



ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ЭФФЕКТЫ В МОДЕЛИ БИСТАБИЛЬНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

В. В. Семенов¹, А. Б. Нейман², Т. Е. Вадивасова¹, В. С. Анищенко¹

¹Саратовский государственный университет, Россия

²Department of Physics and Astronomy, Ohio University, Athens, USA

Предложена модель бистабильного стохастического осциллятора с диссипацией, зависящей от динамических переменных, демонстрирующего стохастические бифуркации Р-типа и немонотонную зависимость средней частоты колебаний от интенсивности шума. Для количественного описания наблюдаемых эффектов вводятся эффективная интенсивность шума и эффективный потенциал.

Ключевые слова: Бистабильность, двухямный осциллятор, шум, стохастические бифуркации.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-5-15

Введение

Изучение влияния шума на динамические системы является актуальным направлением научных исследований в области нелинейной динамики. Это связано с присутствием различных источников внутренних и внешних шумов во всех реальных системах и устройствах, независимо от их физической природы, а также с той важной ролью, которую шум, даже при слабой интенсивности, может играть в нелинейных системах. Шум не просто разрушает динамические режимы, характерные для детерминированной системы, он может приводить к новым типам поведения или изменять характер бифуркаций (индуцированные шумом переходы и стохастические бифуркации [1–4]), поддерживать незатухающие колебания в бистабильных и возбудимых осцилляторах [5–8], управлять степенью регулярности стохастических колебаний (явления стохастического и когерентного резонансов [6–12]) и эффектами синхронизации (стохастическая синхронизация [7, 8, 10, 13–15] и синхронизация шумом [16–18]).

Особенно важна роль шума в так называемых стохастических осцилляторах, представляющих собой активные нелинейные системы, которые, в силу преобладания диссипации энергии над ее подкачкой, не способны поддерживать незатухающие колебания без воздействия внешних сил. В присутствии случайных воздействий

(шума) в таких системах возникают стохастические колебания, характеристики которых определяются как параметрами системы, так и свойствами шума. Выделяют две группы стохастических осцилляторов: возбудимые осцилляторы и бистабильные осцилляторы [7]. Возбудимые осцилляторы характеризуются устойчивым состоянием равновесия (покоя), из которого система может перейти в неустойчивое состояние возбуждения, если воздействие оказывается достаточно сильным (превышает некоторый порог возбуждения). Далее система возвращается в исходное состояние сама, вне зависимости от внешних воздействий, и может снова возбудиться только через некоторое время [7, 8]. Бистабильные осцилляторы – это системы с двумя устойчивыми состояниями. В общем случае этим состояниям могут соответствовать два любых аттрактора (в том числе хаотических), со своими бассейнами притяжения. В простейшем и наиболее изученном случае бистабильный осциллятор представляет собой систему с двумя устойчивыми точками равновесия [5–7]. Шум заставляет осциллятор случайным образом переключаться из одного состояния равновесия в другое, поддерживая таким образом стохастические колебания.

Стохастические эффекты в бистабильных системах хорошо известны. К ним относятся уже упомянутые явления стохастического резонанса [6, 7, 9, 10], стохастической синхронизация [7, 10, 13, 14], а также эффект индуцированного шумом хаоса [19, 20]. Классическим примером стохастического бистабильного осциллятора является осциллятор Крамерса [5, 6]. Он представляет собой стохастический осциллятор с одной степенью свободы, характеризующийся двухъямным потенциалом и постоянной диссипацией. В общем виде такой осциллятор описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{y} + \gamma \dot{y} + \frac{\partial U(y)}{\partial y} = \sqrt{2\gamma D} n(t), \quad (1)$$

где γ – постоянный коэффициент диссипации, $U(y)$ – потенциальная функция, $n(t)$ – нормированный источник шума ($\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$, скобки $\langle \dots \rangle$ означают статистическое усреднение, $\delta(\tau)$ – функция Дирака), D – интенсивность шума. Поведение такого осциллятора хорошо изучено с применением аналитических методов и описано в научной литературе (см., например, [6,22]). Для осциллятора (1) с конечным трением ($\gamma \neq \infty$) зависимость $y(t)$ является гладкой функцией. В этом случае для характеристики средней частоты стохастических колебаний удобно использовать частоту Райса [21,22]. Она определяется как $\omega_R = 2\pi M/T$, где M – число переходов переменной y через ноль в одном направлении за время наблюдения $T \rightarrow \infty$. Для осциллятора (1) с $\gamma = 1$ частота Райса удовлетворяет следующему соотношению [21]:

$$\langle \omega_R \rangle = \frac{\sqrt{2\pi D} \exp\left\{-\frac{U(0)}{D}\right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{U(y)}{D}\right\} dy}. \quad (2)$$

