



УДК 519.6

## СОХРАНЯЮЩИЕ МЕРУ ХАОТИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ В ФОРМЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

*В. М. Аникин, М. Г. Инкин, О. С. Плеханов*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; sunbeam18.95@mail.ru; evid-sar@ya.ru  
*Поступила в редакцию 17.07.2017, после доработки 10.01.2018*

Цель работы – демонстрация алгоритма построения сохраняющих меру трехмерных хаотических отображений, определенных в областях, образованных телами вращения. С одной стороны, появляется возможность формально расширить класс многомерных хаотических отображений, а с другой стороны, приводит к формулам моделирования псевдослучайных величин, востребованных при решении задач методом Монте-Карло. Аналитический алгоритм построения многомерных отображений складывается из следующих шагов: 1) представление инвариантной плотности в виде произведения безусловного распределения одной из координат точки орбиты отображения и условных плотностей распределения других координат (при условии, что значения некоторых координат приняли фиксированное значение); 2) нахождение соответствующих интегральных законов распределения для координат точки орбиты отображения; 3) представление координат точки орбиты через псевдослучайные величины посредством использования метода обратных функций моделирования случайных величин; 4) сведение полученных зависимостей к форме хаотических отображений для конкретного выбора хаотического одномерного отображения, обладающего равномерным инвариантным распределением. Последний шаг позволяет представить датчики псевдослучайных величин как итерационные детерминированные процедуры, определенные на областях сложной формы. Статистические свойства соотносятся с массивом сгенерированных чисел, имеющих смысл координат псевдослучайной точки в пространстве, ограниченном фигурой вращения. Рассмотрены примеры синтеза трехмерных хаотических отображений (генераторов псевдослучайных точек) как для общего случая (задания образующей тела вращения произвольной непрерывной функцией), так и для конкретных видов трехмерных областей в виде шара и конуса. Обсуждаются приемы, позволяющие при моделировании псевдослучайных величин сгладить свойство рациональности машинных чисел.

*Ключевые слова:* трехмерные хаотические отображения, метод Монте-Карло, фигуры вращения.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-90-103

*Образец цитирования:* Аникин В.М., Инкин М.Г., Плеханов О.С. Сохраняющие меру хаотические отображения областей в форме тел вращения // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 1. С. 90–103. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-90-103

# PRESERVING MEASURE CHAOTIC MAPS OF DOMAINS IN THE FORM OF ROTATION FIGURES

*V. M. Anikin, M. G. Inkin, O. S. Plekhanov*

Saratov State University  
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia  
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; sunbeam18.95@mail.ru; evid-sar@ya.ru  
*Received 17.07.2017, revised 10.01.2018*

The aim of the article is to demonstrate an algorithm for constructing measure-preserving three-dimensional chaotic maps defined in domains formed by rotation bodies. On the one hand, the class of multidimensional chaotic mappings is expanded, and on the other hand, we obtain formulas for simulating pseudo-random quantities that are in demand in problems solving by the Monte Carlo method. The analytical algorithm for constructing multidimensional maps consists of the following steps: 1) the presentation of the invariant density as the product of the unconditional distribution of a point coordinates of the map's orbit and the conditional densities of the distribution of other coordinates (provided that the values of some coordinates take a fixed value); 2) finding the corresponding integral distribution laws for the coordinates of the point of the mapping; 3) presentation of the coordinates of the point of the orbit through pseudo-random variables by using the inverse function modeling method; 4) reduction of the obtained dependences to the form of chaotic mappings for a particular choice of a chaotic one-dimensional map possessing a uniform invariant distribution. The last step allows us to present pseudorandom values as iterative deterministic procedures defined on areas of complex shape. Statistical properties correlate with an array of generated numbers that have the sense of the coordinates of a pseudo-random point in a space bounded by a rotation figure. Examples of the synthesis of three-dimensional chaotic mappings (generators of pseudo-random points) are considered both for the general case (defining the generator of the body of revolution by an arbitrary continuous function) and for specific types of three-dimensional regions in the form of a sphere and a cone. Methods are discussed that allow one to smooth out the property of rationality set of computer numbers by modeling pseudo-random variables.

