



Динамика уравнения с двумя запаздываниями, моделирующего численность популяции

И. С. Кащенко¹, С. А. Кащенко^{1,2}

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31

E-mail: iliyask@uniyar.ac.ru, kasch@uniyar.ac.ru

Автор для переписки Кащенко Илья Сергеевич, iliyask@uniyar.ac.ru
Поступила в редакцию 18.12.2018, принята к публикации 1.03.2019

Предмет исследования. В работе исследуется поведение решений логистического уравнения с двумя запаздываниями из некоторой окрестности состояния равновесия при большом значении коэффициента линейного роста. Такие задачи возникают при моделировании численности популяций с учетом возрастной структуры, в качестве модели численности насекомых и т.п. **Новизна.** Показано, что критические случаи, возникающие в задаче об устойчивости состояния равновесия, имеют бесконечную размерность: бесконечно большое число корней характеристического уравнения стремятся к мнимой оси. Кроме того, в ряде изученных ситуаций возникает дополнительное вырождение, существенно влияющее на структуру решений. **Методы исследования.** Для изучения поведения решений в близких к критическим случаям разработан асимптотический метод, с помощью которого были построены специальные нелинейные уравнения – квазинормальные формы, решения которых дают асимптотические приближения решений исходной задачи. **Полученные результаты.** Показано, что в критических случаях поведение решений исходной сингулярно возмущенной задачи определяется динамикой квазинормальной формы. Приведены асимптотические формулы, связывающие их решения. В качестве квазинормальной формы могут выступать комплексные параболические уравнения типа Гинзбурга–Ландау, а при некоторых вырождениях – уравнения с одним (возможно, большим) запаздыванием либо обобщенное уравнение Кортевега–де Фриза. Эти задачи либо не содержат малый параметр, либо зависят от него регулярно. **Выводы.** Изучено поведение решений сингулярно возмущенного логистического уравнения с двумя запаздываниями. Выделены критические случаи и исследованы бифуркации. Показано, что у изучаемой системы присутствуют такие динамические эффекты, как мультистабильность и гипермультистабильность, а также бесконечный процесс прямых и обратных бифуркаций при стремлении малого параметра к нулю.

Ключевые слова: уравнение с запаздыванием, два запаздывания, малый параметр, нормальная форма, численность популяции, уравнение Гинзбурга–Ландау.

Образец цитирования: Кащенко И.С., Кащенко С.А. Динамика уравнения с двумя запаздываниями, моделирующего численность популяции // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 2. С. 21–38. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-2-21-38>

Финансовая поддержка. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10043.

Dynamics of equation with two delays modelling the number of population

I. S. Kashchenko¹, S. A. Kashchenko^{1,2}

¹P.G. Demidov Yaroslavl State University
14, Sovetskaya st., 150003 Yaroslavl, Russia

²National Research Nuclear University «MIFI»,
31, Kashirskoe sh., 115409 Moscow, Russia

E-mail: iliyask@uniyar.ac.ru, kasch@uniyar.ac.ru

Correspondence should be addressed to Kashchenko Iliya S., iliyask@uniyar.ac.ru

Received 18.12.2018, accepted for publication 1.03.2019

Issue. The paper investigates the behavior of solutions of a logistic equation with two delays from some neighborhood of the equilibrium state with a large value of the coefficient of linear growth. Such problems arise in modeling the population size taking into account the age structure, as a model of the number of insets, etc. **Innovation.** It is shown that the critical cases arising in the problem of the stability of an equilibrium state have infinite dimension: an infinitely large number of roots of the characteristic equation tend to the imaginary axis. In addition, in a number of studied situations, an additional degeneracy arises that significantly affects the structure of solutions. **Investigation methods.** To study the behavior of solutions in close to critical cases, an asymptotic method has been developed. With its help, special nonlinear equations – quasi-normal forms – whose solutions provide asymptotic approximations of solutions to the original problem. **Results.** It is shown that in critical cases the behavior of the solutions of the original singularly perturbed problem is determined by the dynamics of the quasi-normal form. The asymptotic formulas connecting their solutions are given. Complex parabolic Ginzburg–Landau equation can serve as a quasi-normal form, and for some degenerations, equations with one (possibly large) delay or the generalized Korteweg–de Vries equation. These tasks either do not contain a small parameter, or depend on it regularly. **Conclusions.** The behavior of solutions of a singularly perturbed logistic equation with two delays is studied. Critical cases are found and bifurcations are investigated. It is shown that the system under study has such dynamic effects as multistability and hypermultistability, as well as an infinite process of direct and inverse bifurcations as the small parameter tends to zero.

Key words: equation with delay, two delays, small parameter, normal form, number of population, Ginzburg–Landau equation.

Reference: Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Dynamics of equation with two delays modelling the number of population. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 2, pp. 21–38. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-2-21-38>

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-29-10043.

1. Постановка задачи

Известно, что логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{N(t-T)}{K} \right] N \quad (1)$$

хорошо описывает динамику изменения численности простейших популяций, обитающих в однородной среде [1, 2]. Здесь $N > 0$ – нормированная численность; $r > 0$ – мальтузианский коэффициент; $T > 0$ – время запаздывания (возраст половозрелости); K – средняя численность популяции, обусловленная емкостью среды. Исследованию этого уравнения посвящена значительная литература (см., например, [3–8]).

В (1) учитывается лишь возраст половозрелости T , однако вклад в изменение численности популяции для возрастных групп, перешедших этот возраст, может быть различным.

Для учета возрастной структуры рассмотрим более сложное уравнение с двумя запаздываниями (см., например, [9])

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{\alpha_1 N(t - T_1) + \alpha_2 N(t - T_2)}{K} \right] N, \quad (2)$$

где $T_1 > T_2 > 0$, а весовые коэффициенты $\alpha_1 \geq 0$ и $\alpha_2 \geq 0$ определяют вклад соответствующей возрастной группы, причем $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Положим

$$a = -\alpha_1^{-1} \alpha_2 < 0. \quad (3)$$

Тогда с помощью нормирующих замен $r \rightarrow r(1 - a)T_1^{-1}$, $t \rightarrow T_1 t$ и замен $N = K(1 + u)$ и $H = T_2 T_1^{-1} < 1$ приходим к уравнению

$$\dot{u} = r[au(t - 1) - u(t - H)](1 + u). \quad (4)$$

Некоторые выводы о нелокальной динамике этого уравнения описаны в работах [10–12].

