



АТТРАКТОР ТИПА ЛОРЕНЦА В ЭЛЕКТРОННОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРЕ И ЕГО ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРИ НАРУШЕНИИ ТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

С. П. Кузнецов

Удмуртский государственный университет
Россия, 426034 Ижевск, Университетская, 1

Национальный исследовательский Саратовский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал
Россия, 410019 Саратов, Зеленая, 38

e-mail: spkuz@yandex.ru

В работе рассматривается параметрический генератор, схема которого содержит три колебательных контура и квадратичный нелинейный реактивный элемент на основе операционного усилителя и аналогового умножителя, получены уравнения для амплитуд взаимодействующих мод.

Обращение к данной задаче имеет целью реализовать механизм параметрического взаимодействия колебательных мод, приводящий к возникновению странного аттрактора типа Лоренца, без искажений вносимых нелинейностями порядка три и выше, отвечающих за переход от квазигиперболического аттрактора к квазиаттрактору.

Исследование основано на сочетании схемотехнического моделирования с использованием программного продукта Multisim и численного решения сформулированных уравнений динамики системы в исходной форме и в виде редуцированных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд.

Предложенная схема является новой и впервые позволяет в чистом виде наблюдать в радиотехническом устройстве распадный механизм генерации хаоса, описанный в свое время Пиковским, Рабиновичем и Трахтенгерцем применительно к параметрическому взаимодействию волн в магнитоактивной плазме.

Помимо демонстрации аттрактора типа Лоренца и характерных для него особенностей динамики в рамках схемотехнического моделирования и на основе численного решения уравнений в условиях точного выполнения условий параметрического резонанса, проведено исследование трансформации аттрактора при введении отстройки частот и представлена соответствующая карта режимов на плоскости параметров.

Показано, что при отклонении по частотам от точного параметрического резонанса вместо квазигиперболического аттрактора типа Лоренца реализуются аттракторы, хотя и обладающие с ним внешним сходством, но отличающиеся отсутствием робастности – при вариации параметров возможно разрушение хаоса с возникновением регулярных режимов.

Ключевые слова: Параметрический генератор, аттрактор Лоренца, аналоговое моделирование.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-68-87

Ссылка на статью: Кузнецов С.П. Аттрактор типа Лоренца в электронном параметрическом генераторе и его трансформация при нарушении точных условий параметрического резонанса // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 68–87.

Введение

При параметрическом возбуждении двух мод посредством накачки на суммарной частоте и отборе энергии третьей модой на разностной частоте возможна хаотическая динамика, рассмотренная в свое время применительно к взаимодействию волн в магнитоактивной плазме Пиковским, Рабиновичем и Трахтенгерцем [1]. Полагая нелинейность квадратичной, авторы сформулировали систему амплитудных уравнений, которая в случае фиксированного соотношения фаз сводилась к системе трех дифференциальных уравнений первого порядка с аттрактором типа Лоренца. Такой же механизм генерации хаоса может реализоваться при параметрическом взаимодействии волновых или колебательных мод в системах различной физической природы, например, механических, радиотехнических, оптических, акустических [2–5].

Аттрактор Лоренца – известный пример странного хаотического аттрактора [6–8], изначально обнаруженный в модельной системе трех дифференциальных уравнений первого порядка для задачи о конвекции жидкости в подогреваемом снизу слое. Он относится к классу сингулярно гиперболических (квазигиперболических) аттракторов [9,10] и отвечает грубому (робастному) хаосу [11,12] в том смысле, что хаос не разрушается при малом смещении по параметрам¹. За время после публикации статьи Лоренца стало ясно, что этот тип аттрактора имеет отношение к описанию многих систем различной природы, включая динамику лазера [13–15], задачи о механических системах на основе вращающегося твердого тела [16–19] и другие [20–24].

Во многих случаях интересны также более общие ситуации, когда при рассмотрении динамического поведения систем модель Лоренца привлекается как объект для сравнения. Например, речь может идти об уравнениях в комплексных переменных, полученных в работе [1] или иных версиях уравнений [25–27].

Ряд аспектов динамики модели Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца анализировался позднее другими авторами. В частности, рассмотрена динамика, сопровождающаяся нарушением захвата фаз [28], проведено сопоставление модели с 10-мерной системой для задачи о взаимодействии волн в плазме [29], предпринят математический анализ глобальной динамики [30]. В работе [31] был рассмотрен радиотехнический параметрический генератор хаоса на основе трех колебательных контуров, функционирование которого обусловлено механизмом распадного ограничения неустойчивости, где параметрическое возбуждение и взаимодействие мод обеспечивалось присутствием варакторного диода. Было обнаружено, что при аккуратном описании нелинейности диода уравнения для медленных амплитуд получаются принципиально комплексными, так что динамика фаз возбуждающихся колебательных мод оказывается существенной, а аттрактор перестает быть квазигиперболическим. Это выражается, в частности, в появлении в пространстве параметров областей регулярности, где динамика периодическая, то есть вместо хаотического аттрактора реализуются предельные циклы.

¹Аттрактор Лоренца, однако, не является структурно устойчивым в том смысле, что для него не имеет места эквивалентность топологического устройства при смещении по параметрам, свойственная равномерно гиперболическим аттракторам, таким как соленоид Смейла–Вильямса и аттрактор Плыкина [10, 33].

В настоящей работе анализируется схема трехконтурного параметрического генератора, аналогичного [31], но использующего специально сконструированный реактивный нелинейный элемент на основе операционного усилителя и аналогового умножителя с характеристикой, практически точно даваемой квадратичной функцией. Благодаря этому, теоретическое описание схемы оказывается намного проще, чем для устройства с варакторным диодом, и в ней удастся в чистом виде реализовать динамику модели Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца, где при выполнении условий параметрического резонанса реализуется аттрактор типа Лоренца. В то же время, при нарушении точного соотношения частот обнаруживается ситуация, аналогичная отмеченной в [31]. А именно, динамика фаз становится существенной, аттрактор перестает быть квазигиперболическим, а в пространстве параметров наряду с хаосом появляются области регулярной динамики.

1. Схема параметрического генератора и основные уравнения

Рассмотрим схему на рис. 1, а, составленную из трех колебательных контуров L_1-C_1 , L_2-C_2 и L_3-C_3 . Параметрическое возбуждение обеспечивается присутствием источника переменного напряжения накачки V_1 и нелинейного реактивного квадратичного элемента \tilde{C} .

Схема нелинейного элемента показана отдельно на рис. 1, б. При подаче напряжения U на вход этого элемента потенциал U относительно земли имеет место на обеих входных клеммах операционного усилителя ОА. Поскольку входное сопротивление операционного усилителя в идеале бесконечно, наличие тока U/R через резистор R , имеющий заземленный отвод, подразумевает наличие такого же тока

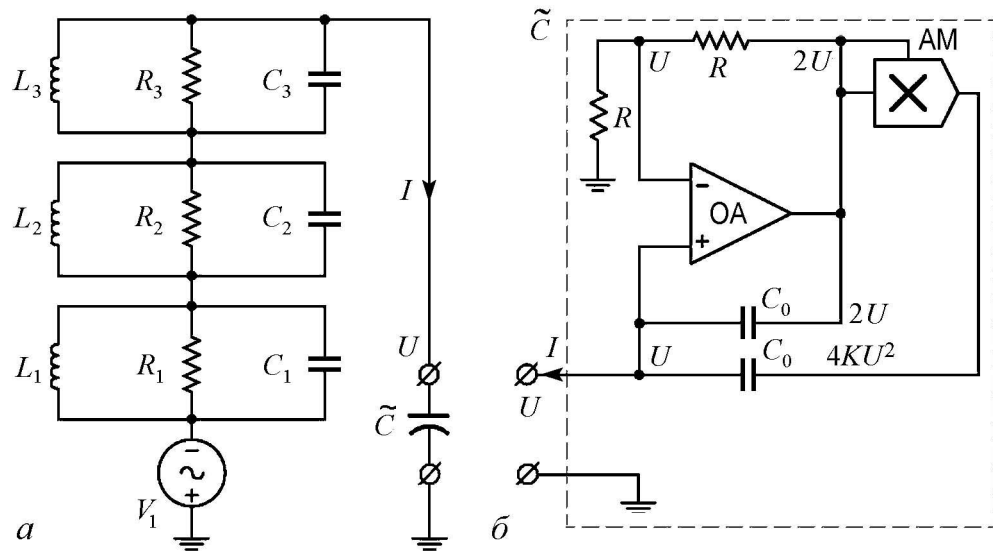


Рис. 1. Схема параметрического генератора хаоса (а). Накачка осуществляется источником напряжения V_1 . Символом \tilde{C} обозначен реактивный элемент – двухполюсник с квадратичной нелинейностью, схема которого представлена отдельно, на панели (б)

