического полинома (5) в комплексной плоскости. При этом корни могут сближаться. В этом случае область, в которой формируется двумерный инвариантный тор, вырождается.

На формирование этой области оказывают существенное влияние недиагональные элементы матрицы жесткости. При увеличении, прежде всего, диагональных элементов матрицы  $h$  область устойчивости расширяется. Таким образом, при изменении параметров упругости и диссипации подсистемы инструмента происхо-



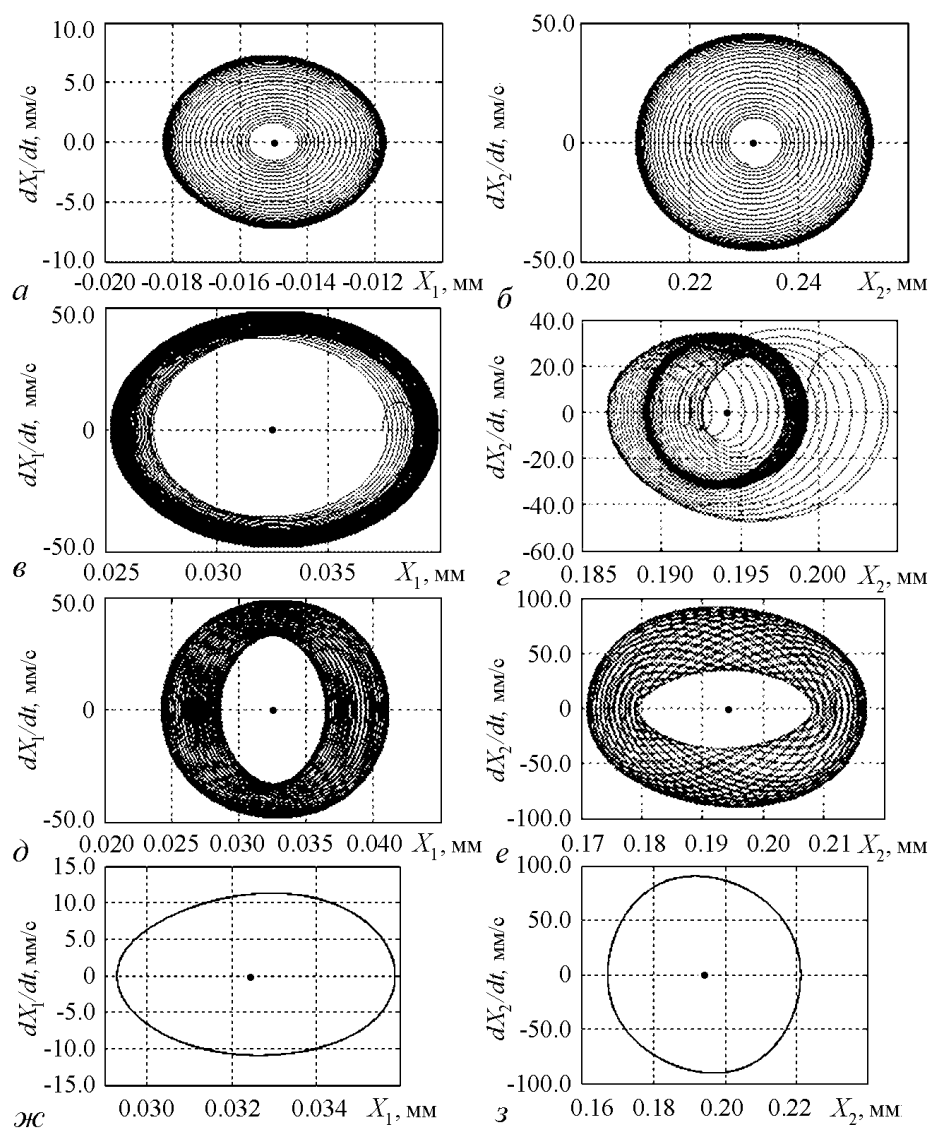


Рис. 3. Фазовые траектории системы: а, б – точка «1»; в, з – точка «2»; д, е – точка «3»; ж, з – точка «4»

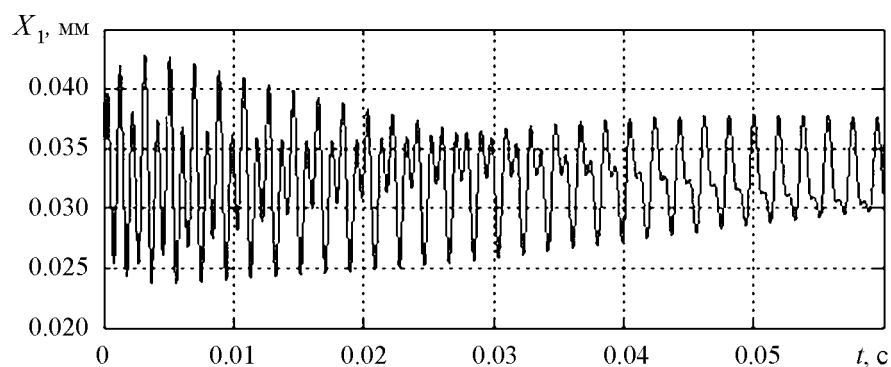


Рис. 4. Пример преобразования двухчастотного процесса в одночастотный, то есть в орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл

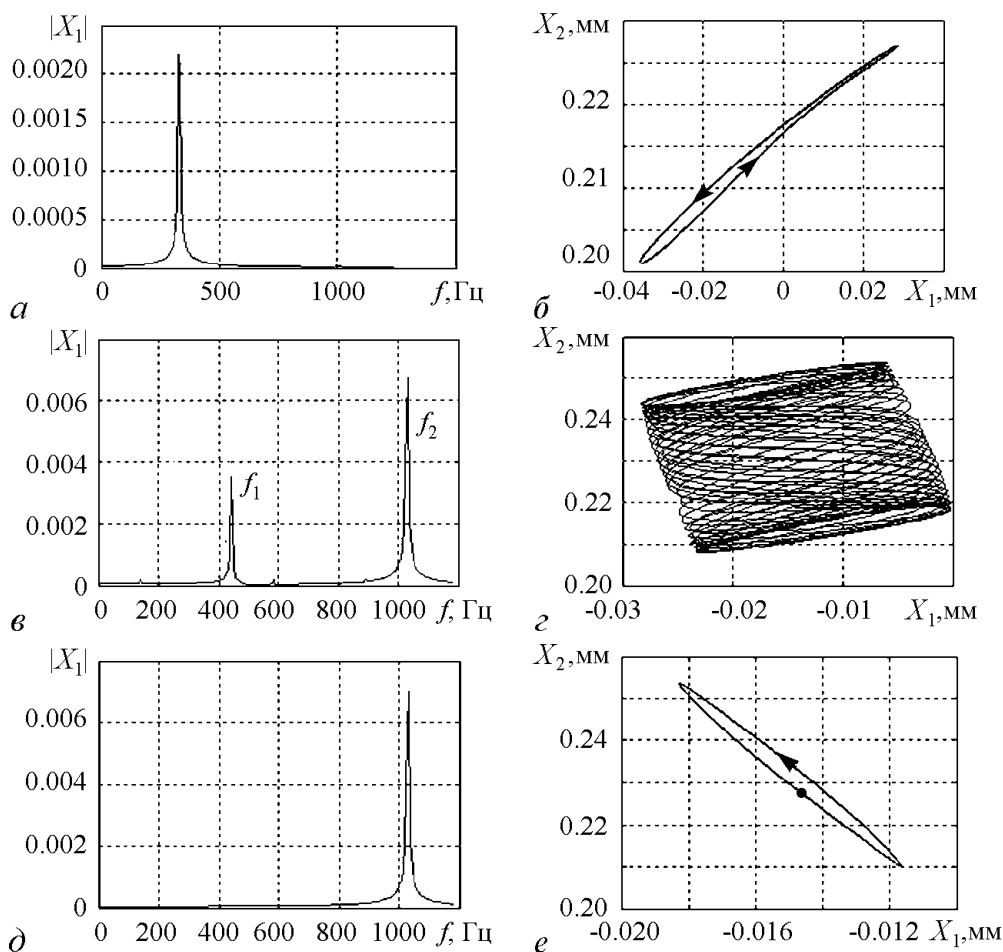


Рис. 5. Изменение спектров установившихся колебаний и их ориентация в плоскости  $(X_1 - X_2)$ :  $a, б$  – для точки «2» на рис. 2;  $в, г$  – для точки «3» на рис. 2;  $д, е$  – для точки «4» на рис. 2

дят изменения аттракторов, формируемых в окрестности равновесия системы резания. Следовательно, меняются показатели качества изготовления деталей и интенсивность изнашивания инструмента [6, 29].