В бистабильных осцилляторах типа (1) с ростом интенсивности шума частота Райса монотонно растет [21]. При этом не наблюдается качественных изменений

формы вероятностного распределения $p(y, \dot{y})$, то есть отсутствуют стохастические бифуркации Р-типа (феноменологические бифуркации) [3, 4], хотя при малой диссипации возможна стохастическая бифуркация D-типа, связанная с возникновением экспоненциальной неустойчивости стохастических траекторий [3, 19, 20].

В данной работе предлагается стохастический бистабильный осциллятор, качественно отличный от осциллятора (1), который, в зависимости от значений управляющих параметров, может демонстрировать более сложное и разнообразное поведение. Применяется численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений осциллятора по модифицированной схеме Эйлера–Коши [23] с учетом гауссова белого шума. В результате статистической обработки данных интегрирования строятся вероятностные распределения и вычисляется частота Райса. Сопоставление численных результатов с теоретическими соотношениями, справедливыми для осциллятора (1), позволяет ввести эффективные характеристики предлагаемой бистабильной модели.

1. Модель бистабильного осциллятора с переменной диссипацией

Рассмотрим схему параллельного контура, представленную на рис. 1. Контур содержит два, в общем случае, нелинейных элемента N_1, N_2 с вольтамперными характеристиками S - и N -типа, задаваемыми некоторыми функциями $i_{N1} = F(U)$, $U_{N2} = P(i)$, и источник шумового тока $i_{noise}(t)$, который будем полагать белым и гауссовым. Уравнения контура в безразмерных переменных имеют вид

$$\varepsilon \dot{x} = -y - F(x) + \sqrt{2D}n(t), \quad \dot{y} = x - P(y), \quad (3)$$

где x – безразмерное напряжение на конденсаторе, а y – безразмерный ток, протекающий через катушку; время t , параметр $\varepsilon \sim C/L$, а также коэффициенты, входящие в выражения для функций $F(x)$ и $P(y)$, являются безразмерными. Пер-

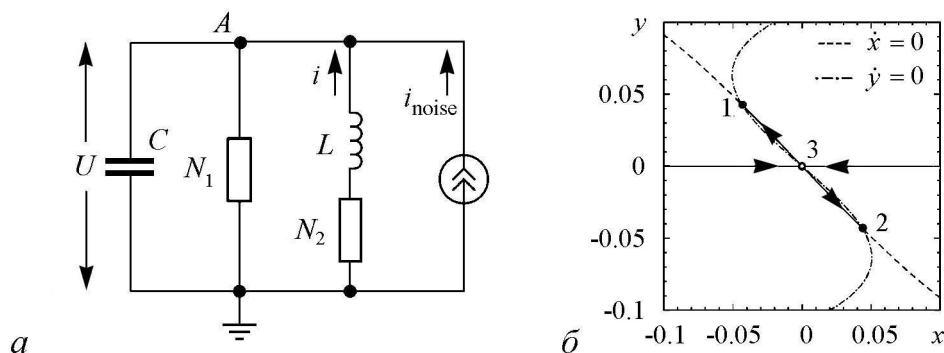


Рис. 1. Радиотехническая схема исследуемого осциллятора (3) (а) и вид фазовой плоскости (б) в случае нелинейности (б). Значения параметров: $a = 1.2$, $b = 100$, $\varepsilon = 0.01$, $c_1 = 1$, $c_3 = 9$, $c_5 = 22$, $D = 0$. На схеме используются обозначения: U – напряжение на емкости, i – ток в цепи индуктивности, i_{noise} – источник шумового тока. На фазовой плоскости отмечены две устойчивые точки равновесия «1» и «2»; точка «3» – седло в начале координат; изображены нульклина $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$; линии со стрелками – сепаратрисы седла

вое уравнение содержит источник аддитивного белого гауссова шума с интенсивностью D . Выбор функций $F(x)$ и $P(y)$ позволяет получить широкий спектр динамических режимов, от режимов, аналогичных поведению осциллятора (1) с двухъямным потенциалом, до динамики возбудимого осциллятора и бистабильности в режиме автоколебаний.

