



К вопросу учета силы сопротивления в шарнирной точке крепления физического маятника и ее влияние на динамику движения

С. О. Гладков, С. Б. Богданова

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

Россия, 125993 Москва, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: sglad51@mail.ru, sonjaf@list.ru

Автор для переписки Богданова Софья Борисовна, sonjaf@list.ru

Поступила в редакцию 14.03.2018, принята к публикации 19.09.2018

Тема. Работа посвящена анализу динамики сложной системы: шарнирный механизм плюс физический маятник, в которой найдено дифференциальное уравнение, описывающее ее нелинейное поведение. **Цель.** Анализ нелинейных колебаний сложной динамической системы, представляющей из себя шарнир, стержень и шар, скрепленный единым образом. Предполагается получить дифференциальное уравнение движения маятника с учетом трения в шарнире и при учете сопротивления континуума. **Метод.** Метод решения задачи основан на законе сохранения энергии с учетом диссипации энергии как в шарнире, так и при движении скрепленных стержня и шара в вязкой среде. Предполагается использование определения диссипативных функций в вязкой среде, которые учитывают неоднородное распределение скорости вблизи поверхности стержня и шара. **Результаты.** Строго аналитически показано, что на динамику рассматриваемой системы (шарнир плюс стержень плюс шар) очень существенно влияют потери энергии в шарнире, приводящие к сильному уменьшению времени затухания при колебательном движении, которое носит существенно нелинейный характер, подробно описанный в статье. Численное решение найденного нелинейного динамического уравнения, проиллюстрированное на рисунках, указывает на сильно неоднородные осцилляции обобщенной координаты, в качестве которой был выбран угол отклонения маятника от вертикальной оси. **Обсуждение.** Благодаря предложенному в работе методу вывода дифференциальных уравнений движения сложных динамических систем, который заключается в суммировании выражений для диссипативной функции и производной по времени от полной энергии системы, получено исследуемое в статье уравнение. Подобный подход позволяет выводить любые дифференциальные уравнения (системы уравнений) с учетом диссипации. На примере исследуемой нами динамической системы продемонстрировано, как «работает» этот метод. Подобный алгоритм упрощает анализ вывода уравнений и сводит к минимуму возможность аналитических ошибок.

Ключевые слова: сухое трение, вязкое трение, диссипативная функция, закон сохранения энергии.

Образец цитирования: Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу учета силы сопротивления в шарнирной точке крепления физического маятника и ее влияние на динамику движения // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 53–62. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-53-62>

On the question accounting of the resistance force at the hinge point of setting physical pendulum and its influence on the dynamics of movement

S. O. Gladkov, S. B. Bogdanova

Moscow Aviation Institute (National Research University)

4, Volokolamskoe shosse, 125993 Moscow, Russia

E-mail: sglad51@mail.ru, sonjaf@list.ru

Correspondence should be addressed to Bogdanova Sofiya B., sonjaf@list.ru

Received 14.03.2018, accepted for publication 19.09.2018

Topic. The paper is devoted to the analysis of the dynamics of a complex system, i.e. a hinge mechanism plus a compound pendulum, in which where a differential equation is found, describing its nonlinear behavior. **Aim.** The paper is in the analysis of nonlinear oscillations of a complex dynamical system, which is a hinge, a rod and a ball, setting together in the one way. It is assumed to obtain differential equation of motion of the pendulum with regard to the gimbal friction and the resistance of the continuum. **Method.** Problem-solving procedure is based on the law of conservation of energy, accounting energy dissipation both in the hinge and in when the setting rod and ball move in a viscous medium. In this case, it is assumed to use the definition of dissipative functions in a viscous medium, which making allowance for inhomogeneous distribution of the velocity near the surface of the rod and ball. **Results.** In this paper, it is strictly analytically shown that energy losses in the hinge have impacts on the dynamics of the studied system (i.e. a hinge plus a rod plus a ball). These energy losses lead to a strong reduce amount of damping time at fluctuating motion, which has a highly nonlinear character that is described in the paper in details. The numerical solution of the nonlinear dynamic equation found, illustrated in the figures, points to strongly inhomogeneous oscillations of generalized coordinate, for which the angle of deviation of a pendulum from y-axis has chosen. **Discussion.** Thanks to the proposed method of differential equations of the movement of complex dynamical systems in the paper, which is the summation the expressions for the dissipative function and for derivative with time of a total energy of system, it is obtained the studied equation. Such an approach allows us to derive any differential equations (systems of equations) with regard to damping. Using the example of our studied dynamical system, it is shown how this method «works». Such an algorithm simplifies the analysis of the derivation of equations and keeps to a minimum making analytical errors.