через соединенный с ним второй резистор R , поэтому напряжение на входе аналогового умножителя АМ обязано быть равным $2U$. Следовательно, на его выходе имеем напряжение $4KU^2$. Токи, протекающие через один и другой конденсаторы C_0 , составляют $C_0(dU/dt)$ и $(d/dt)(4KU^2 - C_0U)$, давая в сумме ток через нелинейный элемент \tilde{C} .

Собственные частоты колебательных контуров без учета диссипации полагаем удовлетворяющими, по крайней мере приближенно, условиям параметрического резонанса

$$\Omega_0 \approx \Omega_1 + \Omega_2, \quad \Omega_3 \approx \Omega_1 - \Omega_2. \quad (1)$$

На рис. 2 представлены графики реализаций напряжения на конденсаторах C_1, C_2, C_3 , полученные с помощью виртуального осциллографа при моделировании схемы в среде Multisim с номиналами компонентов, указанными в подписи к рисунку. После переходного процесса возникает режим нелинейных колебаний. В приведенном масштабе неразличимо высокочастотное заполнение, но хорошо видна нерегулярная, очевидно, хаотическая, динамика амплитуд.

В рамках схмотехнического моделирования в среде Multisim затруднительно выявить некоторые существенные особенности динамики, включая ожидаемое присутствие аттрактора типа Лоренца, и определить такие характеристики, как показатели Ляпунова, поэтому в следующих разделах рассматриваются уравнения, описывающие систему, и анализируются результаты их численного решения.

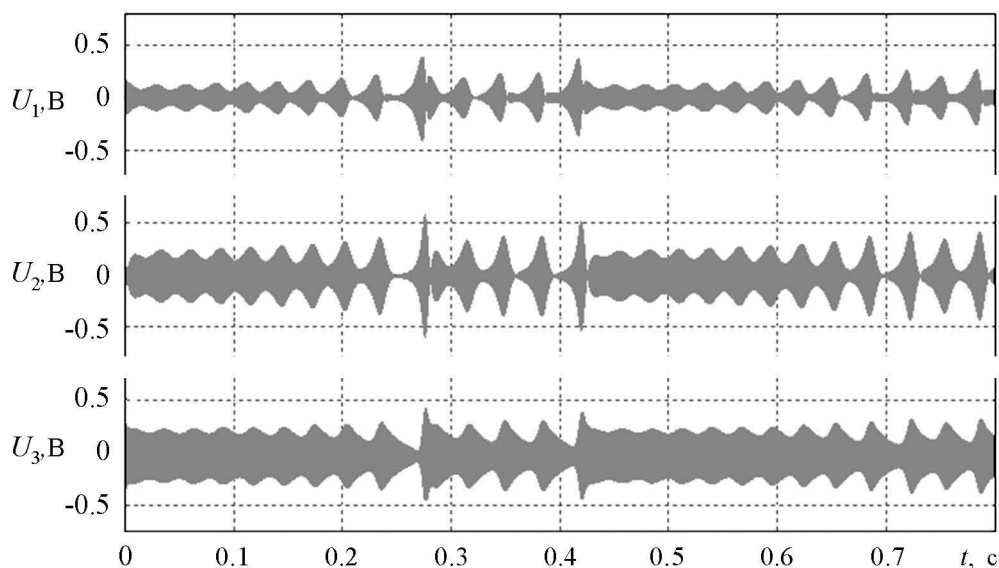


Рис. 2. Типичный вид временных зависимостей напряжений на конденсаторах C_1, C_2, C_3 при моделировании схемы на рис. 1 в среде Multisim с номиналами компонентов: $C_1 = C_2 = C_3 = 40$ нФ, $L_1 = 1.583$ мГн, $L_2 = 4.398$ мГн, $L_3 = 9.895$ мГн, $R_1 = 250$ кОм, $R_2 = 62.5$ кОм, $R_3 = 250$ кОм. Собственные частоты колебательных контуров, кГц: $f_1 = 200$, $f_2 = 120$, $f_3 = 80$. Накачка осуществляется источником напряжения V_1 с амплитудой 0.245 В на частоте $f_0 = 325$ кГц. Конденсаторы в схеме реактивного нелинейного элемента имеют емкость $C_0 = 2$ нФ, коэффициент передачи умножителя АМ составляет $K = 1/8$ В $^{-1}$

2. Основные уравнения параметрического генератора

Пусть U_1, U_2, U_3 – напряжения на конденсаторах C_1, C_2, C_3 , а I_1, I_2, I_3 – токи через катушки индуктивности L_1, L_2, L_3 . Приняв для простоты равенство емкостей $C = C_1 = C_2 = C_3$, запишем уравнения Кирхгофа в виде

$$\begin{aligned} L_1 \dot{I}_1 &= U_1, \\ L_2 \dot{I}_2 &= U_2, \\ L_3 \dot{I}_3 &= U_3, \\ C \dot{U}_1 + U_1/R_1 + I_1 &= -I, \\ C \dot{U}_2 + U_2/R_2 + I_2 &= -I, \\ C \dot{U}_3 + U_3/R_3 + I_3 &= -I. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь I – ток через нелинейный элемент, определяемый выражением

$$I = \frac{d}{dt} 4KC_0 U^2 = \varepsilon \frac{d U^2}{dt}, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon = 8KC_0/C, \quad U = U_1 + U_2 + U_3 + U_0, \quad U_0 = -\kappa \sin \omega_0 t, \quad (4)$$

и величины κ и ω_0 задают амплитуду и частоту сигнала накачки. Если ввести нормированное безразмерное время $t' = t/(2R_3C)$, то уравнения переписутся в виде

$$\ddot{X}_k + 2\nu_k \dot{X}_k + \Omega_k^2 X_k = 0, \quad X_k = U_k + \frac{1}{2} \varepsilon U^2, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где

$$\nu_{1,2} = \frac{R_3}{R_{1,2}}, \quad \nu_3 = 1, \quad \Omega_{1,2,3} = 2R_3 \sqrt{\frac{C}{L_{1,2,3}}}. \quad (6)$$

Для численного решения удобно переформулировать задачу, представив ее системой уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{Y}_k &= -\Omega_k (X_k - \frac{1}{2} \varepsilon U^2), \quad \dot{X}_k = \Omega_k Y_k - 2\nu_k, \quad k = 1, 2, 3, \\ U &= \frac{-1 + \sqrt{6\varepsilon(X_1 + X_2 + X_3 - \kappa \sin \Omega_0 t') + 1}}{3\varepsilon}, \quad U_i = X_k - \frac{1}{2} \varepsilon U^2. \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 3 показаны временные зависимости величин U_1, U_2, U_3 , полученные при численном решении уравнений (7) с указанными в подписи к рис. 2 номиналами компонентов. Сравнивая графики на рис. 2 и рис. 3, можно видеть хорошее соответствие наблюдаемой динамики. В обоих случаях имеем хаотические по виду реализации, содержащие похожие по форме фрагменты сигналов, и соответствие по характерным масштабам времен и напряжений. (Точного совпадения зависимостей ожидать не приходится из-за присущей хаосу чувствительности динамики к малым возмущениям начальных условий.)

