



Уравнения с нелинейностями дислокаций и Ферми–Пасты–Улама

С. Д. Глызин¹, С. А. Кащенко^{1,2}, А. О. Толбей¹

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31

E-mail: glyzin.s@gmail.com, kasch@uniyar.ac.ru, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Автор для переписки Анна Олеговна Толбей, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 12.04.2019, принята к публикации 2.07.2019

Тема и цель исследования. Исследуется класс уравнений Ферми–Пасты–Улама и уравнений, описывающих дислокации. Эти уравнения, являясь ярким представителем интегрируемых уравнений, представляют интерес как в теоретических построениях, так и в прикладных исследованиях. **Исследуемые модели.** В настоящей работе рассматривается модель, объединяющая эти два уравнения, для нее исследуются локальные динамические свойства решений. Важной особенностью модели является то обстоятельство, что всё бесконечное множество характеристических чисел линеаризованного в нуле уравнения состоит из чисто мнимых значений. Тем самым, в задаче об устойчивости нулевого решения реализуется критический случай бесконечной размерности. Для его исследования применяется специальный асимптотический метод построения, с той или иной степенью точности, так называемых нормализованных уравнений. С помощью таких уравнений определяется главная часть решений исходного уравнения, после чего можно строить асимптотику методами теории возмущений. **Результаты.** Все решения естественным образом разбиваются на два класса: регулярные решения, гладко зависящие от входящего в уравнение малого параметра, и нерегулярные, которые являются суперпозицией быстро осциллирующих по пространственной переменной функций. Для каждого класса решений выделены области такого изменения параметров уравнения, при которых главные части описываются различными нормализованными уравнениями. Представлены достаточно широкие классы таких уравнений, в которые входят, например, семейства уравнений Шредингера, Кортевега–де Вриза и др. Рассматривается задача определения такого множества параметров исходного уравнения, при которых нелинейность дислокаций и нелинейность ФПУ являются сопоставимыми по «силе», то есть ни одним из них нельзя пренебречь в первом приближении. **Обсуждение.** Интересно отметить, что для регулярных и нерегулярных решений области параметров, в которых нелинейности сопоставимы, различны, причем во втором случае соответствующая область существенно шире. Статья состоит из двух глав. В первой главе построены нормализованные уравнения для регулярных решений, а во втором – для нерегулярных. В свою очередь первая глава разбита на три части, в каждой из которых в зависимости от значения параметров построены принципиально различные нормализованные уравнения.

Ключевые слова: бифуркации, устойчивость, нормальные формы, сингулярные возмущения, нелинейная динамика.

Образец цитирования: Глызин С.Д., Кащенко С.А., Толбей А.О. Уравнения с нелинейностями дислокаций и Ферми–Пасты–Улама // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 4. С. 52–70. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-52-70>

Финансовая поддержка. Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № 1.13560.2019/13.1 в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10043).

Equations with the Fermi–Pasta–Ulam and dislocations nonlinearity

S. D. Glyzin¹, S. A. Kashchenko^{1,2}, A. O. Tolbey¹

¹P.G. Demidov Yaroslavl State University, Russia,
14, Sovetskaya st., Yaroslavl 150003, Russia

²National Research Nuclear University «MIFI», Russia
31, Kashirskoe sh., Moscow 115409, Russia

Email: glyzin.s@gmail.com, kasch@uniyar.ac.ru, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Correspondence should be addressed to Anna O. Tolbey, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Received 12.04.2019, accepted for publication 2.07.2019

Issue. The class of Fermi–Pasta–Ulam equations and equations describing dislocations are investigated. Being a bright representative of integrable equations, they are of interest both in theoretical constructions and in applied research. **Investigation methods.** In the present work, a model combining these two equations is considered, and local dynamic properties of solutions are investigated. An important feature of the model is the fact that the infinite set of characteristic numbers of the equation linearized at zero consists of purely imaginary values. Thus, the critical case of infinite dimension is realized in the problem on the stability of the zero solution. In this case a special asymptotic method for construction of the so-called normalized equations is used. Using such equations, we determine the main part of the solutions of the original equation, after that we can investigate the asymptotic behavior using perturbation theory methods. **Results.** All solutions are naturally divided into two classes: regular solutions that smoothly depend on a small parameter entering the equation, and irregular ones, which are a superposition of functions that oscillate rapidly on a spatial variable. For each class of solutions, areas of such changes in the parameters of the equation are distinguished in which the main parts are described by different normalized equations. Sufficiently wide classes of such equations are presented, which include, for example, the families of the Schrödinger, Korteweg–de Vries, and other equations. The problem of determining such a set of parameters of the original equation for which the nonlinearity of dislocations and the nonlinearity of the FPU are comparable «in force» is considered, i.e. none of them can be neglected in the first approximation. **Discussion.** It is interesting to note that for regular and irregular solutions the areas of parameters in which nonlinearities are comparable are different. In the second case the corresponding region is much wider. The article consists of two chapters. In the first chapter, normalized equations for regular solutions are constructed, and in the second, for irregular ones. In turn, the first chapter is divided into three parts, in each part different normalized equations are constructed (depending on the values of the parameters).

Key words: bifurcations, stability, normal forms, singular perturbations, nonlinear dynamics.

Reference: Glyzin S.D., Kashchenko S.A., Tolbey A.O. Equations with the Fermi–Pasta–Ulam and dislocations nonlinearity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 4, pp. 52–70.
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-52-70>

Acknowledgements. The research was supported by the project no. 1.13560.2019/13.1 of the state contract for scientific research and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-29-10043).

Постановка задачи

Пусть имеется простейшая кристаллическая структура, состоящая из слоев атомов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Френкелем Я.И. и Конторовой Т.А. в работе [1] была предложена модель поведения точечного дефекта в кристаллической структуре твердого тела. Эти дефекты иногда называют дислокациями. В той же статье введена в научный оборот математическая модель, описывающая поведение этого точечного дефекта. Речь идет о системе вида

$$m\ddot{y}_n + a \sin y_n = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}, \quad (n = 1, \dots, N), \quad (1)$$

где m – положительный коэффициент, $y_n = y_n(t, x_n)$ – отклонение n -го атома от положения равновесия. Для $y_n(t, x_n)$ при крайних значениях n выполнены условия, характерные для одной из краевых задач: периодической $y_{N+1} = y_1$, $y_0 = y_N$; задачи Дирихле $y_{N+1} = y_0 = 0$; задачи Неймана $y_{N+1} = y_N$, $y_0 = y_1$. Точки x_n лежат на отрезке $[0, 2\pi]$ и $x_{n+1} = x_n + \varepsilon$,

где $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$. Предполагается, что число взаимодействующих элементов N велико или, что то же самое,

$$0 < \varepsilon \ll 1.$$

Следует отметить, что в настоящее время под дислокацией понимается более сложное несовершенство кристаллической структуры, чем любой из точечных дефектов [2]. Учет дислокаций опирается на известную задачу Ферми–Пасты–Улама

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = F_{n+1,n} - F_{n,n-1}, \quad (n = 1, \dots, N), \quad (2)$$

где

$$F_{n+1,n} = y_{n+1} - y_n + \alpha(y_{n+1} - y_n)^2 + \beta(y_{n+1} - y_n)^3,$$

α и β – положительные коэффициенты.