Уравнение (4) возникает и в задачах о динамике численности популяции насекомых, которая существенно отличается от задачи о динамике с учетом возрастной структуры. В [13] для описания этой задачи предложена система двух уравнений

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= r_1[1 - a(1 - N_2(t - T_1)) - N_1(t - T_2)]N_1, \\ \dot{N}_2 &= r_2[N_1(t - (2T - T_1 - T_2)) - N_2]N_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $N_1 = N_1(t)$ – количество взрослых насекомых, $N_2 = N_2(t)$ – количество личинок, T_1 – время между появлением личинок и имаго, $T - T_1$ – время между появлением имаго и личинок, T – продолжительность жизненного цикла, T_2 – среднее время жизни имаго в течение одной генерации, a характеризует глубину связи популяций имаго и личинок, причем выполнены неравенства

$$0 < a < 1. \quad (6)$$

Величина $r_1(1 - a)$ – мальтузианский коэффициент линейного роста, а параметр r_2 определяется по скорости появления личинок, причем во многих приложениях r_2 достаточно велико. При таких r_2 естественно рассмотреть более простое уравнение

$$\dot{N} = r_0[1 - a(1 - N(t - (2T - T_2))) - N(t - T_2)]N, \quad (7)$$

к которому сводится система (5) при $r_2 \rightarrow \infty$. Здесь

$$N = N_1(t), \quad N_2 = N(t - (2T - T_1 - T_2)), \quad r_0 = r_1.$$

Ряд результатов аналитического и численного исследования уравнения (7) приведен в [14–17]. Выполним в (7) замену $t \rightarrow (2T - T_2)\tau$, $N = 1 + u$ и положим $H = (2T - T_2)^{-1}T_2 < 1$, $r = (2T - T_2)r_0$. В результате получим уравнение (4). Таким образом, уравнение (4) описывает обе из указанных выше задач, с той лишь разницей, что в одной из них для параметра a имеем неравенство (3), а в другой – неравенство (6).

Уравнение (4), очевидно, имеет нулевое решение, которое соответствует решениям $N = 1$ в (7) и $N = K$ в (3). В настоящей работе изучается поведение всех решений (4) с начальными условиями (в пространстве $C_{[-1,0]}$) из некоторой достаточно малой окрестности нулевого

состояния равновесия. Основное предположение состоит в том, что параметр r является достаточно большим: $r \gg 1$. Оно хорошо согласуется с числовыми данными, приведенными в [13, 14]. Большое значение r в (4) соответствует большому значению запаздывания T_1 в (2) и T в (7).

Удобно ввести обозначение $\varepsilon = r^{-1}$. Тогда

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (8)$$

Условие (8) открывает путь к использованию асимптотических методов в задаче о локальной динамике уравнения (4). Рассмотрим вопрос о расположении корней характеристического квазиполинома для линеаризованного в нуле уравнения (4):

$$\varepsilon\lambda + \exp(-\lambda H) = a \exp(-\lambda). \quad (9)$$

При фиксированных значениях a и H ($0 < H < 1$) и при условии (8) уравнение (9) имеет корень с положительной (и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$) вещественной частью. Это означает, что при указанных условиях нулевое состояние равновесия в (4) неустойчиво и задача о поведении его решений в окрестности нуля является нелокальной [18]. В связи с этим сделаем предположение, что параметр H является достаточно малым. Положим в (4)

$$H = \varepsilon h. \quad (10)$$

В разделе 2 на основе асимптотического анализа корней уравнения (9) показано, что при $h > \pi/2$ состояние равновесия в (4) неустойчиво, а при $0 < h \leq \pi/2$ найдется такое $a_0 = a_0(h)$, что при $|a| < a_0$ все корни (9) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$. В этом случае нулевое решение (4) асимптотически устойчиво и все решения из некоторой достаточно малой, но фиксированной при $\varepsilon \rightarrow 0$ окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же $|a| > a_0$, то уравнение (9) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью. Нулевое решение (4) при этом условии неустойчиво и задача о динамике решений становится нелокальной.

Отсюда вытекает, что в рассмотрении нуждается случай, когда параметр a близок к $\pm a_0(h_0)$ при h близком к $h_0 \in (0, \pi/2]$. В связи с этим ниже полагаем, что для некоторых фиксированных значений a_1 и h_1 имеет место представление

$$h = h_0 + \varepsilon^\alpha h_1, \quad a = \pm a_0(h_0) + \varepsilon^\alpha a_1, \quad \alpha > 0. \quad (11)$$

В этом случае характеристическое уравнение (9) имеет бесконечно много корней, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, и нет корней с положительной и отделенной от нуля вещественной частью. Тем самым можно говорить о том, что реализуется критический в задаче об устойчивости нуля случай бесконечной размерности. Методика исследования такого типа задач разработана в [19–21]. В разделе 3 эта методика применяется к исследованию динамики уравнения (4) при условиях (10) и (11) и $0 < a_0 < 1$. В качестве основного результата построена квазинормальная форма – специальное нелинейное комплексное уравнение типа Гинзбурга–Ландау, динамика которого определяет при малых ε структуру решений (4) из окрестности нулевого состояния равновесия. В разделе 4 рассмотрен случай, когда $a_0 = 0$. Показано, что при этом условии квазинормальными формами являются нелинейные комплексные уравнения с запаздыванием, которые содержат коэффициенты, быстро осциллирующие по параметру ε . В разделе 5 рассмотрен важный для приложений случай, когда $|a_0| = 1$. Здесь тоже построены специальные нормализованные уравнения параболического типа, которые существенно отличаются и по виду, и по динамическим свойствам от случая $|a_0| < 1$.

2. Линейный анализ

Рассмотрим характеристическое уравнение (9) при условии (10):

$$\varepsilon\lambda + \exp(-\varepsilon\lambda h) = a \exp(-\lambda). \quad (12)$$

Если $h > \pi/2$, то это уравнение имеет корень с положительной вещественной частью вида

$$\lambda = \mu\varepsilon^{-1}(1 + o(1)), \quad \operatorname{Re} \mu > 0.$$

Это следует из того факта, что характеристическое для (1) уравнение

$$\mu = -\exp(-\mu h)$$

имеет при $h > \pi/2$ корень с положительной вещественной частью (см., например, [2, 3]).

Далее считаем, что $0 < h \leq \pi/2$. Обозначим через $P(\omega)$ квадрат модуля левой части (12) при чисто мнимых λ

$$P(\omega) = |i\omega + \exp(-i\omega h)|^2 = 1 + \omega^2 - 2\omega \sin \omega h.$$

Пусть ω_0 – это точка минимума $P(\omega)$

$$P(\omega_0) = \min_{\omega \geq 0} P(\omega).$$

Очевидно, что

$$0 \leq P(\omega_0) \leq 1, \quad P'(\omega_0) = 0, \quad P''(\omega_0) > 0. \quad (13)$$

На рис. 1 представлен график зависимости ω_0 от h . Важно отметить, что $\omega_0 = 0$ при $0 < h \leq 1/2$ и $\omega_0 \neq 0$ при $h > 1/2$.

Обозначим $a_0(h) = \sqrt{P(\omega_0)}$. При этом просто проверяются следующие промежуточные утверждения.