Положим $P(y) = -ay + by^3$, $a, b > 0$. Зафиксируем значения $a = 1.2$, $b = 100$, $\varepsilon = 0.01$ и рассмотрим влияние на поведение системы нелинейного элемента N_1 с характеристикой S -типа (см. рис. 1). Пусть первое уравнение является линейным

$$F(x) = c_1x, \quad c_1 > 0, \quad (4)$$

тогда в осцилляторной форме получаем следующее уравнение исследуемой системы:

$$\ddot{y} + (3by^2 - a + kc_1)\dot{y} + ky(1 - c_1a + c_1by^2) = -k\sqrt{2D}n(t), \quad (5)$$

где $k = 1/\varepsilon$. При достаточно малом значении параметра ε влиянием слагаемого $3by^2 - a$ на диссипацию можно пренебречь. В этом случае осциллятор (5) аналогичен бистабильному осциллятору (1). Численные исследования осциллятора (5) свидетельствуют о монотонном поведении частоты Райса и отсутствии стохастических бифуркаций при любом значении ε .

Учтем нелинейное сопротивление N_1 и выберем функцию $F(x)$ в виде

$$F(x) = c_1x - c_3x^3 + c_5x^5, \quad c_1, c_3, c_5 > 0. \quad (6)$$

Вид фазовой плоскости, соответствующий этому случаю при $D = 0$, $a = 1.2$, $b = 100$, $\varepsilon = 0.01$, $c_1 = 1$, $c_3 = 9$, $c_5 = 22$, приведен на рис. 1, б. В системе имеются две устойчивые точки равновесия типа устойчивый узел, расположенные симметрично относительно седла в начале координат. Бассейны их притяжения разделены устойчивой сепаратрисой седла. По виду фазовой плоскости динамических переменных x , y трудно сделать вывод об особенностях поведения исследуемого бистабильного осциллятора.

В осцилляторной форме система (3), (6) принимает вид

$$\ddot{y} + q_1(y, \dot{y})\dot{y} + kq_2(y) = -k\sqrt{2D}n(t), \quad (7)$$

где функция $q_2(y)$ определяет форму потенциала, а $q_1(y, \dot{y})$ есть нелинейное трение. Эти функции задаются следующими выражениями:

$$q_1(y, \dot{y}) = -a + 3by^2 + k \left(c_1 - c_3 \sum_{n=1}^3 \frac{3!}{n!(3-n)!} \dot{y}^{n-1} (by^2 - a)^{3-n} y^{3-n} + \right. \\ \left. + c_5 \sum_{n=1}^5 \frac{5!}{n!(5-n)!} \dot{y}^{n-1} (by^2 - a)^{5-n} y^{5-n} \right),$$

$$q_2(y) = y + c_1(by^2 - a)y - c_3(by^2 - a)^3 y^3 + c_5(by^2 - a)^5 y^5.$$

Важно отметить, что коэффициент трения зависит не только от переменной y , но и от скорости \dot{y} . Сложная зависимость диссипации от переменных y и \dot{y} является причиной качественного отличия поведения осциллятора (7) от (1) и (5).

2. Эволюция вероятностного распределения и частота Райса в бистабильном осцилляторе с переменной диссипацией

Рассмотрим эволюцию плотности вероятности динамических переменных в осцилляторе (3) с нелинейностью (6), зафиксировав параметры, соответствующие бистабильному режиму с двумя устойчивыми точками равновесия (см. рис. 1, б), и меняя интенсивность шума D . При малом шуме вероятностное распределение $p(y)$ имеет два локальных максимума, соответствующих равновесиям внутри потенциальных ям. С ростом шума последовательно происходят две стохастические бифуркации: переход к унимодальному распределению $p(y)$ (с одним максимумом), а затем, снова к распределению с двумя максимумами. Соответствующие кривые приведены на рис. 2, а. Для переменной x стохастическая бифуркация не наблюдается – распределение $p(x)$ при любом шуме остается унимодальным (рис. 2, б).