*Key words:* three-dimensional chaotic mappings, Monte Carlo method, rotation figures.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-90-103

*References:* Anikin V.M., Inkin M.G., Plekhanov O.S. Preserving measure chaotic maps of domains in the form of rotation figures. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 90–103. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-90-103

## Введение

Решение вычислительных задач в рамках метода Монте-Карло предполагает моделирование псевдослучайных величин и векторов, в частности, псевдослучайных<sup>1</sup> точек в заданных областях пространства – на прямых линиях, кривых, в плоских фигурах разной формы и на их границах, в объемах различной формы и на ограничивающих их поверхностях. Алгоритмы генерации псевдослучайных векторов востребованы в разнообразных вычислительных схемах: при вычислении многократных интегралов; определении максимума функции многих переменных; реше-

<sup>1</sup>Термин отражает тот факт, что машинные датчики так называемых «псевдослучайных» (характеризуемых равномерным распределением на единичном интервале) величин представляют собой детерминированные процедуры. Вероятностные свойства можно приписать лишь совокупности таких величин.

нии интегральных уравнений; исследовании сложных систем; имитационном моделировании задач из различных разделов физики, астрофизики, стохастической геометрии, механики, газо- и гидродинамики, физико-химической кинетики, биологии; распознавания образов, компьютерной графики, производственных технологий и т.д. (подробнее об истории метода, классах решаемых задач и библиографию см., например, в [1–4]<sup>2</sup>).

Со схожими модельными объектами могут быть соотнесены задачи, существенные для различных научных дисциплин. Так, моделирование случайных точек на поверхности (в частности, на сфере) рассматривается:

- в математике – как задача М. Fekete (1923), входящая в составленный С. Смейлом<sup>3</sup> список из 18 фундаментальных математических задач, требующих своего решения в XXI столетии (задача возникла из «потребностей» физики твердого тела и биологии, занимает седьмую позицию в списке и содержит требование относительно величины произведения расстояний между парами случайных точек на сфере) [5];
- в моделировании технологического процесса производства волокнистых композиционных материалов – как основа для оптимизации структуры армированных оболочек [6];
- в вирусологии – как решение задачи об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом цилиндрическими антителами (постановка задачи содержится в [7], а вариант решения – в [8]).

В данной статье, в контексте пополнения алгоритмов метода Монте-Карло и направлений использования свойств динамических систем, обладающих хаотическим поведением, предлагаются алгоритмы моделирования равномерно распределенных точек в областях, образованных телами вращения. Отличительной особенностью этих алгоритмов является то, что они строятся на базе одномерных кусочно-линейных хаотических отображений, сохраняющих меру Лебега, и представляют собой итерационные процедуры, не содержащие обращения к машинным датчикам псевдослучайных величин. Тем самым иллюстрируется возможность построения сохраняющих меру многомерных отображений посредством их топологического сопряжения [9, 10] с одномерными кусочно-линейными хаотическими отображениями. Запись явных аналитических выражений для новых отображений и их инвариантных плотностей возможна в случае применимости метода обратных функций [11], то есть в случае точной обратимости инвариантного интегрального закона распределения. Ранее подобная схема синтеза отображений была апробирована для плоских областей сложной формы [12]. Ниже реализуется алгоритм построения трехмерных не диссипативных отображений (в себя) областей в форме фигур вращения.

---

<sup>2</sup>См. также: Список рекомендуемой литературы к курсу «Методы Монте-Карло в теории и практике». URL: [http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/antonov/files/mc\\_bib\\_20171115.pdf](http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/antonov/files/mc_bib_20171115.pdf) (дата обращения 29.12.2017).

<sup>3</sup>С. Смейл (S. Smale) является «изобретателем» робастной динамической системы с хаотической динамикой («подковы Смейла»), ставшей исходной точкой для развития теории гиперболического хаоса.

## 1. Общий алгоритм построения хаотических отображений фигур вращения

При переходе к многомерной задаче задаваемая (требуемая) инвариантная плотность многомерного хаотического отображения, по правилам вероятностной теории, представляется произведением безусловной и условных плотностей вероятностей распределения координат (рассматриваемых как случайные величины) точки на траектории отображения. Эта «факторизация» проводится с учетом вида области, на которой строится отображения. Далее находятся безусловный и условные интегральные законы распределения координат, обращение которых дает формулы моделирования координат точек, образующих траекторию отображения, через псевдослучайные величины. Завершающая задача – представить эти формулы моделирования в форме хаотических отображений, введя явным образом правило итерационного получения псевдослучайных величин. Кусочно-линейные отображения с полными ветвями (переводящими область своего определения на весь интервал), в принципе, теоретически обеспечивают такую возможность.

Рассмотрим некоторую положительно определенную функцию  $F(x) \geq 0$ , заданную на интервале  $(a, b)$ . Определим двумерную фигуру А уравнением

$$A : 0 \leq y \leq F(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Трехмерная фигура В образована вращением фигуры (1) вокруг оси  $x$  (рис. 1).