Лемма 1. Пусть $0 < h \leq \pi/2$ и $|a| < a_0(h)$. Тогда при всех достаточно малых ε все корни характеристического уравнения (12) имеют отрицательные вещественные части и для некоторой положительной постоянной δ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \lambda \leq -\delta.$$

Лемма 2. Пусть $h > \pi/2$ или $|a| > a_0(h)$. Тогда при всех достаточно малых ε уравнение (12) имеет корень с положительной вещественной частью, удовлетворяющий для некоторого $\delta > 0$ неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda \geq \delta.$$

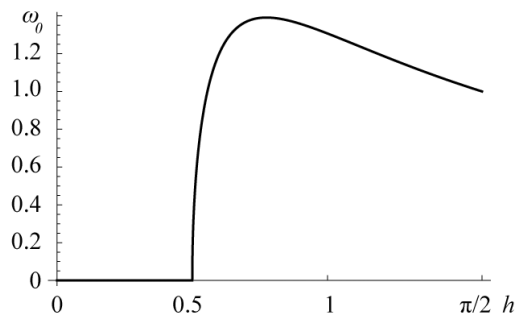


Рис. 1. График зависимости ω_0 от h

Fig. 1. Graph of ω_0 versus h

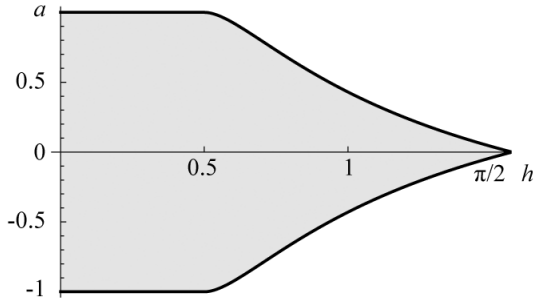


Рис. 2. Область устойчивости нулевого состояния равновесия (4). Граница области – кривые $a = \pm a_0(h)$

Fig. 2. The stability region of the zero equilibrium state of (4). Border area – curves $a = \pm a_0(h)$

Далее будет исследован «пограничный» случай: когда параметры h и a близки к $h_0 \in (0, \pi/2]$ и $a_0 = \pm a_0(h_0)$, то есть выполняется (11). В этом случае характеристическое уравнение (12) имеет бесконечно много корней, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ и нет корней с положительными (и отделенными от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$) вещественными частями.

Отметим, что значения ω_0, h_0 могут быть определены через a_0 . Для этого рассмотрим уравнение

$$[1 + x^2] \cos^2 x = a_0^2 \quad (14)$$

и через x_0 обозначим его наименьший положительный корень. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sin x_0 + \sqrt{a_0^2 - \cos^2 x_0}, \\ h_0 &= \omega_0^{-1} x_0 = x_0 \left[\sin x_0 + \sqrt{a_0^2 - \cos^2 x_0} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть $1/2 < h_0 < \pi/2$, $a_0 = \pm a_0(h_0)$ и выполнены условия (11). Выпишем асимптотическое приближение корней $\lambda_k(\varepsilon)$ уравнения (12), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого введем еще несколько обозначений. Сначала определим вещественное значение $\varphi \in (0, 2\pi)$ из равенства

$$a_0 \exp(-i\varphi) = i\omega_0 + \exp(-i\omega_0 h_0).$$

Через $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ обозначим такое выражение, которое дополняет величину $\omega_0 \varepsilon^{-1}$ до кратного 2π .

Для значений $\alpha < 2$ фиксируем произвольно вещественное z и обозначим $\theta_z = \theta_z(\varepsilon)$ такое значение из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что $z\varepsilon^{\alpha/2-1} + \theta_z$ целое. Для $\alpha = 2$ положим $z = 1$ и $\theta_z = 0$. Наконец, обозначим

$$\begin{aligned} R &= a_0^{-1} [1 - h_0 \exp(-i\omega_0 h_0)] \exp(i\varphi), \\ d &= \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} h_0^2 a_0^{-1} \exp(-i\omega_0 h_0 + i\varphi), \\ b &= a_0^{-1} (a_1 + h_1 \omega_0 \exp(-ih_0 \omega_0 + i\varphi)). \end{aligned}$$

Из условий (13) вытекает, что R вещественное ($\text{Im } R = 0$) и $\text{Re } d > 0$.

Таким образом, при выполнении условий Леммы 1 нулевое решение (4) устойчиво, а его локальная динамика тривиальна: все решения из некоторой его окрестности стремятся к нулю [18]. В условиях Леммы 2 задача становится уже нелокальной: в некоторой малой (но фиксированной, не зависящей от малого параметра) окрестности нуля нет устойчивых решений [18]. На рис. 2 приведен вид области устойчивости нуля на плоскости (h, a) . Отметим, что при $0 < h \leq 1/2$ граница области совпадает с прямой $a = \pm 1$, а при $1/2 < h \leq \pi/2$ граница находится внутри полосы: $|a| < 1$.

Асимптотическое приближение корней (12), вещественная часть которых стремится к нулю, устанавливает следующая лемма. Для описания главных членов приближения важным является значение параметра α , характеризующего порядок надкритичности. В случае, когда $\alpha < 2$, необходимо учитывать «большие» номера k , то есть $k = (z\varepsilon^{1-\alpha/2} + \theta_z)n$.

Лемма 3. Для корней характеристического уравнения (12) при условии (11), где $1/2 < h_0 < \pi/2$ и $a_0 = \pm a_0(h_0)$, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеют место асимптотические равенства. При $\alpha = 2$:

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\omega_0\varepsilon^{-1} + i(\theta + \varphi + 2\pi k)(1 - \varepsilon R + \varepsilon^2 R^2 + \dots) - \varepsilon^2 d(\theta + \varphi + 2\pi k)^2 + \varepsilon^2 b + \dots$$

При $\alpha < 2$:

$$\lambda_n(\varepsilon) = i\omega_0\varepsilon^{-1} + i(\theta + \varphi + 2\pi(z\varepsilon^{\alpha/2-1} + \theta_z)n)(1 - \varepsilon R + \varepsilon^2 R^2 + \dots) - \varepsilon^\alpha dz^2 n^2 + \varepsilon^\alpha b + \dots$$

Таким образом, характеристическое уравнение (12) имеет бесконечно много корней, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. Нелинейный анализ

Пусть при $1/2 < h_0 < \pi/2$ и $a_0 = \pm a_0(h_0)$ выполнены условия (11). В этом случае $0 < a_0 < 1$. Тогда характеристическое уравнение имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси, асимптотика которых описывается Леммой 3. Исследуем динамику (4) в этом случае. Воспользуемся методикой, разработанной в [19–21]. Пусть сначала $\alpha = 2$. Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \varepsilon \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp \left[\left(\omega_0 \varepsilon^{-1} + (\theta + \varphi + 2\pi k)(1 - \varepsilon R + \varepsilon^2 R^2) \right) it \right] + \right. \\ \left. + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\xi}_k(\tau) \exp \left[- \left(\omega_0 \varepsilon^{-1} + (\theta + \varphi + 2\pi k)(1 - \varepsilon R + \varepsilon^2 R^2) \right) it \right] \right) + \\ + \varepsilon^2 u_2(\tau, t) + \varepsilon^3 u_3(\tau, t) + \dots, \quad (15)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$ – медленное время, $\xi_k(\tau)$ – подлежащие определению «амплитуды», а функции $u_j(\tau, t)$ периодичны по второму аргументу.