### Заключение

Динамическая система резания, формируемая на основе взаимодействия подсистемы инструмента с динамической связью процесса обработки, является принципиально нелинейной. При изучении устойчивости точки равновесия, связанном с анализом линеаризованных уравнений в вариациях относительно этой точки, раскрыта связь устойчивости с технологическими параметрами системы и параметрами динамической модели подсистемы инструмента. Показано, что в рассматриваемом классе систем существует главный механизм потери устойчивости. Он обусловлен преобразованием положительно определенной симметричной составляющей матрицы скоростных коэффициентов линеаризованного уравнения динамики в отрицательно определенную. Это преобразование осуществляется за счет запаздывающих

аргументов в динамической связи, зависящих от скорости резания и объема пластической деформации материала в зоне обработки. На это преобразование оказывает также влияние крутизна падающего участка зависимости сил от скорости. Этот вывод обобщает известные механизмы потери устойчивости, рассмотренные в настоящее время в скалярных системах.

В том случае, когда равновесие системы становится неустойчивым, в его окрестности образуются притягивающие множества типа орбитально асимптотически устойчивых предельных циклов и двумерных притягивающих торов. Эти существенно нелинейные эффекты оказывают важное влияние на состояние процесса резания. Их параметры влияют на износостойкость инструментов, зависящих от параметров автоколебаний. При этом в зависимости от частоты, имеет место оптимальное значение автоколебаний, при которых стойкость максимальна. Кроме этого, в зависимости от ориентации параметров автоколебаний в пространстве, они могут приводить к уменьшению величины шероховатости формируемой поверхности. Поэтому раскрытие механизмов образования и прогнозирование их параметров открывает путь улучшения процесса резания. Кроме этого, в рассматриваемой нелинейной системе имеет место синхронизация частот на торе. Этот эффект зависит от матрицы скоростных коэффициентов и близости частот двух взаимодействующих осцилляторов.

*Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 14-08-00206 «Разработка теории управления процессами обработки на металлорежущих станках на основе синергетической концепции с учетом самоорганизации и эволюции системы резания».*

#### **Библиографический список**

1. Дроздов Н.А. К вопросу о вибрациях станка при токарной обработке // Станки и инструмент. 1937. С. 12.
2. Каширин А.И. Исследование вибраций при резании металлов. М.-Л.: АН СССР, 1944. 282 с.
3. Соколовский А.П. Вибрации при работе на металлорежущих станках // Исследование колебаний при резании металлов. М.: Машгиз, 1958. С. 15.
4. Мурашкин Л.С., Мурашкин С.Л. Прикладная нелинейная механика станков. Л.: Машиностроение, 1977. 192 с.
5. Альбрехт П. Динамика процесса резания металла // Конструирование и технология машиностроения: Труды американского общества инженеров-механиков ASME. М.: Изд. Мир, 1965. Т. 87, серия В, № 4. С. 40.
6. Жарков И.Г. Вибрации при обработке лезвийным инструментом. Л.: Машиностроение, 1987. 184 с.
7. Глустый И. Автоколебания в металлорежущих станках / Пер. с чешск. М.: Машгиз, 1956. 395 с.
8. Кудинов В.А. Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967. 359 с.
9. Эльясберг М.Е. Автоколебания металлорежущих станков: Теория и практика. СПб.: ОКБС, 1993. 182 с.

10. Вейц В.Л., Васильков Д.В. Задачи динамики, моделирования и обеспечения качества при механической обработке маложестких заготовок // СТИН. 1999. № 6. С. 9.
11. Заковоротный В.Л., Флек М.Б. Динамика процесса резания. Синергетический подход. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2006. 876 с.
12. Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Нгуен Суан Тьем. Математическое моделирование и параметрическая идентификация динамических свойств подсистемы инструмента и заготовки // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2011. № 2. С. 38.
13. Заковоротный В.Л., Бордачев Е.В., Алексейчик М.И. Динамический мониторинг состояния процесса резания. // СТИН. 1998. № 12. С. 6.
14. Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Нгуен Суан Тьем. Моделирование деформационных смещений инструмента относительно заготовки при точении // Вестник ДГТУ. 2010. Т. 10, № 7. С. 1005.
15. Altintas Y., Budak E. Analytical prediction of stability lobes in milling // Ann. CIRP. 1995. Vol. 44. P. 357.
16. Balachandran B. Non-linear dynamics of milling process // Philos. Trans. Roy. Soc. 2001. Vol. 359. P. 793.
17. Davies M.A., Pratt J.R. The stability of low immersion milling // Ann. CIRP. 2000. Vol. 49. P. 37.
18. Davies M.A., Pratt J.R., Dutterer B.S., Burns T.J. Stability prediction for low radial immersion milling // J. Manuf. Sci. Engin. 2002. Vol. 124. P. 217.
19. Faassen R.P.H., van de Wouw N., Osterling J.A.J., Nijmeijer H. Prediction of regenerative chatter by modeling and analysis of high-speed milling // Int. J. Mach. Tools Manuf. 2003. Vol. 43. P. 1437.
20. Corpus W.T., Endres W.J. Added stability lobes in machining processes that exhibit periodic time variation – Part 1: An analytical solution // J. Manuf. Sci. Engin. 2004. Vol. 126. P. 467.
21. Gousskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A. Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2002. Vol. 7. P. 207.
22. Заковоротный В.Л., Фам Тхы Хыонг. Параметрическое самовозбуждение динамической системы резания // Вестник ДГТУ. 2013. № 6. С. 97.
23. Peigne G., Paris H., Brissaud D., Gousskov A. Impact of the cutting dynamics of small radial immersion milling operations on machined surface roughness // Int. J. Mach. Tools Manuf. 2004. Vol. 44. P. 1133.
24. Szalai R., Stepan G., Hogan S.J. Global dynamics of low immersion high-speed milling // Chaos. 2004. Vol. 14. P. 1069.
25. Floquet M.G. Equations différentielles linéaires a coefficients périodiques // Ann. Scientifiques de l'École Normale Supérieure. 1883. Vol. 12. P. 47.
26. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 307 с.
27. Лихаданов В.М. О влиянии структуры сил на устойчивость движения // ПММ. 1974. Т. 38. С. 246.

28. Лихаданов В.М. О стабилизации потенциальных систем // ПММ. 1975. Т. 39. С. 53.
29. Остафьев В.А., Антонюк В.С., Тымчик Г.С. Диагностика процесса металлообработки. Киев: Тэхника. 1991. 152 с.

Поступила в редакцию 18.03.2014  
После доработки 5.05.2014

## SELF-ORGANIZATION AND BIFURCATIONS OF DYNAMICAL METAL CUTTING SYSTEM

*V. L. Zakovorotny<sup>1</sup>, Pham Dinh Tung<sup>2</sup>, V. S. Bykador<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Don State Technical University

<sup>2</sup>Le Quy Don Technical University

The problems of nonlinear dynamics of cutting metal are considered in the article. We offer mathematical model of dynamical system that includes a dynamical relation of the cutting process by using turning example. Basic positions of the dynamical relation are the forces dependence of cutting area, the force's delay of elastic deformation shift of a tool by relative to workpiece, limitations of the cutting forces on clearance face of the tool, dependence of the cutting forces of the cutting velocity. Dynamical subsystem of the tool is described as linear system on perpendicular plane to cutting surface. The principal focus in the paper was given to analyse of forming of attractors near to fixed point (orbitally stable solutions, double invariant toruses). The article provides data about bifurcation of attractors. Design recommendations for the systems that have required attractors in the state space are also given at the paper.

