УДК 51 (09) https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-96-114

О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях*

Е. М. Богатов

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,
филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»
Россия, 309516 Старый Оскол Белгородской обл., мкр. Макаренко, 42
E-mail: e.bogolyubscky@yandex.ru
Поступила в редакцию 28.04.2018, принята к публикации 29.10.2018

Цель. Целью работы является исследование развития метода неподвижной точки и теории степени отображения, связанных с именами П. Боля, Л. Брауэра, К. Борсука, С. Улама и др. и его применения к изучению поведения траекторий динамических систем и устойчивых состояний упорядоченных сред. **Метод.** Исследование основано на анализе фундаментальных работ перечисленных математиков 1900–1930 гг., а также более поздних результатов Н. Левинсона, Т. Воловика, В. Минеева, Дж. Толанда и Х. Хофера прикладного характера. **Результаты.** Работы Брауэра внесли существенный вклад в теорию разрешимости нелинейных уравнений вида $f(x) = x$ в конечномерной постановке. Этому предшествовало изучение сингулярных точек векторных полей, предпринятое А. Пуанкаре, а также доказательство теоремы Боля о невозможности отображения круга на свою границу. Первым математиком, использовавшим метод неподвижной точки в изучении систем дифференциальных уравнений, был Боль. Эта тема получила своё продолжение через 40 лет в работах Левинсона, который показал наличие в детерминированных диссипативных динамических системах хотя бы одного периодического решения. Введённое Брауэром фундаментальное понятие степени отображения $(\deg f)$ «заиграло» в самых неожиданных ситуациях. Исследования Воловика и Минеева выявили прямую зависимость дефектов упорядоченных сред от топологического инварианта $\deg f$, характеризующего отображение f окрестности особой точки на сферу. Другое нестандартное применение степени отображения обнаружили Толанд и Хофер при изучении некоторых гамильтоновых систем. Вычисление $\deg f$ для отображений специального вида помогли им доказать существование периодических, гомоклинических и гетероклинических траекторий указанных систем. **Обсуждение.** Метод неподвижной точки и степень отображения – основные инструменты качественных методов решения нелинейных уравнений. Они оказались востребованными не только в рамках математики, но и в приложениях, причём эта тенденция, по-видимому, будет сохраняться и при переходе к бесконечномерному случаю.

Ключевые слова: история нелинейного функционального анализа, индекс Кронекера–Пуанкаре, качественные методы, топологические методы анализа, степень отображения, теорема о неподвижной точке, теорема об антиподальном отображении, устойчивые неоднородные состояния в упорядоченных средах, динамические системы, хаотическая динамика.

Образец цитирования: Богатов Е.М. О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 96–114. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-96-114

Благодарности: Автор выражает благодарность профессору Р.Р. Мухину (СТИ НИТУ МИСиС, Старый Оскол) за постановку задачи и полезные обсуждения, профессору Ю.Е. Гликлиху (ВГУ, Воронеж) за консультации по топологическим методам анализа и знакомство с рукописью, а также В.П. Богатовой за помощь в доступе к первоисточникам и перевод с немецкого.

*Часть результатов данной работы докладывалась на XXXVII годичной научной конференции СПбФ ИИЕТ РАН, секция история математики и механики [1]. (XXXVII годичная международная научная конференция Санкт-Петербургского отделения Национального комитета по истории и философии науки и техники Российской академии наук: Коммеморативные (юбилейные) практики в истории российской науки).

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-96-114

On the development of qualitative methods for solving nonlinear equations and some consequences

E. M. Bogatov

Stary Oskol Technological Institute
of National Research University of Science and Technology «MISIS»
42, mkr. Makarenko, 309516 Stary Oskol, Belgorod region, Russia
E-mail: e.bogolyubscky@yandex.ru

Received 28.04.2018, accepted for publication 29.10.2018

Aim. The aim of the paper is investigation of the development of the fixed-point method and mapping degree theory associated with the names of P. Bohl, L. Brouwer, K. Borsuk, S. Ulam and others and its application to study of the trajectories of dynamical systems behavior and stable states of ordered media. **Method.** The study is based on an analysis of the fundamental works of the mentioned mathematicians 1900–1930's, as well as later results of N. Levinson, G. Volovik, V. Mineev, J. Toland and H. Hofer of an applied nature. **Results.** Brouwer made an essential contribution to the solvability theory of nonlinear equations of the form $f(x) = x$ in a finite-dimensional statement. This was preceded by the study of singular points of vector fields undertaken by H. Poincaré, as well as the proof of Bohl theorem on the impossibility of mapping a disk onto its boundary. The first mathematician who used the fixed point method in the study of systems of differential equations was Bohl. This theme was continued 40 years later in the works of Levinson, who showed the existence at least one periodic solution in deterministic dissipative dynamical systems. The fundamental concept of the mapping degree (deg f) introduced by Brouwer «began to play» in the most unexpected situations. Investigations of Volovik and Mineev revealed a direct dependence of ordered media defects on the topological invariant $\deg f$, characterizing the transformation f of a neighborhood of a singular point onto the sphere. Another non-standard application of the mapping degree was discovered by Toland and Hofer in the study of some Hamiltonian systems. Calculating $\deg f$ for mappings of a special kind helped them to prove the existence of periodic, homoclinic, and heteroclinic trajectories of these systems. **Discussion.** The fixed point method and mapping degree are the basic tools of qualitative methods for solving nonlinear equations. They proved to be in demand not only within the framework of mathematics, but also in applications, and this trend, apparently, will persist even in the transition to the infinite-dimensional case.

Key words: history of nonlinear functional analysis, Kronecker–Poincaré index, qualitative methods, topological methods of analysis, the degree of mapping, fixed point theorem, antipodal theorem, stable inhomogeneous states in ordered media, dynamical systems, chaotic dynamics.

Reference: Bogatov E.M. On the development of qualitative methods for solving nonlinear equations and some consequences. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 96–114. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-96-114

Acknowledgements. The author thanks Professor R. R. Mukhin (Stary Oskol Technological Institute of «MISIS») for posing the problem and useful discussions, Professor Yu. E. Gliklikh (Voronezh State University) for advice on topological methods of analysis and familiarity with the manuscript, as well as V.P. Bogatova for help with access to primary sources and translation from German.

Введение

Качественные методы, общая постановка которых была дана в работах А. Пуанкаре (см. ниже), получили свое естественное продолжение в теории динамических систем. Росту интереса к этой теории предшествовали, во-первых, мемуар самого Пуанкаре 1912 г., содержащий его последнюю геометрическую теорему, и, во-вторых – работа Дж. Биркгофа 1927 г., посвящённая самим динамическим системам. Указанные исследования Биркгофа и Пуанкаре достаточно полно проанализированы в историко-математической литературе, чего нельзя сказать про работы их предшественников и про результаты их последователей.

Известно, что Анри Пуанкаре является родоначальником топологии (Analysis Situs), с точки зрения которой любое тело (область в трёхмерном пространстве) можно считать эквивалентным, «*качественно не отличимым*» от шара, если его можно превратить в шар путём непрерывной деформации [2, с. 635; 3, с. 100] [1]. Данная идея была развита голландским учёным Л. Брауэром в 1911 г., который пришёл к определению топологически (точнее говоря, *гомотопически* – см. ниже) эквивалентных функций и, как следствие, уравнений[2] с областью определения в конечномерном пространстве.

Вокруг этих соображений и будет строиться изложение материала данной статьи. Точнее говоря, основной своей задачей автор считает поиск ответа на следующие вопросы:

- что предшествовало вышеуказанным научным достижениям;
- какая между ними причинно-следственная связь;
- чем были мотивированы данные исследования;
- какое они нашли продолжение в работах отечественных и зарубежных учёных;
- какое они нашли применение в изучении устойчивых состояний упорядоченных сред и динамических систем.

Относительно последнего вопроса отметим, что существование дефектов в некоторых средах есть следствие их внутренней симметрии (например, наличие дислокаций является следствием периодичности кристаллической решётки). Однако прямая зависимость между структурой вещества и типами персистентных дефектов в нём была установлена лишь в 1976 г. (советскими физиками Г. Воловиком и В. Минеевым [5]) с помощью степени отображения, на которой и будет, по существу, сосредоточено внимание.