В случае $\alpha < 2$ соответствующий ряд имеет вид

$$u = \varepsilon^{\alpha/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp \left[\left(\omega_0 \varepsilon^{-1} + (\theta + \varphi + (z\varepsilon^{\alpha/2-1} + \theta_z)k)(1 - \varepsilon R + \varepsilon^2 R^2) \right) it \right] + \right. \\ \left. + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\xi}_k(\tau) \exp \left[- \left(\omega_0 \varepsilon^{-1} + (\theta + \varphi + (z\varepsilon^{\alpha/2-1} + \theta_z)k)(1 - \varepsilon R + \varepsilon^2 R^2) \right) it \right] \right) + \\ + \varepsilon^\alpha u_2(\tau, t) + \varepsilon^{3\alpha/2} u_3(\tau, t) + \dots, \quad (16)$$

где $\tau = \varepsilon^\alpha t$. Эти выражения можно упростить. Для этого положим

$$\xi(\tau, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(i2\pi kx), \quad x = (z\varepsilon^{\alpha/2-1} + \theta_z)(1 - \varepsilon R + \varepsilon R^2)t.$$

Понятно, что $\xi(\tau, x) = \bar{\xi}(\tau, x + 1)$. Напомним, что в случае $\alpha = 2$ значение $z = 1$ и $\theta_z = 0$. Тогда (15) и (16) принимают вид

$$u = \varepsilon^{\alpha/2} \left(\xi(\tau, x) \exp(i\Omega t) + \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-i\Omega t) \right) + \varepsilon^\alpha u_2(\tau, x) + \varepsilon^{3\alpha/2} u_3(\tau, x) + \dots, \quad (17)$$

где $\Omega = \omega_0 \varepsilon^{-1} + (\theta + \varphi)(1 - \varepsilon R + \varepsilon R^2)$. Подставим (17) при условиях (11) в (4) и будем последовательно собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . На втором шаге тогда находим, что

$$u_2(\tau, x) = A \xi^2 \exp(2i\Omega t) + \bar{A} \bar{\xi}^2 \exp(-2i\Omega t),$$

$$A = \left[2i\omega_0 + 1 - a_0 \exp(2i\varphi) \right]^{-1} \left[a_0 \exp(-i\varphi) - \exp(-i\omega_0 h_0) \right].$$

На третьем шаге приходим к уравнению для определения $u_3(\tau, x)$. Из условия его разрешимости в классе периодических функций получаем уравнение для определения $\xi(t, \tau)$ – квазинормальную форму. В случае $\alpha = 2$ это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \left(2id(\theta + \varphi) \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(b + d(\theta + \varphi)^2 \right) \xi + \sigma \xi |\xi|^2, \quad \xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (18)$$

Здесь величина σ определяется формулой

$$\sigma = ia_0^{-1} \exp(i\varphi) A [w_0^{-1} A + \omega_0].$$

В случае $\alpha < 2$ получаем

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = dz^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + b\xi + \sigma \xi |\xi|^2, \quad \xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (19)$$

Из приведенных построений вытекает обоснование следующих результатов.

Теорема 1. Пусть $\alpha = 2$, $1/2 < h_0 < \pi/2$, $a_0 = \pm a_0(h_0)$ и выполнены условия (11). Пусть $\xi_0(\tau, x)$ – ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 1]$ решение краевой задачи (18) при $\theta = \theta_* \in [0, 2\pi)$. Пусть стремящаяся к нулю последовательность ε_n такова, что $\theta(\varepsilon_n) = \theta_*$. Тогда исходное уравнение (4) при $\varepsilon = \varepsilon_n$ имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^3)$ равномерно по всем $t \geq 0$ решение $u_0(t, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, \varepsilon) = \varepsilon \left[\xi_0(\varepsilon^2 t, (1 - \varepsilon R + \varepsilon^2 R^2)t) \exp(i\Omega t) + \bar{\xi}_0(\varepsilon^2 t, (1 - \varepsilon R + \varepsilon^2 R^2)t) \exp(-i\Omega t) \right] +$$

$$+ \varepsilon^2 \left(A \xi_0^2(\varepsilon^2 t, (1 - \varepsilon R + \varepsilon^2 R^2)t) \exp(2i\Omega t) + \bar{A} \bar{\xi}_0^2(\varepsilon^2 t, (1 - \varepsilon R + \varepsilon^2 R^2)t) \exp(-2i\Omega t) \right).$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ выражение $\theta = \theta(\varepsilon)$ принимает каждое значение из промежутка $[0; 2\pi)$ бесконечное количество раз, а следовательно вид решений (18) и их устойчивость могут меняться бесконечное количество раз. Это позволяет сделать вывод о возможности бесконечного процесса прямых и обратных бифуркаций в (4) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Например, это могут быть бифуркации рождения и гибели устойчивого цикла в результате супер- и субкритических бифуркаций Андронова–Хопфа.

Теорема 2. Пусть $\alpha < 2$, $1/2 < h_0 < \pi/2$, $a_0 = \pm a_0(h_0)$ и выполнены условия (11). Пусть $\xi_0(\tau, x)$ – ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 1]$ решение краевой задачи (19) при некотором z . Тогда исходное уравнение (4) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3\alpha/2})$ равномерно по всем $t \geq 0$ решение $u_0(t, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha/2} \left[\xi_0(\varepsilon^\alpha t, x) \exp(i\Omega t) + \bar{\xi}_0(\varepsilon^\alpha t, x) \exp(-i\Omega t) \right] + \\ + \varepsilon^\alpha \left(A \xi_0^2(\varepsilon^\alpha t, x) \exp(2i\Omega t) + \bar{A} \bar{\xi}_0^2(\varepsilon^\alpha t, x) \exp(-2i\Omega t) \right),$$

где $x = (z\varepsilon^{\alpha/2-1} + \theta_z)(1 - \varepsilon R + \varepsilon^2 R^2)t$.

Для разных значений z мы получаем различные краевые задачи (19). Каждая из этих задач описывает локальную динамику (4) в некоторой части окрестности нулевого решения. Поэтому, мы получили в качестве квазинормальной формы сразу семейство краевых задач (19), зависящих от параметра z . При разных значениях параметра устойчивые решения квазинормальных форм могут отличаться, следовательно уравнение (4) может иметь множество устойчивых решений в малой окрестности нуля. Более того, количество таких решений может стремиться к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, система (4) обладает гипермультистабильностью. Гипермультистабильность, индуцированная запаздыванием, и бифуркационные механизмы ее формирования обсуждаются в работах [22–25].

Каждая из краевых задач (18) и (19) является классическим уравнением Гинзбурга–Ландау. Его динамике посвящены исследования многих авторов (см., например, [26–28]). Известно, в частности, что это уравнение может иметь довольно богатую картину колебательных режимов, включая режимы хаотической пространственно-временной динамики.

Отметим, что в краевых задачах (18) и (19) просто находятся решения – бегущие волны – вида

$$\eta = \rho \exp(i2\pi m x + i\psi s).$$

Причем их количество может быть сколь угодно большим (см. [29]). Для них можно получить результаты о существовании точных решений в (4), ответить на вопрос об их устойчивости и о построении более детальной асимптотики [30].

4. Случай $a_0 = 0$

Пусть в (11) $a_0 = 0$, тогда $h_0 = \pi/2$. Результаты предыдущего раздела здесь перестают работать, поэтому этот случай нуждается в специальном рассмотрении.