Одним из следствий стохастических бифуркаций является немонотонный характер зависимости дисперсии колебаний динамической переменной y с ростом шума (рис. 3): при малых уровнях шума наблюдается уменьшение дисперсии с ростом шума, которое затем сменяется ростом. Таким образом, существует интенсивность шума, при которой дисперсия колебаний $y(t)$ минимальна. В то же время, дисперсия колебаний $x(t)$ монотонно растет с ростом шума.

Стохастические бифуркации Р-типа в осцилляторе (3) с нелинейной диссипацией приводят к принципиально иной зависимости частоты Райса от интенсивности шума, которая не наблюдается в осцилляторах типа (1). Представим систему (3) в форме осцилляторного уравнения (7). Будем рассматривать частоту, с которой переменная y пересекает нулевое значение в одном направлении. Функция $y(t)$ является

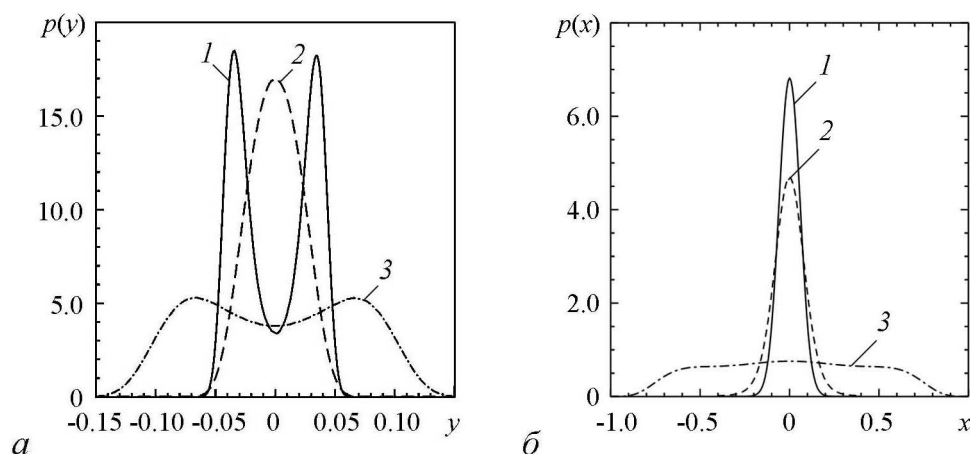


Рис. 2. Эволюция вероятностного распределения p колебаний $y(t)$ (а) и $x(t)$ (б) с ростом шума в осцилляторе (3) с нелинейностью (6) при $a = 1.2$, $b = 100$, $\varepsilon = 0.01$, $c_1 = 1$, $c_3 = 9$, $c_5 = 22$ и различных значений D : 1 – $2 \cdot 10^{-5}$; 2 – $6 \cdot 10^{-5}$; 3 – $2.4 \cdot 10^{-3}$

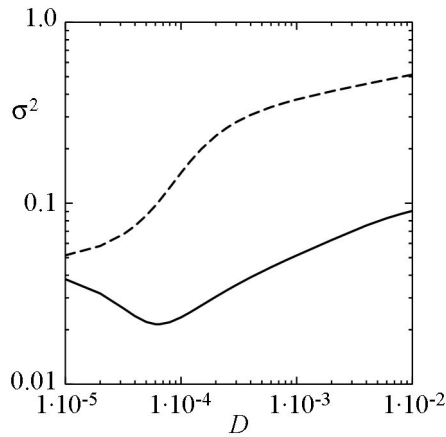


Рис. 3. Зависимость дисперсии колебаний $y(t)$ (сплошная линия) и $x(t)$ (штриховая линия) от интенсивности шума D в системе (3) с нелинейностью (6). Значения параметров осциллятора соответствуют рис. 2

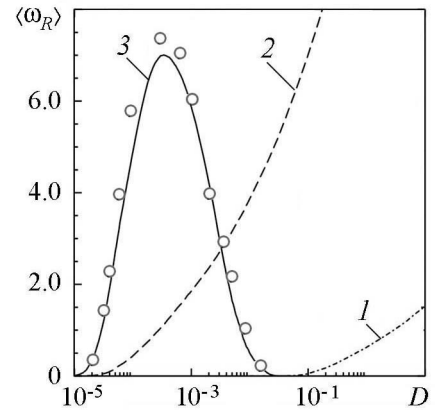


Рис. 4. Зависимость частоты Райса от интенсивности шума D для различных осцилляторов: 1 соответствует осциллятору (1) с потенциальной функцией $U(y) = -1/2y^2 + 1/4y^4$, при $\gamma = 1$; 2 – осциллятору (5); 3 – осциллятору (7)