Автор не претендует на охват эволюции всего спектра качественных методов, а только наиболее известной и значимой его части, разработанной в первой трети XX в., относящейся к нелинейному функциональному анализу, имеющему выход на физические приложения.

Настоящая статья является продолжением работы, начатой в [6–7].

1. Краткая предыстория. Характеристика Кронекера. Индекс Пуанкаре

В своём мемуаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» [8; 9, с. 12–13] А. Пуанкаре определяет качественные методы решения дифференциальных уравнений, как *такие методы, которые позволяют исследовать свойства решений (существование, поведение на бесконечности, число нулей и т.п.), не имея в наличии самого решения, точного или приближённого*. Этот же подход, безусловно, можно применить и к интегральным уравнениям, в том числе нелинейным.

Одним из первых учёных, которые занимались изучением нелинейных интегральных уравнений, был русский математик А.М. Ляпунов. Его интерес к данному вопросу проявился уже в конце 1880-х гг.; он был обусловлен исследованиями по теории фигур равновесия вращающихся жидкостей (подробности см. в [7, с. 87–89]).

В ряду родоначальников качественных методов выделяется немецкий математик Леопольд Кронекер, который, в частности, осуществил развитие принципа замкнутого подхода в теории характеристик [10].

Поясним данный принцип на простом примере, следуя, в основном, изложению Н.Г. Четаева [11, с. 280–286]. Пусть имеется участок суши, изрезанный водными преградами (реками, озёрами и т.п.). Если по такому участку проделать какой-нибудь замкнутый путь, то, очевидно, столько раз придётся выходить из воды на сушу, сколько раз входить с суши в воду. Аналогично и в пространстве: если в нём имеются как-то расположенные тела R_α и некоторая замкнутая линия L, то при обходе линии L в каком-либо направлении мы будем столько раз выходить из тел R_α, сколько раз в них входили.

[1] На эту же, «топологическую» точку зрения стали, по существу, и художники-кубисты по инициативе соотечественника и современника Пуанкаре Поля Сезанна, когда они стали рассматривать натуру как совокупность простых форм – сфер, конусов, цилиндров [4, с. 424].

[2] Это привело Брауэра к теореме о неподвижной точке, см. ниже.

Этот принцип можно формализовать в n-мерном пространстве следующим образом. Пусть уравнение $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ задаёт поверхность, а система $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ задаёт замкнутую кривую: $x_i(0) = x_i(2\pi)$. Тогда функция Φ при изменении t от 0 до 2π, обращаясь в нуль, может столько раз переходить от отрицательных значений к положительным, сколько раз она переходила от положительных значений к отрицательным.

Следующим этапом обобщения явилось рассмотрение системы дифференцируемых функций $F = \{F_0, F_1, \ldots, F_n\}$ в $\mathbb{R}^n$. Кронекер показал, что полуразность числа точек входа и выхода линии (hk), образуемой системой уравнений $F_j = 0$, $(j \neq h,\ j \neq k)$, через поверхность $F_h = 0$ есть величина постоянная (обозначаемая χ) [10, с. 161]. Он получил также интегральное представление для $\chi = \chi^{(F)}$, которое для случая трёхмерного пространства имеет вид [10, с. 170]:

$$\chi(F) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left(F_0^2 + F_1^2 + F_2^2\right)^{\frac{3}{2}} \left[F_0 dF_1 dF_2 - F_1 dF_0 dF_2 + F_2 dF_0 F_1\right], \tag{1}$$

где S – поверхность $F_3 = 0$, а интегрирование ведётся в смысле поверхностного интеграла 2-го рода[3]. Из интегрального представления χ для n-мерной системы F Кронекер вывел следующее утверждение [10, с. 184; 12, с. 133].

Теорема Кронекера. *Если характеристика $\chi^{(F)}$ не равна нулю, то отображение $(F_0, F_1, \ldots, F_j, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обращается в нуль в полупространствах $\{x \in \mathbb{R}^n; F_j(x) < 0\}$ и $\{x \in \mathbb{R}^n; F_j(x) > 0\}$.*

Идеи Кронекера были развиты Пуанкаре[4] в работах [8; 14]. В первой из указанных работ основное внимание было уделено изучению характеристик дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \tag{2}$$

где X и Y – полиномы. Для исследования сингулярных точек ($X = 0$, $Y = 0$) интегральных кривых уравнения (2) Пуанкаре проектировал их на сферу S^2 и отслеживал поведение величины Y/X при движении вектора $\bar{a}(X, Y)$ по замкнутой траектории (так называемому *циклу*) в положительном направлении. Обозначая через h число скачков, совершённых отношением Y/X от $-\infty$ до $+\infty$ и через k – число таких же скачков от $+\infty$ до $-\infty$, Пуанкаре определил *индекс цикла* равным величине $(h - k)/2$, на основе значений которого делался вывод о существовании сингулярной точки[5] векторного поля $\bar{a}$ (если бесконечно малый цикл содержит внутри себя особую точку, то его индекс равен ± 1, а если не содержит, то индекс равен нулю) [9, с. 39–40]. Как сам Пуанкаре впоследствии напишет [3, с. 101], изучение кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, явилось одной из причин для появления «*Analysis Situs*» – науки, в которой главная роль уделяется не *количественным* атрибутам фигур (формам, объёмам, числом граней или рёбер), но их *качественным* свойствам (взаимному расположению, размерности, связности и т.п.).

Продвигаясь в этом направлении [14], Пуанкаре переходит к системам дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \tag{3}$$

где Z также является многочленом переменной z и определяет *индекс поверхности* $F(x, y, z)$=0 решений (3) через интеграл Кронекера (1) [9, с. 221]. Данный индекс оказался равным разности между числом положительных и числом отрицательных особых точек, принадлежащих этой поверхности [9, с. 227].

[3]Более полную информацию о развитии понятия характеристика Кронекера и его предыстории см. в [12].

[4]Об этом достаточно подробно написано Ж. Мавэном, см. [13].

[5]Соответствующая теорема (существования) доказана для дифференцируемого векторного поля [8, с. 405].

2. Исследования П. Боля. Теорема о неподвижной точке. Применение к динамическим системам

Одним из первых математиков, на практике реализовавших подходы качественного характера к решению задач механики и теории дифференциальных уравнений, был латвийский учёный Пирс Боль. Он закончил магистратуру физико-математического факультета Дерптского университета в 1890 г., а в 1900-м защитил диссертацию «О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых к механике»[6] (она была выполнена под руководством ученика Вейерштрасса А. Кнезера) [16, с. 21–22]. Рассматривая в диссертации систему двух нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка на предмет существования ограниченных в некотором круге решений, Боль доказывает следующую геометрическую теорему о неподвижной точке [17, с. 98; 18, с. 9]:

Если дано непрерывное преобразование $\mathbf{u}$ круга с центром O в плоскость этого круга, причём для каждой точки M окружности угол между $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{M\mathbf{u}(M)}$ всегда острый (или тупой), то по крайней мере одна точка круга отображается в себя.

Из этого утверждения, как следствие, у Боля получилась теорема о невозможности непрерывного отображения круга B $(x^2 + y^2 \leq r^2)$ на свою границу (теорема о «неретрагируемости»[7] круга на свою границу): *не могут существовать две функции ξ и η от x и y, непрерывные в круге, удовлетворяющие на границе этого круга условию* $\xi = x$, $\eta = y$ [17, с. 99].

Последняя теорема применяется для доказательства существования по крайней мере одного решения динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = h(x, y, t), \quad 0 \leq t < \infty, \tag{4}$$

если известно, что граница круга B пересекается траекториями (4) изнутри наружу [17, с. 100–101].

Глава I диссертации Боля заканчивается следующими замечаниями.

«...Мы могли бы очень просто доказать эту теорему[8] для трёх переменных, если бы допускали соображения геометрического характера. В таком случае для нашей цели было бы достаточно, например, следующего замечания. Представим себе шар, покрытый сетью, лежащей на шаре без складок. Петли пусть будут переменными, причём их можно предполагать сколь угодно малыми. Тогда нельзя удалить шар из сети только сдвигами и складыванием сети на шаре. Но доказательство, действительно полное, строгое и чисто аналитическое, может быть, не имеет простого вида».

