Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

УДК 517:957 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-85-98

Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи

Ю. А. Хазова, В. А. Лукьяненко

ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»
Россия, Республика Крым, 295007 Симферополь, просп. Академика Вернадского, д. 4
E-mail: yuliya@hotmail.com, art-inf@yandex.ru
Автор для переписки Юлия Александровна Хазова, yuliya@hotmail.com
Поступила в редакцию 20.03.2019, принята к публикации 2.07.2019

Тема. Работа посвящена изучению математической модели, описывающей оптическую систему с двумерной обратной связью. Примером такой оптической системы может быть нелинейный интерферометр с зеркальным отражением поля. Математической моделью выступает нелинейное функционально-дифференциальное параболическое уравнение с преобразованием отражения пространственной переменной и условиями на круге. **Цель** работы состоит в исследовании условий возникновения пространственно неоднородных стационарных решений. Предполагается дать ответ на вопрос об асимптотической форме рождающихся решений и определении их устойчивости. **Методы.** Исследование проводится методами теоретического анализа, а именно используются метод центральных многообразий, метод Фурье и метод сведения к интегральному уравнению. Используя метод разделения переменных, доказана лемма о собственных значениях и собственных функциях соответствующей линеаризованной задачи. Для определения асимптотической формы решения для линеаризованной и соответствующей нелинейной параболической задачи применялся метод сведения к интегральному уравнению. Приведены необходимые выкладки по доказательству единственности и непрерывной зависимости решения от начальных условий. **Результаты и обсуждение.** На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости пространственно неоднородного стационарного решения. Получено представление для неоднородной структуры, рождающейся в результате бифуркации типа «вилка» при переходе бифуркационного параметра через критическое значение. Согласно с доказанной теоремой это решение рождается асимптотически устойчивым. Эта теорема носит локальный характер и работает в окрестности бифуркационного значения коэффициента диффузии. Результаты, приведенные в данной работе, являются продолжением исследований в области нелинейной оптики. Возможность анализа рождающихся структур не только в окрестности бифуркационного значения параметра, но и на всем промежутке изменения выбранного параметра, остается актуальной. Представленные в работе результаты могут быть применены как в теоретическом анализе задач нелинейной оптики, так и в практической обработке и интерпретации информации, полученной при постановке вычислительных или физических экспериментов.

Ключевые слова: параболическое уравнение, преобразование пространственной переменной, интегральный оператор.

Образец цитирования: Хазова Ю.А., Лукьяненко В.А. Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 4. С. 85–98.
https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-85-98

Финансовая поддержка. Исследование выполнено при поддержке Программы развития федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» на 2015–2024 годы по проекту «Сеть академической мобильности «Академическая мобильность молодых ученых России» в 2017 году на базе ФГБУН Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений.

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-85-98

Application of integral methods for the study of the parabolic problem

Yu. A. Khazova, V. A. Lukianenko

V.I. Vernadsky Crimean Federal University
4 Vernadskogo Prospekt, Simferopol 295007, Republic of Crimea, Russia
E-mail: yuliya@hotmail.com, art-inf@yandex.ru
Correspondence should be addressed to Yu. A. Khazova, yuliya@hotmail.com
Received 20.03.2019, accepted for publication 2.07.2019

Topic. The work is devoted to the study of a mathematical model describing an optical system with two-dimensional feedback. An example of such an optical system could be a nonlinear interferometer with a specular reflection of the field. The mathematical model is a nonlinear functional differential parabolic equation with the transformation of the spatial variable reflection and conditions on the disk. **Aim** of the work is to study the conditions for the occurrence of spatially inhomogeneous stationary solutions. It is supposed to answer the question of the asymptotic form of the solutions being born and the determination of their stability. **Methods.** The study is carried out by methods of theoretical analysis, namely, the method of central manifolds, the Fourier method and the method of reducing to an integral equation are used. Using the method of separation of variables, a lemma on eigenvalues and eigenfunctions of the corresponding linearized problem is proved. To determine the asymptotic form of the solution for the linearized and corresponding nonlinear parabolic problems, the method of reduction to an integral equation was used. The necessary calculations on the proof of uniqueness and the continuous dependence of the solution on the initial conditions are given. **Results and discussion.** Based on the method of central manifolds, a theorem on the existence and stability of a spatially inhomogeneous stationary solution is proved. A representation is obtained for an inhomogeneous structure that is born as a result of a bifurcation of the «fork» type when the bifurcation parameter passes through a critical value. According to the proved theorem, this solution is born asymptotically stable. This theorem is local in nature and works in the vicinity of the bifurcation value of the diffusion coefficient. The results presented in this paper are a continuation of research in the field of nonlinear optics. The possibility of analyzing the structures being born not only in the vicinity of the bifurcation parameter value, but also throughout the change interval of the selected parameter, remains relevant. The results presented in this paper can be applied both in the theoretical analysis of the problems of nonlinear optics and in the practical processing and interpretation of information obtained in the formulation of computational or physical experiments.

