УДК 517.9:621.373.7

СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА И ХАОС В ЭЛЕКТРОННОМ АВТОГЕНЕРАТОРЕ С НАСЫЩЕНИЕМ, ОБЕСПЕЧИВАЕМЫМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ РАСПАДОМ

С. П. Кузнецов[1,2], *Л. В. Тюрюкина*[1,2]

[1]Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
[2]Саратовский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, д. 83
E-mail: spkuz@yandex.ru, lvtur@rambler.ru

Поступила в редакцию 22.09.2017

Рассматривается электронный генератор на основе двух колебательных контуров, один из которых включает отрицательную проводимость (активный контур), где реализуется сложная динамика и хаос, соответствующие модели волновой турбулентности Вышкинд–Рабиновича. Эффект насыщения автоколебаний и их хаотизация обусловлены параметрическим механизмом благодаря присутствию квадратичного нелинейного реактивного элемента на основе операционного усилителя и аналогового умножителя.

Исследование основано на сочетании схемотехнического моделирования с использованием программного продукта Multisim и численного решения уравнений, непосредственно описывающих осцилляции напряжений и токов в колебательных контурах, амплитудных уравнений и уравнений в форме, предложенной С.Я. Вышкинд и М.И. Рабиновичем.

Для указанных моделей построены временные зависимости динамических переменных от времени, портреты аттракторов, зависимости показателей Ляпунова от параметров. Для модели Вышкинд–Рабиновича построена также карта динамических режимов на плоскости параметров. Показано что все модели демонстрируют переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода при уменьшении параметра надкритичности в активном колебательном контуре. Возникающий хаотический аттрактор по своей структуре аналогичен аттрактору Ресслера.

Предложенная схема является новой и позволяет наблюдать в радиотехническом устройстве хаотическую динамику резонансного триплета при неустойчивости высокочастотной моды, рассмотренную в свое время Вышкинд и Рабиновичем и интерпретируемую как модель определенного типа волновой турбулентности в диссипативных средах. Представленные результаты свидетельствуют о возможности использования предлагаемой электронной схемы для аналогового моделирования колебательно-волновых явлений в системах, к которым применима модель Вышкинд–Рабиновича.

Ключевые слова: параметрическое взаимодействие мод, хаотический аттрактор, автоколебания, аналоговое моделирование.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-33-47

Образец цитирования: Кузнецов С.П., Тюрюкина Л.В. Сложная динамика и хаос в электронном автогенераторе с насыщением, обеспечиваемым параметрическим распадом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 1. С. 33–47.
DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-33-47

© *С.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина*

COMPLEX DYNAMICS AND CHAOS IN ELECTRONIC SELF-OSCILLATOR WITH SATURATION MECHANISM PROVIDED BY PARAMETRIC DECAY

S. P. Kuznetsov[1,2], *L. V. Turukina*[1,2]

[1]Kotelnikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch
38, Zelenaya, 410019 Saratov, Russia
[2]Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia
E-mail: spkuz@yandex.ru, lvtur@rambler.ru

Received 22.09.2017

We consider an electronic oscillator based on two LC-circuits, one of which includes negative conductivity (the active LC-circuit), where complex dynamics and chaos occur corresponding to the model of wave turbulence of Vyshkind–Rabinovich. The saturation effect for the self-oscillations and their chaotisation take place due to parametric mechanisms due to the presence of a quadratic nonlinear reactive element based on an operational amplifier and an analog multiplier.

The study is based on combination of circuit simulation with the use of the software product Multisim and of numerical computations with equations that directly describe the oscillations of voltages and currents in the oscillatory circuit, amplitude equations, and the equations represented in the form suggested by S.Y. Vyshkind and M.I. Rabinovich.

For all these models, time dependences of dynamic variables are presented as well as portraits of attractors, and Lyapunov exponents depending on parameters. For the Vyshkind–Rabinovich model we additionally present a chart of dynamic regimes in the parameter plane. It is shown that all models demonstrate transitions to chaos through period-doubling bifurcation scenario observed under decrease in the supercriticality parameter in the active LC-circuit. The resulting chaotic attractor is similar in structure to the Rössler attractor.

The proposed scheme allows observing in the electronic device chaotic dynamics of the resonant triplet under instability of the high-frequency mode, considered in due time by Vyshkind and Rabinovich and interpreted as a model of a certain type of wave turbulence in dissipative media. The presented results testify a possibility of using the considered electronic circuit for analog simulation of oscillatory and wave phenomena in systems to which the Vyshkind– Rabinovich model is applicable.

Key words: parametric mode interaction, chaotic attractor, auto-oscillations, analog simulation.
DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-33-47

References: Complex dynamics and chaos in electronic self-oscillator with saturation mechanism provided by parametric decay. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics,* 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 33–47. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-33-47

Введение

Трехволновое параметрическое взаимодействие колебаний и волн в системах с квадратичной нелинейностью встречается в физике плазмы, нелинейной оптике, акустике, электронике. Общей моделью, охватывающей ситуации различной физической природы, служит система, о которой говорят как о резонансном триплете, имея в виду слабое взаимодействие на квадратичной нелинейности трех колебательных мод, частоты которых подчинены условию параметрического резонанса $\omega_2 = \omega_1 + \omega_0$.

Если в системе имеет место возбуждение высокочастотной моды вследствие линейной неустойчивости, а низкочастотные моды характеризуются затуханием, то на определенном уровне амплитуд в динамике резонансного триплета имеет место

насыщение колебаний, определяемое, как говорят, параметрическим распадом. В работе Вышкинд и Рабиновича [1] было в свое время показано, что в этой ситуации динамика может становиться хаотической, причем переход к хаосу при изменении параметров осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода автоколебательных режимов.

Простейший случай относится к вырожденному параметрическому резонансу, когда частоты ω_0 и ω_1 одинаковы, так что условие на частоты принимает вид $\omega_2 = 2\omega_1$, и задача редуцируется к рассмотрению взаимодействия двух мод. Такое предположение облегчает рассмотрение и делает анализ более обозримым, поскольку динамика зависит от меньшего числа параметров. Для этого случая в работе Вышкинд и Рабиновича выведена и проанализирована модель, описываемая системой трех дифференциальных уравнений первого порядка, которую авторы считают оправданным трактовать как модель определенного типа волновой турбулентности в диссипативных средах. Эта модель в настоящее время признана одним из классических примеров маломерных систем, демонстрирующих динамический хаос.