Поскольку объем фигуры В есть

$$V_B = \pi \int_a^b F^2(x) dx, \quad a \leq x \leq b, \quad (2)$$

то плотность равномерного распределения точек  $(X, Y, Z)$  в фигуре В определяется обратной величиной (2):

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\pi \int_a^b F^2(x) dx}. \quad (3)$$

Равномерность распределения случайных точек в фигуре вращения требует равномерного распределения точек в любом ее сечении, то есть в круге радиуса  $F(x)$ , но число точек в сечении будет зависеть от величины радиуса  $F(x)$ . Это означает, что в формуле (3) совместного вероятностного распределения трех случайных величин  $(X, Y, Z)$ , представляемой произведением безусловной  $f_1(x)$  и условной плотности  $f_2(y, z|x)$  вероятностей,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{1}{\pi \int_a^b F^2(x) dx} \equiv \\ &\equiv f_1(x) f_2(y, z|x), \end{aligned} \quad (4)$$

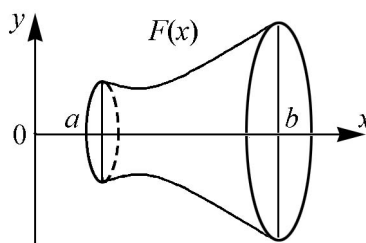


Рис. 1. Фигура вращения с образующей  $F(x)$

Fig. 1. The figure of rotation with the generator  $F(x)$

условное распределение  $f_2(y, z|x)$  точки  $(Y, Z)$  в круговом сечении радиуса  $F(x)$  должно выражаться как

$$f_2(y, z|x) = \frac{1}{\pi F^2(x)}. \quad (5)$$

Здесь  $x$  конкретное значение случайной величины  $X$ . Тогда из (4) в соответствии с (5) следует безусловное распределение  $f_1(x)$  для координаты  $X$

$$f_1(x) = \frac{F^2(x)}{\int_a^b F^2(x) dx}. \quad (6)$$

Остается выразить условные распределения для каждой из координат  $Y$  и  $Z$ . Проинтегрировав (5) по  $z$  в пределах изменения этой переменной в плоскости  $(Y, Z)$ , найдем условное распределение случайной величины  $Y$  при условии, что случайная величина  $X$  приняла конкретное значение  $x$ ,

$$f_{y,x}(y|x) = \int_{-\sqrt{F^2(x)-y^2}}^{\sqrt{F^2(x)-y^2}} \frac{1}{\pi F^2(x)} dz = \frac{2\sqrt{F^2(x)-y^2}}{\pi F^2(x)}. \quad (7)$$

Соответственно, условная плотность распределения случайной величины  $Z$  (при условии, что случайные величины  $X, Y$  приняли конкретные значения  $x, y$ ) выражается как

$$f_{z|x,y}(x|y, z) = \frac{1}{\sqrt{F^2(x)-y^2}}. \quad (8)$$

Законы распределения, отвечающие плотностям распределения (6)–(8), определяются интегрированием этих выражений. Использование в дальнейшем метода обратных функций (в простейшем случае) или метода исключений [11] позволяет записать формулы моделирования координат  $(X, Y, Z)$ , обеспечивающие равномерность распределения точки в области рассматриваемой фигуры.

## 2. Формирование равномерного распределения в круговом сечении фигуры вращения

Далее рассмотрим два примера синтеза трехмерных отображений – в области шара и в области конуса. Одним из этапов такого построения является построение двумерного случайного вектора в области круга, то есть в нашей терминологии – двумерного хаотического отображения круга.

Общее условие равномерности распределения случайной величины в плоской области площадью  $S = \pi R_0^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S} = \frac{1}{\pi R_0^2}, & (x, y) \in S, \\ 0, & (x, y) \notin S. \end{cases} \quad (9)$$

Элемент вероятности, соответственно, запишется как

$$f(x, y)dx dy = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)r dr d\varphi = \frac{r}{\pi R_0^2} dr d\varphi,$$

где  $rdrd\varphi = dxdy$  – элемент площади.