*Keywords:* Dynamical system, attractors, bifurcations, cutting process of the materials.

*Заковоротный Вилор Лаврентьевич* – родился в 1940 году в Красноярске, окончил Ростовский институт сельскохозяйственного машиностроения (ныне Донской государственный технический университет) в 1962 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1966) в Новочеркасском политехническом институте (ныне Южно-Российский государственный политехнический университет) и доктора технических наук (1983) в Киевском политехническом институте. Основал научную школу, исследующую синергетические принципы управления и диагностики процессов резания и трения. Более 40 лет работает в области исследования устойчивости и эволюции динамических нелинейных систем взаимодействующих со средой. С 1981 года является заведующим кафедры Автоматизация производственных процессов ДГТУ, а с 1991 года по 2008 год был проректором по науке ДГТУ. Автор более чем 350 научных статей как в российских, так и зарубежных научных журналах, а также ряда авторских свидетельств и патентов. Опубликовал 9 научных монографий. Под его руководством защищено 7 докторских и 38 кандидатских диссертаций. Является лауреатом Государственной премии Украинской ССР, заслуженным деятелем науки РФ. Входит в редакционную коллегию 3 журналов включенных в перечень ВАК РФ.



344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1  
Донской государственный технический университет  
E-mail: [vzakovorotny@dstu.edu.ru](mailto:vzakovorotny@dstu.edu.ru)



*Фам Динь Тунг* – родился в 1980 году в городе Ханое, Вьетнам. В 2005 году окончил ДГТУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (2008) в ДГТУ, диссертацию доктора технических наук (2013) в Таганрогском технологическом институте Южного федерального университета. Область научных интересов – анализ и синтез динамики металлорежущих станков с учетом эволюции связей в технологических системах. Автор более 50 научных работ и одной монографии «Синергетический системный синтез управляемой динамики металлорежущих станков с учетом эволюционных связей» (совместно с В.Л. Заковоротным, А.Д. Лукьяновым, Нгуен Донг Ань, Ростов н/Д: Изд. Центр ДГТУ, 2008).

Вьетнам, г. Ханой, ул. Хоанг Куок Вьет, 100  
Вьетнамский государственный технический университет им. Ле Куй Дона  
E-mail: phamdinhtung@mail.ru



*Быкадор Виталий Сергеевич* – родился 1980 году в Ростове-на-Дону. В 2002 году окончил Ростовскую-на-Дону государственную академию сельскохозяйственного машиностроения (ныне ИЭиМ ДГТУ), в 2007 году окончил ДГТУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (2011, ДГТУ). Область научных интересов – исследование и управление нелинейной динамикой процессов резания на основе синергетического подхода. Доцент кафедры автоматизация производственных процессов ДГТУ. Автор 4 статей и 2 учебных пособий (в соавторстве с В.Л. Заковоротным и М.В. Чувейко).

344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1  
Донской государственный технический университет  
E-mail: vitaly.bykador@yandex.ru



## ВЛИЯНИЕ ИЗГИБНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ИНСТРУМЕНТА НА САМООРГАНИЗАЦИЮ И БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РЕЗАНИЯ МЕТАЛЛОВ

*В. Л. Заковоротный<sup>1</sup>, Фам Динь Тунг<sup>2</sup>, В. С. Быкадор<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Донской государственной технической университет

<sup>2</sup>Вьетнамский государственный технический университет им. Ле Куи Дона

В статье рассматривается случай, когда изгибные деформационные смещения инструмента не являются величинами малыми. Такая ситуация характерна, например, для процесса растачивания глубоких отверстий. Борштанга в этом случае имеет малые значения изгибной жесткости. В этом случае за счет уменьшения переднего угла режущего инструмента наблюдается увеличение сил при возрастании деформационных смещений в направлении скорости резания. Тем самым формируется положительная обратная связь, которая принципиально изменяет динамику процесса резания. Показано, что для такого процесса характерен определенный вид бифуркаций. Во-первых, наблюдается ветвление точек равновесия. Во-вторых, по мере увеличения жесткости процесса резания в окрестностях равновесия формируются не только предельные циклы, но и после этапа удвоения периодов колебаний формируются хаотические аттракторы, обладающие ограниченной областью притяжения. Показано, что на формируемые притягивающие множества влияние оказывают технологические режимы, которые определяют силы резания и задают упругие деформационные смещения инструмента.

*Ключевые слова:* Динамическая система, притягивающие множества, хаотические аттракторы, бифуркации, процесс резания материалов.

### Введение

В исследованиях динамики процессов обработки на металлорежущих станках главное внимание уделялось изучению устойчивости точки равновесия системы, а также автоколебаний системы [1–18]. Во всех этих работах не принимался во внимание случай, когда за счет существенных изгибных деформационных смещений инструмента, вызывающих уменьшение переднего угла режущего инструмента, силы резания не уменьшаются (как полагалось в отмеченных выше работах), а возрастают. Тем самым формируется положительная обратная связь, способствующая самовозбуждению системы резания, в том числе пересечению устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий. При этом динамика системы существенно меняется: подавляется квазипериодическая динамика, возникает мультистабильность, каскады

бифуркаций удвоения периода, хаотические аттракторы. Приводимый в статье материал дополняет известные примеры образования хаотических аттракторов [19–24] и объясняет возможность образования при резании экспериментально наблюдаемых аттракторов типа детерминированного хаоса.

### Математическая модель системы

Рассмотрим математическую модель процесса резания (рис. 1), в которой силами, действующими на заднюю грань инструмента, будем пренебрегать (задний угол инструмента  $\alpha$  есть величина большая, что характерно, например, для растачивания). Однако деформационные смещения инструмента в направлении  $X_2$  сопровождаются изгибом, вызывающим изменение переднего угла инструмента  $\gamma$ . Поэтому, во-первых, по мере увеличения деформационных смещений в направлении  $X_2$  имеет место увеличение объема пластической деформации в зоне резания и как следствие увеличение модуля силы резания  $F^{(1)} = \{F_1^{(1)}, F_2^{(1)}\}^T$  [25]. Во-вторых, силы резания  $F_1^{(1)}$  в направлении  $X_1$  возрастают непропорционально быстро [11]. Кроме этого, как и в ранее рассмотренных случаях [26, 27], имеет место запаздывание изменения сил по отношению к деформационным смещениям инструмента. Для наглядности рассматриваемых ниже эффектов зависимость сил от скорости также не будем учитывать. Эти особенности процесса резания можно учесть, если рассмотреть силы

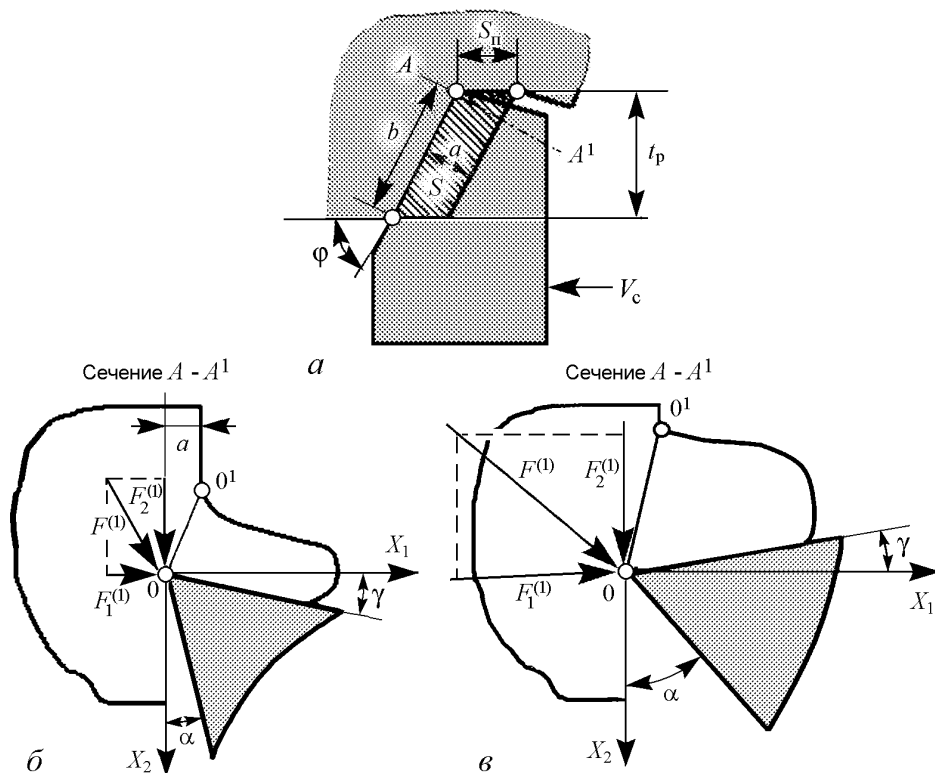


Рис. 1. а – формирование площади срезаемого слоя; б – поверхность скольжения и образование сил резания без изгибных деформаций инструмента; в – поверхность скольжения и образование сил резания при развитии изгибных деформаций инструмента