гладкой, что определяет выбор переменной y для вычисления частоты Райса. На рис. 4 приведены полученные численно зависимости частоты ω_R от интенсивности шума D для осцилляторов (5), (7) и осциллятора (1) с двухъямным потенциалом. Для осцилляторов (5) и (1) зависимость $\langle \omega_R \rangle$ от D имеет один характер (кривые 1 и 2) – частота Райса монотонно растет с ростом шума, что соответствует результатам, приведенным в [21]. Для осциллятора (7) зависимость является иной – частота Райса сначала растет с ростом шума, а затем, достигнув максимума, уменьшается до значений, близких к нулю (кривая 3).

3. Эффективные характеристики осциллятора

Эволюцию колебаний $y(t)$ в системе (7) с ростом шума можно описать с помощью эффективной интенсивности шума $D_{\text{эфф}}$ и эффективного потенциала $U_{\text{эфф}}$. Такая возможность обусловлена тем, что совместное стационарное распределение переменных y и \dot{y} в осцилляторе (7) может быть представлено в виде, аналогичном распределению, полученному теоретически для осциллятора (1) [21,22]. Оно имеет вид

$$p(y, \dot{y}) = C \exp \left\{ -\frac{1}{D_{\text{эфф}}} \left(\frac{\dot{y}^2}{2} + U_{\text{эфф}}(y) \right) \right\}, \quad (8)$$

где C – нормировочная константа. Эффективные значения $D_{\text{эфф}}$ и $U_{\text{эфф}}(y)$ определяются на основании аппроксимации вероятностных распределений переменных y и \dot{y} , полученных численно при заданном уровне шума. Как показали расчеты, распределение $p(\dot{y})$ всегда является унимодальным и близко к гауссову распределению.

Значение $D_{\text{эфф}}$ равно дисперсии скорости \dot{y} . Для плотности вероятности переменной y из (8) следует выражение $p(y) = C \exp \{-U_{\text{эфф}}(y)/D_{\text{эфф}}\}$. Эффективный потенциал задавался в виде $U_{\text{эфф}} = -AU^2 + BU^4$. Полученные по формуле значения $p(y)$ сопоставлялись с результатами компьютерных расчетов, и по методу наименьших квадратов определялись коэффициенты A и B . На рис. 5 приведены кривые $U_{\text{эфф}}(y)$, рассчитанные для различных значений D . Качественные перестройки формы эффективного потенциала соответствуют описанным ранее стохастическим бифуркациям (см. рис. 2, а). Частоту Райса можно вычислить по формуле (2) с соответствующей заменой $D \rightarrow D_{\text{эфф}}$, $U(y) \rightarrow U_{\text{эфф}}(y)$. На рис. 4 кружками отмечены значения частоты Райса, полученные для осциллятора (7) с использованием эффективных характеристик $D_{\text{эфф}}$, $U_{\text{эфф}}(y)$ и выражения (2).

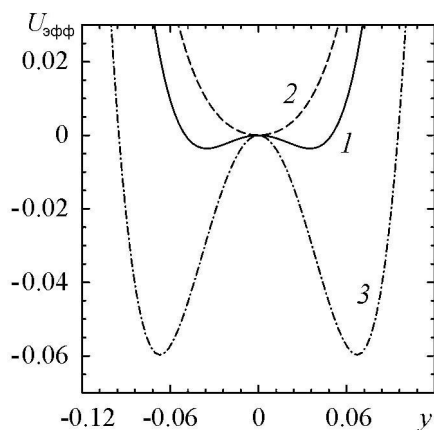


Рис. 5. Эффективный потенциал $U_{\text{эфф}}(y)$ осциллятора (7), рассчитанный для различных значений интенсивности шума D : 1 — $2 \cdot 10^{-5}$; 2 — $6 \cdot 10^{-5}$; 3 — $2.4 \cdot 10^{-3}$. Значения параметров осциллятора (7) соответствуют рис. 2

Выводы

Предложена новая характерная модель бистабильного осциллятора с нелинейной диссипацией, демонстрирующая стохастические бифуркации Р-типа и немонотонную зависимость средней частоты стохастических колебаний от интенсивности шума. Введение эффективной интенсивности шума и эффективного потенциала позволяет описать поведение данной модели, используя известные аналитические соотношения, полученные для осцилляторов с постоянной диссипацией.