Key words: dry friction, viscous frequency, dissipation function, the law of conservation of energy.

Reference: Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On the question accounting of the resistance force at the hinge point of setting physical pendulum and its influence on the dynamics of movement. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 53–62. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-53-62>

1. В настоящей статье рассмотрена задача, относящаяся к общим вопросам динамики криволинейного движения, и характерным для нее является общий подход к решению подобного рода физических задач, намеченный нами ранее в работах [1–3]. По своей постановке суть задачи довольно проста, но она имеет прямое отношение к решению проблемы синхронизации физических маятников, которая до сих пор не нашла своего отражения ни в одной из известных нам публикациях, несмотря на их большое количество по этой тематике (см., к примеру, работы [4–12]). Однако было бы необъективным, с нашей стороны, не отметить, что некоторые предпосылки к решению этой проблемы были намечены и подробно изложены в работе [13].

В данном случае речь будет идти о физическом маятнике, шарнирно прикрепленном к балке, и находящемся на некотором небольшом расстоянии от стены. Последнее обстоятельство может играть довольно важную роль в плане учета влияния на движение системы диссипативных сил, возникающих из-за непосредственной близости маятника к стене. Физически похожая задача была решена в работе [14], в которой вычислялось время вовлечения в движение неподвижного коаксиального цилиндра вращающимся внутренним цилиндром, пространство между которыми заполнено вязким континуумом (рис. 1).

2. Суть задачи заключается в следующем. Предположим, что у нас имеется некоторый однородный жесткий стержень длиной l и массой m , на конце которого закреплен однородный шар радиуса R с массой M . Стержень шарнирно закреплен в точке подвеса с радиусом шарнира r_2 . Расстояние от стены до центра шара равно a . Шар отклоняется от положения равновесия на некоторый угол φ_0 , возможные значения которого диктуются лишь технической конструкцией шарнирного крепления, а затем отпускается с нулевой начальной скоростью в направлении, параллельном стене. Поскольку начальный вектор скорости движения считается параллельным плоскости стены, то колебания системы все время будут происходить в плоскости параллельной стене, что в рамках решаемой задачи физически связано с отсутствием сил, действующих в направлениях перпендикулярных стене. Именно поэтому рассматриваемая нами динамика движения будет носить не вращательно-поступательный трехмерный характер, а одномерный с одной колебательной степенью свободы, роль формальной характеристики которой будет играть угол отклонения φ от вертикальной оси, как для обычного маятника.

Движение происходит в диссипативной среде, и задача заключается в описании динамики шара при учете всех озвученных воздействий, которые оказывают существенное влияние на характер колебаний при соответствующих начальных условиях.

3. Для решения этой несложной в общем-то задачи удобно перейти к описанию динамики движения в системе центра масс. Если вести отсчет от центра шарнирного крепления, то совершенно очевидно, что центр масс будет находиться на расстоянии

$$l_c = \frac{m(l + r_0) + 2M(l + r_0 + R)}{2(m + M)} \quad (1)$$

от центра шарнира. Обозначив суммарную массу через $M_0 = m + M$, можно записать такое выражение для функции Лагранжа

$$L = T - U = \frac{M_0 l_c^2 \dot{\varphi}^2}{2} - M_0 g (h - l_c \cos \varphi), \quad (2)$$