резания в виде следующих зависимостей:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1^{(1)} = \chi_1 \rho b [a - Y_1^{(1)}] + \delta (Y_2^{(1)})^3, \\ F_2^{(1)} = \chi_2 \rho b [a - Y_1^{(2)}] + \beta Y_2^{(2)}, \\ T_1^{(1)} \frac{dX_1}{dt} + X_1 = Y_1^{(1)}, \\ T_1^{(2)} \frac{dX_1}{dt} + X_1 = Y_1^{(2)}, \\ T_2^{(1)} \frac{dX_2}{dt} + X_2 = Y_2^{(1)}, \\ T_2^{(2)} \frac{dX_2}{dt} + X_2 = Y_2^{(2)}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $X_1, X_2$  – деформационные смещения, мм, вершины инструмента в двух ортогональных направлениях;  $\chi_1, \chi_2$  – угловые коэффициенты, удовлетворяющие условиям нормировки  $(\chi_1)^2 + (\chi_2)^2 = 1$ ;  $S, a, b$  – площадь срезаемого слоя, мм<sup>2</sup>, толщина и ширина, мм, срезаемого слоя, зависящие от технологических режимов (подачи на оборот  $S_{\text{п}}$  и глубины резания  $t_p$ ) и угла  $\varphi$  (см. рис. 1) (здесь очевидны соотношения:  $a = S_{\text{п}} \sin(\varphi)$ ,  $b = t_p / \sin(\varphi)$ );  $\delta$  – коэффициент, кг/мм<sup>3</sup>, определяющий отношение приращения силы к приращению объема деформируемого материала, имеющий смысл плотности;  $\beta$  – коэффициент, кг/мм, имеющий смысл жесткости;  $T_1^{(1)}, T_1^{(2)}, T_2^{(1)}, T_2^{(2)}$  – постоянные времени, с, определяющие запаздывание изменения сил по отношению к деформационным смещениям инструмента относительно заготовки. Причем  $T_1^{(1)} < T_1^{(2)}$  и  $T_2^{(1)} < T_2^{(2)}$ .  $Y_1^{(1)}, Y_1^{(2)}, Y_2^{(1)}, Y_2^{(2)}$  – промежуточные координаты, моделирующие запаздывание сил по отношению к деформационным смещениям, а также их частотную зависимость.

Для построения математической модели введем параметры, характеризующие физические свойства инструмента [11]:  $m$  – диагональная матрица инерционных коэффициентов, кг · с<sup>2</sup>/мм;  $h$  – матрица диссипативных коэффициентов, кг · см/мм;  $c$  – матрица упругих коэффициентов, кг/мм. Математическая модель представляется в виде системы

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 X_1}{dt^2} + h_{1,1} \frac{dX_1}{dt} + h_{2,1} \frac{dX_2}{dt} + c_{1,1} X_1 + c_{2,1} X_2 = \chi_1 \rho b [a - Y_1^{(1)}] + \delta (Y_2^{(1)})^3, \\ m \frac{d^2 X_2}{dt^2} + h_{1,2} \frac{dX_1}{dt} + h_{2,2} \frac{dX_2}{dt} + c_{1,2} X_1 + c_{2,2} X_2 = \chi_2 \rho b [a - Y_1^{(2)}] + \beta Y_2^{(2)}, \\ T_1^{(1)} \frac{dX_1}{dt} + X_1 = Y_1^{(1)}, \\ T_1^{(2)} \frac{dX_1}{dt} + X_1 = Y_1^{(2)}, \\ T_2^{(1)} \frac{dX_2}{dt} + X_2 = Y_2^{(1)}, \\ T_2^{(2)} \frac{dX_2}{dt} + X_2 = Y_2^{(2)}, \end{array} \right. \quad (2)$$

которая учитывает следующие основные свойства: во-первых, запаздывание сил по отношению к деформационным смещениям и частотную зависимость связи деформационных смещений с силами; во-вторых, формирование сил в зависимости от деформационных смещений в направлении скорости резания; в-третьих, нелинейную зависимость сил от деформационных смещений в направлении скорости резания. Модель (2) не принимает во внимание закономерности изменения сил, формируемых в области задней грани инструмента, а также зависимость сил от скорости резания.

### Свойства равновесия

Равновесие системы определяется, исходя из условия отсутствия изменения деформационных смещений инструмента. Следовательно, точка равновесия  $(X_1^*, X_2^*)$  определяется из уравнения

$$\begin{cases} (c_{1,1} + \chi_1 \rho b) X_1^* + c_{2,1} X_2^* = \chi_1 \rho b a + \delta (X_2^*)^3, \\ (c_{1,2} + \chi_2 \rho b) X_1^* + (c_{2,2} - \beta) X_2^* = \chi_2 \rho b a. \end{cases} \quad (3)$$

Анализ выражений (3) приводит к необходимости рассмотрения следующего уравнения

$$\delta (X_2^*)^3 + C_\Sigma X_2^* + F_\Sigma = 0, \quad (4)$$

где  $C_\Sigma = \{c_{2,2}(c_{1,1} + \chi_1 \rho b) - [c_{1,1}\beta + \chi_1 \rho b\beta + c_{1,2}^2 + \chi_2 \rho b c_{1,2}]\} / (c_{1,2} + \chi_2 \rho b) = (A - B) / D$  – обобщенная жесткость системы;  $F_\Sigma = (\chi_1 c_{1,2} - \chi_2 c_{1,1}) / (c_{1,2} + \chi_2 \rho b \rho b a)$  – суммарное значение силы. В динамической системе резания параметры  $A$ ,  $B$ ,  $D$  и суммарная сила  $F_\Sigma$  варьируют в достаточно широком диапазоне. Они определяются элементами матрицы жесткости подсистемы инструмента, свойствами процесса резания, технологическими режимами и геометрией инструмента, влияющей на угловые коэффициенты.

Вначале рассмотрим случай, когда  $\chi_1 c_{1,2} = \chi_2 c_{1,1}$ . Возможность выполнения этого условия зависит от геометрии инструмента, которая определяет угловые коэффициенты, и от углов ориентации осей эллипсов жёсткости в подсистеме инструмента, то есть от конструктивных свойств суппортной группы. Для этого случая наибольший интерес представляет выяснение влияния параметра  $\beta$  на свойства системы. Из (4) видно, что по мере увеличения  $\beta$  с учетом соотношения  $\chi_1 c_{1,2} = \chi_2 c_{1,1}$  существует точка бифуркации  $\beta_0 = c_{2,2} - ((\chi_2)^2 / (\chi_1)^2) c_{1,1}$ , начиная с которой имеет место ветвление решений. Это бифуркация равновесия системы типа вилки. Ей соответствует  $C_\Sigma = 0$ . Как видно, при  $\beta < \beta_0$  система имеет единственную точку равновесия (рис. 2, а). При  $\beta > \beta_0$  свойства системы, рассматриваемые в вариациях относительно двух точек равновесия, например,  $\pm X_{2,1}^*$ , являются симметричными, как это наблюдается в системе Лоренца [19]. Нетрудно показать, что для этой системы у потенциальной функции точкам  $X_{2,1}^*$  соответствуют два минимума. При  $\beta < \beta_0$  потенциальная функция имеет единственный минимум, соответствующий точке  $X_2^* \equiv 0$ .