Работа поддержана грантом РФФИ (№ 15-02-02288) и Министерством образования и науки РФ в рамках гос. задания (код проекта 1008).

Библиографический список

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
2. Graham R. Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // Noise in Nonlinear Dynamical Systems. Vol.1: Theory of Continuous Fokker-Planck systems / Ed. by. F. Moss and P.V.E. McClintock. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
3. Arnold L. Random Dynamical System. Berlin: Springer, 2003.
4. Sri Namachshivaya N. Stochastic bifurcation // Appl. Math. and. Computation. 1990. Vol. 38. P. 101.
5. Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica. 1940. Vol. 7. P. 284.

6. *Hänggi P., Talkner P., Borkovec M.* Reaction rate theory: Fifty years after Kramers // *Rev. Mod. Phys.* 1990. Vol. 62. P. 251.
7. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.–Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2003.
8. *Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L.* Effects of noise in excitable systems // *Physics Reports.* 2004. Vol. 392. P. 321.
9. *Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S.* Stochastic resonance in bistable systems // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62. P. 349.
10. *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гаер Л.* Стохастический резонанс: Индуцированный шумом порядок // *УФН.* 1999. Т. 42, № 1. С. 7.
11. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherence resonance in a noisy driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 775.
12. *Lindner B., Schimansky-Geier L.* Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagomo system and coherence resonance // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60, № 6. P. 7270.
13. *Neiman A.B.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 3484.
14. *Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable system driven by a periodic force // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, № 23. P. 4157.
15. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, № 9. P. 1771.
16. *Sánchez E., Matías M.A., Pérez-Muñuzuri V.* Analysis of synchronization of chaotic systems by noise: An experimental study // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56, № 4. P. 40.
17. *Goldobin D.S., Pikovsky A.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71. P. 045201(4).
18. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, единый тип поведения связанных хаотических систем // *ДАН.* 2006. Т. 407, № 6. С. 761.
19. *Schimansky-Geier L., Herzel H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // *Journal of Statistical Physics.* 1993. Vol. 70. P. 141.
20. *Arnold L., Imkeller P.* Stochastic bifurcation of the noisy Duffing oscillator. Report. Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, 2000.
21. *Freund J.A., Schimansky-Geier L., Hänggi P.* Frequency and phase synchronization in stochastic systems // *Chaos.* 2003. Vol. 13. P. 225.
22. *Rice S.O.* Mathematical analysis of random noise // *Bell System Tech. J.* 1944. Vol. 23. P. 282 (first part); 1945. Vol. 24. P. 46 (second part).

23. *Никитин Н.Н., Разевиг В.Д.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Журнал вычислительной математики и мат. физики. 1978. Том. 18, № 1. С. 107.

Поступила в редакцию 21.12.2015
После доработки 23.02.2016

NOISE-INDUCED EFFECTS IN THE DOUBLE-WELL OSCILLATOR WITH VARIABLE FRICTION

V. V. Semenov¹, A. B. Neiman², T. E. Vadivasova¹, V. S. Anishchenko¹

¹Saratov State University

²Department of Physics and Astronomy, Ohio University

A model of bistable stochastic oscillator with dynamical variables depending on dissipation is offered. Considered system demonstrates stochastic P-bifurcations and non-monotonic dependence of the mean oscillation frequency on the noise intensity. An effective noise intensity and an effective potential are introduced for a quantitative description of the observed effects.

Keywords: Bistability, double-well oscillator, noise, stochastic bifurcations.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-5-15

References

1. *Horsthemke W., Lefever R.* Noise-induced Transitions. Berlin: Springer, 1984.
2. *Graham R.* Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // Noise in Nonlinear Dynamical Systems. Vol.1: Theory of Continuous Fokker-Planck Systems / Ed. by. F. Moss and P.V.E. McClintock. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
3. *Arnold L.* Random Dynamical System. Berlin: Springer, 2003.
4. *Sri Namachshivaya N.* Stochastic bifurcation// Appl. Math. And Computation. 1990. Vol. 38. P. 101.
5. *Kramers H.A.* Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica. 1940. Vol. 7. P. 284.
6. *Hänggi P., Talkner P., Borkovec M.* Reaction rate theory: Fifty years after Kramers // Rev. Mod. Phys. 1990. Vol. 62. P. 251.
7. *Anishchenko V., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Second Edition. Berlin: Springer, 2007.
8. *Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L.* Effects of noise in excitable systems // Physics Reports. 2004. Vol. 392. P. 321.
9. *Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S.* Stochastic resonance in bistable systems// Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 349.