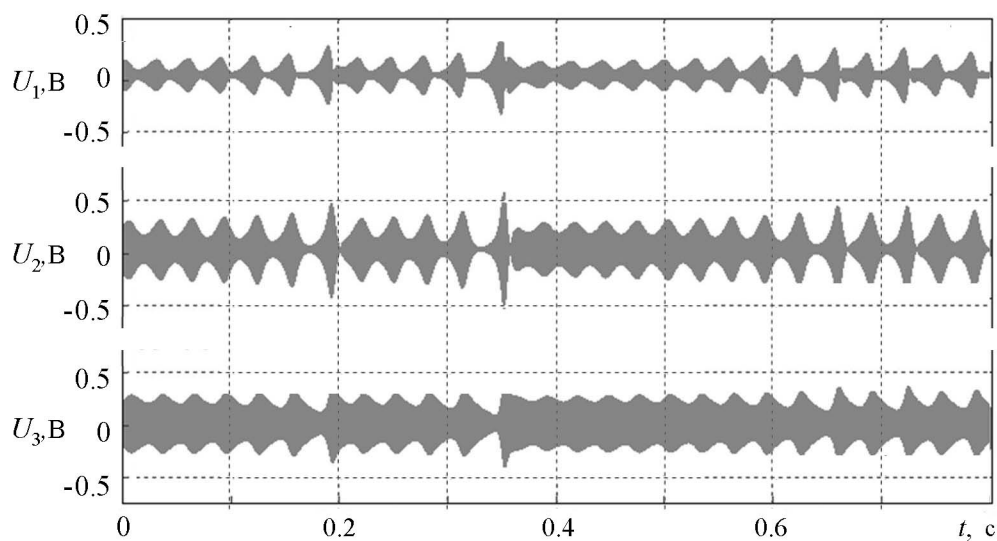


Рис. 3. Типичный вид временных зависимостей напряжений на конденсаторах C_1, C_2, C_3 , полученных при численном решении уравнений (7) для схемы на рис. 1 с номиналами компонентов, указанными в подписи к рис. 2

3. Уравнения для медленных амплитуд

Для получения уравнений в форме, допускающей сравнение с моделями Лоренца и Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца, необходимо привлечь метод медленных комплексных амплитуд. Предварительно имеет смысл переписать уравнения еще раз, учитывая только те члены, которые при предполагаемом соотношении частот (1) могут вносить вклад в резонансные взаимодействия мод. В первом, втором и третьем уравнениях (5) положим, соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}U^2 &\approx U_0U_2 + U_2U_3, \\ \frac{1}{2}U^2 &\approx U_0U_1 + U_1U_3, \\ \frac{1}{2}U^2 &\approx U_1U_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Кроме того, заменим операцию взятия второй производной в правых частях уравнений множителем $(-\Omega_k^2)$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \ddot{U}_1 + 2\nu_1\dot{U}_1 + \Omega_1^2U_1 &= \varepsilon \Omega_1^2(U_0U_2 + U_2U_3), \\ \ddot{U}_2 + 2\nu_2\dot{U}_2 + \Omega_2^2U_2 &= \varepsilon \Omega_2^2(U_0U_1 + U_1U_3), \\ \ddot{U}_3 + 2\nu_3\dot{U}_3 + \Omega_3^2U_3 &= \varepsilon \Omega_3^2U_1U_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Опуская для краткости здесь и далее штрихи у временной переменной, будем искать

решение в виде

$$\begin{aligned} U_1 &= A_1 e^{i\omega_1 t} + A_1^* e^{-i\omega_1 t}, & \dot{U}_1 &= i\omega_1 A_1 e^{i\omega_1 t} - i\omega_1 A_1^* e^{-i\omega_1 t}, \\ U_2 &= A_2 e^{i\omega_2 t} + A_2^* e^{-i\omega_2 t}, & \dot{U}_2 &= i\omega_2 A_2 e^{i\omega_2 t} - i\omega_2 A_2^* e^{-i\omega_2 t}, \\ U_3 &= -iA_3 e^{i\omega_3 t} + iA_3^* e^{-i\omega_3 t}, & \dot{U}_3 &= \omega_3 A_3 e^{i\omega_3 t} + \omega_3 A_3^* e^{-i\omega_3 t}, \end{aligned} \quad (10)$$

где опорные частоты $\omega_{1,2,3}$ определены соотношениями

$$\omega_1 = \frac{\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_0}{2}, \quad \omega_2 = \frac{-\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_0}{2}, \quad \omega_3 = \Omega_1 - \Omega_2. \quad (11)$$

Будучи близкими к величинам $\Omega_{1,2,3}$, они удовлетворяют условиям параметрического резонанса не приближенно, а точно:

$$\omega_3 = \omega_1 - \omega_2, \quad \Omega_0 = \omega_1 + \omega_2. \quad (12)$$

Использование формул (10) подразумевает выполнение дополнительных условий на введенные амплитудные переменные

$$\dot{A}_1 e^{i\omega_1 t} + \dot{A}_1^* e^{-i\omega_1 t} = 0, \quad \dot{A}_2 e^{i\omega_2 t} + \dot{A}_2^* e^{-i\omega_2 t} = 0, \quad \dot{A}_3 e^{i\omega_3 t} - \dot{A}_3^* e^{-i\omega_3 t} = 0. \quad (13)$$

Кроме того, согласно (4), имеем

$$U_0 = -\kappa \sin \Omega_0 t = \frac{1}{2} i \kappa e^{i\Omega_0 t} - \frac{1}{2} i \kappa e^{-i\Omega_0 t}. \quad (14)$$

Подстановка (10) в уравнения (9) дает²

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + \nu_1 A_1 - i\Delta A_1 &= \frac{1}{2} \varepsilon \Omega_1 \left(\frac{1}{2} \kappa A_2^* - A_2 A_3 \right), \\ \dot{A}_2 + \nu_2 A_2 - i\Delta A_2 &= \frac{1}{2} \varepsilon \Omega_2 \left(\frac{1}{2} \kappa A_1^* + A_1 A_3^* \right), \\ \dot{A}_3 + A_3 - i\delta A_3 &= \frac{1}{2} \varepsilon \Omega_3 A_1 A_2^*, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\Delta \approx \Omega_1 - \omega_1 = \Omega_2 - \omega_2 = \frac{\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_0}{2}, \quad \delta \approx \Omega_3 - \omega_3 = \Omega_3 - \Omega_1 + \Omega_2.$$

Выполнив перенормировку

$$A_1 = \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\Omega_2 \Omega_3}} a_1, \quad A_2 = \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\Omega_3 \Omega_1}} a_2, \quad A_3 = \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}} a_3, \quad h = \frac{\varepsilon \kappa \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}}{4}, \quad (16)$$

получаем уравнения, соответствующие работе [1]:

$$\dot{a}_1 + \nu_1 a_1 - i\Delta a_1 = h a_2^* - a_2 a_3, \quad \dot{a}_2 + \nu_2 a_2 - i\Delta a_2 = h a_1^* + a_1 a_3^*, \quad \dot{a}_3 + a_3 - i\delta a_3 = a_1 a_2^*. \quad (17)$$

Присутствующий здесь параметр κ управляется в исходной системе заданием амплитуды накачки, величину Δ можно регулировать, варьируя частоту накачки, а параметр δ – посредством изменения индуктивности L_3 .

²Отличие параметров $\Omega_{1,2,3}$ от величин $\omega_{1,2,3}$ мало, и учет его принципиален только в тех членах в уравнениях, которые отвечают за фазы колебаний; в амплитудных коэффициентах их можно считать совпадающими, как это и сделано при записи (2).