Задача о динамике резонансного триплета при неустойчивости высокочастотной моды может рассматриваться как обобщение, охватывающее системы различной физической природы, многие из которых имеют очевидное прикладное значение. В частности, уместно сослаться на работы, посвященные спиновым волнам в магнитных пленках и процессам, связанным с генерацией второй гармоники в нелинейной оптике [2–6].

Так, в работе [2] исследована модуляционная неустойчивость спиновых волн в магнитных пленках в условиях трехмагнонного распада, выяснены механизмы этого явления и стохастизации огибающей при автомодуляции. А в работе [3] представлено экспериментальное исследование кольцевой автоколебательной системы на основе ферромагнитной структуры в случае, когда разрешены трехмагнонные процессы распада, и построена модель, на основе которой рассчитаны характерные режимы генерации, включая генерацию хаотической последовательности СВЧ-импульсов. Результаты численного моделирования сравниваются с экспериментальными данными. В работе [4] изучена простая модель нелинейного насыщения неустойчивой моды и показано, что по мере увеличения затухания в системе имеет место переход к хаосу через последовательность бифуркаций. Объяснение этому дается на основе одномерного отображения, которое численно выводится из исходной системы дифференциальных уравнений.

Естественной и полезной видится возможность аналогового моделирования динамических феноменов с использованием простейшего представителя систем, охватываемых в рамках данного обобщения, удобного для реализации и экспериментального исследования. В качестве такового представляет интерес предлагаемая в настоящей статье простая электронная схема. Это схема на основе двух колебательных контуров, один из которых включает отрицательную проводимость, и при этом присутствует специально сконструированный реактивный нелинейный элемент с характеристикой, практически точно даваемой квадратичной функцией, который ранее был использован применительно к другой системе с параметрическим взаимодействием мод [7]. Теоретическое описание схемы позволяет получить для нее уравнения, совпадающие с моделью турбулентности Вышкинд–Рабиновича [1].

1. Схема параметрического генератора

Рассмотрим приведенную на рис. 1 схему, составленную из двух колебательных контуров, один из которых включает отрицательную проводимость, обеспеченную подключением операционного усилителя OA2.

Эффект насыщения автоколебаний и их хаотизация обусловлены параметрическим механизмом благодаря присутствию квадратичного нелинейного реактивного элемента на основе операционного усилителя OA1 и аналогового умножителя A1. При подаче напряжения U на вход этого элемента, такой потенциал относительно земли имеет место на обеих входных клеммах операционного усилителя. Поскольку входное сопротивление операционного усилителя в идеале бесконечное, наличие тока U/R через резистор R_5, имеющий заземленный отвод, подразумевает наличие такого же тока через соединенный с ним резистор R_4, поэтому напряжение на входе аналогового умножителя A1 обязано быть равным $2U$. Следовательно, на его выходе имеем напряжение $4KU^2$, где K – коэффициент передачи, имеющий размерность обратного напряжения. Токи, протекающие через один и другой конденсаторы C_0, составляют $C_0 dU/dt$ и $(d/dt)(4KU^2 - C_0U)$, давая в сумме ток через нелинейный элемент $\tilde{C}$.

Собственные частоты колебательных контуров без учета диссипации полагаем удовлетворяющими, по крайней мере, приближенно, условиям параметрического резонанса

$$\Omega_2 \approx \Omega_1. \tag{1}$$

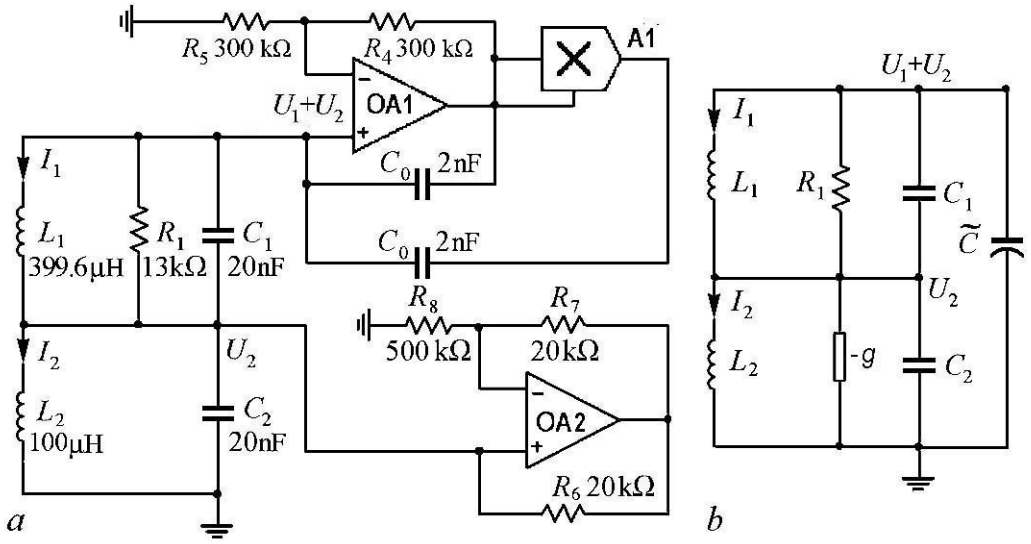


Рис. 1. Схема параметрического генератора хаоса (*a*) и её эквивалентная схема (*b*), где $(-g)=1/R_g$ – отрицательная проводимость, наличие которой обеспечено присутствием операционного усилителя OA2, а $\tilde{C}$ обозначает реактивный элемент – двухполюсник с квадратичной нелинейностью, реализованный с использованием операционного усилителя OA1. Коэффициент передачи умножителя A1 составляет $K = 1/8$ V^{-1}

Fig. 1. The scheme of the parametric chaos generator (*a*) and its equivalent scheme (*b*), $(-g)=1/R_g$ is negative conductivity, the presence of which is provided by the presence of an operational amplifier OA2, $\tilde{C}$ is reactive element (it is a two-terminal network with a quadratic nonlinearity realized using an operational amplifier OA1). Multiplier transfer factor A1 is $K = 1/8$ V^{-1}

На рис. 2 представлены графики реализаций напряжения на конденсаторах C_1 и C_2, полученные с помощью виртуального осциллографа при моделировании схемы в среде Multisim с номиналами компонентов, указанными в подписи к рисунку. После переходного процесса возникает режим нелинейных колебаний. В приведенном масштабе неразличимо высокочастотное заполнение, но видна нерегулярная, очевидно, хаотическая, динамика амплитуд.