а потому первый интеграл уравнения Эйлера–Лагранжа, по определению, есть полная энергия системы (см., к примеру, [15]), то есть $E = T + U$ или, согласно (2),

$$E = \frac{M_0 l_c^2 \dot{\varphi}^2}{2} + M_0 g (h - l_c \cos \varphi). \quad (3)$$

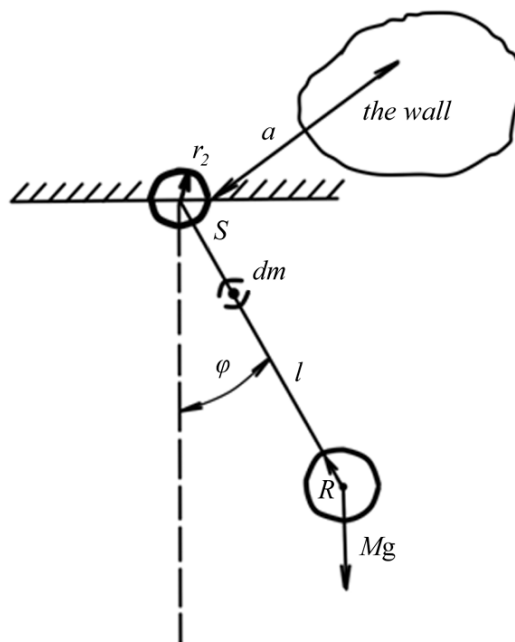


Рис. 1. Схематическое изображение геометрии задачи. Здесь dm – элемент массы стержня

Fig. 1. Diagrammatic representation of the geometry of the problem. Here dm is a mass element of the rod

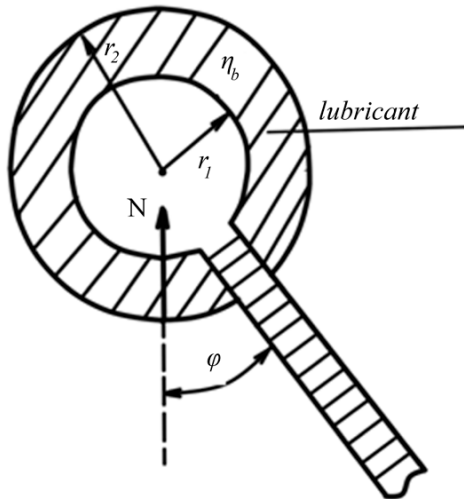


Рис. 2. Схематическая иллюстрация сечения разреза шарового крепления

Fig. 2. Diagrammatical illustration of the section of the ball setting

Силу реакции на шарнире определим в виде вектора (ср. с [1])

$$\mathbf{N} = M_0 (\mathbf{n} l_c \dot{\varphi}^2 + \mathbf{g} \cos \varphi). \quad (4)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали, проведенный к внешней поверхности шарнира; \mathbf{g} – ускорение силы тяжести.

4. В отличие от всех остальных задач, связанных с изучением движения тел по плоским неидеальным поверхностям, учет сил сопротивления на шарнире должен быть осуществлен с учетом распределения нормальных сил по поверхности шарнира в соответствии с формулой (4). Действительно, в этом случае нам необходимо представить силу сопротивления при вращении шарнира в аддитивном виде, как

$$\mathbf{F}_{fr} = \mathbf{F}_{1fr} + \mathbf{F}_{2fr}, \quad (5)$$

где $\mathbf{F}_{1fr} = \hat{\mu} \mathbf{N}$ – сила сухого трения, $\hat{\mu}$ – тензорный коэффициент трения. Латинская аббревиатура fr в виде нижнего индекса означает сокращение от английского слова *friction*. В компонентах эту формулу следует записать как $F_{i1fr} = \mu_{ik} N_k$, где i -я компонента вектора \mathbf{F}_{1fr} направлена против скорости движения. Схематический разрез шарнира показан на рис. 2, на котором указана и сила реакции \mathbf{N} .