4. Случай точного параметрического резонанса: аттрактор типа Лоренца

При отсутствии расстройки, $\Delta = 0$, $\delta = 0$, с использованием подстановки

$$a_1 = xe^{i\varphi}, \quad a_2 = ye^{-i\varphi}, \quad a_3 = ze^{2i\varphi} \quad (18)$$

в предположении $\varphi = \text{const}$ приходим к уравнениям, которые можно рассматривать в области действительных переменных

$$\dot{x} = hy - v_1x - yz, \quad \dot{y} = hx - v_2y + xz, \quad \dot{z} = -z + xy. \quad (19)$$

Согласно [1], модель (19) имеет аттрактор типа Лоренца в трехмерном фазовом пространстве переменных x, y, z , что, в частности, справедливо в случае $v_1 = 1$, $v_2 = 4$, $h = 5.962$. На рис. 4 показан портрет аттрактора, построенный по результатам численного решения уравнений (19). Также приводится график отображения, полученный в соответствии с процедурой, примененной в работе Лоренца: по осям координат отложены значения максимумов переменной z , достигаемых последовательно по ходу временной эволюции системы. Вид графика с острым максимумом, напоминающий классическое отображение «зуб пилы» [6–8,1], свидетельствует, что аттрактор квазигиперболический, как и классический аттрактор Лоренца.

Расчет показателей Ляпунова путем совместного численного решения уравнений (19) и соответствующих уравнений в вариациях на основе известного алгоритма с ортогонализацией векторов возмущения по Граму–Шмидту [35,8] дает³

$$\lambda_1 = 0.394 \pm 0.001, \quad \lambda_2 = 0.0000 \pm 0.0001, \quad \lambda_3 = -6.394 \pm 0.001. \quad (20)$$

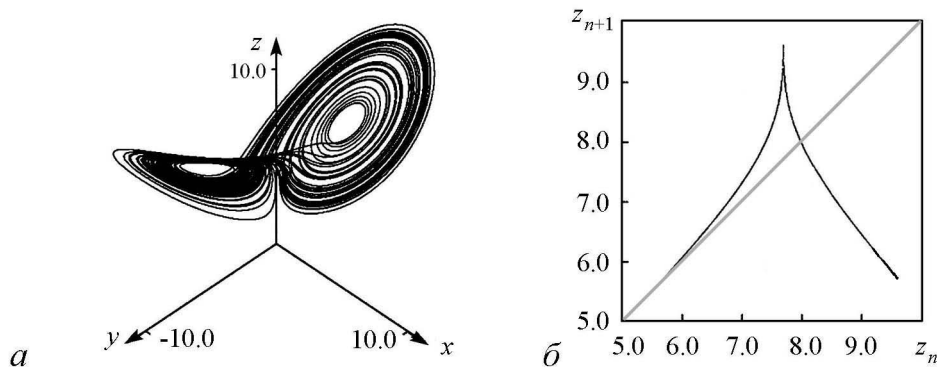


Рис. 4. Портрет аттрактора в трехмерном пространстве состояний системы (19) (а) и отображение для последовательных максимумов переменной z в процессе временной эволюции (б) с параметрами $v_1 = 1$, $v_2 = 4$, $h = 5.962$

³Вычисления показателей Ляпунова проводились на интервалах нормированного времени длительности 50000 с подсчетом среднего значения и среднеквадратичного отклонения по 20 реализациям. В качестве погрешности указывается оценка среднеквадратичного отклонения.

Присутствие положительного показателя говорит о наличии хаоса, характеризуемого экспоненциальным ростом отклонения от опорной траектории на аттракторе при малом возмущении начальных условий. Второй показатель, равный нулю с точностью до ошибки вычисления, ассоциируется с возмущением типа сдвига вдоль траектории. Третий показатель отрицательный и отвечает за приближение траекторий к аттрактору. Тот факт, что сумма показателей отрицательна, свидетельствует о сжатии фазового объема в трехмерном фазовом пространстве. Она согласуется с аналитическим вычислением дивергенции векторного поля, заданного правыми частями уравнений (19): $\operatorname{div} \mathbf{F} = \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z = -v_1 - v_2 - 1 = -6$. Оценка размерности аттрактора по известной формуле Каплана–Йорке дает $D = 2 + \lambda_1/|\lambda_3| \approx 2.06$.

На рис. 4 приводится зависимость трех показателей Ляпунова модели (19) от параметра h . Плавный характер зависимости и отсутствие на графике старшего показателя провалов (окон регулярности) свидетельствует о робастности хаоса в трехмерной системе (19) и соответствует заключению о квазигиперболической природе аттрактора, сделанному на основе графика отображения на рис. 4, б.

Интересно сравнить показатели Ляпунова, вычисленные при одних и тех же параметрах $v_1 = 1$, $v_2 = 4$, $h = 5.962$ для уравнений с действительными и с комплексными амплитудами. Для системы (17) при $\Delta = 0$, $\delta = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.394 \pm 0.001, & \lambda_2 &= 0.0000 \pm 0.0002, & \lambda_3 &= 0.0000 \pm 0.0003, \\ \lambda_4 &= -0.618 \pm 0.05, & \lambda_5 &= -5.381 \pm 0.05, & \lambda_6 &= -6.394 \pm 0.003. \end{aligned} \quad (21)$$

В списке присутствует два нулевых показателя, один из которых связан с возмущением сдвига вдоль траектории, а второй – со сдвигом по фазовой переменной φ (см. (18)). Показатели $\lambda_{1,2,6}$ находятся в хорошем соответствии с показателями $\lambda_{1,2,3}$ из списка (20). Дополнительные показатели $\lambda_{4,5}$ отвечают, очевидно, за релаксацию фаз к ситуации, описываемой уравнениями для действительных амплитуд. На рис. 5 приводится зависимость от параметра h шести показателей Ляпунова модели (17), три из которых неотличимы от показателей модели (19).

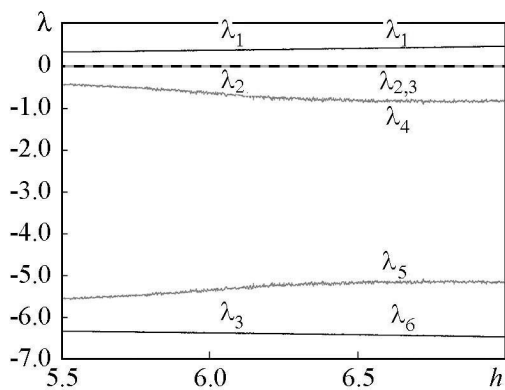


Рис. 5. Зависимость от параметра h показателей Ляпунова модели (19), помеченных как λ_{1-3} в левой части рисунка, и показателей модели (17) для $\Delta = 0$, $\delta = 0$, помеченных как λ_{1-6} в правой части рисунка. Остальные параметры: $v_1 = 1$, $v_2 = 4$

Если говорить о системе без редукции к медленным амплитудам (26) и о модели с комплексными амплитудами (17), то безоговорочно переносить на них вывод о грубости (робастности) аттрактора Лоренца трехмерной модели (19) некорректно. Формальным признаком, указывающим на возможное нарушение грубости в этом смысле, служит наличие у комплексной системы (17) дополнительного нулевого показателя Ляпунова. В частности, введение отстройки частот приводит к нарушению фазовых соотношений (18) и к изменению природы аттрактора.

5. Хаотическая и регулярная динамика параметрического генератора при наличии отстройки частот

Перейдем к ситуации, когда условия параметрического резонанса выполнены неточно, и нужно учитывать отстройку частоты накачки от суммы, а частоты третьего колебательного контура от разности частот первого и второго контуров. Это отвечает отличным от нуля параметрам Δ , δ в комплексных амплитудных уравнениях (17), которые к трехмерной системе для действительных амплитуд теперь не сводятся.