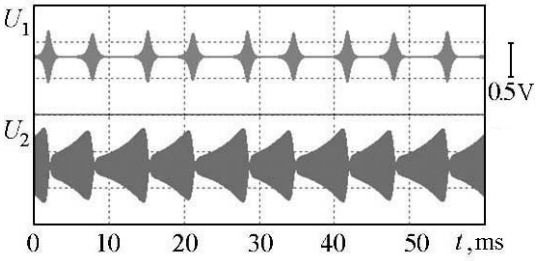


Рис. 2. Типичный вид временных зависимостей напряжений на конденсаторах C_1 и C_2 при моделировании схемы в среде Multisim с $R_8 = 500$ kΩ и остальными номиналами компонентов, приведенными на рис. 1

Fig. 2. A typical type of time dependences of voltage on capacitors C_1 and C_2 obtained by simulation of the scheme in the Multisim with $R_8 = 500$ kΩ. The other nominal values of the components are shown in Fig. 1

В рамках схемотехнического моделирования в среде Multisim затруднительно выявить некоторые существенные особенности динамики, включая ожидаемое присутствие хаотического аттрактора, и определить такие характеристики, как показатели Ляпунова, поэтому в следующих разделах рассматриваются уравнения, описывающие систему, и анализируются результаты их численного решения.

2. Основные уравнения параметрического генератора

Пусть U_1, U_2 – напряжения на конденсаторах C_1 и C_2, имеющих одинаковую емкость C, а I_1, I_2 – токи через катушки индуктивности L_1 и L_2. Уравнения Кирхгофа записываются в виде

$$\begin{aligned} &L_1\dot{I}_1 = U_1, \\ &L_2\dot{I}_2 = U_2, \\ &C\dot{U}_1 + U_1/R_1 + I_1 = -I, \\ &C\dot{U}_2 + U_2/R_2 + I_2 = -I, \end{aligned} \tag{2}$$

где I – ток через нелинейный элемент, определяемый выражением

$$I = \frac{d}{dt}4KC_0U^2 = \varepsilon\frac{d}{dt}\frac{U^2}{2}. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon = 8KC_0/C$, $C = C_1 = C_2$, и

$$U = U_1 + U_2. \tag{4}$$

Уравнения также можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}\left(U_1 + \frac{1}{2}\varepsilon U^2\right) + \frac{1}{R_1C}\frac{dU_1}{dt} + \frac{U_1}{L_1C} = 0, \\ &\frac{d^2}{dt^2}\left(U_2 + \frac{1}{2}\varepsilon U^2\right) - \frac{g}{C}\frac{dU_2}{dt} + \frac{U_2}{L_2C} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Введем нормированное безразмерное время $t' = t/(2R_1C)$. Тогда уравнения перепишутся в виде

$$\begin{aligned} &\ddot{X}_1 + 2\dot{U}_1 + \Omega_1^2 U_1 = 0, \\ &\ddot{X}_2 - 2\gamma\dot{U}_2 + \Omega_2^2 U_2 = 0, \\ &X_{1,2} = U_{1,2} + \frac{1}{2}\varepsilon U^2, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\gamma = gR_1 = \frac{R_1}{R_g}, \quad \Omega_{1,2} = 2R_1\sqrt{\frac{C}{L_{1,2}}}, \tag{7}$$

и точки обозначают производные по безразмерному времени. Для численного решения их удобно переписать в виде системы первого порядка:

$$\begin{aligned} &\dot{Y}_1 = -\Omega_1 U_1, && \dot{X}_1 = \Omega_1 Y_1 - 2U_1, \\ &\dot{Y}_2 = -\Omega_2 U_2, && \dot{X}_2 = \Omega_2 Y_2 + 2\gamma U_2, \\ &U_{1,2} = X_{1,2} - \frac{1}{2}\varepsilon U^2, && U = \frac{-1 + \sqrt{4\varepsilon(X_1 + X_2) + 1}}{2\varepsilon}. \end{aligned} \tag{8}$$

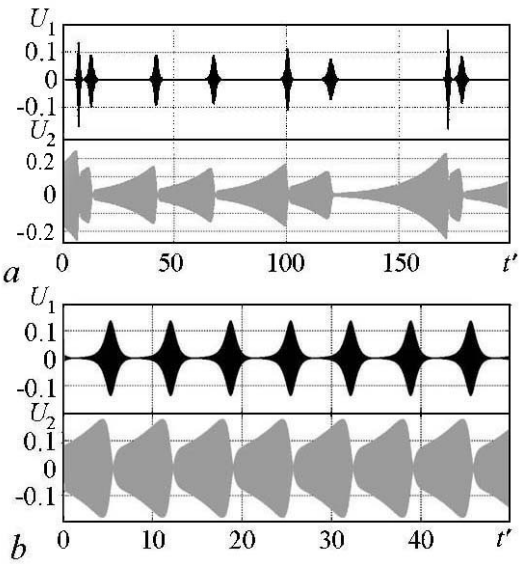


Рис. 3. Типичный вид временных зависимостей напряжений на конденсаторах C_1 и C_2, полученных численным решением уравнений (8) при $\varepsilon = 0.1$: *a* – хаотический режим $\gamma = 0.026$; *b* – периодический режим $\gamma = 0.2$

Fig. 3. Typical type of time dependences of voltage on capacitors C_1 and C_2 obtained by numerical solution of equations (8) at $\varepsilon = 0.1$: *a* – chaotic regime $\gamma = 0.026$; *b* – periodic regime $\gamma = 0.2$

Собственные частоты колебательных контуров без учета диссипации полагаем удовлетворяющими, по крайней мере, приближенно, условию параметрического резонанса (1).