Системы (1) и (2) отличаются друг от друга отсутствием функции $a \sin y_n$ в уравнении Ферми–Пасты–Улама и наличием в правой части (2) квадратичной и кубической нелинейностей. Для того чтобы учесть более сложное несовершенство точечных дефектов, будем рассматривать систему, содержащую как элементы системы (1), так и элементы системы (2). Модель, объединяющая эти два уравнения, была рассмотрена в работе [3], в ней был изучен ряд вопросов, касающихся интегрируемости по Пенлеве её решений. Одним из простейших способов работы с такими уравнениями является переход к непрерывному распределению масс (см., например, [4]), вследствие чего получаем (после очевидных перенормировок и замены $a \sin y$ на более общую функцию $f(y)$)

$$\begin{aligned} \ddot{y} + f(y) = & y(t, x + \varepsilon) - 2y + y(t, x - \varepsilon) + \\ & + \alpha \left(y^2(t, x + \varepsilon) - 2y(t, x + \varepsilon)y(t, x) + 2y(t, x) \cdot y(t, x - \varepsilon) - y^2(t, x - \varepsilon) \right) + \\ & + \beta \left((y(t, x + \varepsilon) - y(t, x))^3 - (y(t, x) - y(t, x - \varepsilon))^3 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Для определенности считаем, что выполнены периодические краевые условия

$$y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x). \quad (4)$$

Нелинейную функцию $f(y)$ примем в виде

$$f(y) = ay + by^3 + \varphi(y), \quad \text{где } \varphi(y) = o(|y|^3) \text{ при } y \rightarrow 0.$$

В работе [1] рассмотрен случай, когда $f(y) = \varepsilon^2 \sin y$, то есть $a = \varepsilon^2$, $b = \varepsilon^2/6$. Отметим ещё работы [3–10], в которых рассматривался случай $f(y) = 0$, то есть задача Ферми–Пасты–Улама.

Краевая задача (3), (4) может быть рассмотрена в двух принципиально различных постановках. Первая связана с предположением о гладкости по ε решений и разложениями $y(t, x \pm \varepsilon)$ в асимптотические ряды по ε . Будем называть это регулярным случаем и рассматривать несколько вариантов такой задачи в зависимости от того, каково соотношение между порядками малости величин a, b по отношению к ε . Второй вариант постановки задачи – нерегулярный случай. При этом будут изучаться быстроосциллирующие по x колебательные решения.

В регулярном случае одной из основных целей будет выбор порядков малости коэффициентов функции $f(y)$, входящей в краевую задачу (3), (4), так, чтобы вклад в динамические свойства решений нелинейности $f(y)$ и нелинейности ФПУ был сопоставим. Очевидным образом, выбирая a и b достаточно малыми, мы придем к задаче Ферми–Пасты–Улама и наоборот, если a и b не малы, то задача (3), (4) будет сводиться к уравнению типа синус-Гордона [2, 7, 11], и нелинейности, содержащиеся в функции $F_{n+1,n}$, не будут играть роли.

1. Регулярные решения

При условии (2) рассмотрим поведение всех решений краевой задачи (3), (4) с начальными условиями из некоторой достаточно малой (и независимой от ε) окрестности нулевого состояния равновесия. Центральную роль при этом играют решения линеаризованной в нуле краевой задачи

$$\ddot{y} + ay = y(t, x + \varepsilon) - 2y + y(t, x + \varepsilon), \quad y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x). \quad (5)$$

Характеристическое уравнение для (5) имеет вид

$$\lambda^2 + a = -4 \sin^2 \left(\frac{\varepsilon k}{2} \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

Ниже предполагаем, что параметр a положителен, и для некоторых фиксированных параметров a_0 и a_1 имеем соотношение

$$a = a_0 + \varepsilon a_1, \quad a_0 \geq 0 \quad \text{и} \quad a_1 > 0 \quad \text{при} \quad a_0 = 0.$$

Все корни (6) являются чисто мнимыми. Поэтому в задаче об устойчивости нуля в (3), (4) реализуется критический случай бесконечной размерности. Используя методы работ [10, 12–14], ниже будут построены семейства специальных краевых задач для описания различных групп решений исходной краевой задачи (3), (4). Отметим, что особо важным с прикладной точки зрения [1, 3, 7] является случай, когда параметр a мал. В связи с этим будет рассмотрен случай, когда $a_0 = 0$.

В этом разделе исследуем регулярные решения, то есть такие решения, для которых имеет место асимптотическое представление

$$y(t, x + \varepsilon) = y(t, x) + \varepsilon y'(t, x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 y''(t, x) + \dots \quad (7)$$

С точки зрения расположения корней характеристического уравнения (6) речь идет о решениях, формирующихся в своей основе на модах с «конечными» (то есть независимыми от параметра ε) значениями номеров k .

Здесь остановимся на изучении регулярных решений краевой задачи (3), (4). Подставим (7) в (3). Для определения $y(t, x)$ получим с точностью до $o(\varepsilon^6)$ краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = & \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial y^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{\partial^6 y}{\partial x^4} \right] - f(y) + \\ & + \alpha \varepsilon^3 \left[2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{6} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right) \right) \right] + \\ & + \beta \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^3 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\partial y}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x). \quad (9)$$

Отметим, что на таком пути в [1] было получено известное уравнение, которое носит название уравнения синус-Гордона, в этом случае в уравнении (8) оставались слагаемые вплоть до второго порядка малости по ε . Интересно выяснить, какие изменения в динамике краевой задачи (8), (9) произойдут при учете слагаемых более высокого порядка малости. Обратим внимание,

что без учета слагаемого $2\varepsilon^4(6!)^{-1}\partial^6 y/\partial x^6$ краевая задача (8), (9) является некорректной. В частности, не выполняется теорема существования и единственности решений. Исходя из этих соображений, целесообразно выписать разложение правых частей (3) с точностью до $o(\varepsilon^6)$. Здесь же заметим, что периодические условия (9) выбраны здесь для определенности, поскольку в случае условий Дирихле или Неймана способ исследования соответствующей краевой задачи остается прежним.

Итак, при всех достаточно малых значениях ε рассматривается вопрос о локальном – в достаточно малой и независимой от ε окрестности нулевого состояния равновесия – поведении всех решений краевой задачи (8), (9).

Важную роль при анализе решений из малой окрестности нуля играет линеаризованное уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2 \frac{\varepsilon^4}{6!} \frac{\partial^6 y}{\partial x^6} \right] - ay \quad (10)$$

с краевыми условиями (9). Характеристическое для (10), (9) уравнение имеет вид

$$\lambda^2 = -\varepsilon^2 \left((2\pi k)^2 - \frac{(2\pi k)^4}{12} \varepsilon^2 + \frac{2(2\pi k)^6}{6!} \varepsilon^4 \right) - a, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (11)$$

Все корни (11) имеют нулевые вещественные части. В случае $f(y) = 0$ краевая задача (8), (9) изучалась асимптотическими методами в статьях [10, 15]. Исследование основано на применении метода нормализации. Коротко остановимся на нем. Решения краевой задачи (10), (9) можно формально записать в виде ряда

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \xi_k \exp(\varepsilon \lambda_k(\varepsilon) t),$$

где λ_k – корень уравнения (11). Тогда решение $u(t, x, \varepsilon)$ краевой задачи (8), (9) ищем в виде формального асимптотического ряда