В данной ситуации возникает проблема представления портретов аттракторов в виде, допускающем наглядное сравнение с аттрактором Лоренца. Будем исходить из того, что приблизительное соответствие мгновенной фазы комплексных переменных a_1 и a_2 формулам (18) по большей части сохраняется, хотя постоянной во времени величина φ теперь, вообще говоря, не будет. Для графического представления естественно использовать переменные $x = \operatorname{Re} a_1 e^{-i\varphi}$, $y = \operatorname{Re} a_2 e^{i\varphi}$, где φ выбирается каждый раз при выводе точки на график так, чтобы минимизировать величину $(\operatorname{Im} a_1 e^{-i\varphi})^2 + (\operatorname{Im} a_2 e^{i\varphi})^2$. В качестве третьей переменной используем $z = |a_3|$.

Заметим, что такой же метод можно использовать для обработки данных численного решения исходных уравнений Кирхгофа (7), если пересчитать вектор, определенный напряжениями $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$, к комплексным амплитудам:

$$a_{1,2,3} = 1/2 (U_{1,2,3} - i\omega_{1,2,3}^{-1} \dot{U}_{1,2,3}). \quad (22)$$

На рис. 6, *a* показан портрет аттрактора, построенный по результатам численного решения уравнений (17) в режиме, реализующемся при небольшом сдвиге частоты накачки от точного условия параметрического резонанса для $h = 5.962$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $\Delta = 0.3$, $\delta = 0$. (В исходной системе это соответствует накачке на частоте 32001.2 Гц при амплитуде 62.25 мВ и задании сопротивлений $R_1 = 1$ МОм, $R_2 = 250$ кОм, $R_3 = 1$ МОм; остальные номиналы соответствуют подписи к рис. 2.) Аттрактор выглядит похожим на аттрактор типа Лоренца: он имеет два «крыла»,

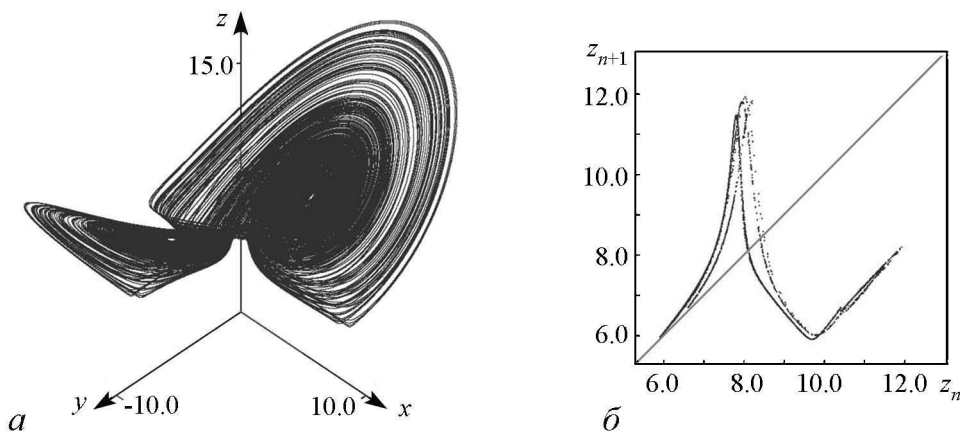


Рис. 6. Трехмерный портрет аттрактора, построенный с использованием описанной в тексте методики (*a*), и отображение для последовательных максимумов переменной $z = |a_3|$ для системы (17) при $h = 5.962$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $\Delta = 0.3$, $\delta = 0$

на каждом из которых траектории раскручиваются по спирали от центральной пустой области, с переходами с одного крыла на другое, причем совершаемое число оборотов меняется раз от разу хаотически.

На рис. 6, б приведен график отображения, где по осям координат отложены максимумы переменной $z = |A_3|$, достигаемые по ходу временной эволюции системы. Вид его существенно отличается от отображения, отвечающего аттрактору типа Лоренца на рис. 4. Во-первых, график выглядит составленным не из одной кривой, а из набора линий, то есть поперечная фрактальная структура выражена намного сильнее, чем у аттрактора типа Лоренца, где она визуальна вообще неразличима. Во-вторых, у представляющих отображение кривых вместо острия на вершине наблюдаются квадратичные максимумы. В связи с этим, в данном случае не приходится говорить о робастном квазигиперболическом аттракторе. Скорее, свойства хаотической динамики должны быть сходными с ситуациями типа аттракторов в отображении Эно [36] и модели Рёсслера [37], которые в математических работах интерпретируются в рамках представлений о квазиаттракторе [38, 39].

На рис. 7 показаны зависимости шести показателей Ляпунова модели (17) от параметров отстройки частот Δ и δ . Отметим симметрию одного и другого графика на рис. 7, обусловленную тем, что уравнения переходят в себя при применении операции комплексного сопряжения с изменением знака параметров Δ и δ .

В отличие от случая точного резонанса, на графике старшего показателя Ляпунова можно видеть провалы (окна регулярности), которые сопровождаются также выбросами или провалами на графиках остальных показателей. Как можно убедиться, проведя численное интегрирование уравнений, этим окнам соответствует появление притягивающих предельных циклов в фазовом пространстве системы (17), то есть вместо хаоса здесь реализуются режимы периодических колебаний амплитудных переменных. Именно такой вид графиков показателей Ляпунова в зависимости от параметра характерен для одномерных отображений с квадратичным экстремумом и многих других диссипативных систем, включая отображение Эно и модель Рёсслера, которые ассоциируются с концепцией квазиаттрактора [36–39].

Обратимся к построению карты динамических режимов на плоскости параметров Δ , δ . Процедура состоит в сканировании путем перебора узлов сетки с некоторым шагом по двум параметрам. В каждой точке выполняется порядка 10^3 ите-

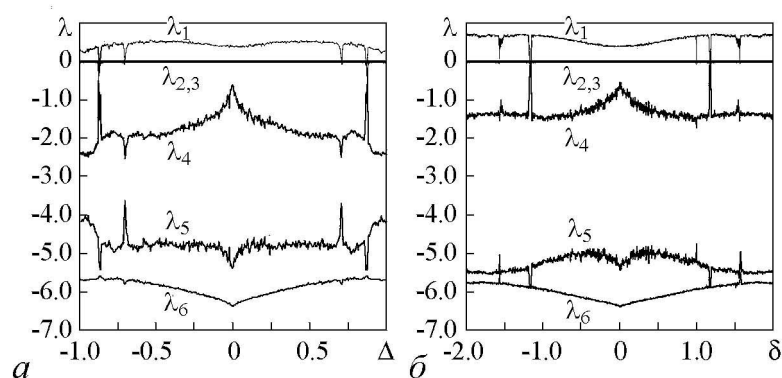


Рис. 7. Зависимость показателей Ляпунова модели (17) от параметра Δ при $\delta = 0$ и от параметра δ при $\Delta = 0$. Остальные параметры: $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$

раций отображения Пуанкаре, определенного для системы (17) с помощью секущей поверхности в фазовом пространстве $S = |a_3| - h + \sqrt{v_1 v_2} = 0$ (с проходом в направлении убывания S). По результатам последних шагов итераций проводится анализ присутствия или отсутствия периода повторения состояний в сечении Пуанкаре от 1 до 14 с некоторым заданным изначально уровнем допустимой погрешности. При обнаружении периодичности соответствующий пиксель на диаграмме обозначается некоторым тоном серого цвета, определяемым периодом повторения состояний, и производится переход к анализу следующей точки на плоскости параметров. При этом в качестве начальных условий в новой точке разумно задавать состояние, полученное в итоге итераций в предыдущей точке («сканирование с наследованием»), что способствует ускорению сходимости к установившемуся режиму динамики.