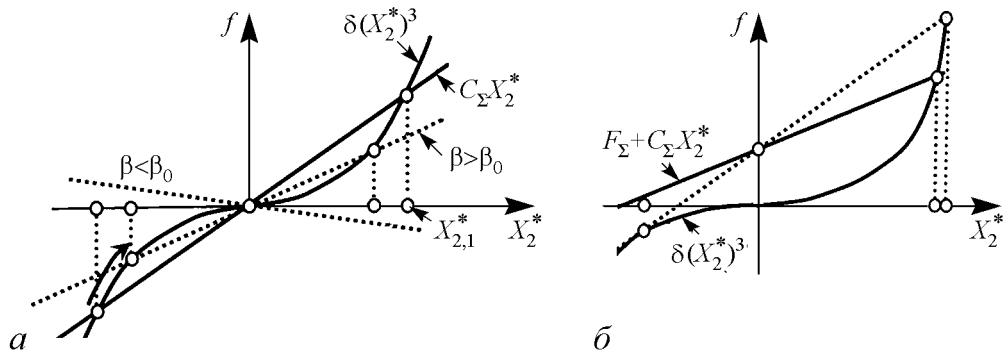


Рис. 2. Графическая интерпретация формирования точек равновесия системы: *a* – случай, когда  $\chi_1 c_{1,2} = \chi_2 c_{1,1}$ ; *б* – случай, когда  $\chi_1 c_{1,2} \neq \chi_2 c_{1,1}$

В общем случае условие  $\chi_1 c_{1,2} = \chi_2 c_{1,1}$  не выполняется. Тогда точка бифуркации и точки равновесия системы, во-первых, становятся зависящими от  $F_\Sigma$ , во-вторых, свойства системы в вариациях относительно точки равновесия при неизменных параметрах также изменяются (рис. 2, б). В этом случае точке бифуркации равновесия соответствует условие  $C_\Sigma > 0$ . Отметим, что точкам равновесия  $X_2^*$  из (3) однозначно соответствуют  $X_1^*$ .

Для анализа устойчивости точек равновесия необходимо рассмотреть линеаризованное в окрестности равновесия уравнение (2), получаемое после замены  $X_1(t) = X_1^* + x_1(t)$  и  $X_2(t) = X_2^* + x_2(t)$ ,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h_\Sigma \frac{dx}{dt} + c_\Sigma x = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } m = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, h_\Sigma = \begin{bmatrix} h_{1,1} - \chi_1 \rho b T_1^{(1)} & h_{2,1} + 3\delta T_2^{(1)} (X_2^*)^2 \\ h_{1,2} - \chi_2 \rho b T_1^{(2)} & h_{2,2} + \beta T_2^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$c_\Sigma = \begin{bmatrix} c_{1,1} + \chi_1 \rho b & c_{2,1} - 3\delta (X_2^*)^2 \\ c_{1,2} + \chi_2 \rho b & c_{2,2} - \beta \end{bmatrix}.$$

Для анализа устойчивости конкретной точки равновесия необходимо рассматривать корни характеристического полинома системы (5)

$$\Delta(p) = \begin{bmatrix} mp^2 + (h_{1,1} - \chi_1 \rho b T_1^{(1)})p + c_{1,1} + \chi_1 \rho b & [h_{2,1} + 3\delta T_2^{(1)} (X_2^*)^2]p + c_{2,1} - 3\delta (X_2^*)^2 \\ (h_{1,2} - \chi_2 \rho b T_1^{(2)})p + c_{1,2} + \chi_2 \rho b & mp^2 + (h_{2,2} + \beta T_2^{(1)})p + c_{2,2} - \beta \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Анализ эволюции корней характеристического полинома показывает большое разнообразие возможных механизмов потери устойчивости равновесия системы. В частности, если варьировать суммарное значение силы  $F_\Sigma$ , влияющее на  $X_2^*$ , то знак смещения точки равновесия не влияет на свойства системы в вариациях относительно точки равновесия. Матрицы  $h_\Sigma$  и  $c_\Sigma$  в (5) являются несимметричными, то есть представимы в виде сумм симметричных и косимметричных составляющих. Анализ конкретных систем показывает, что главный механизм потери устойчивости

равновесия связан с преобразованием симметричной составляющей матрицы  $h_{\Sigma}$  из положительно определенной в отрицательно определенную. Кроме этого, по мере увеличения  $\beta$  возможно преобразование симметричной (потенциальной) составляющей матрицы  $c_{\Sigma}$  из положительно в отрицательно определенную. При варьировании  $\beta$  и  $F_{\Sigma}$  имеет место множество бифуркаций притягивающих множеств, формируемых в окрестности равновесия.

### Анализ бифуркаций системы

Проанализируем бифуркации системы на конкретном примере. Так как при анализе бифуркаций рассматриваются большие отклонения от точек равновесия, то исследованию подлежит система (2). Решение этой системы не может быть найдено в явном виде. Поэтому для ее интегрирования использовался метод Рунге–Кутты 4-го порядка.

Рассмотрим две системы, имеющие параметры

$$m = \begin{bmatrix} 0.2 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0.2 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.8 \\ 0.8 & 2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 800 & 900 \\ 900 & 1200 \end{bmatrix}.$$

Они отличаются угловыми коэффициентами ориентации силы резания: для системы № 1 –  $\chi_1 = 0.8$ ,  $\chi_2 = 0.6$ ; для системы № 2 –  $\chi_1 = 0.6$ ,  $\chi_2 = 0.8$ . Таким образом, для системы № 1 по мере увеличения  $\beta$  ветвление равновесия симметрично, симметричны и свойства в вариациях относительно точек равновесия. Для системы № 2 имеет место асимметрия. Параметры процесса резания остаются неизменными и соответствуют:  $b = 3$  мм,  $a = 0.2$  мм,  $\rho = 2000$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\beta = 0.9 \cdot 10^4$  кг/мм,  $T_1^{(1)} = 0.002$  с,  $T_1^{(2)} = 0.003$  с,  $T_2^{(1)} = 0.001$  с,  $T_2^{(2)} = 0.002$  с [12].

На рис. 3 приведены две диаграммы бифуркаций аттракторов в окрестности равновесия при варьировании  $\beta \in [0, 2000]$  кг/мм. Проанализируем притягивающие множества по мере увеличения параметра  $\beta$ .

Если  $F_{\Sigma} = 0$  (система № 1, рис. 3, а), то по мере увеличения  $\beta$  вначале единственная точка равновесия является асимптотически устойчивой (множество №1,  $\beta \in [0 \dots 755]$ ), затем имеет место бифуркация точки равновесия, при этом верхняя и нижняя точки двух ветвей диаграммы равновесия являются асимптотически устойчивыми (множество №2). Устойчивость точек равновесия является аperiodической. Затем (множество №3) наблюдается бифуркация Андронова–Хопфа рождения орбитально асимптотически устойчивой пары предельных циклов. Эти предельные циклы являются симметричными в окрестностях верхнего и нижнего равновесий. Они находятся в ограниченном пространстве, расположенном между двумя верхними и нижними ветвями. При дальнейшем увеличении  $\beta$  (множество №4) наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода. Известно, что бифуркация удвоения периода характеризует один из сценариев рождения хаотического аттрактора, рассмотренный М. Фейгенбаумом [28]. Хаотические аттракторы формируются на множестве №5. Они образуются в окрестностях верхней и нижней точек равновесия, существуя в ограниченном объеме фазового пространства, то есть одновременно обладают свойством притяжения. Далее, за счет увеличения интенсивности возбуждения, траектории ста-