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \xi_k(\tau) \exp(i2\pi k x) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x) + \dots, \quad (12)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, а $\xi_k(\tau)$ – неизвестные медленно меняющиеся по τ функции. Подставим ряд (12) в краевую задачу (8), (9), в итоге приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для $\xi_k(\tau)$. Эта система и называется нормализованным уравнением для краевой задачи (8), (9). Иногда эту бесконечную систему можно записать в компактной форме в виде нелинейного уравнения в частных производных. Как правило, во всех рассмотренных ниже ситуациях удается нормализованное уравнение представить в компактной форме. При этом были построены нормализованные уравнения, определяющие динамику решений при достаточно малом ε . В настоящей статье рассмотрим влияние функции $f(y)$ на структуру нормальных форм краевой задачи (8), (9) для различных порядков малости величин a и b . Особенно интересна ситуация, в которой вклад функции $f(y)$ и уравнения ФПУ оказывается близким по порядку. В связи с этим начнем рассмотрение нормальной формы задачи со случая $a_0 = 0$ и b порядка единицы, затем изучим случай $a_0 = 0$ и b мало, и, наконец, рассмотрим ситуацию, когда $a_0 \neq 0$, в рамках которой выделяются подслучаи b порядка единицы и b порядка $O(\varepsilon^4)$.

1.1. Нормальная форма при $a_0 = 0, b \neq 0$. Пусть $a_0 = a_1 = 0$, а величина b – порядка единицы при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда, после перенормировки «времени» $\varepsilon t \rightarrow t$ и замены $y(t, x) = \varepsilon u(t, x)$ задача (8), (9) упрощается, поскольку можно опустить слагаемые порядка ε^3 и ε^4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - bu^3, \quad (13)$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (14)$$

Линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \quad (15)$$

с периодическими краевыми условиями (14) при $\varepsilon = 0$ имеет совокупность периодических решений $u_0, \xi_k \exp(i2\pi k(x + t)), \eta_k \exp(i2\pi k(x - t)), k = \pm 1, \pm 2, \dots$, где u_0 – вещественная, а ξ_k и η_k – комплексные постоянные. Согласно алгоритму статей [14, 16], для исследования решений нелинейной краевой задачи (13), (14) введем в рассмотрение формальные ряды

$$u = \varepsilon \left(u_0(\tau) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \xi_k(\tau) \exp(i2\pi k(x + t)) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \eta_k(\tau) \exp(i2\pi k(x - t)) \right) + \varepsilon^3 u_3(\tau, t, x) + \dots, \quad (16)$$

$$\xi_{-k}(\tau) = \bar{\xi}_k(\tau), \quad \eta_{-k}(\tau) = \bar{\eta}_k(\tau).$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$ – медленное время, зависимость от второго и третьего аргументов функций $u_j(\tau, t, x)$ – периодическая. Ещё раз отметим, что ряды вида (16) являются формальными, то есть вопрос об их сходимости не рассматривается. Из результатов приводимых ниже утверждений следует, что они – асимптотические. Формуле (16) можно придать более простой вид. Для этого положим

$$\xi(\tau, x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \xi_k(\tau) \exp(i2\pi kx), \quad \eta(\tau, x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \eta_k(\tau) \exp(i2\pi kx). \quad (17)$$

Подставим (16) в исходное уравнение (13). В получившемся формальном тождестве будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . Напомним, что переход от уравнения для функции u к уравнениям для коэффициентов Фурье u_0, ξ_k и η_k называют нормализацией, а сами уравнения для новых медленных переменных – нормальной формой.

При первой степени ε (в формальном тождестве) получаем верное равенство, а собирая коэффициенты при ε^3 , приходим к краевой задаче для u_3 :

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = F(u_0, \xi, \eta), \quad u_3(\tau, t, x + 1) \equiv u_3(\tau, t, x), \quad (18)$$

где

$$F(u_0, \xi, \eta) = -b(u_0 + \xi + \eta)^3 + 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial x} - 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial x} + \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \right),$$

$$\xi = \xi(\tau, x + t), \quad \eta = \eta(\tau, x - t).$$

Для разрешимости уравнения (18) в указанном классе функций необходимо и достаточно, чтобы функция $F(u_0, \xi, \eta)$ не содержала гармоник $\exp(ik(x + t))$ и $\exp(ik(x - t))$

при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Применим этот критерий. В результате приходим к трем соотношениям. Во-первых, из условия равенства нулю коэффициента Фурье функции $F(u_0, \xi, \eta)$ при нулевой гармонике, то есть из условия $M(F(u_0, \xi, \eta)) = 0$, где принято обозначение

$$M(\varphi(x)) = \int_0^1 \varphi(x) dx,$$

получаем, что

$$u_0^3 + u_0 A + B = 0. \quad (19)$$

Здесь

$$A = 3(M(\xi^2) + M(\eta^2)), \quad B = 3(M(\xi^3) + M(\eta^3)). \quad (20)$$

Во-вторых, из равенства нулю коэффициентов Фурье функции F при гармониках $\exp(i2\pi k(x+t))$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ приходим к выводу, что

$$2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial x} = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + F_1(u_0, \xi, \eta), \quad (21)$$

где $F_1(u_0, \xi, \eta) = 3b[u_0^2 \xi + 3u_0(\xi^2 - M(\xi^2)) + \xi^3 - M(\xi^3) + 3M(\eta^2)\xi]$. Третье соотношение получается из приравнивания нулю коэффициентов Фурье функции F при гармониках $\exp(i2\pi k(x-t))$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$-2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial x} = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + F_1(u_0, \eta, \xi). \quad (22)$$

Отметим, что для ξ и η выполнены периодические краевые условия

$$\xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x), \quad \eta(\tau, x+1) \equiv \eta(\tau, x). \quad (23)$$

Поскольку значение A в (20) положительно, то уравнение (19) относительно u_0 имеет единственное решение $u_0 = u_0(\xi, \eta)$. Обратим внимание, что u_0 можно записать в виде

$$u_0 = v_0(\xi + \eta), \quad (24)$$

причем функция $v_0(s)$ обладает свойством $v_0(cs) = c^2 v_0(s)$, поскольку

$$M(\xi^2) + M(\eta^2) = M((\xi + \eta)^2), \quad M(\xi^3) + M(\eta^3) = M((\xi + \eta)^3).$$

В силу этого нелинейность в (21), (22) является кубической.

Важно отметить, что «взаимодействие» уравнений (21) и (22) весьма специфично. В (21) влияние переменной η осуществляется через усредненные величины $M(\eta^2)$ и $M(\eta^3)$, а в (22) – соответственно, через $M(\xi^2)$ и $M(\xi^3)$.

Сформулируем результат о связи решений краевой задачи (13), (14) и решений (21)–(23). Его обоснование вытекает из приведенных выше построений.