10. *Anishchenko V.S., Neiman A.B., Moss F., Schimansky-Geier L.* Stochastic resonance: Noise-enhanced order // *Phys. Usp.* 1989. Vol. 42. P. 7.
11. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherence resonance in a noisy driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 775.
12. *Lindner B., Schimansky-Geier L.* Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagumo system and coherence resonance // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60, № 6. P. 7270.
13. *Neiman A.B.* Synchronization like phenomena in coupled stochastic bistable systems // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 3484.
14. *Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable system driven by a periodic force // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, № 23. P. 4157.
15. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, № 9. P. 1771.
16. *Sánchez E., Matías M.A., Pérez-Muñuzuri V.* Analysis of synchronization of chaotic systems by noise: An experimental study // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56, № 4. P. 40.
17. *Goldobin D.S., Pikovsky A.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71. P. 045201(4).
18. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Trubetskov D.I., Khramov A.E.* Generalized synchronization and noise-induced synchronization: the same type of behavior of coupled chaotic systems // *Doklady Physics.* 2006. Vol. 51. P. 189.
19. *Schimansky-Geier L., Herzel H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // *Journal of Statistical Physics.* 1993. Vol. 70. P. 141.
20. *Arnold L., Imkeller P.* Stochastic bifurcation of the noisy Duffing oscillator. Report, Institut für Dynamische Systeme. Universität Bremen, 2000.
21. *Freund J.A., Schimansky-Geier L., Hänggi P.* Frequency and phase synchronization in stochastic systems // *Chaos.* 2003. Vol. 13, P. 225.
22. *Rice S.O.* Mathematical analysis of random noise // *Bell System Tech. J.* 1944. Vol. 23. P. 282. Part 1; 1945. Vol. 24. P. 46. Part 2.
23. *Nikitin N.N., Razevig V.D.* Digital simulation of stochastic differential equations and error estimates // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1978. Vol. 18. P. 102.

Ссылка на статью: Семенов В.В., Нейман А.Б., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. Индуцированные шумом эффекты в модели бистабильного осциллятора с переменной диссипацией // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2016. Т. 24, № 1. С. 5–15.

Paper's reference: Semenov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., Anishchenko V.S. Noise-induced effects in the double-well oscillator with variable friction // *Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2016. Vol. 24, № 1. P. 5–15.



Семенов Владимир Викторович – родился в Саратове (1990). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2012). Аспирант физического факультета СГУ кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов – влияние шумов в нелинейных системах, системы с запаздывающей обратной связью, химерные состояния, методы управления динамическими системами, исследование нелинейных явлений в натурном радиофизическом эксперименте. Автор более 15 научных публикаций.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: semenov_v_v@list.ru



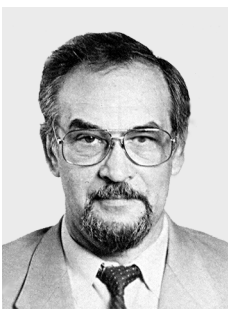
Нейман Александр Борисович – родился в Саратове (1962). Окончил Саратовский государственный университет (1984). Получил степень кандидата физ.-мат. наук (1991, СГУ) и степень доктора физ.-мат. наук (1998, СГУ). В настоящее время занимает должность профессора на факультете физики и астрономии Университета Огайо (Афины, Огайо, США). Автор более 100 научных работ. Научные интересы включают биофизику сенсорных систем, вычислительную нейронауку, нелинейную динамику стохастических систем.

Ohio University, Athens, Ohio 45701, USA
E-mail: neiman@phy.ohiou.edu



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в Саратове (1958). Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики и статистической радиофизики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических и стохастических осцилляторов, волновые структуры в активных средах, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, влияние шума и стохастические эффекты в нелинейных системах и др. Автор более 130 публикаций в рецензируемых отечественных и зарубежных изданиях.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vadivasovate@yandex.ru



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звания кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более чем 450 научных работ и более чем 20 научных монографий и учебников на русском и английском языках. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат Премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: wadim@info.sgu.ru