На рис. 8 в центре показана карта режимов системы (17) на плоскости параметров Δ и δ , а по периферии – портреты аттракторов, отвечающие представительным точкам на плоскости параметров. Аттракторы на панелях (а), (в), (з), (д) отвечают предельным циклам, то есть периодическим режимам колебаний ампли-

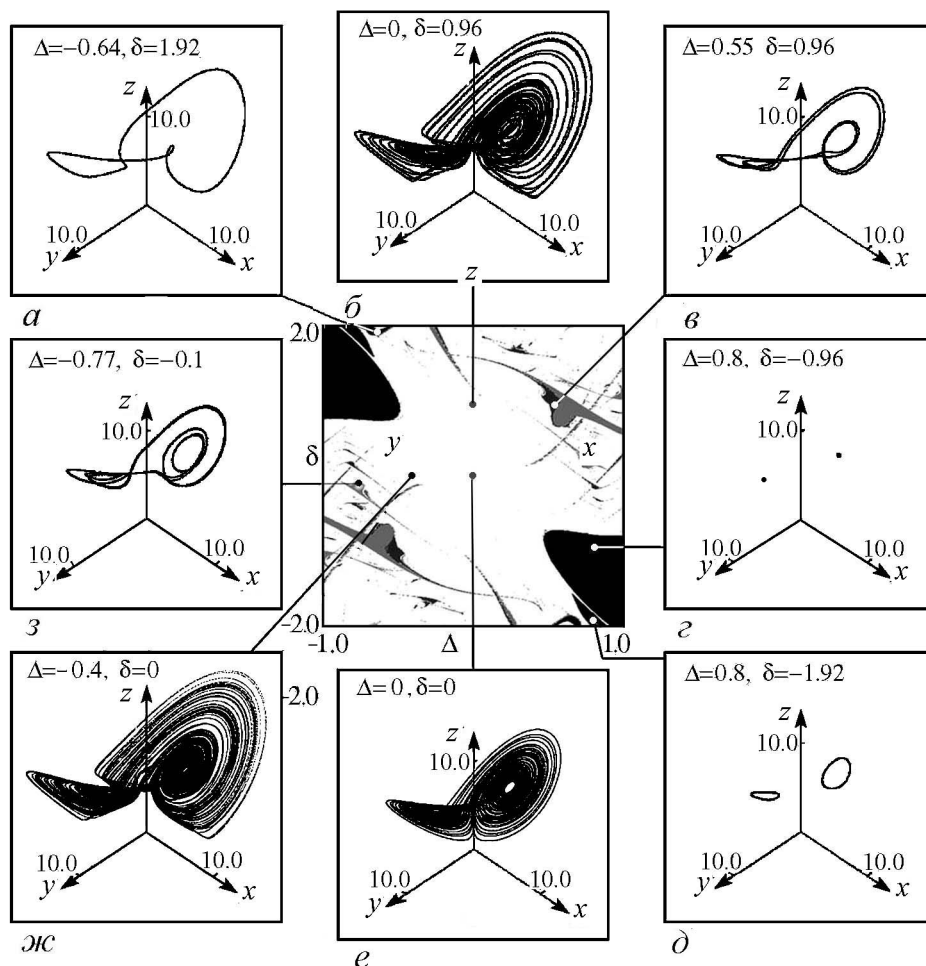


Рис. 8. Карта режимов системы (2) на плоскости параметров Δ и δ и портреты аттракторов, отвечающие представительным точкам на плоскости параметров. Остальные параметры: $h = 5.962$, $v_1 = 1$, $v_2 = 4$

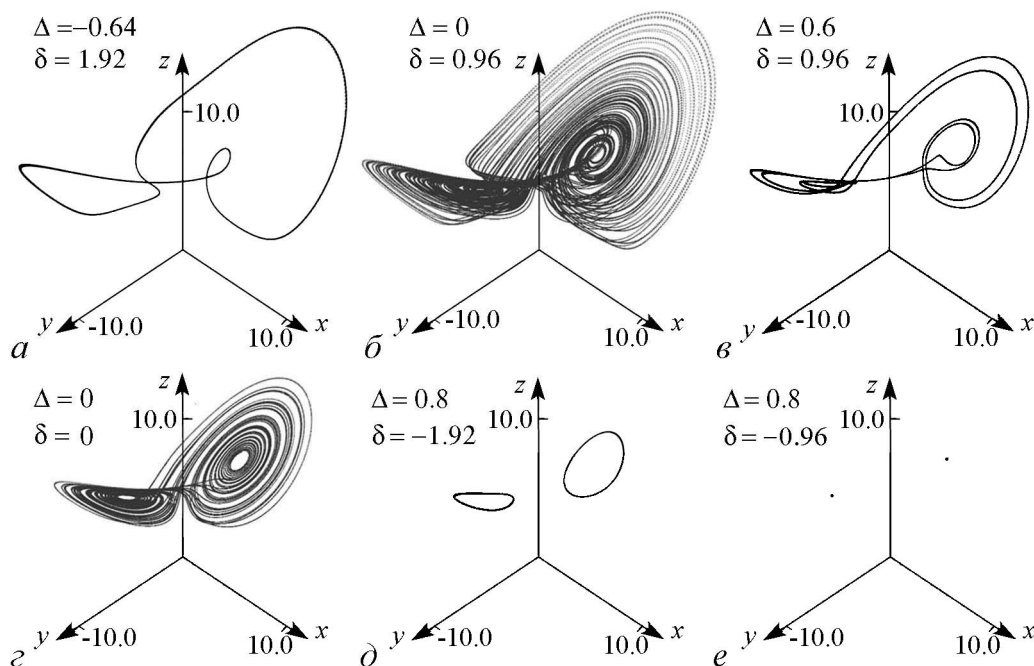


Рис. 9. Портреты аттракторов исходной системы уравнений Кирхгофа (3) при величинах сопротивлений $R_1 = 1$ МОм, $R_2 = 250$ кОм, $R_3 = 1$ МОм и амплитуде накачки 62.25 мВ. Частота накачки и индуктивность L_3 задавались так, чтобы обеспечить указанные в надписях значения параметров Δ и δ . Остальные номиналы схемы соответствуют подписи к рис. 2.

туд в областях на плоскости параметров, окрашенных серыми тонами. С другой стороны, аттракторы на диаграммах (б), (ж), (е) хаотические, что отвечает незакрашенным областям, где периодичность не обнаружена. Диаграмма (е) относится к началу координат на карте, где реализуется аттрактор Лоренца, обсуждавшийся в предыдущем разделе. Темно-серые области в «северо-западной» и «юго-восточной» части карты соответствуют аттрактору системы (2) в виде неподвижной точки (панель (д)), что отвечает устойчивому режиму стационарных колебаний постоянной амплитуды в исходных уравнениях. Аналогичные режимы наблюдаются также при численном моделировании исходной системы на основе уравнений Кирхгофа (7). На рис. 9 показаны портреты аттракторов, относящиеся к системе с накачкой при амплитуде 62.25 мВ и величинах сопротивлений $R_1 = 1$ МОм, $R_2 = 250$ кОм, $R_3 = 1$ МОм. Частота накачки и индуктивность L_3 задавались так, чтобы обеспечить указанные в надписях значения параметров Δ и δ , а остальные номиналы соответствуют подписи к рис. 2. Изображения демонстрируют очевидное сходство с диаграммами по периферии рис. 8 с той разницей, что траектории на аттракторах выглядят слегка «распушенными», что связано, очевидно, с наличием относительно малых по амплитуде нерезонансных составляющих, вносящих вклад в мгновенные значения динамических переменных, которые оказываются исключенными при переходе к усредненному описанию⁴.

⁴Отсутствие идеального соответствия по параметрам, обеспечивающим предельные циклы определенной структуры, отвечающие раскрашенным областям на рис. 8, обусловлено приближенным характером описания динамики уравнениями (2) в рамках метода медленных амплитуд.

Заключение

В работе проанализирована схема параметрического генератора хаоса на базе трех связанных колебательных контуров с накачкой, обеспечиваемой периодическим изменением напряжения на квадратичном нелинейном элементе. Как представляется, методическое значение рассмотренной модели состоит в том, что она позволяет в чистом виде реализовать и исследовать распадный механизм параметрической генерации хаоса, когда две моды возбуждаются в присутствии накачки на суммарной частоте, а отбор энергии осуществляется модой на разностной частоте.