Пусть $u_0, \xi_0(\tau, x+t)$ и $\eta_0(\tau, x-t)$ – решения краевой задачи (19), (21)–(23). По ним можно найти функцию u_3 из (18). Просто проверяется, что

$$\begin{aligned} u_3(\tau, t, x) = & \frac{3b}{4} \left[\left(2u_0 \eta_0 + 3(\eta_0^2 - M(\eta_0^2)) \right) \int_0^{x+t} \xi_0(\tau, s) ds + \right. \\ & + (2u_0 \xi_0 + 3(\xi_0^2 - M(\xi_0^2))) \int_0^{x-t} \eta_0(\tau, s) ds + \\ & \left. + \eta_0 \int_0^{x+t} (\xi_0^2(\tau, s) - M(\xi_0^2)) ds + \xi_0 \int_0^{x-t} (\eta_0^2(\tau, s) - M(\eta_0^2)) ds \right]. \quad (25) \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие $a_0 = a_1 = 0$. Тогда краевая задача (13), (14) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^3)$ решение $u_0(t, x, \varepsilon)$, для которого

$$u_0(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(v_0(\xi_0 + \eta_0) + \xi_0(\tau, x + t) + \eta_0(\tau, x - t)) + \varepsilon^3 u_3(\tau, t, x).$$

Таким образом, краевая задача (21)–(23) играет роль нормальной формы для краевой задачи (13), (14). Она существенно проще исходной краевой задачи, поскольку не является сингулярно возмущенной. Отметим, что в данном случае нормальная форма задачи определяется уравнением дислокаций, при этом нелинейность ФПУ в ее определении не используется.

1.2. Нормальная форма при $a_0 = 0$ и малом b . В случае если параметр b имеет порядок 1, то квадратичные и кубические нелинейности, содержащиеся в функции $F_{n+1,n}$ не попадают в нормальную форму, определяющую динамику краевой задачи (3), (4). Для того, чтобы вклад нелинейности был сопоставим, параметр b должен быть малым. Оказывается, что для этого необходимо положить $b = \varepsilon^4 b_0$, где b_0 фиксировано. Кроме того, считаем, что как и в предыдущем разделе $a_0 = a_1 = 0$. Краевая задача (8), (9) после перенормировки «времени» $t \rightarrow \varepsilon t$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{\partial^6 y}{\partial x^6} + \alpha\varepsilon \left[2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{6} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right) \right) \right] + \\ + \beta \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^3 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\partial y}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right) \right] + \varepsilon^2 b_0 y^3, \end{aligned} \quad (26)$$

$$y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x). \quad (27)$$

Решение линеаризованной в нуле краевой задачи (26), (27) можно разложить в формальный ряд Фурье по элементарным решениям $\xi_k \exp(i\pi k(x + t))$ и $\eta_k \exp(i\pi k(x - t))$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Поэтому можно говорить, что при исследовании локальной динамики задачи (26), (27) реализуется критический (в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия) случай бесконечной размерности. Нормализация краевой задачи (26), (27) существенно отличается в случаях $b_0 = 0$ и $b_0 \neq 0$. Изложим сначала ситуацию для $b_0 = 0$. При этом задача (26), (27) представляет собой по существу преобразование исходной задачи для уравнения Ферми–Пасты–Улама. Методика исследования базируется на предположении, что решения $y(t, x, \varepsilon)$ в (26), (27) можно представить в виде формального выражения (см. [10, 14–16])

$$y(t, x, \tau, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\tau, x + t, \varepsilon) + \varepsilon \eta(\tau, x - t, \varepsilon) + \varepsilon^2 y_2(t, x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^3 y_3(t, x, \tau, \varepsilon) + \dots, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{-k}(\tau, \varepsilon) = \bar{\xi}_k(\tau, \varepsilon), \quad \eta_{-k}(\tau, \varepsilon) = \bar{\eta}_k(\tau, \varepsilon), \\ \xi(\tau, z, \varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k \exp(ikz), \quad \eta(\tau, z, \varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \eta_k \exp(ikz). \end{aligned}$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$ – «медленное» время, зависимость от второго и третьего аргументов функций $y_j(\tau, t, x)$ – периодическая. Подставим (28) в (26). Для определения функции

$$U = \varepsilon y_2(t, x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^2 y_3(t, x, \tau, \varepsilon)$$

получаем уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + R_1(t, x, \tau, \varepsilon) + R_2(t, x, \tau, \varepsilon), \quad (29)$$

в котором в функцию $R_1(t, x, \tau, \varepsilon)$ собраны все слагаемые, разложение которых в ряд Фурье производится только по системе функций $\exp(ik(x+t))$ или $\exp(ik(x-t))$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а в $R_2(t, x, \tau, \varepsilon)$ – остальные слагаемые. Отметим, что уравнение (29) разрешимо в указанном классе 2π -периодических по t и x функций при условии $R_1(t, x, \tau, \varepsilon) \equiv 0$. Функция $R_2(t, x, \tau, \varepsilon)$ имеет вид

$$R_2(t, x, \tau, \varepsilon) = 2\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + O(\varepsilon),$$

поэтому для $y_2(t, x, \tau, \varepsilon)$ приходим к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right).$$

Отсюда получаем, что

$$y_2 = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\xi \eta).$$

Учитывая это равенство в (29), заключаем, что условие разрешимости уравнения (29) относительно $y_2(t, x, \tau, \varepsilon)$ в указанном классе функций состоит в выполнении соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial x} &= \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \frac{2}{6!} \varepsilon^2 \frac{\partial^6 \xi}{\partial x^6} + 2\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2 \alpha}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^3 + (3\beta - 2\alpha^2) M \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] + \varepsilon^2 b_0 (\xi^3 + 3\xi M(\eta^2)), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial x} &= \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{2}{6!} \varepsilon^2 \frac{\partial^6 \eta}{\partial x^6} + 2\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2 \alpha}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^3 + (3\beta - 2\alpha^2) M \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] + \varepsilon^2 b_0 (\eta^3 + 3\eta M(\xi^2)), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv \xi(\tau, x, \varepsilon), \quad \eta(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv \eta(\tau, x, \varepsilon). \quad (32)$$

Как и ранее, считаем, что $M(\varphi(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx$.

Сформулируем несколько выводов о взаимодействии волн $\xi(\tau, x + t, \varepsilon)$ и $\eta(\tau, x - t, \varepsilon)$, движущихся в разных направлениях. Во-первых, это взаимодействие осуществляется через слагаемые

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left[(3\beta - 2\alpha^2) M \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 3b_0 \xi M(\eta^2) \right] \text{ и} \\ \varepsilon^2 \left[(3\beta - 2\alpha^2) M \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 3b_0 \eta M(\xi^2) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

соответственно. Во-вторых, оно относительно слабое, так как имеет порядок ε^2 .

Обратим внимание на то, что чем больше «среднее» одной волны, тем на большую величину происходит изменение скорости движения другой волны. Отметим, что явление, когда волны проходят друг через друга без изменений, а только с небольшим сдвигом по времени, хорошо известно в теории солитонов [9, 11, 17, 18].