На рис. 3 показаны временные зависимости величин U_1 и U_2, полученные при численном решении уравнений (8).[1] Сравнивая графики на рис. 2 и рис. 3, *a*, можно видеть некоторое соответствие наблюдаемой динамики. В обоих случаях имеем хаотические по виду реализации, содержащие похожие по виду фрагменты сигналов. При этом можно видеть соответствие по характерным масштабам времен и напряжений.

Расчет показателей Ляпунова путем совместного численного решения уравнений (8) и соответствующих уравнений в вариациях на основе известного алгоритма с ортогонализацией векторов возмущения по Граму–Шмидту [8, 9] дает[2] $\lambda_1 = 0.00956 \pm 0.00001$, $\lambda_2 = 0.0000 \pm 0.0001$, $\lambda_3 = -0.00854 \pm 0.00001$, $\lambda_4 = -1.9506 \pm 0.0001$.

[1] Для схемы, показанной на рис. 1, изменение параметра γ обеспечивается заданием сопротивления $R_g = 500$ kΩ. Остальные номиналы схемы соответствуют приведенным на рис. 1.

[2] Вычисления показателей Ляпунова проводились на интервалах нормированного времени длительности 3500 с подсчетом среднего значения и среднеквадратичного отклонения по 50 реализациям. В качестве погрешности указывается оценка среднеквадратичного отклонения.

Присутствие положительного показателя говорит о наличии хаоса, характеризуемого экспоненциальным ростом отклонения от опорной траектории на аттракторе при малом возмущении начальных условий. Второй показатель, равный нулю с точностью до ошибки вычисления, ассоциируется с возмущением типа сдвига вдоль траектории. Третий и четвертый показатели – отрицательные и отвечают за приближение траекторий к аттрактору. Тот факт, что сумма показателей отрицательна, свидетельствует о сжатии фазового объема в трехмерном пространстве состояний. Она согласуется с аналитическим вычислением дивергенции векторного поля, заданного правыми частями уравнений (8): $\mathrm{div}\ \mathbf{F}=\partial_x f_x+\partial_y f_y+\partial_z f_z+\partial_w f_w=\gamma-1= = -0.974$. Оценка размерности аттрактора по известной формуле Каплана–Йорке дает $D = 3 + \lambda_1/|\lambda_3| \approx 3.005$.

На рис. 4 приводится зависимость четырех показателей Ляпунова модели (8) от параметра γ. Из рисунка видно, что при $\gamma < 0.1$ старший показатель положительный (пусть и небольшой по величине), что говорит о наличии хаотической динамики. А вот при значениях параметра $\gamma > 0.1$ первый и второй показатели равны нулю, а третий и четвертый отрицательные, то есть в данной области реализуется периодический режим. Соответствующие зависимости величин U_1 и U_2, полученные при численном решении уравнений (8) представлены на рис. 3, *b*, а показатели Ляпунова равны: $\lambda_1 = 0.0000 \pm 0.0001$, $\lambda_2 = 0.0000 \pm 0.0001$, $\lambda_3 = -0.3539 \pm 0.0001$, $\lambda_4 = -1.2486 \pm 0.0001$. При этом на графике старшего показателя Ляпунова можно видеть провалы (окна регулярности), которые сопровождаются также выбросами или провалами на графиках остальных показателей. Именно такой вид графиков показателей Ляпунова в зависимости от параметра характерен для одномерных отображений с квадратичным экстремумом и многих других диссипативных систем, включая отображение Эно и модель Рёсслера, которые демонстрируют переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [10, 11] и ассоциируются с концепцией квазиаттрактора [12, 13].

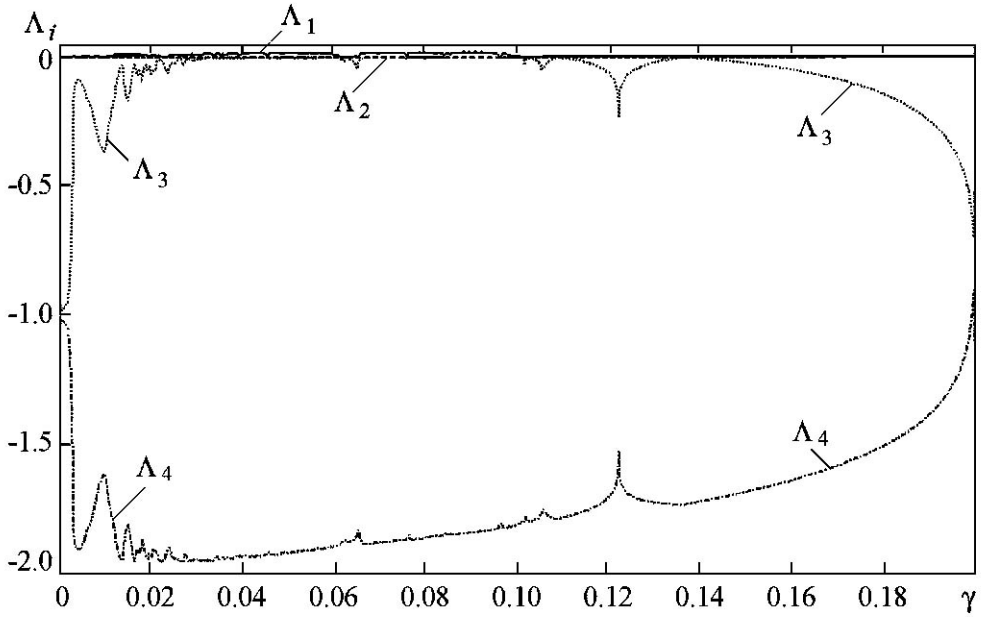


Рис. 4. Зависимость четырёх показателей Ляпунова от параметра γ, полученная численно для уравнений (8) при $\varepsilon = 0.1$

Fig. 4. Numerically graphs of four Lyapunov exponents for equations (8) at the value of the parameter $\varepsilon = 0.1$

3. Уравнения для медленных амплитуд

Для получения уравнений в форме, допускающей сравнение с моделью Вышкинд–Рабиновича, нужно использовать метод медленных комплексных амплитуд.