Рассматривая полярные координаты  $(r, \varphi)$  как случайные величины (переобозначим их через  $R$  и  $\Phi$ ), найдем распределение  $R$ , проинтегрировав по угловой переменной выражение для двумерной плотности вероятности (9),

$$f_R(r) = \frac{2r}{R_0^2}, \quad 0 \leq r \leq R_0. \quad (10)$$

Интегральный закон распределения  $R$ , определяемый интегрированием (10), принимает вид

$$F_R(r) = \int_0^r f_R(r)dr = \frac{r^2}{R_0^2}, \quad 0 \leq r \leq R_0, \quad (11)$$

при этом  $F(0) = 0$ ,  $F(R) = 1$ . Явное представление (11) для закона распределения случайной величины  $R$  и его обратимость позволяет получить формулу моделирования  $R$  через равномерный закон распределения некоторой случайной величины  $\alpha$ , определенной на единичном интервале  $(0, 1)$ . Согласно методу обратных функций [11] полагаем  $R^2/R_0^2 = \alpha$ , откуда следует формула моделирования  $R$

$$R = R_0\sqrt{\alpha}. \quad (12)$$

Аналогичным способом (интегрированием двумерного распределения (9)) найдем теперь плотность распределения координаты  $\Phi$  случайной точки в круге

$$f_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (13)$$

Таким образом, как следует из (13), угловая координата имеет равномерное распределение на интервале  $(0, 2\pi)$  с функцией распределения

$$F_\Phi(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (14)$$

Соответственно, согласно (14), формула моделирования случайной координаты  $\varphi$  по методу обратных функций есть

$$\varphi = 2\pi\beta, \quad (15)$$

где  $\beta$  – случайная величина, имеющая равномерное распределение на единичном интервале.

Следовательно, с учетом (12) и (15), генерация случайных точек в области круга посредством итерационного процесса обеспечивается следующими преобразованиями:

$$r_n = R_0\sqrt{\alpha_n}, \quad \varphi_n = 2\pi\beta_n. \quad (16)$$

Чтобы записать конкретный алгоритм генерации координат случайной точки в круге в форме двумерного хаотического отображения необходимо задать правило генерации случайных величин  $\alpha_n, \beta_n$ . Если выбрать для этих целей диадический сдвиг Бернулли (простейшее хаотическое отображение),  $\alpha_{n+1} = \{2\alpha_n\}, \beta_{n+1} = \{2\beta_n\}$  (фигурные скобки обозначают операцию выделения дробной части числа), для угловой координаты из (16) получим отображение

$$\varphi_{n+1} = 2\pi\beta_{n+1} = \begin{cases} 2\varphi_n, & 0 \leq \varphi_n \leq \pi, \\ 2\varphi_n - 2\pi, & \pi \leq \varphi_n \leq 2\pi, \end{cases} \quad (17)$$

а для радиальной координаты – отображение

$$r_{n+1} = \begin{cases} r_n\sqrt{2}, & 0 \leq r_n \leq \frac{R}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2r_n^2 - R^2}, & \frac{R}{\sqrt{2}} \leq r_n \leq R \end{cases} = \sqrt{2r_n^2}\Theta_{0, \frac{R}{\sqrt{2}}}(r_n) + \sqrt{2r_n^2 - R^2}\Theta_{\frac{R}{\sqrt{2}}, R}(r_n), \quad (18)$$

где введена характеристическая функция интервала

$$\Theta_{a,b}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (a, b), \\ 0, & t \notin (a, b). \end{cases}$$

Если вернуться к декартовым координатам  $x$  и  $y$ ,  $x_{n+1} = r_n \cos \varphi_n$ ,  $y_{n+1} = r_n \sin \varphi_n$ , то из (17) и (18) получится двумерное хаотическое отображение, генерирующее равномерное распределение точек в области круга, следующего вида:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \Psi(x_n, y_n) \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}, & 0 \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq R, \\ y_{n+1} = \Psi(x_n, y_n) \frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2}, & 0 \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq R. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь введена функция

$$\Psi(x_n, y_n) = \sqrt{2(x_n^2 + y_n^2)}\Theta_{0, \frac{R}{\sqrt{2}}}(\sqrt{x_n^2 + y_n^2}) + \sqrt{2(x_n^2 + y_n^2) - R^2}\Theta_{\frac{R}{\sqrt{2}}, R}(\sqrt{x_n^2 + y_n^2}).$$

### 3. Хаотическое отображение области шара

Для решения задачи моделирования случайных точек в шаре удобно использовать сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$ , координатами которой являются: полярный радиус (расстояние от центра координатной системы до точки шара радиуса  $R_0$ )  $R_0 \geq r \geq 0$ , угол-широта  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  и угол-долгота  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  точки, при этом декартовы координаты  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ . Элемент объема в сферической системе координат

$$dV = r^2 dr d\theta d\varphi. \quad (20)$$

Требование равномерности распределения случайной точки в шаре с учетом (20) определяет выполнение следующего условия:

$$P\{r < R < r + dr, \theta < \Theta < \theta + d\theta, \varphi \leq \Phi \leq \varphi + d\varphi\} = Cr^2 dr d\theta d\varphi, \quad (21)$$

где  $C$  – константа, формула которой находится интегрированием вероятностного соотношения (21) по области определения переменных и имеет вид  $= 3/(2\pi^2 R_0^3)$ .