Нельзя в этой в этой связи не отметить и известную в нашей стране монографию [16], в которой приводится довольно большое количество примеров расчета динамических систем в условиях действия сил как сухого трения, так и вязкого. При этом отмечается, что в условиях колебательного движения сила сухого трения должна менять знак после остановки. Поэтому силу сухого трения записывают обычно в виде $F_{fr} = \mu N \operatorname{sgn} \dot{\varphi}$, где знаковая функция учитывает изменение направления силы на противоположное после остановки движения. Хотя такой подход и вполне логичен, однако с нашей стороны, он вызывает следующее возражение. При записи любого уравнения колебательной динамики в момент остановки направление движения тела автоматически меняется на обратное, что говорит и об автоматической инверсии угловой переменной φ . Формально это означает замену $\varphi \rightarrow -\varphi$. Отмеченный факт приводит в уравнениях движения к тому же самому эффекту, касающемуся силы трения, что и в условиях положительного направления движения. Именно поэтому, когда записывается уравнение движения, под угловой переменной (в нашем случае) понимается ее модуль, который везде далее мы будем опускать.

5. Вторая составляющая силы трения в (5) определяется чисто гидродинамическим сопротивлением, обусловленным смазкой, обладающей некоторой вязкостью η_b . Для ее оценки следует записать диссипативную функцию в соответствии с [17], как

$$\dot{Q}_1 = \frac{\eta_b}{2} \int_V \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV, \quad (6)$$

где \mathbf{v} характеризует распределение скоростей между коаксиальными сферами. Малость расстояния между ними позволяет воспользоваться лишь одной составляющей скорости, направленной по касательной к поверхностям сфер и записать ее в виде $v_\varphi = (r - r_1) \dot{\varphi}$, где $r \in [r_1, r_2]$, а $r_{1,2}$ – соответственно радиусы внутренней и внешней сфер. В результате из общего выражения (6) получаем

$$\dot{Q}_1 = \frac{\eta_b}{2} \dot{\varphi}^2 \int_V dV = \frac{2\pi}{3} \eta_b \dot{\varphi}^2 (r_2^3 - r_1^3). \quad (7)$$

В соответствии с определением (4) следует найти диссипативную функцию, происхождение которой обязано лишь силам сухого трения. Введем определение момента сил трения, обусловленного контактом внешней сферы с неподвижной внутренней сферой. Имеем для него

$$\mathbf{M}_{fr} = \sum [\mathbf{r}, \mathbf{F}_{fr}] = r_2 [\mathbf{n}, \mathbf{F}_{fr}]. \quad (8)$$

Согласно (8) можно теперь ввести и определение диссипативной функции для сухого трения. Дифференцируя (8) по времени, находим

$$\dot{Q}_2 = \left| \dot{\mathbf{M}}_{fr} \right| = r_2 \left| [\dot{\mathbf{n}}, \mathbf{F}_{fr}] + [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{F}}_{fr}] \right|.$$

Здесь $\dot{\mathbf{n}} = -v(\vec{\tau}/r_2)$, где $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной, а $\mathbf{F}_{fr} = \hat{\mu} \mathbf{N}$. Используя формулу (4) и учитывая, что в данном случае

$$\mathbf{N} = M_0 (l_c \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) \mathbf{n},$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{Q}_2 &= \left| \dot{\mathbf{M}}_{fr} \right| = \\ &= r_2 M_0 \left| \frac{v}{r_2} (l_c \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) [\vec{\tau}, \hat{\mu} \mathbf{n}] + \left(\frac{v}{r_2} (l_c \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) [\mathbf{n}, \hat{\mu} \vec{\tau}] - \left(2 \frac{v\dot{v}}{r_2} + g\dot{\varphi} \sin \varphi \right) [\mathbf{n}, \hat{\mu} \mathbf{n}] \right) \right|. \end{aligned}$$