Обобщим условие (11):

$$a = \mu a_1, \quad h = \pi/2 + \mu h_1, \quad 0 < \mu \ll 1. \quad (20)$$

Произведем в (4) замену времени $t \rightarrow \varepsilon t$. В итоге получим уравнение

$$\dot{u} = [\mu a_1 u(t - \varepsilon^{-1}) - u(t - \pi/2 - \mu h_1)](1 + u). \quad (21)$$

Характеристическое уравнение для линеаризованного в нуле уравнения (21) имеет вид

$$\lambda = -\exp(-\lambda(\pi/2 + \mu h_1)) + \mu a_1 \exp(-\varepsilon^{-1}\lambda). \quad (22)$$

В разделе 2. было показано, что у него нет корней с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ вещественной частью, и бесконечно много корней стремится к мнимой оси при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$. Их асимптотика может быть записана следующим образом:

$$\lambda = i + \mu\lambda_1 + \dots \quad \text{и} \quad \bar{\lambda} = -i + \mu\bar{\lambda}_1 + \dots,$$

где λ_1 – это корень

$$\lambda_1 = [h_1 + a_1 \exp(-i\varepsilon^{-1}) \exp(-\mu\varepsilon^{-1}\lambda_1)](1 + i\frac{\pi}{2})^{-1}. \quad (23)$$

Это уравнение, очевидно, имеет счетное множество корней. Таким образом, (22) имеет бесконечно много корней, которые стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает, что в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия (21) реализуется критический случай бесконечной размерности. Применим соответствующие результаты из [21] для уравнения (21). Рассмотрим формальный ряд

$$u = \sqrt{\mu}[\xi(\tau) \exp(it) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-it)] + \mu u_2(\tau, t) + \mu^{3/2} u_3(\tau, t) + \dots, \quad (24)$$

где $\tau = \mu t$, а $u_j(\tau, t)$ периодичны по второму аргументу.

Подставим (24) в (21) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях μ , считая, что величина $\psi = (\varepsilon^{-1})_{\text{mod } 2\pi}$ фиксирована. Тогда мы последовательно получим тождество, затем найдем $u_2 = 1/2 (\xi^2 e^2 + \bar{\xi}^2 e^{-2it})$, а из разрешимости уравнения для u_3 приходим к уравнению с запаздыванием для определения неизвестной амплитуды $\xi(\tau)$:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = A_1 \xi + A_2 \exp(-i\psi) \xi(\tau - \frac{\mu}{\varepsilon}) + d\xi|\xi|^2. \quad (25)$$

Здесь

$$A_1 = h_1(1 - i\frac{\pi}{2})(1 + \frac{\pi^2}{4})^{-1}, \quad A_2 = a_1(1 - i\frac{\pi}{2})(1 + \frac{\pi^2}{4})^{-1}, \quad (26)$$

$$d = -[3\pi - 2 + i(\pi + 6)][10 \cdot (1 + \frac{4}{\pi^2})]^{-1}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (20). Пусть $\xi_0(\tau)$ – ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$ решение (25) при $\psi = \psi_* \in [0, 2\pi)$. Пусть стремящаяся к нулю последовательность ε_n такова, что $(\varepsilon_n^{-1})_{\text{mod } 2\pi} = \psi_*$. Тогда исходное уравнение (21) при $\varepsilon = \varepsilon_n$ имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\mu^{3/2})$ равномерно по всем $t \geq 0$ решение

$$u_0(t, \varepsilon) = \sqrt{\mu}[\xi_0(\mu t) \exp(it) + \bar{\xi}_0(\mu t) \exp(-it)] + \frac{1}{2}\mu(\xi_0^2(\mu t)e^2 + \bar{\xi}_0^2(\mu t)e^{-2it}).$$

При $\mu = \varepsilon$ запаздывание в (25) постоянно. Представляет интерес задача о динамике (21) в случае, когда малые возмущения коэффициентов a_0 и h_0 на порядок превосходят параметр ε , то есть $\nu = \varepsilon\mu^{-1} \ll 1$. Тогда в (25) имеем большое запаздывание. После замены времени $\tau_1 = \nu\tau$ уравнение (25) можно записать в виде

$$\nu \frac{d\xi}{d\tau_1} = A_1 \xi + A_2 \exp(-i\psi) \xi(\tau_1 - 1) + d\xi|\xi|^2, \quad (27)$$

Коротко остановимся на вопросе о поведении всех решений (27) из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε и ν окрестности нулевого состояния равновесия. Рассмотрим характеристическое уравнение для линеаризованного в нуле уравнения (27):

$$\nu\lambda = A_1 + A_2 \exp(-i\psi) \exp(-\lambda). \quad (28)$$

Учитывая формулы (26), сразу получаем следующие утверждения.

Лемма 4. Пусть выполнено одно из неравенств $h_1 > 0$ или $|a_1| > |h_1|$. Тогда при всех достаточно малых ν уравнение (28) имеет корень с положительной вещественной и отделенной от нуля при $\nu \rightarrow 0$ частью.

Пусть выполнены неравенства $h_1 < 0$ или $|a_1| < |h_1|$. Тогда при всех достаточно малых ν все корни (28) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\nu \rightarrow 0$ вещественные части.

Остановимся на «пограничных» случаях, когда $h_1 < 0$ и

$$a_1 = \pm h_1(1 + \nu^\beta a_2), \quad 0 < \beta \leq 2. \quad (29)$$

В этих случаях бесконечно много корней уравнения (28) стремятся к мнимой оси при $\nu \rightarrow 0$ и нет корней с положительной и отделенной от нуля при $\nu \rightarrow 0$ вещественной частью. Применим результаты, полученные в [20].

Как и выше, через z обозначим произвольно фиксированное действительное число. И пусть функция $\theta_z = \theta_z(\nu)$ при $a_1 > 0$ принимает значения из $[0, 1)$ и дополняет $z\nu^{(\beta/2)-1}$ до целого, а при $a_1 < 0$ ее значения лежат в $[0, 2)$ и $z\nu^{(\beta/2)-1} + \theta_z$ не только целое, но еще и нечетное.

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$\xi_1 = \nu^{\beta/2} \eta(s, x) \exp(-i\psi(1 + \nu A_1^{-1} + \nu^2 A_1^{-2})\tau_1) + \nu^{3\beta/2} \xi_3(s, \tau_1, x) + \dots, \quad (30)$$

где $s = \nu^\beta \tau_1$, $x = (1 + \nu A_1^{-1} + \nu^2 A_1^{-2})\tau_1$ для $\beta = 2$ и $x = (z\nu^{\beta/2-1} + \theta_z)(1 + \nu A_1^{-1} + \nu^2 A_1^{-2})\tau_1$ для $\beta < 2$. При этом $\eta(s, x)$ будет периодической по x , если в (29) выбран знак «минус» (то есть $a_1 > 0$), и антипериодической по x в обратном случае (при $a_1 < 0$). Подставим (30) в (27). Применяя описанные выше действия, приходим к уравнению для определения $\eta(s, x)$

$$\frac{\partial \eta}{\partial s} = \frac{z^2}{2A_1^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{i\psi}{A_1^2} \frac{\partial \eta}{\partial s} + (a_2 - \frac{\psi^2}{2A_1^2})\eta + \frac{d}{A_1^2} \eta |\eta|^2 \quad (31)$$

с краевыми условиями

$$\eta(s, x + 1) = \begin{cases} \eta(s, x), & a_1 > 0; \\ -\eta(s, x), & a_1 < 0. \end{cases} \quad (32)$$

Отсюда следует итоговый результат.