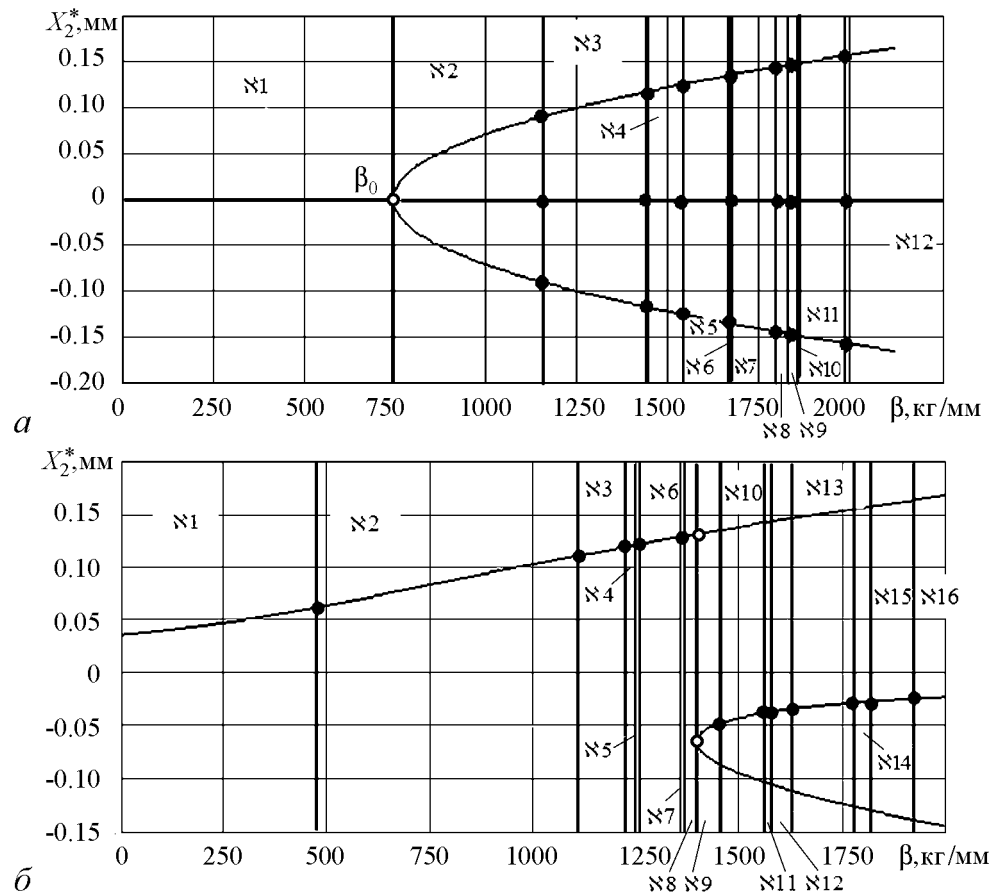


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма при варьировании  $\beta$ :  $a$  – система № 1,  $F_z = 0$ ;  $b$  – система № 2,  $F_z \neq 0$

новятся орбитальными относительно всех трех точек равновесия. При этом вначале формируется траектория с каскадом удвоения периодов (множество №6). Затем после каскада бифуркаций удвоения периода вновь формируется хаотический аттрактор (множество №9). Однако, в отличие от ранее рассмотренного хаотического аттрактора, траектории захватывают все три точки равновесия. В дальнейшем циклы преобразования стационарных траекторий периодически повторяются (множества №10, №11). Наконец, система становится неустойчивой в целом (множество №12). Однако в этом случае траектории, двигаясь относительно каждой точки равновесия, находятся в пространствах, которые не пересекаются друг с другом. Заметим, что, начиная с  $\beta = 1500$  кг/мм, свойства системы становятся чрезвычайно чувствительными к вариациям этого параметра.

Некоторые наиболее типичные примеры проекций фазовых траекторий на плоскость  $(X_2 - dX_2/dt)$  приведены на рис. 4. Здесь необходимо обратить внимание на то, что хаотические аттракторы при  $\beta \in \text{№4}$  (рис. 4,  $\text{в}$ ) формируются исключительно в окрестности двух точек равновесия, а при  $\beta \in \text{№9}$  (рис. 4,  $\text{е}$ ) они напоминают аттрактор Лоренца и имеют свойства, близкие к этому аттрактору [23, 24].

Проанализируем также частотные свойства стационарных колебаний при переходе от орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла (рис. 4,  $\text{б}$ )

к хаотическому аттрактору (рис. 4, *е*). Как видно из рис. 5, достаточно узкополосный спектр колебаний (рис. 5, *а*) в случае устойчивого предельного цикла через бифуркацию удвоения периода, характеризующегося образованием дополнительных частот с кратными и дробными частотами (рис. 5, *б, в*), трансформируется в достаточно широкополосный спектр при формировании хаотического аттрактора. После установления хаотического аттрактора спектральный состав колебаний скорее характеризуется окрашенным белым шумом (рис. 5, *в*). Подчеркнем, что даже малые вариации параметра  $\beta$  вызывают существенные изменения свойств системы.

Если  $F_{\Sigma} \neq 0$  (система № 2, рис. 3, *б*), то бифуркационная диаграмма за счет асимметрии верхней и нижней ветвей является более сложной. По мере увеличения  $\beta$  система вначале также имеет единственную точку равновесия, которая является асимптотически устойчивой (множество  $\aleph 1$ ). Затем в окрестности единственной точки равновесия формируется устойчивый предельный цикл (множество  $\aleph 2$ ), бифуркация удвоения периодов (множество  $\aleph 3$ ) и далее хаотический аттрактор

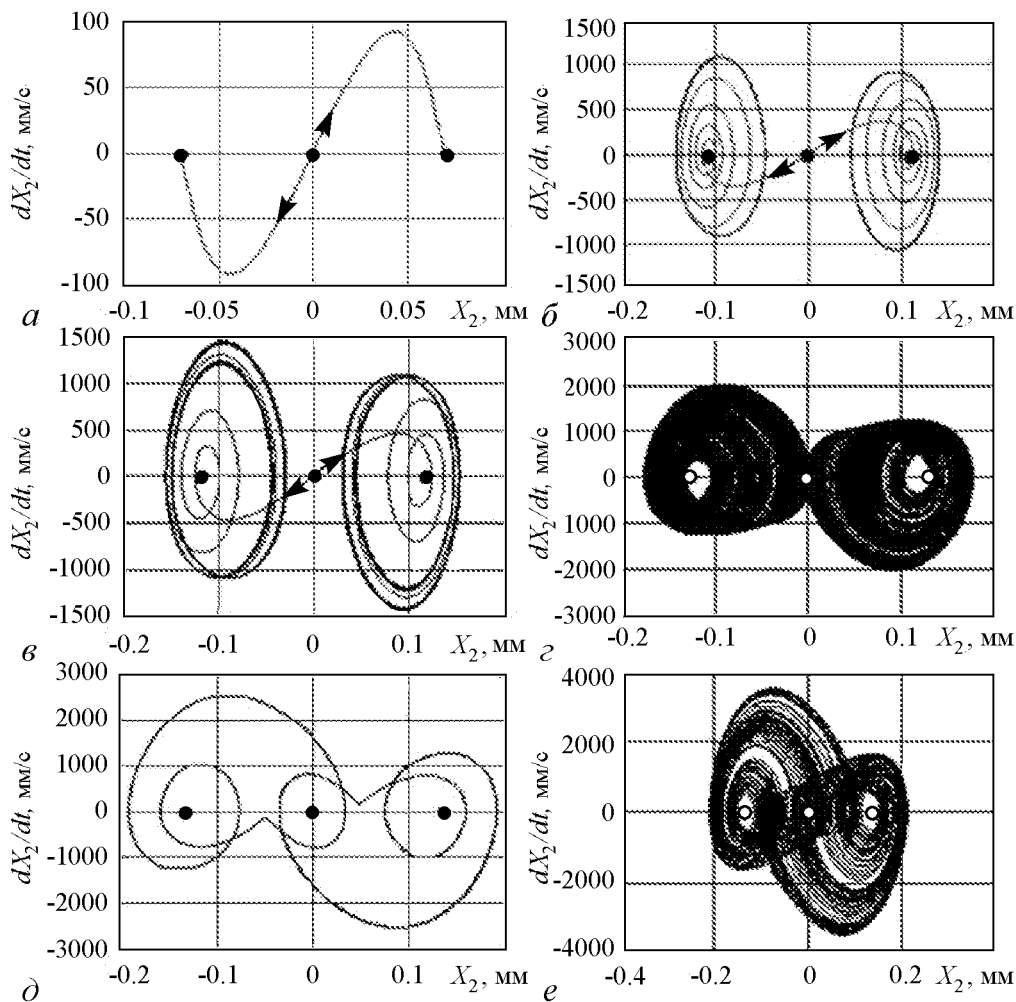


Рис. 4. Система № 1. Некоторые примеры проекций стационарных траекторий на фазовую плоскость ( $X_2 - dX_2/dt$ ) по мере увеличения параметра  $\beta$ : *а* –  $\aleph 2$ ; *б* –  $\aleph 3$ ; *в* –  $\aleph 4$ ; *г* –  $\aleph 5$ ; *д* –  $\aleph 6$ ; *е* –  $\aleph 9$