В подвижном базисе $\vec{\tau}$, \mathbf{n} первое и второе слагаемое исчезают, поскольку $\hat{\mu} \mathbf{n} \sim \vec{\tau}$, $\hat{\mu} \vec{\tau} \sim \mathbf{n}$ и, следовательно, $[\vec{\tau}, \hat{\mu} \mathbf{n}] = [\mathbf{n}, \hat{\mu} \vec{\tau}] = 0$. Отсюда получаем

$$\dot{Q}_2 = r_2 M_0 \left(2 \frac{v\dot{v}}{r_2} + g\dot{\varphi} \sin \varphi \right) |[\mathbf{n}, \hat{\mu} \mathbf{n}]| = \mu r_2 M_0 \left(2 \frac{v\dot{v}}{r_2} + g\dot{\varphi} \sin \varphi \right), \quad (9)$$

где μ – коэффициент трения между шарнирами, вводимый как $\mu = \mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{\tau n} = \mu_{n\tau}$. В силу того, что скорость на поверхности шарнира есть $v = r_2 \dot{\varphi}$, находим интересующую нас часть диссипативной функции, происхождение которой обязано лишь сухому трению,

$$\dot{Q}_2 = \mu \dot{\varphi} r_2 M_0 (2r_2 \ddot{\varphi} + g \sin \varphi). \quad (10)$$

Сопротивление, испытываемое шаром в континууме, описывается законом Стокса [14]

$$F_S = 6\pi\eta Rv = 6\pi\eta R (r_0 + l + R) \dot{\varphi}, \quad (11)$$

где R – радиус шара, η – динамическая вязкость среды, поэтому диссипативная функция для шара принимает вид

$$\dot{Q}_3 = 6\pi\eta R (r_0 + l + R)^2 \dot{\varphi}^2. \quad (12)$$

Стержень как цилиндрическое тело также испытывает сопротивление, которое на единицу его длины можно описать формулой, приведенной, например, в [17], а именно:

$$f_R = \pi\eta v, \quad (13)$$

где скорость v стержня определяется в каждой текущей точке, как

$$v = s\dot{\varphi}, \quad (14)$$

здесь расстояние s отсчитывается от центра шарнира. Таким образом, диссипативная функция, характеризующая сопротивление стержня в континууме, должна определяться выражением

$$\dot{Q}_4 = \int_{r_2}^l f_R v ds = \pi\eta\dot{\varphi}^2 \int_{r_2}^l s^2 ds = \frac{1}{3}\pi\eta\dot{\varphi}^2 (l^3 - r_2^3). \quad (15)$$

6. С учетом приведенных выше выражений (7), (10), (12) и (15) уравнение движения можно представить в виде следующей суммы:

$$\dot{E} + \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 + \dot{Q}_4 = 0. \quad (16)$$

Дифференцируя (3) по времени, находим

$$\dot{E} = M_0 l_c^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + M_0 g l_c \sin \varphi \dot{\varphi}.$$

В соответствии с явными выражениями для всех $\dot{Q}_{1,2,3,4}$ из (7), (10), (12) и (15) после вынесения $\dot{\varphi}$ за скобку и в соответствии с условием $\dot{\varphi} \neq 0$ из соотношения (16) получаем искомое уравнение

$$M_0 l_c^2 \ddot{\varphi} + M_0 g l_c \sin \varphi + 6\pi\eta R (r_2 + l + R)^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{3}\pi\eta\dot{\varphi} (l^3 - r_2^3) + \frac{2\pi}{3}\eta_b \dot{\varphi} (r_2^3 - r_1^3) + \mu r_2 M_0 (2r_2 \ddot{\varphi} + g \sin \varphi) = 0. \quad (17)$$

Разделив его на $M_0 l_c^2$, окончательно найдем

$$\ddot{\varphi} + \frac{\dot{\varphi}}{a\tau} + \omega_0^2 b \sin \varphi = 0. \quad (18)$$