Начнем с того, что перепишем уравнения еще раз, учитывая только те члены, которые могут отвечать за резонансные взаимодействия мод при предполагаемом соотношении частот. Согласно (3) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d^2U_1}{dt^2} + 2\frac{dU_1}{dt} + \Omega_1^2 U_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon\frac{d^2U^2}{dt^2}, \\ &\frac{d^2U_2}{dt^2} - 2\gamma\frac{dU_2}{dt} + \Omega_2^2 U_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon\frac{d^2U^2}{dt^2}, \end{aligned} \tag{9}$$

здесь и далее штрихи у временной переменной для краткости опущены.

В первом и втором уравнениях, учитывая лишь резонансные члены, следует положить, соответственно,

$$\frac{1}{2}U^2 \approx U_1U_2, \quad \frac{1}{2}U^2 \approx \frac{1}{2}U_1^2, \tag{10}$$

и, кроме того, можно заменить операцию взятия второй производной в правых частях множителями $(-\Omega_{1,2}^2)$. В результате имеем

$$\begin{aligned} &\ddot{U}_1 + 2\dot{U}_1 + \Omega_1^2 U_1 = \varepsilon\Omega_1^2 U_1U_2, \\ &\ddot{U}_2 - 2\gamma\dot{U}_2 + \Omega_2^2 U_2 = \frac{1}{2}\varepsilon\Omega_2^2 U_1^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} &U_1 = A_1e^{i\omega_1 t} + A_1^*e^{-i\omega_1 t}, \quad \dot{U}_1 = i\omega_1A_1e^{i\omega_1 t} - i\omega_1A_1^*e^{-i\omega_1 t}, \\ &U_2 = A_2e^{i\omega_2 t} + A_2^*e^{-i\omega_2 t}, \quad \dot{U}_2 = i\omega_2A_2e^{i\omega_2 t} - i\omega_2A_2^*e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \tag{12}$$

что подразумевает выполнение дополнительных условий на введенные комплексные амплитудные переменные A_1 и A_2

$$\dot{A}_1e^{i\omega_1 t} + \dot{A}_1^*e^{-i\omega_1 t} = 0, \quad \dot{A}_2e^{i\omega_2 t} + \dot{A}_2^*e^{-i\omega_2 t} = 0. \tag{13}$$

Опорные частоты $\omega_{1,2}$ определим как

$$\omega_1 = \Omega_1, \quad \omega_2 = 2\Omega_1, \tag{14}$$

при этом $\omega_2 \approx \Omega_2$, но точное равенство не предполагается – будет учтена соответствующая расстройка. Подстановка в уравнения (11) дает

$$\begin{aligned} &2i\omega_1\dot{A}_1 + 2i\omega_1A_1 = \varepsilon\Omega_1^2A_1^*A_2, \\ &2i\omega_2\dot{A}_2 - 2i\omega_2\gamma A_2 - (\Omega_2^2 - \omega_2^2)A_2 = \frac{1}{2}\varepsilon\Omega_2^2A_1^2, \end{aligned} \tag{15}$$

или

$$\begin{aligned} &\dot{A}_1 + A_1 = -\frac{1}{2}i\varepsilon\Omega_1A_1^*A_2, \\ &\dot{A}_2 - \gamma A_2 - i\delta A_2 = -\frac{1}{4}i\varepsilon\Omega_2A_1^2, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\delta = \frac{\omega_2^2 - \Omega_2^2}{2\omega_2} = \frac{(2\Omega_1 - \Omega_2)(2\Omega_1 + \Omega_2)}{2\omega_2} \approx 2\Omega_1 - \Omega_2 \tag{17}$$

представляет собой частотную расстройку.

Выполним теперь перенормировку

$$A_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{\Omega_1\Omega_2}} a_1 \approx \frac{2}{\varepsilon\Omega_1} a_1, \quad A_2 = \frac{2}{\varepsilon\Omega_1} a_2 \tag{18}$$

и получим окончательно

$$\begin{aligned} &\dot{a}_1 + a_1 = -i a_1^* a_2, \\ &\dot{a}_2 - \gamma a_2 - i\delta a_2 = -i a_1^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Это и есть система укороченных уравнений модели (8). Для того чтобы получить модель Вышкинд–Рабиновича, сделаем подстановку вида

$$a_1 = A e^{i\varphi}, \quad a_2 = B e^{i\phi}, \quad \Phi = \phi - 2\varphi \tag{20}$$

в уравнения (19). Здесь A и B вещественные переменные, а Φ разность фаз. Тогда получаем

$$\begin{aligned} &\dot{A} = AB\sin\Phi - A, \\ &\dot{B} = -A^2\sin\Phi + \gamma B, \\ &\dot{\Phi} = (2B - A^2 B^{-1})\cos\Phi + \delta. \end{aligned} \tag{21}$$

Если теперь ввести новые переменные

$$X = -B\sin\Phi, \quad Y = -B\cos\Phi, \quad Z = A^2, \tag{22}$$

то уравнения (21) примут вид

$$\begin{aligned} &\dot{X} = Z + \delta Y - 2Y^2 + \gamma X, \\ &\dot{Y} = -\delta X + 2XY + \gamma Y, \\ &\dot{Z} = -2Z(X + 1), \end{aligned} \tag{23}$$

что соответствует модели Вышкинд–Рабиновича, полученной в работе [1] для описания турбулентности в диссипативной среде с гидродинамическим типом нелинейности.

4. Динамика системы укороченных уравнений

Теперь рассмотрим динамику системы укороченных уравнений (19). На рис. 5 представлена полученная численно зависимость четырех показателей Ляпунова модели (19) от параметра γ. Отметим, что зависимости показателей Ляпунова исходной системы (8) и укороченных уравнений (19) очень близки, за исключением области малых значений параметра $\gamma < 0.03$.

На рис. 6 для хаотического и периодического режимов представлены зависимости медленных амплитуд $|a_1|$ и $|a_2|$ от времени. Реализации демонстрируют

типичное для указанных режимов поведение. Показатели Ляпунова для хаотического режима: λ_1=0.009593$\pm$0.000001, λ_2=0.000000$\pm$0.000001, λ_3=0.000000$\pm$0.000001, λ_4= $-$ 1.957592$\pm$0000001; для периодического: λ_1=0.000000$\pm$0.000001, λ_2= =0.000000$\pm$0.000001, λ_3= $-$ 0.145560$\pm$0.000001, λ_4= $-$ 1.454439$\pm$0.000001.