В случае точного выполнения условий параметрического резонанса данная схема может быть интересна с точки зрения аналогового моделирования движения тела в виде пластины в вязкой жидкости под действием приложенного момента силы. В самом деле, в предположении линейной зависимости сил сопротивления от скорости (большая вязкость) уравнения для продольной и поперечной скоростей и для угловой скорости, записанные для нулевой плавучести, в точности совпадают с уравнениями (19) [40,41].

При отклонении по частотам от точного параметрического резонанса, вместо квазигиперболического аттрактора типа Лоренца реализуются аттракторы, хотя и обладающие с ним внешним сходством, но отличающиеся отсутствием робастности – при вариации параметров возможно разрушение хаоса с возникновением регулярных режимов. Это заключение иллюстрируется представленной картой на плоскости параметров отстройки частот, дающей наглядное представление о расположении областей хаотической и регулярной динамики.

Часть исследования, относящаяся к разработке схемы параметрического генератора с реактивным нелинейным элементом и ее рассмотрению в условиях точного параметрического резонанса (разделы 1,2,3,4), выполнена при поддержке гранта РФФ № 15-12-20035. Анализ динамики при отстройке от параметрического резонанса (раздел 5) проведен при поддержке гранта РФФИ № 15-02-02893.

Библиографический список

1. Пиковский А.С., Рабинович М.И., Трахтенгерц В.Ю. Возникновение стохастичности при распадном ограничении параметрической неустойчивости // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 1366–1374.
2. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: ИЛ, 1963. 352 с.
3. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. Параметрические усилители и генераторы света // УФН. 1966. Т. 88, № 3. С. 439–460.
4. Островский Л.А., Папилова И.А., Сутин А.М. Параметрический генератор ультразвука // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 15, № 8. С. 456–458.
5. Акуленко Л.Д. Параметрическое управление колебаниями и вращениями физического маятника (качели) // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 82–91.
6. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, № 2. P. 130–141.

7. *Sparrow C.* The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. NY, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1982. 270 p.
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.
9. *Анищенко В.С.* Аттракторы динамических систем //Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 1. С. 109–127.
10. *Bonatti C., Diaz L.J., Viana M.* Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probobalistic Perspective. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Vol. 102. Springer: Berlin, Heidelberg, New-York, 2005. 384 p.
11. *Banerjee S., Yorke J.A., Grebogi C.* Robust chaos // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 3049–3052.
12. *Elhadj Z. and Sprott J.C.* Robust Chaos and its Applications. Singapore: World Scientific, 2011. 454 p.
13. *Ораевский А.Н.* Мазеры, лазеры и странные аттракторы // Квантовая электроника. 1981. Т. 8, № 1. С. 130–142.
14. *Ораевский А.Н.* Динамика одномодовых лазеров и динамический хаос // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 1. С. 3–13.
15. *Haken H.* Analogy between higher instabilities in fluids and lasers // Physics Letters A. 1975. Vol. 53, № 1. P. 77–78.
16. *Kolář M., Gumbs G.* Theory for the experimental observation of chaos in a rotating waterwheel // Physical Review A. 1992. Vol. 45, № 2. P. 626–637.
17. *Глуховский А.Б.* Нелинейные системы, являющиеся суперпозициями гиростатов // ДАН СССР. 1982. Т. 266. № 4. С. 816–820.
18. *Doroshin A.V.* Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. Vol. 16, № 8. P. 3188–3202.
19. *Chen H.K., Lee C.I.* Anti-control of chaos in rigid body motion // Chaos, Solitons & Fractals. 2004. Vol. 21, № 4. P. 957–965.
20. *Poland D.* Cooperative catalysis and chemical chaos: a chemical model for the Lorenz equations// Physica D: Nonlinear Phenomena. 1993. Vol. 65, № 1. P. 86–99.
21. *Cuomo K.M., Oppenheim A.V.* Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71, № 1. P. 65–68.
22. *Peters F., Lobry L., Lemaire E.* Experimental observation of Lorenz chaos in the Quincke rotor dynamics // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2005. Vol. 15, № 1. P. 013102.
23. *Rucklidge A.M.* Chaos in magnetoconvection // Nonlinearity. 1994. Vol. 7, № 6. P. 1565–1591.
24. *Hemal N.* Strange attractors in brushless DC motor // IEEE Transactions on Circuits and System-I: Fundamental Theory and Application. 1994. Vol. 41, № 1. P. 40-45.
25. *Gibbon J.D., McGuinness M.J.* The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1982. Vol. 5, № 1. P. 108–122.

26. *Fowler A.C., Gibbon J.D., McGuinness M.J.* The complex Lorenz equations // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1982. Vol. 4, № 2. P. 139.
27. *Mahmoud G.M., Ahmed M.E., Mahmoud E.E.* Analysis of hyperchaotic complex Lorenz systems // *International Journal of Modern Physics C*. 2008. Vol. 19, № 10. P. 1477–1494.
28. *Wang P.K.C., Masui K.* Intermittent phase unlocking in a resonant three-wave interaction with parametric excitation // *Physics Letters A*. 1981. Vol. 81, № 2. P. 97–101.
29. *Letellier C., Aguirre L.A., Maquet J., Lefebvre B.* Analogy between a 10D model for nonlinear wave–wave interaction in a plasma and the 3D Lorenz dynamics // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2003. Vol. 179, № 1. P. 33–52.
30. *Llibre J., Messias M., da Silva P.R.* On the global dynamics of the Rabinovich system // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2008. Vol. 41, № 27. P. 275210.
31. *Кузнецов С.П.* Параметрический генератор хаоса на варакторном диоде с распадным механизмом ограничения неустойчивости // *Журнал технической физики*. 2016. Т. 86, № 3. С. 118–127.
32. *Liu Y., Yang Q., Pang G.* A hyperchaotic system from the Rabinovich system // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010. Vol. 234, № 1. P. 101–113.
33. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // *УФН*. 2011. Т. 181. Вып. 2. С. 121–149.
34. *Tucker W.* A rigorous ODE solver and Smale’s 14th problem // *Comp. Math*. 2002. Vol. 2. P. 53–117.
35. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. P. 9–20.
36. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys*. 1976. Vol. 50. P. 69–77.
37. *Rössler O.E.* Continuous chaos: four prototype equations // *Ann. New York Academy of Sciences*. 1979. Vol. 316. P. 376–392.
38. *Afraimovich V.S.* Strange attractors and quasiattractors // *Nonlinear and turbulent processes in physics*. 1984. Vol. 1. P. 1133–1138.
39. *Шильников Л.П.* Бифуркации и странные аттракторы // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011, № 4(2). С. 364–366.
40. *Козлов В.В.* К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // *Вестник МГУ, сер. 1, Математика, механика*. 1990. № 1. С. 79–86.
41. *Кузнецов С.П.* Движение падающей пластины в жидкости: конечномерные модели и феномены сложной нелинейной динамики // *Нелинейная динамика*. 2015. Т. 11, № 1. С. 3–49.

Поступила в редакцию 30.06.2016

LORENZ TYPE ATTRACTOR IN ELECTRONIC PARAMETRIC GENERATOR AND ITS TRANSFORMATION OUTSIDE THE ACCURATE PARAMETRIC RESONANCE

S. P. Kuznetsov

Udmurt State University
Universitetskaya, 1, 426034 Izhevsk, Russia
National Research Saratov State University,
Astrakhanskaya, 83, 410012 Saratov, Russia

Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch,
Zelenaya, 38, 410019 Saratov, Russia

E-mail: spkuz@yandex.ru

The paper deals with a parametric oscillator composed of three LC -circuits and a quadratic nonlinear reactive element built on the basis of an operational amplifier and an analog multiplier; the equations for amplitudes of the interacting modes are derived.