Интересно отметить, что в случае $b_0 = 0$ анализируется уравнение Ферми–Пасты–Улама. Краевая задача (30)–(32) в этой ситуации допускает понижение порядка. Выполним несколько преобразований в уравнениях (30) и (31). Учтем, что $\partial^2\xi/\partial t^2$ и $\partial^2\eta/\partial t^2$ в (30) и (31) выражаются через производную по пространственной переменной от некоторого выражения. Для регулярных решений имеем соотношения

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{24}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial\eta}{\partial\tau} = -\frac{1}{24}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + O(\varepsilon).$$

Отсюда получаем, что

$$2\frac{\partial^2\xi}{\partial\tau^2} = \frac{1}{288}\frac{\partial^6\xi}{\partial x^6} + \frac{\alpha}{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right) + \alpha\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} + 2\alpha\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right) + O(\varepsilon)$$

и

$$2\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2} = \frac{1}{288}\frac{\partial^6\eta}{\partial x^6} + \frac{\alpha}{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right) + \alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} + 2\alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right) + O(\varepsilon).$$

Эти уравнения позволяют записать краевые задачи (30), (32) и (31), (32) для функций

$$u = \frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\eta}{\partial x} \quad (34)$$

в следующей форме:

$$2\frac{\partial u}{\partial\tau} = \frac{1}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon^2}{960}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] + \varepsilon^2\left[-\frac{\alpha}{48}\frac{\partial^3(u^2)}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{24}u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha^2 u^2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\beta u^3 + (3\beta - 2\alpha^2)M(v^2)u)\right], \quad (35)$$

$$2\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{1}{12}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon^2}{960}\frac{\partial^5 v}{\partial x^5} + 2\alpha\frac{\partial v}{\partial x}v + \frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left[v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] + \varepsilon^2\left[-\frac{\alpha}{48}\frac{\partial^3(v^2)}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{24}v\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \alpha^2 v^2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\beta v^3 + (3\beta - 2\alpha^2)M(u^2)v)\right], \quad (36)$$

$$u(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv u(\tau, x, \varepsilon), \quad v(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv v(\tau, x, \varepsilon). \quad (37)$$

Важно подчеркнуть, что можно вычислить явные значения выражений $M(u^2)$ и $M(v^2)$ с точностью до $O(\varepsilon)$ через начальные условия решений исходной краевой задачи (26) и (27). Пусть $y(0, x) = a(x)$, $\frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0} = b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ – некоторые (гладкие) 2π -периодические функции.

Тогда

$$M(u^2) = \frac{1}{4}M\left(\left(b(x) + \frac{da}{dx}\right)^2\right), \quad M(v^2) = \frac{1}{4}M\left(\left(b(x) - \frac{da}{dx}\right)^2\right).$$

Из (34) следует, что для функций u и v верны условия

$$M(u) = M(v) = 0. \quad (38)$$

Отметим еще, что нулевым приближением краевых задач (35), (37), (38) и (36), (37), (38) является уравнение Кортевега–де Вриза

$$\frac{\partial w}{\partial\tau} = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \alpha w\frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(\tau, x + 2\pi) \equiv w(\tau, x). \quad (39)$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. Пусть $u(\tau, x)$ и $v(\tau, x)$ являются ограниченными при $\tau \rightarrow \infty$ вместе с производными по x до 5-го порядка включительно решениями краевой задачи (35)–(38). Тогда краевая задача (26), (27) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^3)$ решение $y(t, x, \varepsilon)$, для которого

$$y(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x + t) + \eta(\tau, x - t)) + \varepsilon^2 y_2(t, x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^3 y_3(t, x, \tau, \varepsilon),$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$ и выполнены соотношения (34).

Модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза и уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргера изучались многими авторами [7, 19–22]. Исследовались вопросы интегрируемости, построения (при определенных значениях коэффициентов) точных решений [22–25]. В настоящей статье нами использовалась методика работ [12, 13, 26–30], в которых разработан метод исследования локальной динамики для бесконечномерных критических случаев. Таким образом, исследованы специальные уравнения с частными производными, описывающие асимптотическое поведение так называемых регулярных решений в непрерывной модели Ферми–Пасты–Улама, при этом использовались и развивались методы локального – в окрестности состояния равновесия – анализа динамики решений. В основе этих методов лежит известный формализм метода нормализации. Изучен вопрос о взаимодействии волн, движущихся в различных направлениях. Показано, что, во-первых, это взаимодействие относительно слабое, так как описывается слагаемыми порядка ε^2 . Во-вторых, взаимодействие приводит лишь к сдвигу фазовой скорости. Величина соответствующего сдвига явно определяется через некоторые интегральные характеристики от начальных условий.

В заключение пункта отметим, что в случае малости параметра b ($b = O(\varepsilon^4)$) интересно сопоставить свойства нормальных форм (30)–(32) и (35)–(37). Основной вывод касается получающихся волн, движущихся в разных направлениях, при этом взаимодействие их оказывается слабым.

1.3. Нормальная форма при $a_0 > 0$. В этом разделе рассмотрим нашу задачу при

$$a_0 > 0. \quad (40)$$

В этом случае при $\varepsilon = 0$ характеристическое уравнение (6) имеет бесконечно много пар чисто мнимых корней, асимптотически близких к $\pm ia_0$, а значит, (5) имеет при $\varepsilon = 0$ периодические решения $\xi \exp(\pm ia_0 t)$. Для построения асимптотических разложений решений (9), (10) введем, следуя методике из [10, 12–14], формальный ряд

$$y = \varepsilon[\xi(\tau, x) \exp(iat) + \bar{\xi}(\tau, x) \exp(-iat)] + \varepsilon^3 y_3(\tau, t, x) + \dots, \quad (41)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, а функции $y_j(\tau, t, x)$ периодичны по второму и третьему аргументам. Подставляя (41) в (5), приходим к уравнению для определения $\xi(\tau, x)$

$$2ia_0 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - (a_1 + 3b|\xi|^2)\xi \quad (42)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \quad (43)$$

Отметим, что уравнение (42) является классическим уравнением Шредингера. Решения этого уравнения дают возможность получить асимптотические по невязке решения уравнения (10) согласно формуле (41). В частности, периодическому решению в (42), (43) соответствует тор

в (10), (9). Представляют интерес результаты о поведении при больших временах решений уравнений вида (42). Результаты об интегрируемости и существовании точного решения уравнения (42) приведены в [7,31,32]. При значениях b порядка единицы замена (41) в нашей краевой задаче приводит к нормальной форме, не зависящей от нелинейности Ферми–Пасты–Улама ($F_{n+1,n}$).

В связи с тем, что в предыдущем случае никак не учитывается нелинейность $F_{n+1,n}$, выберем параметры a и b такими, чтобы в результирующей нормальной форме слагаемые, отвечающие за дислокацию, и слагаемые уравнения Ферми–Пасты–Улама имели одинаковые порядки малости. Для этого полагаем $a = \varepsilon^4 a_1$ и $b = \varepsilon^4 b_0$, тогда для краевой задачи (26)–(27) условия разрешимости (29) примут вид

$$a_1 \xi + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial x} = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \frac{2}{6!} \varepsilon^2 \frac{\partial^6 \xi}{\partial x^6} + 2\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2 \alpha}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \\ + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^3 + (3\beta - 2\alpha^2) M \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] + \varepsilon^2 b_0 (\xi^3 + 3\xi M(\eta^2)), \quad (44)$$

$$a_1 \eta + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau \partial x} = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{2}{6!} \varepsilon^2 \frac{\partial^6 \eta}{\partial x^6} + 2\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon^2 \alpha}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \\ + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^3 + (3\beta - 2\alpha^2) M \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] + \varepsilon^2 b_0 (\eta^3 + 3\eta M(\xi^2)), \quad (45)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv \xi(\tau, x, \varepsilon), \quad \eta(\tau, x + 2\pi, \varepsilon) \equiv \eta(\tau, x, \varepsilon). \quad (46)$$

Слагаемые в правой части (44), (45) вида

$$\varepsilon^2 \left[(3\beta - 2\alpha^2) M \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 3b_0 \xi M(\eta^2) \right], \quad \varepsilon^2 \left[(3\beta - 2\alpha^2) M \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 3b_0 \eta M(\xi^2) \right]$$

аналогичны слагаемым (33), как и в пункте 1.2 они определяют взаимодействие бегущих в разных направлениях волн, задаваемых величинами ξ и η .