В качестве примера приложения полученных результатов Боль приводит анализ движения механической системы вблизи положения равновесия под воздействием возмущающих сил при условии, что потенциал сил имеет там грубый минимум (то есть около положения полной неустойчивости) [17, гл. IV, § 25–27]. Применение теоремы о разрешимости системы вида (4) позволило ему прийти к выводу о том, что для малых возмущений существует движение, которое во все моменты времени происходит вблизи рассматриваемого положения равновесия. Для заданного начального положения существует такая начальная скорость, при которой движение продолжает оставаться вблизи положения равновесия с возрастанием времени.

Дальнейшее развитие метод неподвижной точки получил в исследовании Боля «*О движении механической системы вблизи положения равновесия*», опубликованном в 1904 г. в известном европейском *Журнале Крелле* [20]. В этой работе он впервые доказал ряд важных топологиче-

[6] Работа была переведена на французский язык и издана в 1910 г. в Известиях французского математического общества [15].

[7] Данное понятие в более общем виде было введено и использовано в конце 1930-х гг. К. Борсуком (см. [19]).

[8] Имеется в виду теорема о неретрагируемости, см. выше.

ских теорем о непрерывных отображениях и применил их к исследованию динамических систем специального вида.

Самостоятельно доказав аналог теоремы Кронекера[9] для системы функций, заданных в параллелепипеде, Боль вывел на её основе следующую теорему[10] [17, с. 205]:

Пусть задана область G, определённая неравенствами $-a_i \leq x_i \leq a_i$, $i = 1, \dots n$. В этой области определены непрерывные функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ от x, не исчезающие одновременно. Тогда на границе G имеется точка $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ такого рода, что $f_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = Nu_i$, $N < 0$, $i = 1, \dots n$.

Из последнего утверждения вытекает теорема о наличии неподвижной точки при непрерывном отображении f куба в себя: достаточно рассмотреть отображение $f(x) = x - \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – отображение куба в себя (см. комментарий Л.Э. Рейзиня и И.А. Хенинь в [17, с. 504]).

Считаем уместным привести здесь ещё одно высказывание Боля.

«...Эта теорема[11] может быть легко перенесена и на случай других поверхностей; возможно также распространение её на случай многообразий нечётной размерности. Как последняя теорема, так и предыдущая могут быть использованы для отыскания периодических решений дифференциальных уравнений. В частности, с помощью последней из указанных теорем можно доказать существование периодических движений (в широком смысле) тяжёлого твёрдого тела...» [17, с. 205].

Обратим внимание на то, что Боль не только сформулировал теорему о неподвижной точке для n-мерных поверхностей, но и использовал её для исследования динамических систем. В частности, он исследовал движения механической системы вблизи положения равновесия, описываемые неавтономной системой дифференциальных уравнений, если коэффициенты в выражении для кинетической энергии и силовая функция являются достаточно гладкими. После замены переменных уравнения Лагранжа этой системы приобрели у Боля следующий вид [17, с. 220–221; 16, с. 52]

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + p_i^2 x_i = X_i(x, \dot{x}, y, \dot{y}), & i = 1, \dots, m, \\ \ddot{y}_j - q_j^2 y_j = Y_j(x, \dot{x}, y, \dot{y}), & j = 1, \dots, n, \end{cases} \\ x = (x_1, \dots, x_m), \quad y = (y_1, \dots, y_n), \tag{5}$$

где X_i и Y_j – непрерывно дифференцируемые функции своих переменных, определённые вблизи $x = y = 0$ для всех $\dot{x}$ и $\dot{y}$ и при $x = y = \dot{x} = \dot{y}$ равные нулю вместе со своими первыми производными.

Целью данного его исследования явилось изучение многообразия тех видов движения, которые остаются вблизи начала координат при неограниченном возрастании t. Результаты, полученные Болем при использовании теоремы о неподвижной точке, можно описать следующим образом [17, с. 276; 16, с. 15].

Пусть $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ – достаточно малые величины. Если задать при $t = 0$ величины $x, \dot{x}, \dot{y}$ произвольно, то для этих заданных значений существует одно и только одно движение (рассматриваемое в фазовом пространстве $x, y, \dot{x}, \dot{y}$), проходящее через фиксированную точку $y_0 = y(0)$ и остающееся при всех $t \in [0, +\infty)$ в заданной фиксированной достаточно малой окрестности $\mathfrak{W}$ начала координат. Если же задавать x_0 и $\dot{x}_0$, то существует один и только один набор значений y_0 и $\dot{y}_0$, для которых движение остаётся в $\mathfrak{W}$ при $-\infty < t < \infty$.

---

[9] По-видимому, Боль не был знаком с работой Кронекера [10], поскольку при использовании интеграла вида (1) он не даёт никаких ссылок и комментариев (см. [17, с. 209–213]).

[10] Это утверждение является аналогом теоремы Борсука–Улама, доказанной почти на 30 лет позже (см. ниже).

[11] Имеется в виду теорема, эквивалентная теореме о неподвижной точке. После Боля теорему о неподвижной точке для исследования разрешимости дифференциальных уравнений первыми, по-видимому, применили Дж. Биркгоф и О. Келлог [21].

3. Результаты Брауэра. Степень отображения

Ещё одним учёным, создававшим качественные методы решения дифференциальных уравнений (в данном случае вида $dy/dx = f(x,y)$) был голландский математик Лейтен Брауэр. Мотивированный своим философским интересом в области оснований геометрии, он начал работу над пятой проблемой Гильберта после окончания университета, что привело его к изучению топологии [22, с. 951; 23, с. 127–128]. Как и Пуанкаре, Брауэр изначально задался целью доказать существование сингулярной точки $\bar{a}$ векторного поля, определяемого непрерывной функцией $f(x,y)$ на сфере S^2.

Брауэр был в какой-то степени «самородком», поскольку не принадлежал к ведущим европейским математическим школам того времени – немецкой, французской или итальянской. Как отмечают биографы Брауэра, первоначальный его замысел развивался на протяжении нескольких работ. Так, особые точки векторных полей исследовались им в работах [24–26] в 1909–1910 гг.[12], итогом которых явилось доказательство теоремы о том, что любое непрерывное векторное поле на сфере имеет хотя бы одну точку сингулярности [24, с. 858]. Как следствие, появились теоремы о том, что непрерывное отображение сферы S^2 в себя имеет неподвижную точку [26, с. 184].

Отметим, ссылаясь на Г. Фрейденталя [27, с. 302], что в работе [25, с. 733] Брауэр выделяет класс непрерывных векторных полей с конечным числом сингулярных точек, которые (поля) могут быть трансформированы друг в друга непрерывным образом. Данное действие привело его позднее к идее *гомотопных* преобразований непрерывных функций, аналогичных гомеоморфным (непрерывным в обе стороны и однозначным) преобразованиям областей, фигурирующих в топологии. Эта идея сыграла положительную роль, в частности, в обобщении теоремы о неподвижной точке на n-мерный случай.

Дальнейшие продвижения Брауэра можно отследить, изучая его неопубликованный учебник по векторному анализу [28], как это сделал Д.М. Джонсон [23, с. 143–145]. Логика построения и подачи материала в *Potentiaaltheorie en Vectoranalyse* позволяет выделить два уровня обобщения. Вначале Брауэр определяет индекс поверхности для векторных полей, заданных на n-мерной гиперсфере, в терминах (n-мерного) телесного угла, «пробегаемого» вектором поля по малому элементу поверхности. В дальнейшем он осознал, что результат перемещения вектора вдоль поверхности есть не что иное, как алгебраическое число «окутываний» или, (по выражению П.С. Александрова [29, с. 154]), *кратность покрытия* поверхности S её образом $f(S)$ с учётом ориентации.

Поясним сказанное на примере для $n = 2$. Пусть на окружности S^1 задано положительное направление. Тогда её отображение в себя можно считать выполненным в два этапа (см., например, [30, с. 136]). Сначала окружность отображается в некоторую кривую, которая затем стягивается в S^1 (рис. 1). Кратность покрытия, соответствующая рис. 1 (с учётом ориентации), равна 2.