Рассматривая координаты точки внутри шара как случайный вектор  $(R, \Theta, \Phi)$ , запишем представление для совместной плотности его координат через произведение безусловной вероятности  $f_1(r)$  по  $r$  и условными вероятностями  $f_2(\theta|r)$  и  $f_3(\varphi|r, \theta)$  по угловым координатам, а именно:

$$\begin{aligned} P\{r < R < r + dr, \theta < \Theta < \theta + d\theta, \varphi < \Phi < \varphi + d\varphi\} = \\ = \frac{3}{2\pi^2 R_0^3} r^2 dr d\theta d\varphi \equiv f_1(r) f_2(\theta|r) f_3(\varphi|r, \theta). \end{aligned}$$

Интегрирование этого соотношения по  $\theta$  и  $\varphi$  дает плотность вероятности распределения случайной величины полярного радиуса  $R$

$$f_1(r) = \frac{3r^2}{R_0^3}. \quad (22)$$

Тогда

$$f_2(\theta|r) f_3(\varphi|r, \theta) = \frac{3r^2}{2\pi^2 R_0^3} : \frac{3r^2}{R_0^3} = \frac{1}{2\pi^2}. \quad (23)$$

Интегрирование (23) по  $\varphi$  дает выражение для условной плотности распределения случайной величины  $\Theta$

$$f_2(\theta|r) = \frac{1}{\pi}. \quad (24)$$

А тогда условная плотность распределения случайной величины  $\Phi$  есть

$$f_3(\varphi|r, \theta) = \frac{1}{2\pi}. \quad (25)$$

Из (22)–(25) получаем интегральные законы распределения для случайных величин  $R, \Theta, \Phi$

$$F_1(r) = P\{R < r\} = \frac{3}{R_0^3} \int_0^r t^2 dt = \frac{r^3}{R_0^3}, \quad (26)$$

$$F_2(\theta|r) = P\{\Theta < \theta|r\} = \frac{1}{\pi} \int_0^\theta du = \frac{\theta}{\pi}, \quad (27)$$

$$F_3(\varphi|r, \theta) = P\{\Phi < \varphi|r, \theta\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varphi w dw = \frac{\varphi}{2\pi}. \quad (28)$$



Условные распределения угловых координат случайной точки в шаре являются равномерными:  $\Theta \in (0, \pi)$ ,  $\Phi \in (0, 2\pi)$ .

Методом обратных функций из (26)–(28) можно получить алгоритмы моделирования сферических, а затем и прямоугольных координат случайной точки в шаре. А именно, если  $\alpha, \beta, \gamma$  – псевдослучайные величины, заданные на единичном интервале, то получаем:

а) сферические координаты точки, имеющей равномерное распределение в шаре,

$$r = R_0 \sqrt[3]{\alpha}, \quad \theta = \pi\beta, \quad \varphi = 2\pi\lambda; \quad (29)$$

б) декартовы координаты этой точки

$$x = R_0 \sqrt[3]{\alpha} \sin \pi\beta \cos 2\pi\gamma, \quad (30)$$

$$y = R_0 \sqrt[3]{\alpha} \sin \pi\beta \sin 2\pi\gamma, \quad (31)$$

$$z = R_0 \sqrt[3]{\alpha} \cos \pi\beta. \quad (32)$$

С другой стороны, шар можно рассматривать как тело вращения (образующая – полуокружность). Следует обратить внимание: равномерное распределение случайных точек в шаре единичного радиуса не достигается использованием формулы  $R = \alpha$ .