При $\varepsilon = 0$ в (44) получаем уравнение

$$a_1 \xi + 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial x} = \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (47)$$

Отметим, что при $a_1 = 0$ это уравнение сводится к классическому уравнению Кортевега–де Вриза. Как и выше, здесь можно сформулировать утверждение о соответствии, которое является основным результатом данного пункта.

Теорема 3. Пусть $\xi(\tau, x)$ и $\eta(\tau, x)$ являются ограниченными при $\tau \rightarrow +\infty$ вместе с производными по x вплоть до 5-го порядка включительно решениями краевой задачи (44)–(46). Тогда краевая задача (26), (27) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^3)$ решение $y(t, x, \varepsilon)$, для которого

$$y(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x + t) + \eta(\tau, x - t)) + \varepsilon^2 y_2(t, x, \tau, \varepsilon) + \varepsilon^3 y_3(t, x, \tau, \varepsilon),$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$.

Доказанное утверждение позволяет для изучения локальной динамики краевой задачи (26), (27) перейти к нормализованной краевой задаче относительно обобщенных комплексных амплитуд $\xi(\tau, x)$, $\eta(\tau, x)$. Отметим, что на свойства построенной нормальной формы существенно влияет как нелинейность дислокаций, так и нелинейность Ферми–Пасты–Улама.

2. Быстро осциллирующие решения

В этом разделе рассмотрим вопрос о нерегулярных решениях (3), (4), формирующихся на асимптотически высоких (при $\varepsilon \rightarrow 0$) модах. Порядки малости величин a, b, α, β будем считать одинаковыми. Интересно отметить, что именно в этом случае нелинейности $f(y)$ и $F_{n+1,n}$ будут вносить в нормальную форму задачи сопоставимый вклад.

Фиксируем произвольный параметр $\delta \neq 0$ и будем исследовать решения (3), (4), формирующиеся на модах с номерами

$$k = \pm(2\delta\varepsilon^{-1} + \theta + m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (48)$$

где $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1]$ дополняет слагаемое $2\delta\varepsilon^{-1}$ до целого.

Обозначим $\gamma^2(\delta, a_0) = 4 \sin^2(\delta) + a_0$. Тогда

$$\lambda_m = \pm i \left[\gamma(\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon(\theta + m) \sin(2\delta)}{\gamma^2(\delta)} \right) + o(\varepsilon^2) \right]. \quad (49)$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$y = \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2(\tau, t, x) + \varepsilon^3 y_3(\tau, x, t) + \dots, \quad (50)$$

$$y_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi_m(\tau) \exp \left(i \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta + m \right) x + i \gamma(\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon(\theta + m) \sin 2\delta}{2\gamma^2(\delta)} + o(\varepsilon^2) \right) t \right) + \\ + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \eta_m(\tau) \exp \left(i \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta + m \right) x - i \gamma(\delta) \left(1 + \frac{\varepsilon(\theta + m) \sin 2\delta}{2\gamma^2(\delta)} + o(\varepsilon^2) \right) t \right) + \overline{c\bar{c}}.$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$, через $\overline{c\bar{c}}$ обозначаются слагаемые, комплексно-сопряженные к предыдущим, а y_i – периодически зависят от x и от t . Обозначим

$$\xi(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi_m(\tau) \exp(imx), \quad \eta(\tau, x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \eta_m(\tau) \exp(imx).$$

Тогда формула (50) примет вид

$$y(\tau, t, x, \varepsilon) = \varepsilon y_1(\tau, x, t) + \varepsilon^2 y_2(\tau, t, x) + \varepsilon^3 y_3(\tau, x, t) + \dots \quad (51)$$

Подстановка (51) в (3) на каждом шаге алгоритма дает соответствующие краевые задачи для определения $y_i(\tau, t, x)$. При ε^2 возникает краевая задача для $y_2(\tau, t, x)$

$$i\ddot{y}_2 = \Delta y_2 + 2i\alpha(\sin(4\delta) - 2 \sin(2\delta)) \cdot (\xi^2 \exp(2i\varphi) + \eta^2(2i\psi) + 2\xi\eta \exp(i(\varphi + \psi))) + \overline{c\bar{c}}, \quad (52)$$

$$y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x), \quad (53)$$

где

$$\Delta y_2 = y_2(t, x + \varepsilon) - (2 + a_0)y_2 + y_2(t, x - \varepsilon), \\ \varphi = \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta \right) x + \gamma(\delta) \left(1 + \varepsilon\theta\gamma^{-2}(\delta) \frac{1}{2} \sin(2\delta) \right) t, \\ \psi = \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} + \theta \right) x - \gamma(\delta) \left(1 + \varepsilon\theta\gamma^{-2}(\delta) \frac{1}{2} \sin(2\delta) \right) t, \\ z_{\pm} = x \pm \gamma^{-1}(\delta) \frac{\sin(2\delta)}{2} t.$$

Решение (52), (53) имеет вид

$$y_2(\tau, t, x, \varepsilon) = A_{11}\xi^2 \exp(2i\varphi) + A_{22}\eta^2 \exp(2i\psi) + A_{12}\xi\eta \exp(i(\varphi + \psi)) + \overline{c\bar{c}},$$

$$\text{где } A_{11} = A_{22} = \frac{8i\alpha \sin(2\delta) \sin^2(\delta)}{3(a_0 + 4\sin^2(\delta))}, \quad A_{12} = -\frac{16i\alpha \sin(2\delta) \sin^2(\delta)}{a_0 + 4\sin^2(\delta)}.$$

Введем обозначения для операторов $L^+(\delta)\xi$ и $L^-(\delta)\eta$

$$\begin{aligned} L^+(\delta)\xi &\stackrel{\text{def}}{=} 2i\gamma(\delta)\frac{\partial\xi}{\partial\tau} - a_1\xi - R(\delta) \cdot \left[\frac{\partial^2\xi}{\partial z_+^2} + 2i\theta\frac{\partial\xi}{\partial z_+} - \theta^2\xi \right], \\ L^-(\delta)\eta &\stackrel{\text{def}}{=} -2i\gamma(\delta)\frac{\partial\eta}{\partial\tau} - a_1\eta - R(\delta) \cdot \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial z_-^2} + 2i\theta\frac{\partial\eta}{\partial z_-} - \theta^2\eta \right], \end{aligned}$$

где $R(\delta) = \cos(2\delta) - (1/4)\gamma^{-2}(\delta) \sin^2(2\delta)$ или $R(\delta) = (7/4) \cos^2(\delta) - 1$.