где $\omega_0 = \sqrt{g/l_c}$ – частота, $b = (1 + \gamma)/\sqrt{1 + 2\gamma^2}$ – параметр, $\gamma = \mu r_2/l_c$ и $a = 1 + 2\gamma^2$ – коэффициенты. Полученное уравнение (18) говорит нам о том, что частота колебаний с учетом сухого трения в шарнире перенормируется и становится равной

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l_c} \frac{1 + \gamma}{\sqrt{1 + 2\gamma^2}}}. \quad (19)$$

Затухание, фигурирующее во втором слагаемом уравнения (18) и обязанное линейному сопротивлению, определяется как

$$\frac{1}{\tau} = \frac{6\pi\eta R (r_2 + l + R)^2}{M_0 l_c^2} \left(1 + \frac{l^3 - r_2^3}{6R (r_2 + l + R)^2} \right) + \frac{2\pi}{3} \frac{\eta_b}{M_0 l_c^2} (r_2^3 - r_1^3). \quad (20)$$

Как видно из (18), в стационарном случае получается обычное условие равновесия в виде $\sin \varphi = 0$, то есть это решение означает просто, что $\varphi = 0$.

Для численного решения уравнения (18) его удобно переписать в безразмерном виде

$$\varphi'' + \lambda \varphi' + b \sin \varphi = 0, \quad (21)$$

где параметр $\lambda = 1/a\omega_0\tau$, а дифференцирование здесь ведется по безразмерному аргументу $x = \omega_0 t$. На рис. 3–5 проиллюстрирована зависимость функции $\varphi(x)$ для разных значений параметров λ и b .

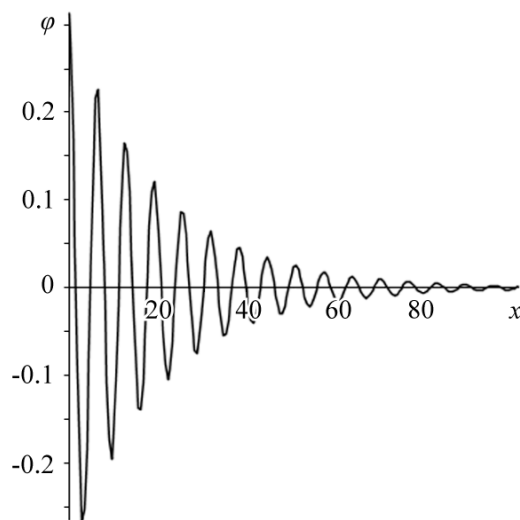


Рис. 3. Графическая иллюстрация зависимости $\varphi(x)$, полученная при значениях параметров $\lambda = 0.1$ и $b = 1$
 Fig. 3. Graphic illustration of the dependence $\varphi(x)$, obtained at the meanings of the parameters $\lambda = 0.1$ and $b = 1$

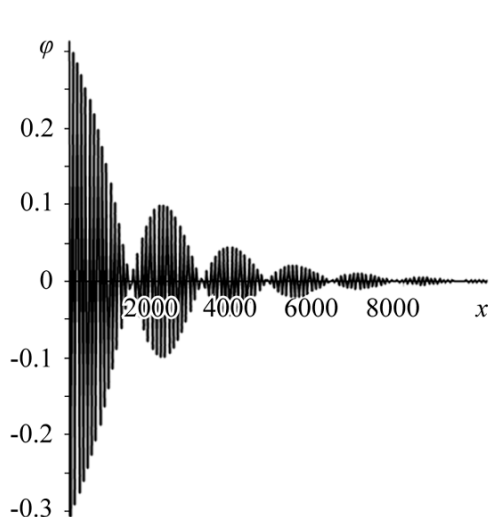


Рис. 4. Зависимость $\varphi(x)$ при $\lambda = 0.001$ и $b = 0.1$
 Fig. 4. The dependence of $\varphi(x)$ at $\lambda = 0.001$ and $b = 0.1$