На основании полученных результатов запишем теперь хаотические отображения, обладающие равномерным инвариантным распределением внутри шара. Полагаем, что хаотическим датчиком псевдослучайных чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  на единичном интервале служит сдвиг Бернулли:  $\alpha_{n+1} = \{2\alpha_n\}$ ,  $\beta_{n+1} = \{2\beta_n\}$ ,  $\gamma_{n+1} = \{2\gamma_n\}$ . Хаотические отображения для угловых координат точки, согласно (30)–(32), запишутся следующим образом:

$$\theta_{n+1} = \pi\beta_{n+1} = \begin{cases} 2\theta_n, & 0 \leq \theta_n \leq \pi/2, \\ 2\theta_n - \pi, & \pi/2 \leq \theta_n \leq \pi, \end{cases} \quad (33)$$

$$\varphi_{n+1} = 2\pi\gamma_{n+1} = \begin{cases} 2\varphi_n, & 0 \leq \varphi_n \leq \pi, \\ 2\varphi_n - 2\pi, & \pi \leq \varphi_n \leq 2\pi. \end{cases} \quad (34)$$

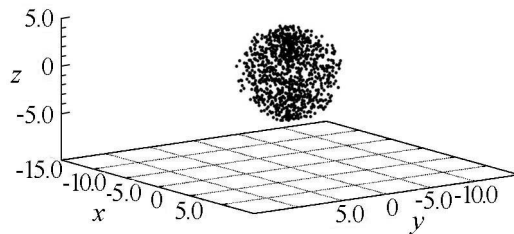


Рис. 2. Заполнение области шара точками по хаотическому алгоритму (33)–(35),  $R_0 = 5$

Fig. 2. Filling the domain of ball with dots according to the chaotic algorithm (33)–(35),  $R_0 = 5$

Итерационная же процедура изменения полярного радиуса получит представление

$$r_{n+1} = \begin{cases} r_n \sqrt[3]{2}, & 0 \leq r_n \leq R_0 / \sqrt[3]{2}, \\ \sqrt[3]{2r_n^3 - R_0^3}, & R_0 / \sqrt[3]{2} \leq r_n \leq R_0. \end{cases} \quad (35)$$

Результат моделирования равномерно распределенных точек в шаре согласно (33)–(35) показан на рис. 2.

#### 4. Хаотическое отображение области конуса

Рассмотрим второй тестовый пример – моделирование случайных точек, заполняющих конус. Уравнение линейной образующей имеет вид

$$F(x) = C_1 x, \quad 0 \leq y \leq F(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (36)$$

Здесь  $C_1$  – константа.

Согласно формулам (4)–(8), получим выражения для вероятностных законов распределения координат точки внутри конуса

$$f(x, y, z) = f_1(x)f_2(y, z|x) = \frac{1}{b \int_a^x F^2(x) dx} = \frac{3}{\pi C_1^2 a^3}, \quad (37)$$

$$f_1(x) = \frac{F^2(x)}{\int_a^x F^2(x) dx} = \frac{3x^2}{a^3}, \quad (38)$$

$$F_1(x) = \int_0^x f_1(t) dt = \frac{3x^3}{a^3}, \quad (39)$$

$$f_2(y, z|x) = \frac{f(x, y, z)}{f_1(x)} = \frac{1}{\pi C_1^2 x^2}. \quad (40)$$

Это означает, что точка со случайными координатами  $(X, Y, Z)$  распределена равномерно в области конуса (36). Координата  $X$  имеет распределение по законам (38) и (39), то есть может быть выражена по методу обратных функций через псевдослучайную величину  $\alpha$ , как

$$X = a \sqrt[3]{\alpha}. \quad (41)$$

При заданном значении координаты  $X=x$  точка с координатами  $(Y, Z)$ , задаваемая в круге радиуса  $C_1 x$  (в сечении конуса  $x = \text{const}$ ), распределена равномерно в этом круге. Поэтому для записи алгоритма равномерного заполнения случайными точками области конуса можно использовать алгоритмы раздела 2. Результат действия хаотического отображения представлен на рис. 3.

«Неравномерность» заполнения рассматриваемых областей шара и конуса на

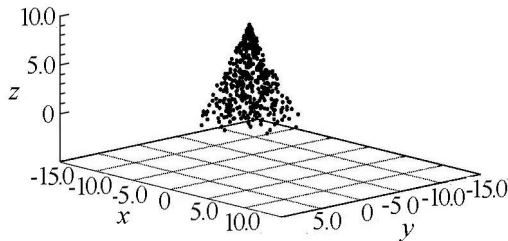


Рис. 3. Заполнение области конуса точками по хаотическому алгоритму

Fig. 3. Filling the domain of a cone with points according to the chaotic algorithm