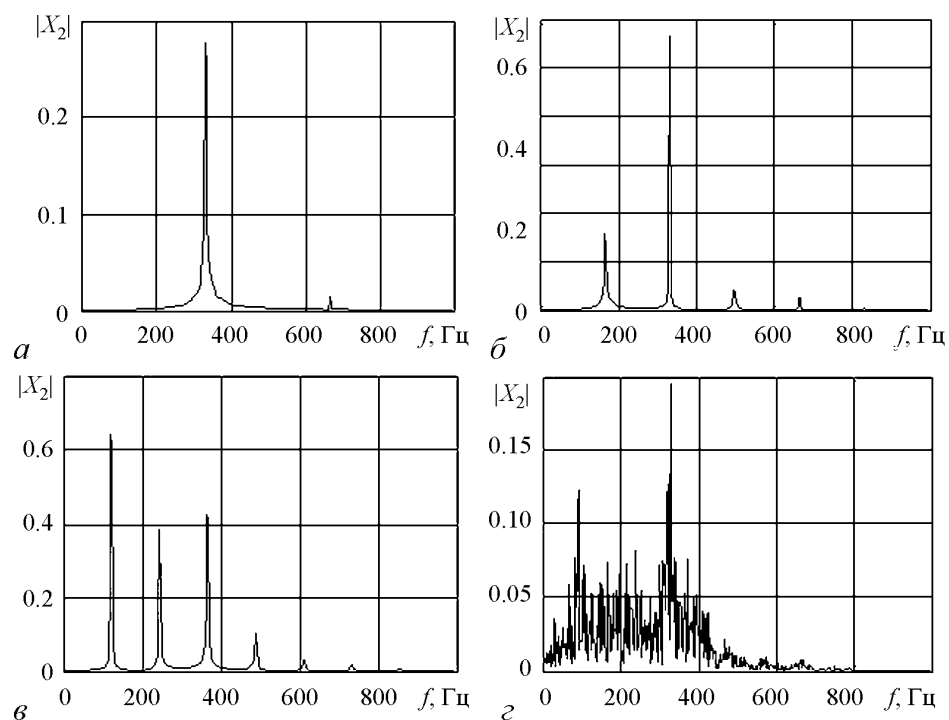


Рис. 5. Система № 1. Изменение спектрального состава аттракторов, соответствующих рис. 4, для различных значений параметра  $\beta$ :  $a$  – 500;  $\delta$  – 590;  $\epsilon$  – 610;  $z$  – 650

(множество №4). Процесс удвоения периодов (множества №5 и №7) и формирование хаотических аттракторов (множества №6 и №8) повторяется вплоть до точки, в которой наблюдается ветвление равновесия  $\beta_0 = 1386$  кг/мм. Затем свойства системы в окрестностях верхней и нижней ветвей равновесия существенно меняются. Вначале в окрестности верхней ветви формируется странный аттрактор, а в окрестности нижней – асимптотически устойчивая точка равновесия (множество №9). Затем в окрестности верхней ветви (множество №10) в системе вновь происходит бифуркация удвоения периода циклов, а на нижней – устойчивая точка равновесия. Наконец, в области нижней ветви наблюдается бифуркация Андронова–Хопфа (множество №11), в области верхней ветви продолжается процесс удвоения периода. При дальнейшем увеличении  $\beta$  в области верхней ветви формируется хаотический аттрактор, а в области нижней ветви – сохраняются автоколебания (множество №12). Как предельный цикл, так и хаотический аттрактор характеризуют притягивающие множества, существующие в ограниченном фазовом пространстве. Наконец в области верхней ветви система теряет устойчивость, и траектории уходят от центральной ветви, в области нижней ветви в ограниченном пространстве сохраняются автоколебания (множество №13). При дальнейшем увеличении  $\beta$  система в области верхней точки равновесия остается неустойчивой, а в области нижней ветви в ограниченном пространстве вначале образуется каскад бифуркаций удвоения периода (множество №14), а затем образуется хаотический аттрактор, занимающий ограниченную область в окрестности нижней точки равновесия (множество №15). За пределами этой ограниченной области система движется по траекториям, отходящим от всех трех точек равновесия. Наконец система становится неустойчивой в целом (множество №16).

Принципиальным отличием каскада бифуркаций в системе № 2 ( $F_{\Sigma} \neq 0$ ) от системы № 1 ( $F_{\Sigma} = 0$ ) является различное поведение ее в областях верхней и нижней ветвей траектории смещения точек равновесия (рис. 6). При этом не образуются притягивающие множества, включающие сразу три точки равновесия, как это наблюдается в системе № 1. Обратим внимание на возможность существования в неустойчивой в целом системе некоторых локальных областей (рис. 6, *в* и *г*), в которых система является устойчивой в малом (см. рис. 6, *в*). Существуют также случаи, когда формируются хаотические аттракторы в ограниченном объеме (рис. 6, *з*). На формируемые траектории, кроме  $\beta$  и  $F_{\Sigma}$ , оказывают влияние практически все параметры системы (2). Если ранжировать параметры по чувствительности к ним изменения аттракторов, то необходимо отметить заметное влияние постоянных времени в системе (2), которые моделируют запаздывание сил по отношению к деформационным