Во избежание трудностей, связанных с разглаживанием возможных складок $f(S) = S'$ и определением границ образа, Брауэр разбивает сферу на конечное число малых областей S_i, которые переходят при отображении f в малые области S'_i. Тогда суммарная кратность p покрытия S_i с положительной ориентацией минус кратность q покрытия с отрицательной ориентацией (см. иллюстрацию[13] на рис. 2) не зависит, как оказалось, от разбиения S и S' и от номера i.

[12] Для лучшего понимания роли указанных работ весьма полезными представляются комментарии Г. Фрейденталя в [27].

[13] На рис. 2 изображены фрагменты симплициального разбиения сферы S^2 – симплексы S_1, S_2, S_3, имеющие определённую ориентацию – «закрученность» вихря в положительную или отрицательную сторону. При отображении f они покрывают ориентированный симплекс S^*.

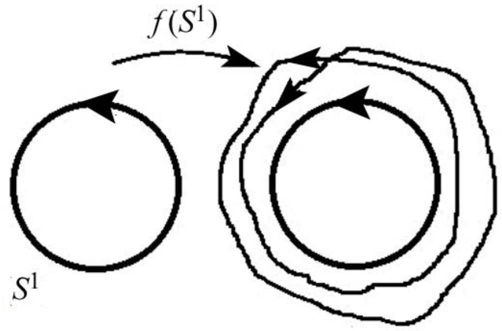

Рис. 1. Отображение окружности в себя

Fig. 1. Transformation of a circle to itself

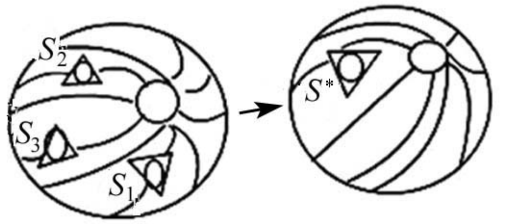

Рис. 2. Отображение сферы в себя [30, с. 135]

Fig. 2. Transformation of a sphere to itself

Полученное число $\gamma = p - q$ Брауэр назвал сначала, в учебнике [28, с. 15] *индексом* (очевидно, под влиянием работ Пуанкаре [8, 14]), а затем, в письме к Гильберту, – *степенью отображения* (*Der Grad Abbildung*) f [27, с. 421–422].

Строгое изложение результатов, относящихся к степени отображения ($\deg f$), было дано Брауэром в его фундаментальной работе *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, опубликованной в 1912 году в журнале *Mathematische Annalen* [31]. В этой статье Брауэр определяет $\deg f$ для непрерывного отображения f, как степень приближающих его симплициальных отображений, опираясь на тот (доказываемый им) факт, что непрерывно «деформируемые» друг в друга (то есть гомотопные) отображения имеют одинаковую степень.

В качестве одного из важнейших приложений степени, принесших Брауэру мировую известность, была теорема о неподвижной точке [31, с. 115]:

Если $\deg f \neq (-1)^{n+1}$, то непрерывное отображение сферы S^n в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.

Следствием явилась *теорема о существовании неподвижной точки* при непрерывном преобразовании произвольного n-мерного элемента в себя [31, с. 115]. Кроме того, понятие степени отображения было использовано Брауэром при решении проблемы инвариантности размерности, поставленной ещё Пуанкаре [23, с. 146–152; 32].

Один из конечномерных вариантов обобщения теоремы Брауэра принадлежит представителям польской математической школы Каролю Борсуку и Станиславу Уламу. В упрощённом варианте теорема Борсука–Улама выглядит так (см., например, [33, с. 21]):

Теорема B-U. *Если функция f непрерывна на n-мерной сфере S^n и обладает свойством антисимметрии (то есть $f(P') = -f(P)$, где P и P' – концы одного и того же диаметра сферы), то на этой сфере найдётся точка P_0, в которой функция f обращается в нуль.*

Данная теорема была сформулирована Уламом и доказана Борсуком в 1933 г. [34, с. 178]. Из неё сразу следует существование неподвижной точки у нечётного отображения F на сфере S^n, а также более наглядная «теорема о погоде» [35, с. 20].

В каждый момент времени на Земном шаре имеется пара диаметрально противоположных точек, в которых одинаковы как температура, так и давление.

Развивая указанное направление, Борсук доказал ещё два утверждения, равносильных теореме B–U.

1. *Теорема об антиподальном отображении. Любое сферически симметричное $f(P') = f(P)$ отображение сферы S^n в себя является существенным (не гомотопно постоянному отображению).*
2. *В любом замкнутом покрытии сферы S^n, состоящем из множеств $M_1, \ldots, M_{n+1}$, по крайней мере одно из этих множеств содержит пару антиподальных точек.*

При этом вторая теорема была сформулирована и доказана советскими математиками Лазарем Люстерником и Львом Шнирельманом в 1930 г. как лемма (это произошло в контексте доказательства гипотезы Пуанкаре о трёх геодезических [36, с. 30]).

4. Применение теории степени отображения в изучении устойчивых состояний упорядоченных сред

Рассмотрим области вырождения изотропных ферромагнетиков (веществ, обладающих спонтанным магнитным моментом $\mathbf{M}$), следуя Григорию Воловику и Владимиру Минееву [37]. Равновесное значение $\mathbf{M}$ обеспечивает минимум магнитной энергии при данной температуре. Если пренебрегать энергией магнитной анизотропии, то все состояния ферромагнетика, отличающиеся направлением момента $\mathbf{M}$, обладают одинаковой энергией (они являются вырожденными). Откладывая все возможные векторы намагниченности из одной и той же точки O, мы получим сферическую область вырождения S^2.

Если направление намагниченности совпадает с направлением радиуса-вектора $\mathbf{r}$ в каждой точке изотропного ферромагнетика, то в начале координат имеется особая точка «ёж». Поле $\mathbf{M}$ в «еже» сопоставляет каждой точке сферы Σ произвольного радиуса, окружающей особую точку, одну точку сферы S^2, на которой меняется $\mathbf{M}$. Образ сферы Σ на сфере S^2 можно представить в виде эластичной плёнки, один раз обтягивающей эту сферу. Таким образом поле $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ задаёт отображение f: $\Sigma \to S^2$ степени $\gamma = 1$. При этом, если «иголки ежа» направлены внутрь, то $\deg f = -1$. В изотропном ферромагнетике классы особых точек находятся в однозначном соответствии с классами отображений $f : \Sigma \to S^2$. Каждый класс отображений характеризуется индексом $\gamma = \deg f$, играющем роль *топологического заряда* (при слиянии особых точек степени отображений складываются). Указанные классы образуют группу, называемую *гомотопической группой размерности* 2.

Воловик и Минеев также установили, что при рассмотрении дефектов одноосных нематических жидких кристаллов [38, с. 156–157] и особых точек A-фазы ^{3}He [39, с. 87] возникает похожая ситуация. Ими было замечено, что сами сверхтекучие свойства фаз легкого изотопа гелия в значительной мере диктуются топологией[14] [37, § 15].

5. Применение метода неподвижной точки к исследованию диссипативных систем

Теория преобразований поверхностей, как метод исследования дифференциальных уравнений также восходят к Пуанкаре. В работе «Об одной геометрической теореме» (1912) [40], [41, с. 775–807] он рассматривает траектории движения точек динамической системы, как кривые на трёхмерном многообразии M. Пуанкаре представлял, что данные кривые отсекаются некоторой поверхностью S, лежащей в многообразии M. С течением времени движущаяся точка $P \in M$

[14]В 2014 году российские физики Г. Воловик и В. Минеев были награжены премией им. Ларса Онзагера (Lars Onsager Prize) Американского физического общества «за вклад во всестороннюю классификацию топологических дефектов конденсированных фаз вещества с нарушенной симметрией, что привело к предсказанию половиных квантовых вихрей в сверхтекучем ^{3}He и связанных с ним системах».

описывает некоторую дугу и встречает поверхность S в последующих точках $P_1, P_2, \dots, P_n$. Тем самым осуществляется отображение поверхности S в себя (которое переводит точку P в единственную точку P_1) [41, с. 781].