При ε^3 получается задача для $y_3(t, \tau, x)$. В правой части соответствующего уравнения будут содержаться третьи и первые гармоники по φ и ψ . Учитывая, что первые гармоники являются резонансными, для данной задачи условия существования ограниченных решений выражаются следующей системой уравнений относительно ξ и η

$$\begin{aligned} L^+(\delta)\xi &= 3\xi(|\xi|^2 + 2|\eta|^2) \cdot \left(\left[-6 + 2\cos(2\delta) - \frac{\cos(4\delta)}{2} \right] \cdot \beta + b \right), \\ L^-(\delta)\eta &= 3\eta(2|\xi|^2 + |\eta|^2) \cdot \left(\left[-6 + 2\cos(2\delta) - \frac{\cos(4\delta)}{2} \right] \cdot \beta + b \right) \end{aligned} \quad (54)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, z_+ + 2\pi) \equiv \xi(\tau, z), \quad \eta(\tau, z_- + 2\pi) \equiv \eta(\tau, z). \quad (55)$$

Связь между решениями краевой задачи (54), (55) и исходной краевой задачи (3), (4) устанавливает следующее утверждение. В нем будет фигурировать последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, которая определяется условием $\theta(\varepsilon) = \theta_0$.

Теорема 4. *Зафиксируем произвольно параметры δ и $\theta_0 \in [0, 1)$. Пусть $\xi(\tau, z_+)$ и $\eta(\tau, z_-)$ – решения задачи (54), (55) при $\theta = \theta_0$, ограниченные при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$. Тогда существует последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, определяемая условием $\theta(\varepsilon) = \theta_0$, что при $\varepsilon = \varepsilon_n$ краевая задача (3), (4) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^3)$ решение $\tilde{y}(t, x, \varepsilon_n)$, для которого имеет место представление (51)*

$$\tilde{y}(t, x, \varepsilon) = \varepsilon y_1(\tau, t, x) + \varepsilon^2 y_2(\tau, t, x) + \varepsilon^3 y_3(\tau, t, x).$$

Таким образом, краевая задача (54), (55) играет роль нормальной формы для исходной краевой задачи (3), (4) и определяет ее быстроосциллирующие по пространству решения.

Выводы

Рассмотрены системы с нелинейностями дислокаций и Ферми–Пасты–Улама и соответствующие им краевые задачи. Для этих задач построены специальные системы нелинейных краевых задач, которые играют роль нормальных форм, их решения асимптотически по невязке близки к решениям исходных краевых задач. Особое внимание уделяется ситуации, когда нелинейности уравнения дислокаций и Ферми–Пасты–Улама вносят сопоставимый вклад в результирующие нормализованные уравнения.

Отдельно рассмотрено поведение так называемых регулярных и нерегулярных – быстроосциллирующих по пространственной переменной – решений. При описании таких классов решений возникают различные нормализованные краевые задачи. Кроме того, различны по порядку и значения коэффициентов, при которых влияние нелинейности дислокаций и нелинейности Ферми–Пасты–Улама сопоставимы. На первый взгляд может показаться, что получившиеся нормальные формы не проще или даже сложнее исходных уравнений. Но это не так. Суть раскрывают теоремы 1–4. В них говорится о том, что главная часть решений уравнения (3) является решением именно нормализованных уравнений. Таким образом, решая исходные уравнения, приходится не только находить главные части решений, но и вычислять еще ряд довольно сложных функций. Кроме этого важно иметь в виду, что нормальные формы содержат существенно меньше по сравнению с первоначальной задачей Фурье-гармоник. Все это говорит о том, что нормальные формы могут существенно помочь в изучении исходной задачи.

Отметим, что только нормальные формы из раздела 1 являются таковыми в традиционном понимании этого термина: система уравнений для определения медленно меняющихся амплитуд. Нормальные формы из раздела 2, вообще говоря, таковыми не являются, но по их решениям можно эффективно построить и медленно меняющиеся амплитуды и сами решения исходной задачи.

Из построенных нормальных форм следуют важные выводы о взаимодействии волн, движущихся в противоположных направлениях, то есть о влиянии переменных ξ и η друг на друга. Самое главное – это влияние интегральное: действие одной переменной на другую определяется средним по пространственной переменной квадрата амплитуды ξ или η . Интересно отметить, что в формально близкой задаче Ферми–Пасты–Улама ситуация иная. Там взаимодействие приводит лишь к сдвигу фазовых скоростей [10, 15].

Библиографический список

1. Френкель Я.И., Конторова Т.А. К теории пластической деформации и двойникования: Ч. I, II, III // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1938. Т. 8. 89–95(I), 1340–1348(II), 1349–1358(III).
2. Уэрт Ч., Томсон Р. Физика твердого тела / пер. с англ. А. С. Пахомова, Б. Д. Сумма. 2-е изд. М.: Мир, 1969. 558 с.
3. Kudryashov N.A. Analytical properties of nonlinear dislocation equation // Applied Mathematics Letters. 2017. Vol. 69. P. 29–34.
4. Kudryashov N. A. From the Fermi–Pasta–Ulam model to higher-order nonlinear evolution equations // Reports on Mathematical Physics. 2016. Vol. 77, no. 1. P. 57–67.
5. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of Nonlinear Problems. I: Report LA-1940. Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1955. 21 p.
6. Genta T., Giorgilli A., Paleari S., Penati T. Packets of resonant modes in the Fermi–Pasta–Ulam system // Physics Letters A. 2012. Vol. 376, no. 28. P. 2038–2044.
7. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. 2-е изд. М.; Ижевск: Ин-т Комп. Исслед., 2004. 360 с. (Современная математика).
8. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19, no. 19. P. 1095–1097. ISSN 0031-9007.
9. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи / Пер. с англ. А.В. Михайлова, под ред. В.Е. Захарова; вступ. ст. В.Е. Захарова. М.: Мир, 1987. 480 с.
10. Глызин Д.С., Кащенко С.А., Толбей А.О. Взаимодействие двух волн в модели Ферми–Паста–

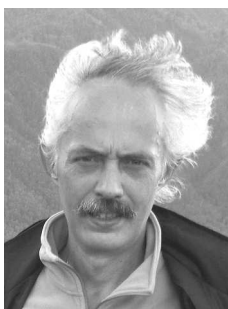
- Улама // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23, № 5. С. 548–558.
11. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
 12. Кащенко С.А. Нормальная форма для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // Доклады Академии наук. 2016. Т. 468, № 4. С. 383–386.
 13. Kaschenko S. A. Normalization in the systems with small diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093–1109.
 14. Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Local dynamics of the two-component singular perturbed systems of parabolic type // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2015. Vol. 25, no. 11. P. 1550142.
 15. Glyzin S.D., Kashchenko S.A., Tolbey A.O. Two-wave interactions in the Fermi–Pasta–Ulam model // Automatic Control and Computer Sciences. 2017. Vol. 51, No. 7. Pp. 627–633.
 16. Kaschenko S.A. Bifurcational features in systems of nonlinear parabolic equations with weak diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, no. 11. P. 3595–3606.
 17. Newell A.C. Solitons in Mathematics and Physics. Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985. 260 p.
 18. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys Rev. Lett. 1965. Vol. 15. P. 240–243.
 19. Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag. 1895. Vol. 39. P. 422–443.
 20. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Mech. 1948. Vol. 1. P. 171–199.
 21. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Ижевск: РХД, 2000. 560 с.
 22. Kudryashov N.A. On «new travelling wave solutions» of the KdV and the KdV–Burgers equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2009. Vol. 14(5). P. 1891–1900.
 23. Kudryashov N.A. Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1988. Vol. 52, no. 3. P. 361–365.
 24. Kudryashov N.A. One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2012. Vol. 17 (6). P. 2248–2253.
 25. Kudryashov N.A. Painleve analysis and exact solutions of the Korteweg–de Vries equation with a source // Appl. Math. Lett. 2015. Vol. 41. P. 41–45.
 26. Кащенко И.С. Мультистабильность в нелинейных параболических системах с малой диффузией // ДАН. 2010. Т. 435, № 2. С. 164–167.
 27. Кащенко С.А. О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // Доклады Академии наук СССР. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1052.
 28. Кащенко И.С., Кащенко С.А. Квазинормальные формы двухкомпонентных сингулярно возмущенных систем // ДАН. 2012. Т. 447, № 4. С. 376–381. ISSN 0869-5652.
 29. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов // Избранные вопросы математической физики и анализа. Тр. МИАН. 2014. Т. 285. С. 89–106.
 30. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов // ТМФ. 2014. Т. 181, № 2. С. 254–275.