рис. 2 и 3 (при конкретных реализациях алгоритма) может быть обусловлена рядом факторов: конечностью числа точек (в нашем случае – 1000); их взаимной «экранировкой» (объемный объект отображается на плоскости); особенностями итерационной процедуры, носящей детерминированный характер, а именно, случайной последовательностью может являться теоретически неограниченный ряд генерируемых значений, а «короткая» последовательность может и не покрывать весь интервал значений. Но, как представляется, самая существенная погрешность в траекториях, которая может возникнуть при практических реализациях любых алгоритмов на основе хаотических отображений, связана с *фундаментальным свойством* множества машинных чисел, образующих специфическое множество рациональных чисел, зависящей системы (двоичной, в частности) счисления. В силу этого, при итерациях может возникнуть траектория, приводящая к неподвижной точке отображения (например, для сдвигов Бернулли на единичном отрезке такой точкой является начало координат). Более «устойчивым» в этом плане (при наличии той же неподвижной точки) является пирамидальное отображение tent map. Выходом из этой ситуации является, как всегда, проведение вычислений с максимальным числом разрядов в мантиссе машинных чисел, а также использование дополнительных «хитростей» в данном случае: «перезапуск» алгоритма с произвольным начальным условием, формируемым машинным датчиком случайных чисел (это было использовано в алгоритме); периодическая смена базовых алгоритмов и т.п.

### Заключение

В заметке предложен алгоритм синтеза отображений трехмерных областей в форме тел вращения с равномерным инвариантным распределением. Приведены примеры хаотических отображений шара в шар и конуса в конус. В качестве базовых отображений, используемых при нахождении вида маргинальных составляющих трехмерных отображений, выступают кусочно-линейные отображения (сдвиги Бернулли).

Характерной особенностью построенных отображений является то, что они могут быть записаны в «замкнутой» форме (без обращения к внешним генераторам псевдослучайных чисел) и непосредственно могут использоваться как итерационные датчики равномерного распределения в трехмерных областях. При этом вид отображений, обладающих одной и той же инвариантной плотностью, может быть, в принципе, различен и выявляться согласно дополнительным критериям – например, обеспечивать определенный вид автокорреляционной функции траекторий этих отображений на основе решения спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса, ассоциированного с базовыми отображениями [13–17].

Построенные отображения дополняют «коллекцию» неоднородных дискретных систем, демонстрирующих хаотическое поведение с инвариантной мерой. Они могут быть полезны как инструмент при имитационном моделировании и решении вычислительных задач методом Монте-Карло, а также в качестве алгоритма кодирования информации частной и корпоративной значимости (см. обзор в [18, 19]).

## Библиографический список

1. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: Учеб. пособие для студ. вузов. М.: Издательский центр «Академия», 2006. 368 с.
2. Robert C., Casella G. Monte Carlo Statistical Methods. New York: Springer, 2004. 683 p.
3. Шаракшанэ А.С., Железнов И.Г., Ивницкий В.А. Сложные системы. М.: Высшая школа, 1977. 247 с.
4. Соболев Н.М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. М.: Знание, 1985. 32 с.
5. Smale S. Mathematical problems for the next century // Math. Intelligencer. 1998. Vol. 20, Iss. 2. Pp. 7–15.
6. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Математическая модель армирования оболочек из волокнистых композиционных материалов и проблема равномерного распределения точек на поверхностях // Вестник ПГТУ. Механика. 2010. № 4. С. 55–66.
7. Кендал М., Моран П. Геометрические вероятности. М.: Наука, 192 с.
8. Копытов Н.П. Метод Монте-Карло для оценивания ожидаемой нейтрализованной площади поверхности шарообразной вирусной частицы, случайным образом атакованной антителами // Российский журнал биомеханики. 2012. Т. 16, № 3 (57). С. 65–74.
9. Биллингсли П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969. 239 с.
10. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: Физматлит, 2007. 328 с.
11. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. 2 изд., доп. М.: Физматлит, 1982. 296 с.
12. Аникин В.М., Ноянова С.А. Двумерные хаотические отображения // Радиотехника. 2005. № 4. С. 63–70.
13. Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. Несамоспряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2015. 96 с.
14. Аникин В.М., Аркадакский С.С., Купцов С.Н., Ремизов А.С. Полиномиальные собственные функции оператора Перрона–Фробениуса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 4. С. 6–16.
15. Аникин В.М. Спектральные задачи для оператора Перрона–Фробениуса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. С. 35–48.
16. Аникин В.М., Ремизов А.С., Аркадакский С.С. Собственные функции и числа оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 2. С. 62–75.
17. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М. Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 3–17.
18. Baptista M.S. Cryptography with chaos // Phys. Lett. 1998. Vol. A240. P. 50–54.

19. Аникин В.М., Чебаненко С.В. Хаотические отображения и кодирование информации: Модификации исторически первого алгоритма // Гетеромагнитная микроэлектроника. 2011. Вып. 9. С. 81–95.