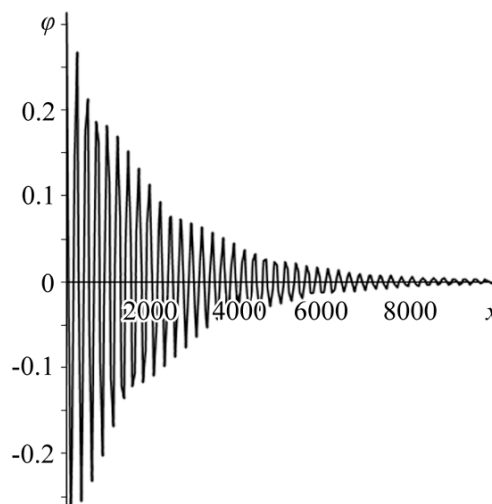


Рис. 5. Зависимость $\varphi(x)$ при $\lambda = 0.001$ и $b = 0.01$
 Fig. 5. The dependence of $\varphi(x)$ at $\lambda = 0.001$ and $b = 0.01$

7. Кратко сформулируем полученные результаты.

- Из диссипативного закона сохранения полной мощности исследуемой замкнутой системы получено простое нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее движение физического маятника с учетом сил вязкого и сухого сопротивления в точке шарнирного крепления.
- Найдена поправка к собственной частоте колебаний, обязанная учету силы сухого трения в шарнире, и строго аналитически показано, что в этом случае коэффициент затухания растет.
- С помощью метода численного интегрирования полученного уравнения дана графическая иллюстрация зависимости угловой координаты φ от времени для нескольких значений параметров λ и b .

Библиографический список

1. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. 161101-1-5.
2. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по жёлобу с учетом сил трения, и их анализ в некоторых частных случаях // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 1. 171101-1-5.
3. *Гладков С.О.* О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. 164002-1-5.
4. *Канунников А.Ю., Лампер Р.Е.* Синхронизация хода маятниковых часов, подвешенных на упругой балке // ПМТФ. 2003. Т. 44, вып. 5. С. 177–181.
5. *Oliveira H.M., Melo L.V.* Huygens synchronization of two clocks // Scientific Reports. July 2015. DOI: 10.1038/srep11548.
6. *Смирнов Л.А., Крюков А.К., Осипов Г.В.* Вращательная динамика в системе двух связанных маятников // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23, № 5. С. 41–61.
7. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматлит, 1959. 916 с.
8. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 320 с.
9. *Fradkov A.L., Andrievsky B.* Synchronization and phase relations in the motion of two-pendulum system // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2007. Vol. 42. Pp. 895–901. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2007.03.016.
10. *Kapitaniak M., Czolczynski K., Perlikowski P., Stefanski A., Kapitaniak T.* Synchronization of clocks // Physics Reports. 2012. Vol. 517. Pp. 1–69. doi:10.1016/j.physrep.2012.03.002.
11. *Il Gu Yi, Hyun Keun Lee, Sung Hyun Jun, Beom Jun Kim.* Antiphase synchronization of two nonidentical pendulums // International Journal of Bifurcation and chaos. 2010. Vol. 20, № 7. Pp. 2179–2184. Doi: 10.1142/s0218127410027003.
12. *Гузев М.А., Дмитриев А.А.* Стабильность связанных маятников // Дальневост. матем. журн. 2015. Vol. 15, № 2. С. 166–191.
13. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* Хаотическая динамика взаимодействующих маятников: Решение проблемы синхронизации // Инженерная физика. 2019, № 1. С. 49–62.
14. *Гладков С.О.* К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // ЖТФ. 2018. Т. 88, вып. 3. С. 337–341.

15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики: т. 1. Механика. М.: Наука, 2004. 220 с.
16. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики: т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 720 с.