31. Naumkin P.I. The dissipative property of a cubic non-linear Schrödinger equation // *Izvestiya. Mathematics*. 2015. Vol. 79, no. 2. P. 346–374.
32. Naumkin P.I. Solution asymptotics at large times for the non-linear Schrödinger equation // *Izvestiya. Mathematics*. 1997. Vol. 61, no. 4. P. 757–794.

References

1. Frenkel J., Kontorova T. On the theory of plastic deformation and twinning. *Acad. Sci. U.S.S.R. J. Phys.*, 1939, vol. 1, pp. 137–149.
2. Wert Charles A. and Thomson Robb M. *Physics of Solids*. New York: McGraw-Hill, 1964. 436 p.
3. Kudryashov N. A. Analytical properties of nonlinear dislocation equation. *Applied Mathematics Letters*, 2017, vol. 69, pp. 29–34.
4. Kudryashov N. A. From the Fermi-Pasta-Ulam model to higher-order nonlinear evolution equations. *Reports on Mathematical Physics*, 2016, vol. 77, no. 1, pp. 57–67.
5. Fermi E., Pasta J., Ulam S. *Studies of Nonlinear Problems. I: Report LA-1940*. Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1955. 21 pp.
6. Packets of resonant modes in the Fermi–Pasta–Ulam system / T. Genta, A. Giorgilli, S. Paleari, T. Penati, *Physics Letters A*, 2012, vol. 376, no. 28, pp. 2038–2044.
7. Kudryashov N. A. *Analytical Theory of Nonlinear Differential Equations*. Izhevsk: Institute of computer investigations, 2004. 360 p.
8. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation // *Physical Review Letters*. 1967. Vol. 19, no. 19. P. 1095–1097. ISSN 0031-9007.
9. Ablowitz M.J. and Segur H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. Philadelphia, PA.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981, 425 p.
10. Glyzin S.D., Kashchenko S.A., Tolbey A.O. Two wave interactions in a Fermi–Pasta–Ulam model. *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2016, vol. 23, no. 5, pp. 548–558 (in Russian).
11. Dodd, R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, London et al.: Academic Press, 1982. 630 pp.
12. Kashchenko S.A. Normal form for the KdV–Burgers equation. *Dokl. Math.*, 2016, vol. 93, no. 3, pp. 331–333.
13. Kaschenko S.A. Normalization in the systems with small diffusion. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 1996, vol. 6, no. 6, pp. 1093–1109.
14. Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Local Dynamics of the Two-Component Singular Perturbed Systems of Parabolic Type. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 2015, vol. 25, no. 11, p. 1550142.
15. Glyzin S.D., Kashchenko S.A., Tolbey A.O. Two-Wave Interactions in the Fermi–Pasta–Ulam Model. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2017, vol. 51, no. 7, pp. 627–633.
16. Kaschenko S.A. Bifurcational features in systems of nonlinear parabolic equations with weak diffusion. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, vol. 15, no. 11, pp. 3595–3606.
17. Newell A.C. *Solitons in Mathematics and Physics*. Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985. 260 pp.
18. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys Rev. Lett.*, 1965, vol. 15, pp. 240–243.
19. Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new tipe of long stationary waves. *Phil. Mag.*, 1895, vol. 39, pp. 422–443.

20. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech.*, 1948, vol. 1, pp. 171–199.
21. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. Introduction to the Theory of Oscillations and Waves. Moscow: Nauka, 1984; Dordrecht: Kluwer, 1989.
22. Kudryashov N.A. On «new travelling wave solutions» of the KdV and the KdV-Burgers equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2009, vol. 14, no. 5, pp. 1891–1900.
23. Kudryashov N.A. Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, vol. 52, no. 3, pp. 361–365.
24. Kudryashov N.A. One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical*, 2012, vol. 17, pp. 2248–2253.
25. Kudryashov N.A. Painleve analysis and exact solutions of the Korteweg – de Vries equation with a source. *Appl. Math. Lett.*, 2015, vol. 41, pp. 41–45.
26. Kashchenko I.S. Multistability in nonlinear parabolic systems with low diffusion. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 82, no. 3, pp. 878–881.
27. Kashchenko S.A. Quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion. *Soviet Math. Dokl.*, 1988, vol. 37, no. 2, pp. 510–513.
28. Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Quasi-normal forms of two-component singularly perturbed systems. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 865–870.
29. Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Autowave processes in continual chains of unidirectionally coupled oscillators. Selected topics of mathematical physics and analysis. *MAIK Nauka/ Interperiodica. Moscow. Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 285, pp. 81–98.
30. Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Buffering effect in continuous chains of unidirectional-ly coupled generators. *Theoret. and Math. Phys.*, 2014, vol. 181, no. 2, pp. 1349–1366.
31. Naumkin P.I. The dissipative property of a cubic non-linear Schrödinger equation. *Izvestiya. Mathematics*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 346–374.
32. Naumkin P.I. Solution asymptotics at large times for the non-linear Schrödinger equation. *Izvestiya. Mathematics*, 1997, vol. 61, no. 4, pp. 757–794.



Глызин Сергей Дмитриевич – родился в Новгородской области (1957), окончил Ярославский государственный университет (1979). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ВГУ (1991) и доктора физико-математических наук в НИЯУ МИФИ (2009) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, заведующий кафедрой компьютерных сетей. Опубликовал более 100 научных работ. Приказом Министерства образования и науки награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования». Зам. главного редактора научного журнала «Моделирование и анализ информационных систем».

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, д. 14
 Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
 E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, glyzin.s@gmail.com



Кащенко Сергей Александрович – родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1989) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, первый проректор ЯрГУ. Профессор НИЯУ «МИФИ». Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В.В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е.В. Григорьевой). Опубликовал более 250 научных работ и 8 монографий. Как член авторского коллектива монографии «Управление риском», стал лауреатом и получил медаль ВВЦ. Приказом Министерства образования и науки награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования». Главный редактор ряда научных журналов, а также научной серии монографий «Синергетика».

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, д. 14
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, 115409 Москва, Каширское шоссе, 31
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru



Толбей Анна Олеговна – родилась в Ярославле (1981), окончила Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова (2003). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ЯрГУ (2008) на тему: «Линейный и нелинейный анализ некоторых задач теории аэроупругости при малом коэффициенте демпфирования». Работает доцентом на кафедре компьютерных сетей ЯрГУ (факультет информатики и вычислительной техники).

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, д. 14
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: a.tolbey@uniyar.ac.ru