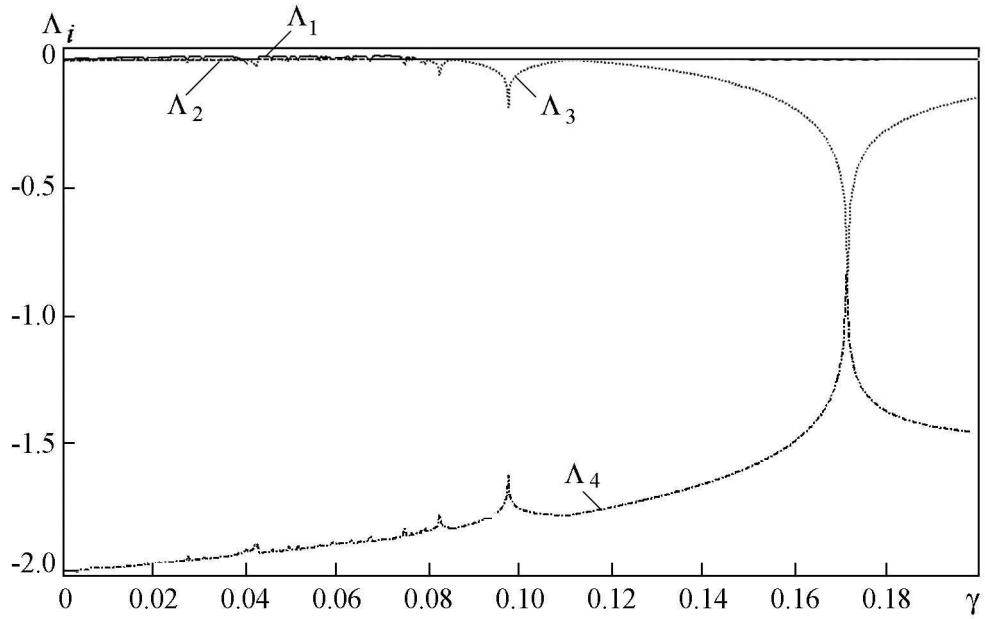


Рис. 5. Зависимость показателей Ляпунова от параметра γ, полученная численно для уравнений (19). $\delta = 0.184$

Fig. 5. Numerically graphs of four Lyapunov exponents of equations (19) at the value of the parameter $\delta = 0.184$

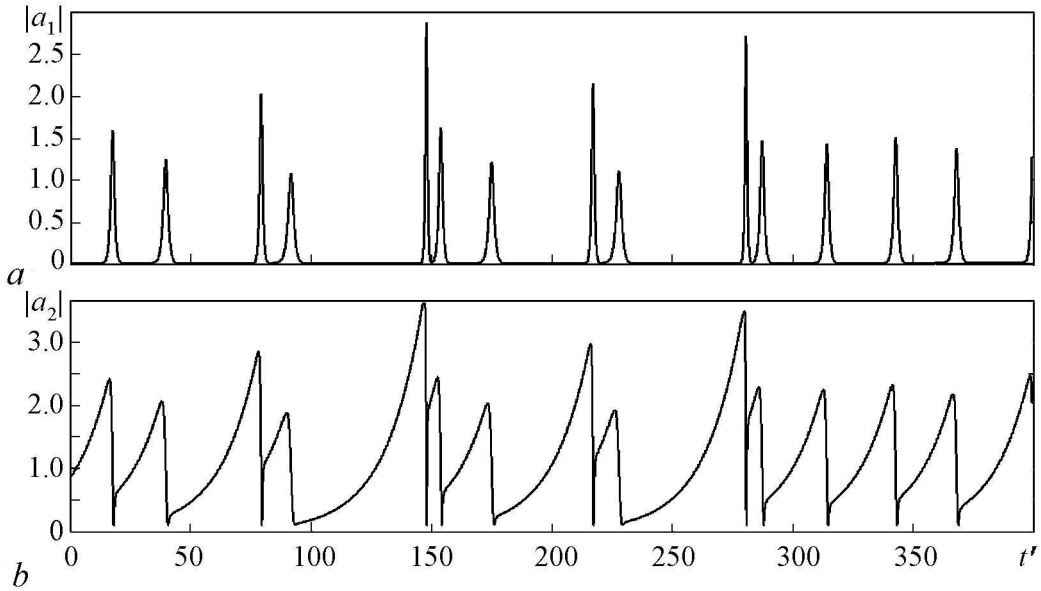


Рис. 6. Типичный вид временных зависимостей величин $|a_1|$ и $|a_2|$ системы укороченных уравнений (19). a – хаотический режим $\gamma = 0.026$; b – периодический режим $\gamma = 0.2$. $\varepsilon = 0.1$

Fig. 6. Typical type of time dependences of $|a_1|$ and $|a_2|$ system of truncated equations (19). a – chaotic regime $\gamma = 0.026$; b – periodic regime $\gamma = 0.2$. $\varepsilon = 0.1$

5. Регулярная и хаотическая динамика модели Вышкинд–Рабиновича

Обратимся к рассмотрению модельной системы Вышкинд–Рабиновича (23) и построим для нее карту динамических режимов на плоскости параметров (δ, γ). Процедура состоит в сканировании путем перебора узлов сетки с некоторым шагом по двум параметрам. В каждой точке выполняется порядка 500 итераций отображения Пуанкаре, определенного для системы (23) с помощью секущей поверхности в фазовом пространстве $S = Z + \delta Y - 2Y^2 + \gamma X = 0$ (с проходом в направлении возрастания S). По результатам последних шагов итераций проводится анализ присутствия или отсутствия периода повторения состояний в сечении Пуанкаре от 1 до 16 с некоторым заданным изначально уровнем допустимой погрешности. При обнаружении периодичности соответствующий пиксель на диаграмме обозначается цветом, определяемым периодом повторения состояний, в противном случае пиксель отмечается черным цветом. Далее производится переход к анализу следующей точки на плоскости параметров. При этом в качестве начальных условий в новой точке разумно задавать состояние, полученное в итоге итераций в предыдущей точке («сканирование с наследованием»), что способствует ускорению сходимости к установившемуся режиму динамики. Соответствующая карта показана на рис. 7. По периферии рисунка изображены портреты аттракторов, отвечающие точкам, отмеченным на плоскости параметров.