## References

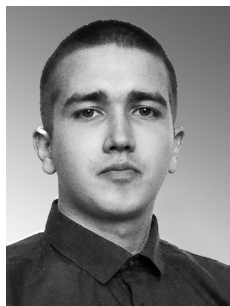
1. Mikhailov G.A., Voitishok A.V. Numerical Statistical Modeling. Monte Carlo Methods: Textbook. Allowance for students of universities. Moscow: Publishing Center «Academy», 2006, 368 p. (in Russian).
2. Robert C., Casella G. Monte Carlo Statistical Methods. New York: Springer, 2004. 683 p.
3. Sharakshane A.S., Zheleznov I.G., Ivnitky V.A. Complex Systems. M.: High School, 1977. 247 p. (in Russian).
4. Sobol I.M. Points Uniformly Filling a Multidimensional Cube. M.: Knowledge, 1985. 32 p. (in Russian).
5. Smale S. Mathematical problems for the next century. *The Mathematical Intelligencer*, 1998, vol. 20, iss. 2, pp. 7–15.
6. Kopytov N.P., Mityushov E.A. Mathematical model of reinforcing shells from fibrous composite materials and the problem of uniform distribution of points on surfaces. *Bulletin of PSTU. Mechanics*, 2010, iss 4, pp. 55–66 (in Russian).
7. Kendall M.G., Moran P.A.P. Geometrical probability. London: Ch. Griffin & Company Ltd, 1963, 125 p.
8. Kopytov N.P. The Monte Carlo method for estimating the expected neutralized surface area of a spherical viral particle randomly attacked by antibodies. *Russian Journal of Biomechanics*, 2012, vol. 16, iss. 3 (57), pp. 65–74 (in Russian).
9. Billingsley P. Ergodic Theory and Information. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1965, XIII+193 p.
10. Anikin V.M., Goloubentsev A.F. Analytical Models of Deterministic Chaos. M.: Fizmatlit, 2007, 328 p. (in Russian).
11. Ermakov S.M., Mikhailov G.A. Statistical Modeling. 2 ed., ext. M.: Fizmatlit, 1982, 296 p. (in Russian).
12. Anikin V.M., Noyanova S.A. Two-dimensional chaotic mappings. *Radio Engineering*, 2005, iss. 4, pp. 63–70 (in Russian).
13. Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Remizov A.S. Non-Selfadjointed Linear Operators in Chaotic Dynamics. Saratov: Saratov University Publishing House, 2015. 96 p.
14. Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Kuptsov S.N., Remizov A.S. Polynomial eigenfunctions of the Perron–Frobenius operator. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 24, iss. 4, pp. 6–16 (in Russian).
15. Anikin V.M. Spectral problems for the Perron–Frobenius operator. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2009, vol. 17, iss. 4, pp. 35–48 (in Russian).
16. Anikin V.M., Remizov A.S., Arkadaksky S.S. The eigenfunctions and eigenvalues of the Perron–Frobenius operator of piecewise-linear chaotic mappings. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2007, vol. 15, iss. 2, pp. 62–75 (in Russian).

17. Golubentsev A.F., Anikin V.M. Invariant functional subspaces of linear evolution operators of chaotic mappings. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 13, iss. 1–2, pp. 3–17 (in Russian).
18. Baptista M.S. Cryptography with chaos. *Phys. Lett.*, 1998, vol. A240, pp. 50–54.
19. Anikin V.M., Chebanenko S.V. Chaotic mappings and coding of information: Modifications of the historically first algorithm. *Heteromagnetic microelectronics*, 2011, iss. 9, pp. 81–95 (in Russian).



*Аникин Валерий Михайлович* родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1970). Доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета СГУ, заведующий кафедрой компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, ученый секретарь диссертационного совета Д 212.243.01 на базе СГУ. Область научных интересов – математическое моделирование хаотических и стохастических процессов, диссертационное исследование. Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации (2012).

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru



*Инкин Максим Глебович* родился в Саратове (1995). Окончил бакалавриат физического факультета Саратовского университета по направлению «Физика» (2016). Магистрант физического факультета СГУ. Имеет публикации в области статистической электроники.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: sunbeam18.95@mail.ru



*Плекханов Олег Сергеевич* родился в Саратове (1966). Окончил физический факультет Саратовского университета (1988). Ведущий инженер кафедры компьютерной физики и метаматериалов физического факультета СГУ. Научные интересы – автоматизация физического эксперимента.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: evid-sar@ya.ru