В 1944 г. американский математик, ученик Норберта Винера, Норман Левинсон ввёл понятие детерминированных диссипативных систем (систем класса D) [42, с. 724]. Динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y, t), \\ \dot{y} = G(x, y, t) \end{cases} \tag{6}$$

с периодическими с периодом L по t правыми частями была названа им *системой класса* D, если существует такое положительное число R, что любое решение $(x(t), y(t))$ этой системы остаётся в круге B_R радиуса R с центром в начале координат.

К системе вида (6) сводится, например, уравнение колебания маятника с вибрирующим подвесом, рассмотренное Н.Н. Боголюбовым

$$\ddot{y} + \lambda\dot{y} + f(t, y) = 0$$

(подробности см., например, в [43, с. 75]).

Соответствующая динамическая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda x - f(t, y), \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Левинсон представил решение системы (6) в виде

$$\begin{cases} x_n = x(x_0, y_0, t_0 + nL), \\ y_n = y(x_0, y_0, t_0 + nL), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда в силу периодичности F и G получается

$$\begin{cases} x_{n+m} = x(x_m, y_m, t_0 + nL), \\ y_{n+m} = y(x_m, y_m, t_0 + nL). \end{cases} \tag{7}$$

Обозначив (x_n, y_n) через P_n и следуя Пуанкаре, Левинсон определяет преобразование плоскости (x, y) в себя вида $TP_0 = P_1$. При этом T^n переводит точку P_0 в P_n и система (7) равносильна

$$T^{n+m}P_0 = T^n P_m = T^n T^m P_0.$$

Поскольку решения (6) непрерывны по отношению к изменению начальных условий, отображение T непрерывно. Таким образом, изучение поведения решений (6) заменяется исследованием непрерывных преобразований T плоскости (x, y) в себя. Левинсон показал, что при многократном применении оператора T к шару B_R существует инвариантное множество I, определяемое (при подходящем k) следующим образом [42, с. 725]:

$$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{nk}(B_R).$$

Тогда мы оказываемся в рамках применимости теоремы Брауэра о неподвижной точке, что дало Левинсону возможность доказать следующую теорему:

Теорема. *Каждая система класса D имеет по крайней мере одну неподвижную точку преобразования T.*

Из данной теоремы следует, что система (6) имеет хотя бы одно периодическое решение.

Отметим, что Левинсон был хорошо знаком с работами Боля и включил некоторые его результаты в учебник по дифференциальным уравнениям [44, с. 454].

6. Применение теории степени отображения к исследованию хаотической динамики

Интенсивное развитие теории динамических систем в 1960–70 гг. опиралось на математический аппарат функционального анализа и топологии. Одно из ярких применений теории степени отображения к доказательству существования периодических, гомоклинических и гетероклинических траекторий гамильтоновой динамической системы было получено Хельмутом Хофером[15] и Джоном Толандом[16] в 1984 г. В работе [45] они рассмотрели гамильтонову систему

$$\begin{cases} \dot{q} = Sp(t), \\ -\dot{p} = V'(q(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{8}$$

для которой функционал энергии имеет вид

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(Sp,p) + V(q), \quad (q,p) \in E \times E.$$

Здесь E – евклидово пространство со скалярным произведением, $V(q)$ – потенциал системы, а квадратичная форма (Sp,p) – индефинитна, но не вырождается[17].

Точнее говоря, Хофер и Толанд предполагали, что выполняется условие

$$\begin{cases} S: \; E, \\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \le \lambda_3 \ldots \le \lambda_n, \end{cases} \tag{9}$$

где E - симметричный линейный оператор, λ_i – собственные значения оператора S.

Условия на нелинейную часть H потребовали введения дополнительных обозначений.

Пусть **e** – фиксированный единичный собственный вектор S, соответствующий отрицательному собственному значению λ_1 и пусть $F = \{\mathbf{e}\}^{\perp}$. Если обозначить через T сужение S на F, то оператор T: $F \to F$ положительно определён[18]. Используя это, можно показать, что множество

$$\Sigma = \{q \in E : (S^{-1}q, q) < 0\}$$

является дизъюнктным объединением двух открытых конусов Σ^+ и Σ^-, где

$$\Sigma^{\pm} = \{q \in \Sigma : \pm(q, \mathbf{e}) > 0\}.$$

Обозначая через P замыкание конуса Σ^+ авторы [45] вводят в E частичную упорядоченность следующим образом:

$$q_1 \le q_2 \Leftrightarrow q + 2 - q_1 \in P.$$

[15]Немецко-американский математик. Член Национальной академии наук США.

[16]Английский математик. Член Лондонского королевского общества по развитию знаний о природе.

[17]Гамильтонианы подобного вида возникают в нелинейной механике, например, при моделировании распространения солитоноподобных волн в каналах с водой [46].

[18]В соответствующей индефинитной метрике подпространство, натянутое на собственные векторы S, будет представлять собой световой конус.

Ключевым моментом является то, что, если решение (8) – траектория (p, q) гамильтоновой системы – принадлежит энергетической поверхности $H = 0$ и если потенциал $V(q)$ положителен, то $Sp \in \Sigma$. Таким образом, вектор скорости $\dot{q} = Sp$ связан ограничением принадлежности поверхностям Σ^+ или Σ^- и может проходить от одной этой поверхности к другой (или вообще вне Σ) только, если $V(q) = 0$. Следовательно, если C – ограниченная область q-пространства, где $V > 0$ и $q(t_0) \in C$, то величина q должна стремиться к границе C при $t \to \pm\infty$. Изучение данной монотонности и привело Толанда с Хофером к главному результату[19] (см. ниже).

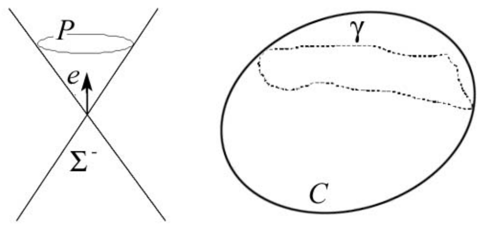

Рис. 3. Существование замкнутой траектории, лежащей в области C и проходящей через точку некоторого множества γ [45, с. 398]

Fig. 3. The existence of a closed trajectory lying in the domain C and passing through a point of certain set γ

Предположим для простоты, что граница C строго выпукла (за исключением, возможно, мест, где $V' = 0$) и $V > 0$ во внутренности C (см. пример на рис. 3).

Тогда справедлива

Теорема. *Если $V'(q) \neq 0$ при $q \in \partial C$, то у системы (8) существует периодическая орбита $\{(p(t), q(t)), t \in \mathbb{R}\}$ с периодом T^*, такая, что и $(p(T^*), q(T^*)) \in \partial C \times \{0\}$.*

Для доказательства было введено отображение $\tau = \tau(q, p)$ *времени выхода траектории из области* C и с его использованием сконструировано множество $\Gamma^+ = \{q \in \partial C : \tau(q, 0) > 0;$ $(SV'(q), e) > 0\}$. Авторы [45] также определили несколько специальных вспомогательных непрерывных функций:

h – гомеоморфизм: $S^{n-1} \backslash \{-e\} \to \mathbb{R}^{n-1}$;

$\theta : \partial C \to S^{n-1} \backslash \{-e\} (h(\theta) : \partial C \to \mathbb{R}^{n-1})$;

k – ретракция $S^{n-1} \to \partial C$.

Функция $\theta = \theta(q)$ была составлена из двух частей, содержащих нормированные выражения $-SV'(q)$ и $Sp(\tau(q, 0))$ [45, с. 394].

Оставшаяся часть доказательства была проведена в 2 этапа:

1) к суперпозиции $h \circ \theta \circ k$ была применена теорема Борсука об антиподальном отображении: *существует такая точка x на сфере S^{n-1}, для которой $h(\theta(k(x))) = h(\theta(k(-x)))$*;
2) из определения и свойств функции θ, а также из выпуклости ∂C было выведено, что $k(x)$ и $k(-x)$ принадлежат Γ^+. Таким образом, траектория $T(t) = (p(t), q(t))$ остаётся в C.