Отметим, что карта динамических режимов имеет типичный для динамических систем с переходом к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода вид. Аттрактор в области хаоса похож на аттрактор Ресслера [8, 10]. Расчет показателей дает для хаотического режима: $\lambda_1 = 0.00961 \pm 0.00001$, $\lambda_2 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\lambda_3 = -1.95760 \pm 0.00001$; для режима периода 1: $\lambda_1 = 0.000000 \pm 0.000001$,

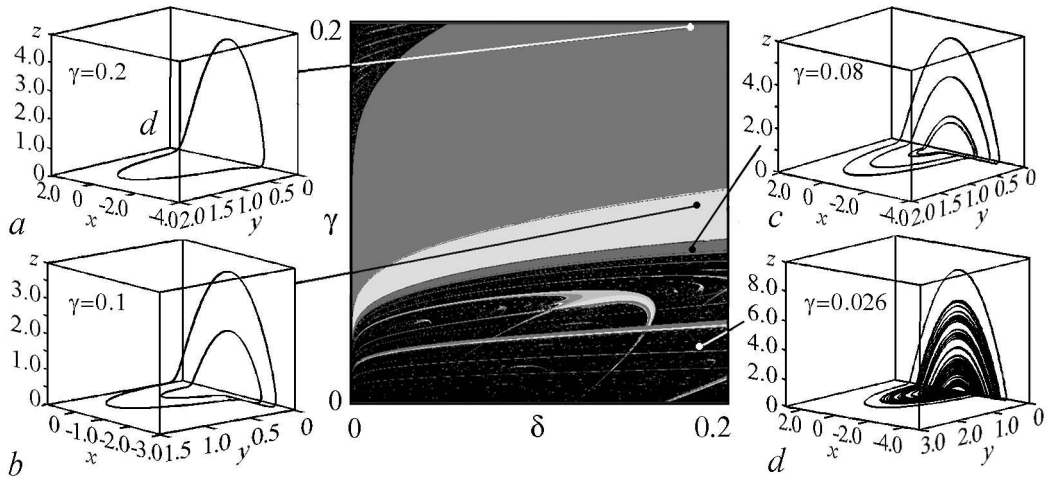


Рис. 7. Карта динамических режимов системы (23) на плоскости параметров (δ, γ) и портреты аттракторов в выделенных точках; для всех аттракторов $\delta = 0.184$

Fig. 7. Chart of dynamical regimes of model (23) at the parameter plane (δ, γ) and attractors plotted at the marked points; for all attractors $\delta = 0.184$

$\lambda_2 = -0.14556 \pm 0.00001$, $\lambda_3 = -1.45444 \pm 0.00001$. А размерность хаотического аттрактора $D = 2 + \lambda_1/|\lambda_3| \approx 2.004909$.

На рис. 8 приводится зависимость трех показателей Ляпунова модели (23) от параметра γ. Отметим, что на качественном уровне зависимости показателей Ляпунова исходной системы (8) и модели Вышкинд–Рабиновича (23) идентичны (сравним рис. 4 и рис. 8). В обоих случаях в области небольших значений параметра γ наблюдается хаос, который рождается из предельного цикла в результате каскада бифуркаций удвоения периода.

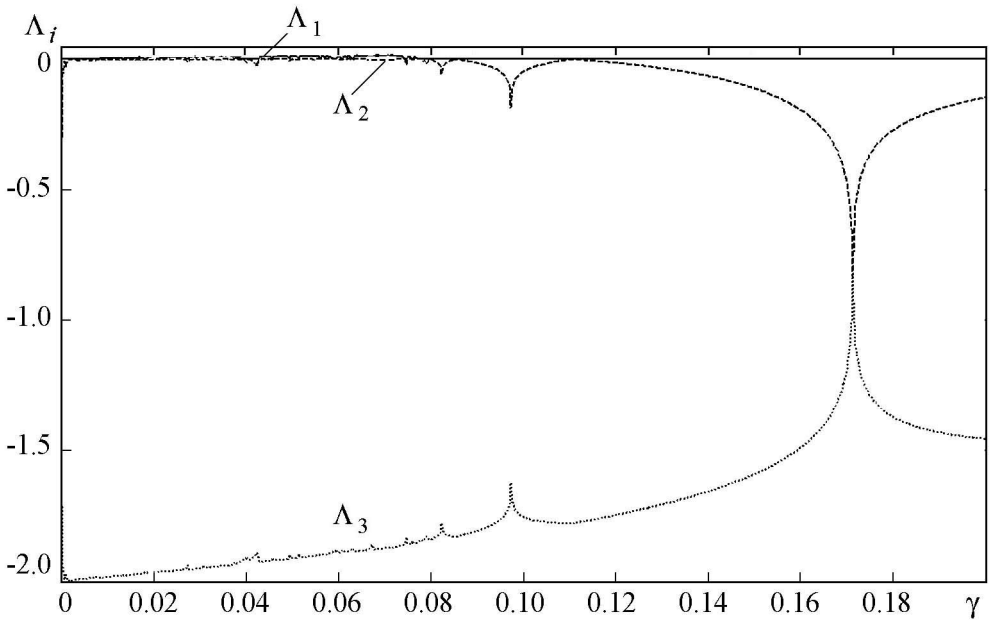


Рис. 8. Зависимость показателей Ляпунова от параметра γ, полученная численно для уравнений (23); $\delta = 0.184$

Fig. 8. Graphs of three Lyapunov exponents of equations (23) at the value of the parameter $\delta = 0.184$

Заключение

В работе проанализирована схема параметрического генератора хаоса на базе двух колебательных контуров, один из которых включает отрицательную проводимость. Для нее получены уравнения, описывающие динамику системы, в том числе уравнения, непосредственно описывающие осцилляции напряжений и токов в колебательных контурах, амплитудные уравнения и уравнения в форме модели Вышкинд–Рабиновича. Динамика указанных моделей была исследована численно с помощью методов теории динамического хаоса: построены реализации динамических переменных от времени, портреты аттракторов, зависимости показателей Ляпунова. Для модели Вышкинд–Рабиновича также была построена карта динамических режимов на плоскости параметров. Результаты, полученные для всех моделей, находятся в хорошем соответствии. Показано, что все системы демонстрируют переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода при уменьше-

нии одного из параметров. Возникающий хаотический аттрактор по своей структуре аналогичен аттрактору Ресслера.