Motivation is a desire to implement the mechanism of parametric interaction of oscillatory modes giving rise to emergence of a strange attractor of Lorenz type without distortions introduced by nonlinearities of order three and higher.

The study is based on a combination of circuit simulation using Multisim software and numerical integration of the dynamic equations of the system both in its original form and in the form of reduced equations for the slowly varying complex amplitudes.

The proposed scheme for the first time allows demonstrating the decay mechanism of chaos generation described earlier by Pikovsky, Rabinovich and Trahtengerts in concern to the waves in magnetized plasma, in an electronic device in purified form.

In addition to observation of the Lorenz-type attractor and characteristic features of the respective dynamics by means of the circuit simulation and on the basis of numerical integration of equations in the case of precise parametric resonance conditions, a study of transformation of the attractors is carried out with detuning frequencies, and the corresponding chart of dynamical regimes on the parameter plane is presented.

It is shown that instead of the quasi-hyperbolic Lorenz-type attractor, with frequencies deviating from the exact parametric resonance, distinct types of attractors arise, although similar in shape to the original one, but lacking robustness: under variations of the parameters chaos may disappear with emergence of regular oscillatory regimes.

Keywords: Parametric oscillator, the Lorenz attractor, analog simulation.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-68-87

Paper reference: Kuznetsov S.P. Lorenz type attractor in electronic parametric generator and its transformation outside the accurate parametric resonance // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 3. P. 68–87.

References

1. *Pikovski A.S., Rabinovich M.I., Trakhtengerts V.Y.* Appearance of chaos at decay saturation of parametric instability // *Sov. Phys. JETP*. 1978. Vol. 47. P. 715–719.
2. *Louisell W.H.* Coupled Mode and Parametric Electronics. Wiley: New York, 1960. 268 p.
3. *Akhmanov S.A., Khokhlov R.V.* Parametric amplifiers and generators of light // *Physics-Usppekhi*. 1966. Vol. 9, № 2. P. 210–222.

4. *Ostrovskii L.A., Papilova I.A., Sutin A.M.* Parametric ultrasound generator // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. 1972. Vol. 15. P. 322–323 (in Russian).
5. *Akulenko L.D.* Parametric control of the oscillations and rotations of a physical pendulum (swing) // Prikladnaya Matematika i Mekhanika. 1993. Vol. 57, № 2. P. 82–91 (in Russian).
6. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, № 2. P. 130–141.
7. *Sparrow C.* The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. NY, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1982. 270 p.
8. *Kuznetsov S.P.* Dynamic Chaos. 2nd ed. Fizmatlit: Moscow, 2006. 356 p. (in Russian).
9. *Anishchenko V.S.* Attractors of Dynamical Systems // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 1997. Vol. 5, № 1. P. 109–127 (in Russian).
10. *Bonatti C., Diaz L.J., Viana M.* Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probobalistic Perspective. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Vol. 102. Springer: Berlin, Heidelberg, New-York, 2005. 384 p.
11. *Banerjee S., Yorke J.A., Grebogi C.* Robust chaos // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 3049–3052.
12. *Elhadj Z. and Sprott J.C.* Robust Chaos and its Applications. Singapore: World Scientific, 2011. 454 p.
13. *Oraevskii A.N.* Masers, lasers, and strange attractors // Quantum Electronics. 1981. Vol. 11, № 1. P. 71–78.
14. *Oraevsky A.N.* Dynamics of single-mode lasers and dynamical chaos // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 1996. Vol. 4, № 1. P. 3–13 (in Russian).
15. *Haken H.* Analogy between higher instabilities in fluids and lasers // Physics Letters A. 1975. Vol. 53, № 1. P. 77–78.
16. *Kolář M., Gumbs G.* Theory for the experimental observation of chaos in a rotating waterwheel // Physical Review A. 1992. Vol. 45, № 2. P. 626–637.
17. *Glukhovskii A.B.* Nonlinear systems that are superpositions of gyrostats // Soviet Physics Doklady. 1982. Vol. 27. P. 823.
18. *Doroshin A.V.* Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. Vol. 16, № 8. P. 3188–3202.
19. *Chen H.K., Lee C.I.* Anti-control of chaos in rigid body motion // Chaos, Solitons & Fractals. 2004. Vol. 21, № 4. P. 957–965.
20. *Poland D.* Cooperative catalysis and chemical chaos: a chemical model for the Lorenz equations // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1993. Vol. 65, № 1. P. 86–99.
21. *Cuomo K.M., Oppenheim A.V.* Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71, № 1. P. 65–68.
22. *Peters F., Lobry L., Lemaire E.* Experimental observation of Lorenz chaos in the

- Quincke rotor dynamics // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2005. Vol. 15, № 1. P. 013102.
23. *Rucklidge A.M.* Chaos in magnetoconvection // *Nonlinearity*. 1994. Vol. 7, № 6. P. 1565–1591.
 24. *Hemai N.* Strange attractors in brushless DC motor // *IEEE Transactions on Circuits and System-I: Fundamental Theory and Application*. 1994. Vol. 41, № 1. P. 40–45.
 25. *Gibbon J.D., McGuinness M.J.* The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1982. Vol. 5, № 1. P. 108–122.
 26. *Fowler A.C., Gibbon J.D., McGuinness M.J.* The complex Lorenz equations // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1982. Vol. 4, № 2. P. 139–163.
 27. *Mahmoud G.M., Ahmed M.E., Mahmoud E.E.* Analysis of hyperchaotic complex Lorenz systems // *International Journal of Modern Physics C*. 2008. Vol. 19, № 10. P. 1477–1494.
 28. *Wang P.K.C., Masui K.* Intermittent phase unlocking in a resonant three-wave interaction with parametric excitation // *Physics Letters A*. 1981. Vol. 81, № 2. P. 97–101.
 29. *Letellier C., Aguirre L.A., Maquet J., Lefebvre B.* Analogy between a 10D model for nonlinear wave–wave interaction in a plasma and the 3D Lorenz dynamics // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2003. Vol. 179, № 1. P. 33–52.
 30. *Llibre J., Messias M., da Silva P.R.* On the global dynamics of the Rabinovich system // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2008. Vol. 41, № 27. P. 275210.
 31. *Kuznetsov S.P.* Parametric chaos generator operating on a varactor diode with the instability limitation decay mechanism // *Technical Physics*. 2016. Vol. 61, № 3. P. 436–445.
 32. *Liu Y., Yang Q., Pang G.* A hyperchaotic system from the Rabinovich system // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010. Vol. 234, № 1. P. 101–113.
 33. *Kuznetsov S.P.* Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: from mathematics to physics // *Physics-Uspekhi*. 2011. Vol. 54, № 2. P. 119–144.
 34. *Tucker W.* A rigorous ODE solver and Smale’s 14th problem // *Comp. Math*. 2002. Vol. 2. P. 53–117.
 35. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. P. 9–20.
 36. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. P. 69–77.
 37. *Rössler O.E.* Continuous chaos: four prototype equations // *Ann. New York Academy of Sciences*. 1979. Vol. 316. P. 376–392.
 38. *Afraimovich V.S.* Strange attractors and quasiattractors // *Nonlinear and turbulent processes in physics*. 1984. Vol. 1. P. 1133–1138.
 39. *Shilnikov L.P.* Bifurcations and strange attractors // *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta*. 2011, № 4(2). P. 364–366.

40. *Kozlov V.V.* On the problem of fall of a rigid body in a resisting medium // *Moscow University Mechanics Bulletin*. 1990. Vol. 45, № 1. P. 30–35.
41. *Kuznetsov S.P.* Plate falling in a fluid: Regular and chaotic dynamics of finite-dimensional models // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. Vol. 20, № 3. P. 345–382.

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988). Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Автор монографии «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», монографии «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
 410012, Саратов, Астраханская, 83
 Национальный исследовательский Саратовский государственный университет
 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1
 Удмуртский государственный университет
 E-mail: spkuz@yandex.ru