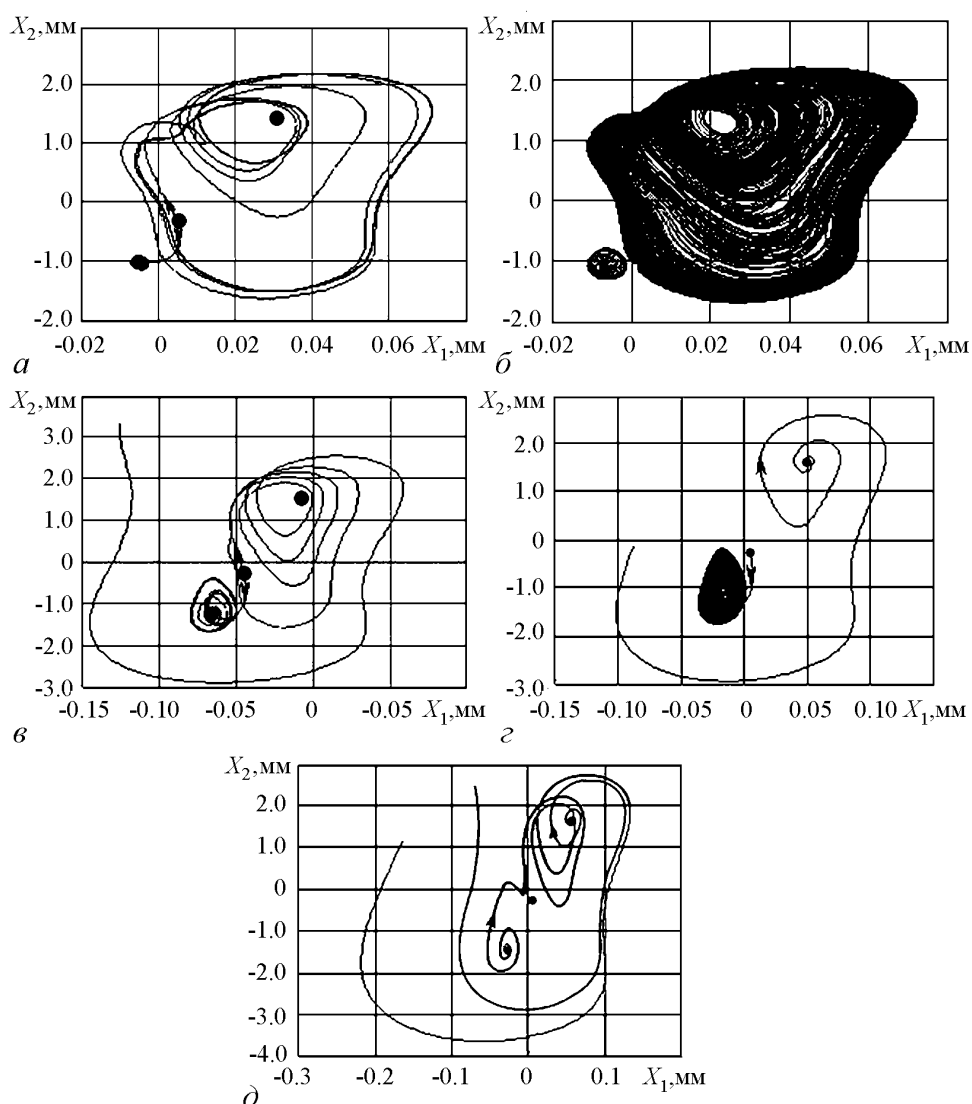


Рис. 6. Система № 2. Пример преобразования траекторий вершины инструмента в плоскости ( $X_1 - X_2$ ) по мере увеличения параметра  $\beta$ : *a* – №11; *б* – №12; *в* – №14; *г* – №15; *з* – №16



смещениям. Необходимо подчеркнуть, что все эти преобразования имеют практическое подтверждение, экспериментально полученное авторами и другими исследователями [11, 29].

### Заключение

Динамическая система резания может служить примером сложных преобразований притягивающих множеств, формируемых в окрестности точек равновесия. В зависимости от параметров динамической характеристики процесса резания пространство состояния динамической системы структурируется, и при этом свойства системы становятся чувствительными к малым вариациям параметров. Система обладает сложной динамикой и даже при неизменных параметрах в отдельных случаях в пространстве образуются области с различной топологией фазового пространства. Характерными для системы являются бифуркации Андронова–Хопфа, удвоения периода колебаний и образование хаотических аттракторов. Необходимо подчеркнуть, что такими свойствами начинает обладать система, имеющая единственную нелинейную зависимость в построенной математической модели. Если силы в системе уравнений представляются линейными зависимостями в координатах состояния, то система имеет единственную точку равновесия и может быть устойчивой или неустойчивой. В рассматриваемой системе не обнаружено формирование аттракторов типа инвариантного тора. Если принять во внимание, что система резания является возмущенной, то в ней в реальных условиях образуется сложный, трудно предсказуемый режим колебаний. Важно подчеркнуть, что эти колебания оказывают влияние на параметры качества изготовления деталей и состояние процесса обработки, например, на интенсивность изнашивания инструментов.

*Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 14-08-00206 «Разработка теории управления процессами обработки на металлорежущих станках на основе синергетической концепции с учетом самоорганизации и эволюции системы резания».*

### Библиографический список

1. Дроздов Н.А. К вопросу о вибрациях станка при токарной обработке // Станки и инструмент. 1937. С. 12.
2. Каширин А.И. Исследование вибраций при резании металлов. М.-Л.: АН СССР, 1944. 282 с.
3. Соколовский А.П. Вибрации при работе на металлорежущих станках // Исследование колебаний при резании металлов. М.: Машгиз, 1958. С. 15.
4. Мурашкин Л.С., Мурашкин С.Л. Прикладная нелинейная механика станков. Л.: Машиностроение, 1977. 192 с.
5. Альбрехт П. Динамика процесса резания металла // Конструирование и технология машиностроения: Труды американского общества инженеров-механиков ASME. М.: Мир, 1965. Т. 87, серия В. № 4. С. 40.

6. Жарков И.Г. Вибрации при обработке лезвийным инструментом. Л.: Машиностроение, 1987. 184 с.
7. Глушый И. Автоколебания в металлорежущих станках / Пер. с чешск. М.: Машгиз, 1956. 395 с.
8. Кудинов В.А. Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967. 359 с.
9. Эльясберг М.Е. Автоколебания металлорежущих станков: Теория и практика. СПб.: ОКБС, 1993. 182 с.
10. Вейц В.Л., Васильков Д.В. Задачи динамики, моделирования и обеспечения качества при механической обработке маложестких заготовок // СТИН. 1999, № 6. С. 9.
11. Заковоротный В.Л., Флек М.Б. Динамика процесса резания. Синергетический подход. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2006. 876 с.
12. Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Нгуен Суан Тьем. Математическое моделирование и параметрическая идентификация динамических свойств подсистемы инструмента и заготовки // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2011. № 2. С. 38.
13. Заковоротный В.Л., Бордачев Е.В., Алексейчик М.И. Динамический мониторинг состояния процесса резания // СТИН. 1998. № 12. С. 6.
14. Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Нгуен Суан Тьем. Моделирование деформационных смещений инструмента относительно заготовки при точении // Вестник ДГТУ. 2010. Т. 10, № 7. С. 1005.
15. Altintas Y., Budak E. Analytical prediction of stability lobes in milling // Ann. CIRP 44. 1995. P. 357.
16. Balachandran B. Non-linear dynamics of milling process // Philos. Trans. Roy. Soc. 2001. Vol. 359. P. 793.
17. Davies M.A., Pratt J.R. The stability of low immersion milling // Ann. CIRP. 2000. Vol. 49. P. 37.
18. Gousskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A. Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2002. Vol. 7. P. 207.
19. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
20. Анищенко В.С. Атракторы динамических систем // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 1. С. 109.
21. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. 1987. 424 с.
22. Li T.-Y, Yorke J.A. Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. Vol. 82. P. 982.
23. Lorens E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20. P. 130.
24. Dorfman J.R. An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics. Cambridge University Press, 1999. 288 p.
25. Бобров В.Ф. Основы теории резания металлов. М.: Машиностроение, 1975. 344 с.

26. *Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Нгуен Суан Тьем, Рыжкин М.Н.* Моделирование динамической связи, формируемой процессом точения, в задачах динамики (скоростная связь) // Вестник ДГТУ. 2011. Т. 11, № 2. С. 137.
27. *Заковоротный В.Л., Фам Динь Тунг, Нгуен Суан Тьем, Рыжкин М.Н.* Моделирование динамической связи, формируемой процессом точения, в задачах динамики (позиционная связь) // Вестник ДГТУ. 2011. Т. 11, № 5. С. 30.
28. *Feigenbaum M.J.* The transition to a periodic behavior in turbulent systems // Commun. Math. Phys. 1980. Vol. 77, № 1. P. 65.
29. *Кабалдин Ю.Г.* Самоорганизация и нелинейная динамика в процессах трения и изнашивания инструмента при резании. Комсомольск-на-Амуре: Изд-во КнАГТУ, 2003. 175 с.

*Поступила в редакцию* 18.03.2014  
*После доработки* 5.05.2014

## **INFLUENCE OF A FLEXURAL DEFORMATION OF A TOOL ON SELF-ORGANIZATION AND BIFURCATIONS OF DYNAMICAL METAL CUTTING SYSTEM**

*V. L. Zakovorotny<sup>1</sup>, Pham Dinh Tung<sup>2</sup>, V. S. Bykador<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Don State Technical University

<sup>2</sup>Le Quy Don Technical University

In the article we offer to consider case of a flexural deformation shifts of a tool when they are essential for nonlinear dynamics of cutting process. This situation is observed for drill deep holes, because a boring bar has a small values of a flexural stiffness. In that case an angle of cutting edge reduces and cutting forces increase if the deformation shifts also increased in velocity direction. The last circumstance becomes occasion for positive feedback that essentially changes dynamics of the cutting process. In the paper it is shown that process with positive feedback has the bifurcation. In the first place we can observe bifurcation of fixed points. In the second place we can watch if stiffness of cutting process is increased that limit cycles and chaotic attractors with limit region of attract are generated in neighborhood of fixed points. It is shown that attracting sets fundamentally depend on cutting parameters. The cutting parameters define cutting forces and the flexural deformation shifts of a tool.

*Keywords:* Dynamical system, attracting sets, chaotic attractor, bifurcations, cutting process of the materials.