Специальная структура Гамильтониана позволила доказать периодичность $T(t)$ на основе стандартных аргументов, используемых в небесной механике.

Существование *гомоклинических* орбит $\{T(t), t \in \mathbb{R}\}$ системы (8), таких, что

$$\lim_{|t| \to \infty} (q(t), p(t)) = (a, 0)$$

доказывается в предположении о наличии единственной точки $a \in \partial C$ для которой $V'(a) = 0$, и что $C \subset a + P$ (см. рис. 4).

Множество Γ, изображённое на рис. 4, имеет вид $\Gamma = \{q \in \partial C : \tau(q, 0) > 0\}$. Орбита остаётся в C при любом $t \geq 0$, для неё выполняется условие $q(0) \in \Gamma$.

Наличие указанной орбиты выводится на основе соображений, использующих свойства функции τ и вычисление степени отображения $\Phi_h = h \circ \Phi \circ h^{-1}$ в области $h(\Gamma)$, где

[19]Он будет приводиться в упрощённой форме и состоять из нескольких утверждений.

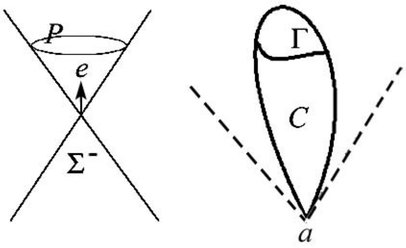

Рис. 4. Существование гомоклинической орбиты, чья траектория лежит в C и проходит через точку множества Γ [45, с. 399]

Fig. 4. The existence of a homoclinic orbit which trajectory lies in C and passes through the point of the set Γ

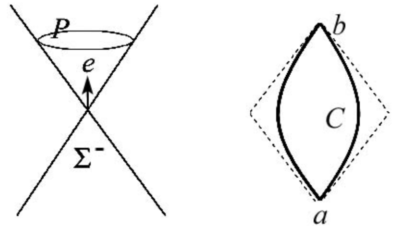

Рис. 5. Существование гетероклинической орбиты, чья траектория лежит в C и соединяет точки a и b [45, с. 401]

Fig. 5. The existence of a heteroclinic orbit which trajectory lies in C and connected a and b points

$h : \partial C\backslash\{a\}\to\mathbb{R}^{n-1}$ – гомеоморфизм, а Φ – непрерывная функция, равная скорости q_0 во время выхода траектории из области $\bar{\Gamma}$ при $p = 0$ [45, с. 401].

Сходная ситуация возникает и при доказательстве существования гетероклинических орбит $\{T(t), t \in \mathbb{R}\}$ системы (8), соединяющих точки a и b (рис. 5)

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to-\infty} q(t) = a, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} q(t) \quad \text{и} \quad \lim\limits_{|t|\to 0} p(t) = 0. \end{cases}$$

Соответствующий алгоритм состоит из двух шагов.

1. Определение семейства траекторий $T^\lambda \subset C \subset a + P_\varepsilon$, где P_ε – конус $\{q \in P : (S^{-1}q, q) + +\varepsilon||q||^2 \leq 0\}$, проходящих через точку b и стремящихся к ней при $t \to +\infty$ по аналогии с гомоклиническим случаем.
2. Выделение из семейства T^λ траектории, проходящей через точку a и стремящейся к ней при $t \to -\infty$, если $C \subset (a + P_\varepsilon) \cap (b - P_\varepsilon)$.

Цитируемые результаты Хофера и Толанда стали классическими и вошли во многие учебники (см., например, [47]).

Заключение

Качественные методы, берущие своё начало от работ Пуанкаре, Боля и Брауэра – метод неподвижной точки, теория степени отображения и др. нашли своё применение через многие десятилетия как в области математики, так и вне её. Указанными выше примерами, конечно, весь набор возможных применений этих методов не исчерпывается (см., например, [48]). Так, в этот набор не вошли довольно интересные приложения топологических методов анализа к теоретической химии [49], обнаруженные в 1980-х гг. и кристаллографии [50], полученные совсем недавно.

«Математическим» продолжением развития качественных методов после 1930-х гг. явилось распространение метода неподвижной точки и теории степени отображения на нелинейные операторные уравнения вида $Ax = 0$ в бесконечномерном пространстве[20]. Это было осуществлено силами Дж. Биркгофа, О. Келлога, Ю. Шаудера, Ж. Лере, А.Н. Тихонова, М.А. Красносельского и др. (подробности см. в [51, часть 2, гл. VII, § 2; 52–55). Данные результаты также

[20]Указанным уравнениям, как правило, соответствуют уравнения в частных производных.

нашли своё применение в теории динамических систем [56, гл. V, § 39], гидродинамике [57, 58], моделировании электрических цепей [59], нелинейной механике [60], теории радиационного переноса [61, гл. 13, § 4] и других областях [62] (детальное рассмотрение данного вопроса требует отдельного пристального внимания).

Библиографический список

1. *Богатов Е.М.* Об истории применения качественных методов решения нелинейных интегральных уравнений // Наука и техника: Вопросы истории и теории. Материалы XXXVII межд. годич. конф. СПб отд. Росс. нац. комит. по ист. и филос. науки и техники РАН (21–25 ноября 2016). Вып. XXXII. СПб, 2016. С. 102–104.
2. *Poincaré H.* Sur l'Analysis Situs // C.R. 1892. 115. P. 633–636.
3. *Poincaré H.* Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même // Acta math. 1921. Vol. 38. P. 1–135.
4. *Гомбрих Э.* История искусства. М.: АСТ, 1998. 688 с.
5. *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* Исследование особенностей в сверхтекучем ^{3}He в жидких кристаллах методом гомотопической топологии // ЖЭТФ. 1977. 72:6. С. 2256–2274.
6. *Богатов Е.М., Мухин Р.Р.* О связи между нелинейным анализом, бифуркациями и нелинейной динамикой: На примере воронежской школы нелинейного функционального анализа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23, № 6. С. 74–88.
7. *Богатов Е.М., Мухин Р.Р.* Из истории нелинейных интегральных уравнений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 2. С. 77–114.
8. *Poincaré H.* Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle I // J. de Math. 1881. 7. P. 375–422.
9. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ОГИЗ, 1947. 392 с.
10. *Kronecker L.* Über Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln I. Monatsber. Berlin Akad. 1869. P. 159–193.
11. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 536 с.
12. *Siegberg H.* Some historical remarks concerning degree theory // Amer. Math. Monthly. 1981. Vol. 88, № 2. P. 125–139.
13. *Mawhin J.* Poincare's early use of Analysis situs in nonlinear differential equations: Variations around the theme of Kronecker's integral // Philosophia Scientiae. 2000. 4. P. 103–143.
14. *Poincaré H.* Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle IV // J. Math. Pure Appl. 1885. 1. P. 167–244.
15. *Bohl P.* Sur certaines equations différentielles d'un type general utilisables en mécanique // Bulletin de la Société mathématique de France. 1910. T. 38. P. 1–134.
16. *Мышкис А.Д., Рабинович И.М.* Математик Пирс Боль из Риги. С приложением комментария гроссмейстера М.М. Ботвинника о шахматной игре П. Боля. Рига: Зинатне, 1965.
17. *Боль П.* Собрание трудов / Пер. с нем. И.М. Рабиновича; под ред. Л.Э. Рейзиня; вступит. статья и коммент. Л.Э. Рейзиня и И.А. Хенинь. АН Латв. ССР, Ин-т физики, Латв. отд-ние Всесоюз. астрон.-геодез. об-ва. Рига: Зинатне, 1974.
18. *Боль П.Г.* 1865–1921. Избранные труды. Вступительная статья А.Д. Мышкиса и И.М. Рабиновича. АН Латвийской ССР, Астрофиз. лаб. 1961.
19. *Borsuk K.* Sur les rétractes // Fund. Math. 1931. 17.1. S. 152–170.
20. *Bohl P.* Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1904. 127. S. 179–276.