References

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Geometric phase transition in the problem of brachistochrone. *Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*, 2016, № 1, 161101-1-5 (in Russian).
2. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Generalized dynamical equations of plane curvilinear motion of a material body on a trench with account of a friction forces (their numerical analysis in some special cases). *Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*, 2017, № 1, 171101-1-5 (in Russian).
3. Gladkov S.O. On trajectory of moving body coming into liquid at arbitrary angle. *Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*, 2016, № 4, 164002-1-5 (in Russian).
4. Kanunnikov A.Yu., Lamper R.E. Synchronization of the pendulum clock, suspended on an elastic beam. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2003, vol. 44, № 5, pp. 177–181 (in Russian).
5. Oliveira H.M., Melo L.V. Huygens synchronization of two clocks. *Scientific Reports*, 2015 (5), 11548; doi: 10.1038/srep11548.
6. Smirnov L.A., Kryukov A.K., Osipov G.V. Rotational dynamics in the system of two coupled pendulums. *Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 23, № 5, pp. 41–61 (in Russian).
7. Andronov A.A., Witt A.A., Khaikin S.E. Theory of Oscillations. Moscow, Fizmatlit, 1959 (in Russian).
8. Blechman I.I. Synchronization in Science and Technology. Moscow, Science, 1981 (in Russian).
9. Fradkov A.L., Andrievsky B. Synchronization and phase relations in the motion of two-pendulum system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, vol. 42, pp. 895–901; doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2007.03.016.
10. Kapitaniak M., Czolczynski K., Perlikowski P., Stefanski A., Kapitaniak T. Synchronization of clocks. *Physics Reports*, 2012, vol. 517, pp. 1–69. doi:10.1016/j.physrep.2012.03.002.
11. Il Gu Yi, Hyun Keun Lee, Sung Hyun Jun, Beom Jun Kim. Antiphase synchronization of two nonidentical pendulums. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, vol. 20, iss. 7, pp. 2179–2184; doi: 10.1142/s0218127410027003.
12. Guzev M.A., Dmitriev A.A. Stability of coupled oscillators. *Far Eastern Mathematical Journal*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 166–191 (in Russian).
13. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Chaotic dynamics of interacting pendulums: Decision of synchronization problem. *Engineering Physics*, 2019, iss. 1. pp. 49–62 (in Russian).
14. Gladkov S.O. On calculating the stopping time of a cylindrical body rotating in a viscous continuum and the time of entrainment of a coaxial external cylinder. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 2018, vol. 63, iss. 3, pp. 325–330; doi:10.1134/S1063784218030088.

15. Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics: vol. 1. Mechanics (2nd ed.). Butterworth-Heinemann, 1976.
16. Biederman W.L. The Theory of Mechanical Vibrations. Higher School, Moscow, 1980 (in Russian).
17. Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics: vol. 6. Fluid Mechanics (2nd ed.). Butterworth-Heinemann, 1987.



Гладков Сергей Октабринович родился (1951) в Куйбышеве. Окончил Московский институт народного хозяйства им. Г.В. Плеханова (1973). Работал стажером-исследователем в Институте физических проблем АН СССР им. С.И. Вавилова (1974–1976), затем аспирант ИФП АН СССР им. С.И. Вавилова (1976–1981). Защитил диссертации на звания ученой степени кандидата физико-математических наук (1981, ИФП АН СССР) и доктора физико-математических наук (1995, МГУ) в области физики твердого тела. Автор более 200 научных статей в рецензируемых зарубежных и отечественных журналах, 4 монографий и сборника задач по теоретической физике. Член редколлегии журнала «Сложные системы», <http://slozhnye-sistemy.ru>

Россия, 125993 Москва, Волоколамское шоссе, 4
 Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
 E-mail: sglad51@mail.ru



Богданова Софья Борисовна родилась (1969) в городе Павловский Посад Московской области. Окончила Орехово-Зуевский педагогический институт (1990). Училась в аспирантуре (1990–1993) кафедры высшей алгебры Московского государственного педагогического института им. В.И. Ленина. Защитила диссертацию на звание ученой степени кандидата физико-математических наук (2013, МГУ) в области физики магнитных явлений. Автор более 50 научных статей в рецензируемых зарубежных и отечественных журналах.

Россия, 125993 Москва, Волоколамское шоссе, 4
 Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
 E-mail: sonjaf@list.ru