Проведено схемотехническое моделирование системы с использованием программного продукта Multisim, результаты которого согласуются с результатами численного исследования системы.

Проведенный анализ показывает возможность использования рассмотренной электронной схемы для аналогового моделирования колебательно-волновых явлений в системах, к которым применимы модельные представления, развитые С.Я. Вышкинд и М.И. Рабиновичем.

Разработка схемы электронного генератора, вывод уравнений и схемотехническое моделирование (разделы 1, 2 3) выполнены при поддержке гранта РФФИ № 15-02-02893. Численные расчеты, обработка и интерпретация результатов (разделы 4, 5) выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-12-01008).

Библиографический список

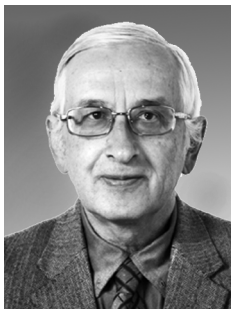
1. *Вышкинд С.Я., Рабинович М.И.* Механизм стохастизации фаз и структура волновой турбулентности в диссипативных средах // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, № 2. С. 557–571.
2. *Демидов В.Е., Ковшиков Н.Г.* Механизм возникновения и стохастизации автомодуляции интенсивных спиновых волн // Журнал технической физики. 1999. Т. 69, № 8. С. 100–103.
3. *Романенко Д.В.* Генерация хаотической последовательности СВЧ-импульсов в автоколебательной системе с ферромагнитной плёнкой // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 1. С. 67–74.
4. *Wersinger J.M., Finn J.M., Ott E.* Bifurcation and «strange» behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling // The Physics of Fluids. 1980. Vol. 23, № 6. Pp. 1142–1154.
5. *Savage C.M., Walls D.F.* Optical chaos in second-harmonic generation // Journal of Modern Optics. 1983. Vol. 30, № 5. Pp. 557–561.
6. *Lythe G.D., Proctor M.R.E.* Noise and slow-fast dynamics in a three-wave resonance problem // Physical Review E. 1993. Vol. 47, no. 5. 3122.
7. *Кузнецов С.П.* Аттрактор типа Лоренца в электронном параметрическом генераторе и его трансформация при нарушении точных условий параметрического резонанса // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 68–87.
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.
9. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9–20.

10. *Rössler O.E.* Continuous chaos: four prototype equations // Ann. New York Academy of Sciences. 1979. Vol. 316. P. 376–392.
11. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // Commun. Math. Phys. 1976. Vol. 50. P. 69–77.
12. *Afraimovich V.S.* Strange attractors and quasiattractors // Nonlinear and turbulent processes in physics. 1984. Vol. 1. P. 1133–1138.
13. *Шильников Л.П.* Бифуркации и странные аттракторы // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4(2). С. 364–366.

References

1. Vyshkind S.Y., Rabinovich M.I. The phase stochastization mechanism and the structure of wave turbulence in dissipative media. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics,* 1976, vol. 44, pp. 292–299.
2. Demidov V.E., Kovschikov N.G. Mechanism of occurrence and stochastization of self-modulation of intense spin waves. *Technical Physics*, 1999, vol. 69, iss. 8, pp. 100–103.
3. Romanenko D.V. Chaotic microwave pulse train generation in self-oscillatory system based on a ferromagnetic film. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics,* 2012, Vol. 20, iss. 1, pp. 67–74 (in Russian).
4. Wersinger J.M., Finn J.M., Ott E. Bifurcation and «strange» behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling. *The Physics of Fluids,* 1980, vol. 23, no. 6, pp. 1142–1154.
5. Savage C.M., Walls D.F. Optical chaos in second-harmonic generation. *Journal of Modern Optics,* 1983, vol. 30, no. 5, pp. 557–561.
6. Lythe G.D., Proctor M.R.E. Noise and slow-fast dynamics in a three-wave resonance problem. *Physical Review E,* 1993, vol. 47, no. 5, 3122.
7. Kuznetsov S.P. Lorenz type attractors in electronic parametric generator and its transformation outside the accurate parametric resonance. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics,* 2016, vol. 24, iss.3, pp. 68–87 (in Russian).
8. Kuznetsov S.P. Dynamical Chaos. Moscow: Fizmatlit, 2006. 356h. (in Russian).
9. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. *Meccanica,* 1980, Vol. 15, pp. 9–20.
10. Rössler O.E. Continuous chaos: four prototype equations. *Ann. New York Academy of Sciences,* 1979, vol. 316, pp. 376–392.
11. Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys*, 1976, vol. 50, pp. 69–77.
12. Afraimovich V.S. Strange attractors and quasiattractors. *Nonlinear and turbulent processes in physics,* 1984, vol. 1, pp. 1133–1138.
13. Shilnikov L.P. Bifurcations and strange attractors. *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta,* 2011, no. 4(2), pp. 364–366 (in Russian).

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 1977) и доктора наук (СГУ, 1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Главный научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Автор монографий «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат Государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Regular and Chaotic Dynamics», «Нелинейная динамика», «Известия Саратовского университета – Новая серия. Серия Физика».



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
410012, Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: spkuz@yandex.ru

Тюрюкина Людмила Владимировна родилась в Саратове (1977). Окончила Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (2000). Обучалась в очной аспирантуре Саратовского государственного университета (2000–2003), по окончании которой защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика», имеет звание доцента по специальности «Радиофизика» (2009). В настоящее время работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. По совместительству работает доцентом на кафедре динамических систем ФНП на базе СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Опубликовала более 50 статей по направлениям, указанным выше.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
410012, Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: spkuz@yandex.ru