Теорема 4. Пусть выполнено условие (29). Пусть для некоторых $\psi \in [0, 2\pi)$ и z (при $\beta = 2$ $z = 1$) краевая задача (31), (32) имеет ограниченное при $s \rightarrow \infty$, $x \in [0, 1]$ решение $\eta_0(s, x)$. Тогда уравнение (27) имеет асимптотическое по невязке равномерно по $\tau_1 \geq 0$ с точностью до $O(\nu^{3\beta/2})$ решение

$$\xi_1(\tau_1, \nu) = \nu^{\beta/2} \eta(\nu^\beta \tau_1, x) \exp(-i\psi(1 + \nu A_1^{-1} + \nu^2 A_1^{-2})\tau_1), \quad x = (z\nu^{\beta/2-1} + \theta_z)(1 + \nu A_1^{-1} + \nu^2 A_1^{-2})\tau_1.$$

Понятно, что при различных значениях ψ и z динамика (31), (32) может быть различной: при изменении параметров меняется устойчивость состояний равновесия, появляются или исчезают (устойчивые) периодические решения, бегущие волны, хаотические режимы. А так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ значения ψ пробегает бесконечное количество раз отрезок $[0, 2\pi)$, то это означает что в (21) может происходить неограниченный процесс прямых и обратных бифуркаций при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, в силу произвольности выбора параметра z возможен неограниченный рост количества различных установившихся режимов при стремлении ε, μ, ν к нулю.

5. Динамика решений при условии $|a_0| = 1$

Выше были изучены случаи, когда $0 \leq |a_0| < 1$. Рассмотрим теперь два оставшихся случая, когда $a_0 = -1$ или $a_0 = 1$. Сразу отметим, что приведенные ниже результаты существенно отличаются от полученных выше. Основные отличия определяются двумя факторами. Во-первых, в отличие от результатов раздела 3, формирование структур здесь будет происходить на модах с относительно низкими частотами – порядка $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, – а не на модах с частотой порядка $O(\varepsilon^{-1})$. Во-вторых, в рассмотренных ниже случаях при построении квазинормальных форм возникают специальные вырождения, связанные с тем, что коэффициенты при «главных» нелинейных слагаемых обращаются в нуль. Как будет показано, это приведет к существенному увеличению амплитуды решений.

Рассмотрим случай $a_0 = 1$. Пусть выполнено равенство

$$a = 1 + \varepsilon^\alpha a_1, \quad \alpha > 0. \quad (33)$$

В этом случае бесконечно много корней $\lambda_k(\varepsilon)$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) характеристического уравнения (9) стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$ и нет корней с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью. Их асимптотика имеет вид

$$\lambda_k(\varepsilon) = 2\pi i k (z\varepsilon^{(\alpha/2)-1} + \theta_z)(1 - (1 - h_0)\varepsilon + (1 - h_0)^2\varepsilon) + \varepsilon^\alpha (a_1 - 2\pi^2 k^2 z^2 (1 - 2h_0)) + \dots \quad (34)$$

Здесь вещественное z произвольно фиксировано, а через $\theta_z = \theta_z(\varepsilon)$ обозначено такое значение из полуинтервала $[0, 1)$, что $z\varepsilon^{(\alpha/2)-1} + \theta_z$ является целым. При этом при $\alpha = 2$ полагаем $z = 1$, тогда $\theta_z = 0$. Следуя приведенному выше алгоритму, введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \varepsilon^{\alpha/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(2\pi k x i) + \varepsilon^\alpha u_2(\tau, x) + \varepsilon^{3\alpha/2} u_3(\tau, x) + \dots, \quad (35)$$

где $\tau = \varepsilon^\alpha t$, $x = (z\varepsilon^{\alpha/2-1} + \theta_z)(1 - (1 - h_0)\varepsilon + (1 - h_0)^2\varepsilon^2)t$.

Выражению (35) можно придать компактный вид, используя обозначение

$$\xi(\tau, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx).$$

Таким образом, замена принимает вид

$$u = \varepsilon^{\alpha/2} \xi(\tau, x) + \varepsilon^\alpha u_2(\tau, x) + \varepsilon^{3\alpha/2} u_3(\tau, x) + \dots \quad (36)$$

Подставим (36) в уравнение (4) (при условии (33)), и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра. Тогда для определения $\xi(\tau, x)$ имеем краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} z^2 (1 - 2h_0) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a_1 \xi + z \xi \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (37)$$

При условии $0 < h_0 < 1/2$ эта краевая задача исследуется просто: в случае $a_1 > 0$ она не диссипативна, то есть имеет экспоненциально растущие по τ решения; а если $a_1 < 0$ то все решения (37) стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. При $h_0 = 1/2$ возникает дополнительное вырождение, оно обсуждается в следующем разделе.

Рассмотрим теперь случай $a_0 = -1$. Пусть выполнено равенство

$$a = -(1 + \varepsilon^\alpha a_1), \quad \alpha > 0. \quad (38)$$

В этом случае для корней характеристического уравнения имеем асимптотические формулы

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\pi(2k+1)(z\varepsilon^{\alpha/2-1} + \theta_z)(1 - (1-h_0)\varepsilon + (1-h_0)^2\varepsilon) + \varepsilon^\alpha(a_1 - \frac{1}{2}\pi^2(2k+1)^2z^2(1-2h_0)) + \dots \quad (39)$$

Здесь вещественное z произвольно фиксировано, а $\theta_z(\varepsilon) \in [0, 2)$ таково, что $z\varepsilon^{(\alpha/2)-1} + \theta_z$ целое и нечетное. При этом при $\alpha = 2$ полагаем $z = 1$, тогда $\theta_z = 0$. Аналогичный (35) формальный ряд имеет вид

$$u = \varepsilon^{\alpha/4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(i\pi(2k+1)x) + \varepsilon^\alpha u_2(\tau, t) + \varepsilon^{5\alpha/4} u_3(\tau, t) + \dots, \quad (40)$$

который также можно записать в более компактном виде для переменной

$$\xi(\tau, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(i\pi(2k+1)x).$$

Подставим ряд (40) в (4) (при условии $a = -(1 + \varepsilon^\alpha a_1)$) и произведя стандартные действия, для определения $\xi(\tau, x)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}z^2(1-2h_0)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a_1\xi - z\xi^2\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x). \quad (41)$$

Из приведенных построений следует утверждение.

Теорема 5. Пусть $0 < h_0 < 1/2$ и пусть краевая задача (41) при некотором z имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 1]$ решение $\xi_0(\tau, x)$. Тогда уравнение (4) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{5\alpha/4})$ решение $u_0(t, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha/4}\xi_0(\varepsilon^\alpha t, x) + \frac{1}{2}\varepsilon^\alpha\xi_0(\varepsilon t, x)\frac{\partial \xi_0(\varepsilon t, x)}{\partial x},$$

где $x = (z\varepsilon^{\alpha/2-1} + \theta_z)(1 - (1-h_0)\varepsilon + (1-h_0)^2\varepsilon)t$.