21. *Birkhoff G.D., Kellogg O.D.* Invariant points in function space // Trans. Amer. Math. Soc. 1922. vol. 23. P. 95–115.
22. *van Dalen D.* Luitzen Egbertus Jan Brouwer // History of Topology / I.M. James ed., North Holland. 1999. P. 947–964.
23. *Johnson Dale M.* The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part II. // Arch. Hist. Ex. Sci, 1981. P. 85–267.
24. *Brouwer L.E.J.* On continuous vector distributions on surfaces // KNAW Proc. 1909. vol. 11. P. 850–858.
25. *Brouwer L.E.J.* On continuous vector distributions on surfaces, II // KNAW Proc. 1910. vol. 12. P. 716–734.
26. B*rouwer L.E.J.* On continuous vector distributions on surfaces, III // KNAW Proc. 1910. vol. 12. P. 171–186.
27. *Freudenthal H.* (ed.), L.E.J. Brouwer Collected Works, Vol. 2, Geometry, Analysis, Topology and Mechanics. North–Holland, Amsterdam, 1976.
28. *Brouwer L.E.J.* Potentiaaltheorie en Vectoranalyse. Exercise book (unpublished manuscript) 1910.
29. *Александров П.С.* Пуанкаре и топология // УМН. 1972. Т. 27, № 1 (163). С. 147–158.
30. *Босс В.* Лекции по математике. Том 13. Топология. Изд. 3-е, испр. М.: ЛЕНАНД, 2014. 216 с.
31. *Brouwer L.E.J.* Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten // Math. Annal. 1912. 71. S. 97–115.
32. *Brouwer L.E.J.* Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl // Math. Annal. 1911. 70. S. 161–165.
33. *Matoušek J.* Using the Borsuk–Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry. Springer Science & Business Media, 2008.
34. *Borsuk K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fund. Math. 1933. 20.1. S. 177–190.
35. *Крейн М. Г., Нудельман А.А.* Теорема Борсука–Улама // Квант. 1983, №8. С. 20–25.
36. *Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г.* Топологические методы в вариационных задачах. М.: Иссл. ин-т матем. и мех. при 1 МГУ, 1930.
37. *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* Физика и топология. М.: Знание, 1980.
38. *Минеев В.П.* Топологические объекты в нематических жидких кристаллах // В кн. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. С. 148–158.
39. *Воловик Г.Е.* Сверхтекучие свойства А-фазы He^3 // УФН. 1984. Т. 143, вып. 1. С. 73–109.
40. *Poincaré H.* Sur un théoréme en géométrie // Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1912. vol. 33. P. 375–407. http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/ajax.php?bibkey==hp1912rp
41. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Том 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел / Под ред. Н.Н. Боголюбова, В.И. Арнольда, И.Б. Погребысского. М.: Наука, 1972.
42. *Levinson N.* Transformation theory of non-linear differential equations of the second order // Annals Math. Second Series. 1944. Vol. 45, no. 4. P. 723–737.
43. *Богатов Е.М., Мухин Р.Р.* Метод усреднения, маятник с вибрирующим подвесом: Н.Н. Боголюбов, Э. Стефенсон, П.Л. Капица и другие // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 5. С. 69–87.
44. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.

45. *Hofer H., Toland J.* Homoclinic, heteroclinic, and periodic orbits for a class of indefinite Hamiltonian systems // Math. Annalen. 1984. Vol. 268, no. 3. P. 387–403.
46. *Toland J.F.* Solitary wave solutions for a model of the two-way propagation of water waves in a channel // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1981. 90. P. 343–360.
47. *Peletier L.A., and Troy W.C.* Spatial patterns: higher order models in physics and mechanics. Vol. 45. Springer Science & Business Media, 2012.
48. *Nash C.* Topology and physics – a historical essay // History of Topology / Ed. I.M. James. North Holland. 1999. P. 359–416.
49. *Ugi I., Dugundij J., Kopp R., Marquarding D.* Perspectives in theoretical stereochemistry. Lecture note series, Vol. 36, Springer, Heidelberg, 1984.
50. *Долбилин Н.П.* Критерий кристалла и локально антиподальные множества Делоне // Вестник ЧелГУ. 2015, № 17. С. 6–17.
51. *Dieudonné J.* A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960. Modern Birkhäuser, Boston, 1989.
52. *Park S.* Ninety years of the Brouwer fixed point theorem // Vietnam J. Math. 1999. Vol. 27, no. 3. P. 187–222.
53. *Mawhin J.* IN MEMORIAM JEAN LERAY (1906–1998) // Topol. Meth. Nonlin. Anal. 1998. Vol. 12. 14. P. 199–206.
54. *Mawhin J.* Juliusz Schauder, topology of functional spaces and partial differential equations // Wiadomości matematyczne. 2012. Vol. 48, no. 2. P. 173–183.
55. *Bogatov E.M.* Key moments of the mutual influence of the Polish and Soviet schools of nonlinear functional analysis in the 1920's–1950's // Antiq. Math. 2017. Vol. 11. P. 131–156.
56. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
57. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М: ФИЗМАТЛИТ, 1961.
58. *Beckert H.* Existenzbeweis für permanente Kapillarwellen einer schweren Flüssigkeit // Arch. Rat. Mech. Anal. 1963. 13. P. 15–45.
59. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970.
60. *Ворович И.И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. 19:4. С. 173–186.
61. *Хатсон В., Пим Дж.С.* Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.
62. Nonlinear functional analysis and its applications, Part 2. //Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 1986. Vol. 45/ Ed. F.E. Browder. AMS, Providence. Rhode Island, 1986.

References

1. Bogatov E.M. On the history of the application of qualitative methods for solving nonlinear integral equations. Science and technology: Questions of history and theory. Materials of the XXXVII intern. annual conf. St. Petersburg Dep. Rus. Nat. Comm. Hist. Philos. Science and Techn. RAS, 2016, November, 21–25,. Issue XXXII, SPb, 2016, pp. 102–104 (in Russian).
2. Poincaré, H. Sur l'Analysis Situs. C.R., 1892, 11, pp. 633–636.
3. Poincaré, H. Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-méme. *Acta math.*, 1921, vol. 38, pp. 1–135.
4. Gombrich E.H. The Story of Art (14th ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1984.

5. Volovik G.E. and Mineev V.P. Investigation of singularities in superfluid He^3 and liquid crystals by homotopic topology methods. *Soviet Phys. JETP*, 1977, vol. 45, pp. 1186–1196.
6. Bogatov E.M., Mukhin R.R The relation between the nonlinear analysis, bifurcations and nonlinear dynamics: On example of Voronezh school of nonlinear functional analysis. *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 23, iss. 6, pp. 74–88 (in Russian).
7. Bogatov E.M., Mukhin R.R. About the history of nonlinear integral equations. *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 24, iss. 2, pp. 77–114 (in Russian).
8. Poincaré, H. Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle I. *J. de Math.*, 1881, 7, pp. 375–422.
9. Poincaré, H. On curves defined by differential equations. Moscow; Leningrad, OGIZ, 1947 (in Russian).
10. Kronecker L., Über Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln I. Monatsber. Berlin Akad., 1869, pp. 159–193.
11. Chetaev N. G. Stability of Motion. Works on Analytical Mechanics. USSR Acad. Sci. Publishing, Moscow, 1962 (in Russian).
12. Siegberg, H. Some historical remarks concerning degree theory. *Amer. Math. Monthly*, 1981, vol. 88, iss. 2, pp. 125–139.
13. Mawhin J. Poincare's early use of Analysis situs in nonlinear differential equations: Variations around the theme of Kronecker's integral. *Philosophia Scientiae*. 2000, vol. 4, pp. 103–143.
14. Poincaré, H. Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle IV. *J. Math. Pure Appl.*, 1885, vol. 1, pp. 167–244.
15. Bohl P. Sur certains equations différentielles d'un type general utilisables en mécanique. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1910, vol. 38, pp. 5–138.
16. Myshkis A.D., Rabinovich I.M. Mathematician Piers Bohl from Riga. Riga, Zinatne, 1965 (in Russian).
17. Bohl Piers. Collection of sci. works. Transl. I.M. Rabinovich; ed. L.E. Reizihn; Introd. article and comments L.E. Reizihn and I.A. Khenihn; Acad. Sci. Latvian SSR, Institute of Physics, Riga: Zinatne, 1974.
18. Bohl Piers Georgievich, 1865–1921. Selected works; introductory article by A.D. Myshkis and I.M. Rabinovich. Acad. Sci. Latv. SU, Astrophysics lab. 1961 (in Russian).
19. Borsuk K. Sur les rétractes. *Fund. Math.* 1931, vol. 17, no. 1, s. 152–170.
20. Bohl P. Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1904, vol. 127, s. 179–276.
21. Birkhoff G.D. & Kellogg O.D. Invariant points in function space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1922, vol. 23, pp. 95–115.
22. van Dalen D. Luitzen Egbertus Jan Brouwer. History of Topology, ed. I.M. James, North Holland, 1999, pp. 947–964.
23. Johnson Dale M. The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part II. Arch. Hist. Ex. Sci, 1981. pp. 85–267.
24. Brouwer L.E.J. On continuous vector distributions on surfaces. *KNAW Proc.*, 1909, vol. 11, pp. 850–858.
25. Brouwer L.E.J. On continuous vector distributions on surfaces, II. *KNAW Proc.*, 1910,vol. 12, pp. 716–734.
26. Brouwer L.E.J. On continuous vector distributions on surfaces, III. *KNAW Proc.*, 1910, vol. 12, pp. 171–186.
27. Freudenthal H. (ed.) L.E.J. Brouwer Collected Works, Vol. 2, Geometry, Analysis, Topology and Mechanics. North–Holland, Amsterdam, 1976.