6. Случай $h_0 = 1/2$

При условии $0 < h_0 < 1/2$ краевые задачи (37) и (41) имеют параболический тип. Здесь коротко остановимся на одном «пограничном» случае, когда

$$h_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon h_1, \quad a = a_0(1 + \varepsilon^3 a_1), \quad a_0 = \pm 1. \quad (42)$$

При этих условиях вместо формул (34) и (39) имеем

$$\lambda_k = \pi i K \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \varepsilon^2 \left(h_1 + \frac{1}{4}\right) - \varepsilon^3 \left(h_1 + \frac{1}{8}\right)\right) + \varepsilon^3 \left(-\frac{i}{24}\pi^3 K^3 + h_1 \pi^2 K^2 + a_1\right) + o(\varepsilon^3),$$

где $K = 2k$ при $a_0 = 1$ и $K = (2k+1)$ при $a_0 = -1$.

Соответственно, роль квазинормальной формы краевых задач (37) и (41) играет краевая задача

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{24}\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} - h_1\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a_1\xi + f. \quad (43)$$

Здесь нелинейность f и граничные условия определяются знаком a_0 . Если $a_0 = 1$, то

$$f = \xi \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

и выполнено периодическое граничное условие $\xi(\tau, x+1) = \xi(\tau, x)$. При условии $a_0 = -1$ имеем антипериодические краевые условия $\xi(\tau, x+1) = -\xi(\tau, x)$ и

$$f = -\xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Конечно, и здесь имеют место аналогичные приведенным выше теоремы о связи решений (43) с решениями уравнения (6). Интересно отметить, что в случае $a_1 < 0$ решения (43) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Обратим внимание, что при $h_1 = a_1 = 0$ уравнение (43) принимает при $a_0 = 1$ вид классического уравнения Кортевега–де Фриза

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

а при $a_0 = -1$ – вид модифицированного (см. [31, 32]) уравнения Кортевега–де Фриза

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Обзор результатов по решениям таких уравнений приведен в [32, 33].

Выводы

Рассмотрены вопросы о локальном – в окрестности состояния равновесия – поведении двух важных для приложений уравнений с двумя запаздываниями, моделирующих динамику изменений численностей популяции с учетом возрастной структуры и динамику изменения численности насекомых. Известные численные данные позволили сформулировать условия на коэффициенты запаздывания и на мальтузианские коэффициенты. Эти условия позволили применить асимптотические методы исследования. На основе результатов линейного анализа сформулированы выводы о локальной устойчивости или неустойчивости состояния равновесия. Удалось выделить критические случаи. Как оказалось, они имеют бесконечную размерность. Основные результаты посвящены изучению динамики в этих критических случаях.

На основе разработанного авторами метода бесконечномерной нормализации построены уравнения для «медленных» амплитуд – квазинормальные формы. Эти уравнения являются либо нелинейными параболическими краевыми задачами типа Гинзбурга–Ландау, либо уравнениями с запаздыванием. Важно отметить, что часто они содержат некоторый параметр, который при стремлении к нулю малого параметра в исходных уравнениях бесконечно много раз меняется от нуля до единицы. Отсюда, в частности, можно сделать вывод о высокой чувствительности динамических свойств решений к изменению параметров уравнения и вывод о том, что при уменьшении малого параметра может происходить неограниченный процесс «рождения» и «гибели» тех или иных установившихся режимов.

В случае увеличения порядка надкритичности построенные квазинормальные формы содержат произвольный параметр, что говорит о существовании целого семейства однотипных решений у исходного уравнения.

Переход от исходных уравнений с малым параметром к довольно сложным нормализованным уравнениям позволяет сформулировать выводы о богатой динамике рассматриваемых

прикладных задач и о том, что для них характерны сложные по структуре нерегулярные колебания. Из асимптотических формул, которые связывают решения исходных и нормализованных уравнений, следует, что, как правило, решения уравнений (4) являются быстро осциллирующими по времени, а построенные краевые задачи описывают изменения относительно медленно меняющихся амплитуд. Отметим, что у уравнения (1) с одним запаздыванием ни быстроосциллирующих, ни нерегулярных (хаотических) решений не существует ни при каких значениях параметров. Таким образом, добавление второго запаздывания (даже малого), делает динамику системы существенно сложнее.

Библиографический список

1. *Hutchinson G.E.* Circular causal in ecology // *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 1948. Vol. 50. P. 221–246.
2. *Erneux T.* Applied Delay Differential Equations. Berlin: Springer, 2009.
3. *Wright E.M.* A non-linear difference-differential equation // *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik.* 1955. Vol. 194. P. 66–87.
4. *Kakutani S., Markus L.* On the non-linear difference-differential equation $y'(t)=(a-by(t-\tau))y(t)$ // *H. Antosiewicz, W. T. Kyner, R. Bass et al. Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations / Ed. Solomon Lefschetz. Princeton University Press, 1958. Vol. 4 of Annals of Mathematical Studies (AM-41). P. 1–18.*
5. *Кащенко С.А.* Пространственно-неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией // *Математическое моделирование.* 1990. Т. 2, № 9. С. 49–69.
6. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential Equations // *Applied Mathematical Sciences*, no. 119. Springer Verlag, 1996.
7. *May R.M.* Stability and Complexity in Model Ecosystems. 2 edition. Princeton University Press, 2001.
8. *Kashchenko S.A.* Asymptotics of the solutions of the generalized Hutchinson equation // *Automatic Control and Computer Sciences.* 2013. Vol. 47, no. 7. P. 470–494.
9. *Cushing J.M.* Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics. Heidelberg, 1977.
10. *Киселева Е.О.* Локальная динамика уравнения Хатчинсона с двумя запаздываниями в критическом случае резонанса 1:2 // *Моделирование и анализ информационных систем.* 2007. Т. 14, № 2. С. 53–57.
11. *Преображенская М.М.* Применение метода квазинормальных форм к математической модели отдельного нейрона // *Моделирование и анализ информационных систем.* 2014. Т. 21, № 5. С. 38–48.
12. *Кащенко С.А.* Динамика логистического уравнения с двумя запаздываниями // *Дифференциальные уравнения.* 2016. Т. 52, № 5. С. 561–571.
13. *May R.M.* Time delays, density-dependence and single-species oscillations // *Journal of Animal Ecology.* 1974. Vol. 43, no. 3. P. 747–770.
14. *Колесов Ю.С.* Моделирование популяции насекомых // *Биофизика.* 1983. Т. 28, № 3. С. 513.
15. *Кащенко С.А.* Стационарные режимы уравнения, описывающего численности насекомых // *Доклады Академии наук СССР.* 1983. Т. 273, № 2. С. 328–330.
16. *Глызин С.Д.* Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона // *Модел. и анализ информ. систем.* 2007. Т. 14, № 3. С. 29–42.
17. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2009. Т. 49, № 1. С. 7–89.