28. Brouwer L.E.J. Potentiaaltheorie en Vectoranalyse. Exercise book (unpublished manuscript), 1910.
29. Aleksandrov P.S. Poincaré and topology. *Russian Math. Surveys*, 1972, vol. 27, no. 1, pp. 157–168.
30. Boss V. Lekcii po matematike: Topologiya. T. 13, Izd. 3-e, LENAND, Moscow, 2014 (in Russian).
31. Brouwer L.E.J. Über Abbildungvon Mannigfaltigkeiten. *Math. Annal*, 1912, vol. 71, s. 97–115.
32. Brouwer L.E.J. Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. *Math. Annal*, 1911, vol. 70, s. 161–165.
33. Matoušek J. Using the Borsuk–Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Springer Science & Business Media, 2008.
34. Borsuk K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. *Fund. Math.* 1933, vol. 20, no. 1, s. 177–190.
35. Krein M.G., Nudelman A.A. *Kvant*, 1983, no. 8, pp. 20–25 (in Russian).
36. Lyusternik L.A., Shnirelman L.G. Topological methods in variational problems. Mathematics and Mechanics Research Institute at 1st MSU, Moscow, 1930 (in Russian).
37. Volovik G.E., Mineev V.P. Physics and topology. Moscow: Znanie, 1980 (in Russian).
38. Mineev V.P. Topological objects in nematic liquid crystals, In: V.G. Boltyansky, V.A. Efremovich, Visual topology, pp. 148–158 (Bibliotechka Kvant, issue 21. Moscow, Nauka, 1982) (in Russian).
39. Volovik G.E. Superfluid properties of ^{3}He-A. *Sov. Phys. Usp.*, 1984, vol. 27, pp. 363–384.
40. Poincaré, H. Sur un théoréme en géométrie. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1912, vol. 33, pp. 375–407. http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/ajax.php?bibkey==hp1912rp
41. Poincaré H. Selected Works. Vol. 2. New methods of celestial mechanics. Topology. Theory of numbers, Ed. N.N. Bogolyubov, V.I. Arnold, I.B. Pogrebyskii. Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
42. Levinson N. Transformation theory of non-linear differential equations of the second order. *Annals Math., Second Series*, 1944, vol. 45, no. 4, pp. 723–737.
43. Bogatov E.M., Mukhin R.R. The averaging method, a pendulum with a vibrating suspension: N.N. Bogolyubov, A. Stephenson, P.L. Kapitza and others. *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 5, pp. 69–87 (in Russian).
44. Coddington E.A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. Tata McGraw-Hill Education, 1955.
45. Hofer H., Toland J. Homoclinic, heteroclinic, and periodic orbits for a class of indefinite Hamiltonian systems. *Math. Annalen*, 1984, vol. 268, no. 3, pp. 387–403.
46. Toland J.F. Solitary wave solutions for a model of the two-way propagation of water waves in a channel. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1981, vol. 90, pp. 343–360.
47. Peletier L.A., and Troy W.C. Spatial patterns: higher order models in physics and mechanics. Vol. 45. Springer Science & Business Media, 2012.
48. Nash C. Topology and physics – a historical essay. History of Topology, I.M. James ed., North Holland, 1999, pp. 359–416.
49. Ugi I., Dugundij J., Kopp R., & Marquarding D. Perspectives in theoretical stereochemistry. Lecture note series, Vol. 36. Springer, Heidelberg, 1984.
50. Dolbilin N.P. Criterion of a crystal and locally antipodal sets of Delaunay. *Vestnik of the ChelSU*, 2015, no. 17, pp. 6–17 (in Russian).
51. Dieudonné J. A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960. Modern Birkhäuser, Boston, 1989.

52. Park S. Ninety years of the Brouwer fixed point theorem. *Vietnam J. Math.*, 1999, vol. 27, no. 3, pp. 187–222.
53. Mawhin J. In Memoriam Jean Leray (1906–1998). *Topol. Meth. Nonlin. Anal.*, 1998, vol. 12. 14, pp. 199–206.
54. Mawhin J. Juliusz Schauder, topology of functional spaces and partial differential equations. *Wiadomości matematyczne*, 2012, vol. 48, no. 2, pp. 173–183.
55. Bogatov E.M. Key moments of the mutual influence of the Polish and Soviet schools of nonlinear functional analysis in the 1920's–1950's. *Antiq. Math.*, 2017, vol. 11, pp. 131–156.
56. Krasnoselskii M.A., Zabreiko P.P. Geometrical Methods of Nonlinear Analysis. Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, Springer-Verlag, 1984.
57. Ladyzhenskaya O.A. Mathematical problems in the dynamics of a viscous incompressible flow. Gordon & Breach, New York, 1963.
58. Beckert, H. Existenzbeweis für permanente Kapillarwellen einer schweren Flüssigkeit. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1963, vol. 13, pp. 15–45.
59. Krasnoselskii M.A., Burd V.Sh., Kolesov Yu.S. Nonlinear Almost Periodic Oscillations. Wiley, New York, 1973.
60. Vorovich I.I. On the existence of solutions in the nonlinear theory of shells. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1955, vol. 19, no. 4, pp. 173–186 (in Russian).
61. Hutson V.C.L., Pym J.S. Applications of Functional Analysis and Operator Theory. Academic Press, 1980.
62. Nonlinear functional analysis and its applications, Part 2. (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 45.) F.E. Browder ed. AMS, Providence. Rhode Island, 1986.

Богатов Егор Михайлович – родился в Волгограде (1974), окончил Воронежский государственный университет (ВГУ, 1997). После окончания ВГУ работал преподавателем в вузах Воронежа, в том числе в ВГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ВГУ (2000) по специальности «Дифференциальные уравнения». После защиты диссертации стал работать преподавателем на кафедре высшей математики Старооскольского технологического института им. А.А. Угарова (филиала) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС». В настоящее время работает на кафедре высшей математики и информатики указанного института в должности доцента, а также на кафедре горного дела в Губкинском филиале НИТУ «МИСиС». Руководитель научного проекта РФФИ по теме «Математическое моделирование процессов теплопереноса в нелинейных периодических двухфазных средах вида газ–металл» (2006–2008). Автор учебника «Организация эксперимента» (в соавторстве с В.П. Соловьёвым, 2012). Опубликовал более 40 научных статей по дифференциальным уравнениям и их приложениям, и истории математики. Имеет сертификат инструктора *Wolfram Research Mathematica* по обучению пакетам компьютерной математики в странах Восточной Европы. Область научных интересов: история функционального анализа, математическое моделирование физических процессов в неоднородных средах.

Россия, 309516 Старый Оскол Белгородской обл, мкр. Макаренко, 42
СТИ НИТУ «МИСиС», кафедры высшей математики и информатики
E-mail: e.bogolyubscky@yandex.ru