18. Hale J., Sjoerd M.V.L. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1993.
19. Кащенко С.А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1448–1451.
20. Кащенко И.С. Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 12. С. 2141–2150.
21. Кащенко И.С., Кащенко С.А. Асимптотика сложных пространственно-временных структур в системах с большим запаздыванием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. С. 137–146.
22. Wolfrum M., Yanchuk S. Eckhaus instability in systems with large delay // Physical Review Letters. 2006. Vol. 96. 220201.
23. Erneux T., Grasman J. Limit-cycle oscillators subject to a delayed feedback // Physical Review E. 2008. Vol. 78. 026209.
24. Yanchuk S., Perlikowski P. Delay and periodicity // Physical Review E. 2009. Vol. 79. 046221.
25. Балакин М.И., Рыскин Н.М. Бифуркационный механизм формирования развитой мультистабильности в осцилляторе ван дер Поля с запаздывающей обратной связью // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 2. С. 151–164.
26. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Уравнение Гинзбурга–Ландау и нелинейная динамика неравновесных сред // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 32, № 2. С. 131–143.
27. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский. М. : Наука, 1992.
28. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2007.
29. Kashchenko A.A. Analysis of running waves stability in the Ginzburg–Landau equation with small diffusion // Automatic control and computer sciences. 2015. Vol. 49, no. 11. P. 514–517.
30. Кащенко С.А. Исследование устойчивости решений линейных параболических уравнений с близкими к постоянным коэффициентами и малой диффузией // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 1991. С. 128–155.
31. Лем Д.Л. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983.
32. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. 2-е издание. М.; Ижевск: Ин-т Комп. Исслед., 2004.
33. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. Точные решения. М.: Физматлит, 2002.

References

1. Hutchinson G.E. Circular causal in ecology. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 1948, vol. 50, pp. 221–246.
2. Erneux T. Applied Delay Differential Equations. Berlin: Springer, 2009.
3. Wright E.M. A non-linear difference-differential equation. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 1955, vol. 194, pp. 66–87.
4. Kakutani S., Markus L. On the non-linear difference-differential equation $y'(t)=(a-by(t-\tau))y(t)$. In: Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations; Ed. by Solomon Lefschetz. Princeton University Press, 1958. Vol. 4 of Annals of Mathematical Studies (AM-41), pp. 1–18.
5. Kashchenko S.A. Spatially heterogeneous structures in the simplest models with delay and diffusion. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 1990, vol. 2, no. 9, pp. 49–69.

6. Wu J. Theory and applications of partial functional differential equations. *Applied mathematical sciences no. 119*. Springer Verlag, 1996.
7. May R.M. Stability and Complexity in Model Ecosystems. 2 edition. Princeton University Press, 2001.
8. Kashchenko S.A. Asymptotics of the solutions of the generalized Hutchinson equation. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2013, vol. 47, no. 7, pp. 470–494.
9. Cushing J.M. Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. Heidelberg, 1977.
10. Kiseleva E.O. Local dynamics of the Hutchinson equation with two delays in the critical case of resonance 1:2. *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2007, vol. 14, no. 2, pp. 53–57 (in Russian).
11. Preobrazhenskaia M.M. Application of the method of quasi-normal forms to the mathematical model of a single neuron. *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2014, vol. 21, no. 5, pp. 38–48 (in Russian).
12. Kashchenko S.A. Dynamics of the logistic equation with two delays. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 538–548.
13. May R.M. Time delays, density-dependence and single-species oscillations. *Journal of Animal Ecology*, 1974, vol. 43, no. 3, pp. 747–770.
14. Kolesov Yu.S. *Biophysics*, 1983, vol. 28, no. 3, p. 513 (in Russian).
15. Kashchenko S.A. Stationary modes of an equation describing fluctuations of an insect population. *Soviet Physics. Doklady*, 1983, vol. 28, no. 11, pp. 935–936.
16. Glyzin S.D. Age groups in Hutchinson equations. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2018, vol. 52, no. 7, pp. 714–727.
17. Glyzin S.D., Kolesov A.Y., Rozov N.K. Extremal dynamics of the generalized Hutchinson equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, no. 1, pp. 71–83.
18. Hale J., Sjoerd M.V.L. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1993.
19. Kaschenko S.A. Normalization techniques as applied to the investigation of dynamics of difference-differential equations with a small parameter multiplying the derivative. *Differential equations*, 1989, vol. 25, no. 8, pp. 1448–1451.
20. Kashchenko I.S. Local dynamics of equations with large delay. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 2, pp. 2172–2181.
21. Kashchenko I.S., Kaschenko S.A. *Applied nonlinear dynamics*, 2008, vol. 16, no. 4, pp. 137–146 (in Russian).
22. Wolfrum M., Yanchuk S. Eckhaus instability in systems with large delay. *Physical Review Letters*, 2006, vol. 96, 220201.
23. Erneux T., Grasman J. Limit-cycle oscillators subject to a delayed feedback. *Physical Review E.*, 2008, vol. 78, 026209.
24. Yanchuk S., Perlikowski P. Delay and periodicity. *Physical Review E.*, 2009, vol. 79, 046221.
25. Balakin M.I., Ryskin N.M. Bifurcational mechanism of formation of developed multistability in a van der Pol oscillator with time-delayed feedback. *Nelineinaya Dinamika*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 151–164 (in Russian).
26. Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. Ginzburg–Landau equation and nonlinear dynamics of nonequilibrium media. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 1987, vol. 30, no. 2, pp. 93–102.

27. Akhromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetskii G.G., Samarskii A.A. Nonstationary Structures and Diffusion Chaos. Moscow: Nauka, 1992 (In Russian).
28. Loskutov A.Y., Mikhailov A.S. Basic Theory of Complex Systems. Moscow; Izhevsk: Institute of Computer Science, 2007.
29. Kashchenko A.A. Analysis of running waves stability in the Ginzburg–Landau equation with small diffusion. *Automatic control and computer sciences*, 2015, vol. 49, no. 11, pp. 514–517.
30. Kashchenko S.A. A study of the stability of solutions of linear parabolic equations with nearly constant coefficients and small diffusion. *Journal of Soviet Mathematics*. 1992, vol. 60, no. 6, pp. 1742–1764.
31. Lamb G.L.Jr. Elements of Soliton Theory. New York: Wiley-Interscience, 1980.
32. Kudryashov N.A. Analytical Theory of Nonlinear Differential Equations. Moscow; Izhevsk: Institute of Computer Investigations, 2004.
33. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. CRC press, 2002.

Кащенко Сергей Александрович – родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1989) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, первый проректор ЯрГУ. Профессор НИЯУ «МИФИ». Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В.В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е.В. Григорьевой). Опубликовал более 250 научных работ и 8 монографий. Как член авторского коллектива монографии «Управление риском», стал лауреатом и получил медаль ВВЦ. Приказом Министерства образования и науки награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования». Главный редактор ряда научных журналов, а также научной серии монографий «Синергетика».



Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, д. 14
 Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
 Россия, 115409 Москва, Каширское шоссе, 31
 Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
 E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Кащенко Илья Сергеевич – родился в Ярославле (1982), окончил Ярославский государственный университет (2004). После окончания университета работает в ЯрГУ доцентом кафедры математического моделирования. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ЯрГУ (2006) и доктора физико-математических наук в Нижегородском государственном университете (2018) в области нелинейной динамики уравнений с запаздыванием и асимптотических методов. Опубликовал 40 научных статей по направлениям, указанным выше.



Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, д. 14
 Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
 E-mail: iliyask@uniyar.ac.ru