Key words: parabolic equation, transformation of the reflection, integral operator.

Reference: Khazova Yu.A., Lukianenko V.A. Application of integral methods for the study of the parabolic problem. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 4, pp. 85–98. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-85-98

Acknowledgements. The research was carried out with the support of the Academic Mobility Network «Academic Mobility of Young Scientists of Russia» by V.I. Vernadsky Crimean Federal University on the basis by Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Laboratory of Differential and Difference Equations in 2017 year.

Введение

Наблюдаемый в последнее время интерес к нелинейным оптическим системам с пространственными преобразованиями в двумерной обратной связи [1, 2] вызван использованием этих систем в задачах оптической обработки информации. Богатый спектр локальных и нелокальных преобразований позволяет генерировать и визуально наблюдать процессы самоорганизации: пульсирующие волны, диссипативные структуры, ведущие центры, оптическую турбулентность. Такие структуры можно использовать для кодирования и хранения информации. Возникновение световых структур в оптических системах с нелокальной обратной связью является следствием потери устойчивости некоторого пространственно-однородного светового режима в результате внесения возмущений в условия протекания процесса. Математической моделью этих систем является квазилинейное параболическое уравнение с преобразованием пространственных переменных [3]. Анализ таких систем нелинейной оптики возможен как в рамках метода квазинормальных форм [4], так и методом малого параметра, методом центрального многообразия [5] или методом Галеркина [6].

В работах [7–10] исследовалось нелинейное параболическое уравнение с преобразованием отражения на окружности и отрезке. В данной статье в качестве области, на которой рассматривается уравнение, выбран круг.

1. Нелинейное параболическое уравнение

1.1. Постановка задачи. Рассматривается смешанная краевая задача для нелинейного параболического уравнения в круге

$$u_t + u = D\triangle u + K(1 + \gamma \cos Qu), 0 < r < r_1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad t > 0, \tag{1}$$

с преобразованием отражения пространственной переменной

$$Qu(r, \varphi, t) = u(r, \pi - \varphi, t), \tag{2}$$

с условиями Неймана

$$\frac{\partial u(r_1, \varphi, t)}{\partial r} = 0 \tag{3}$$

и периодичности

$$u(r, \varphi + 2\pi, t) = u(r, \varphi, t), \tag{4}$$

ограниченности по r в нуле

$$|u(0, \varphi, t)| \le c < \infty, \tag{5}$$

и начальным условием

$$u(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi). \tag{6}$$

Здесь $\triangle u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат. Задача (1)–(6) моделирует динамику фазовой модуляции $u(r, \varphi, t)$, световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием отражения координат в двумерной обратной связи. Здесь D – коэффициент диффузии нелинейной среды, положительный коэффициент K пропорционален интенсивности светового потока, γ – видность (контрастность) интерференционной картины, $0 < \gamma < 1$.

В данной работе рассматриваются вопросы существования, формы и устойчивости в метрике H^1 пространственно неоднородных стационарных решений, бифурцирующих из пространственно однородных стационарных решений, то есть решений $u(r, \varphi, t) = w$ определяемых из уравнения

$$w = K(1 + \gamma \cos\, w). \tag{7}$$

С ростом K количество сосуществующих корней этого уравнения неограниченно растет, причем при $K \to \infty$ их состав постоянно меняется: появляются новые и исчезают старые. Поэтому фиксируем гладкую ветвь решений уравнения (7)

$$w = w(K, \gamma), \quad 1 + K\gamma \sin w(K, \gamma) \ne 0. \tag{8}$$

1.2. Линеаризация уравнения в окрестности стационарного решения. Линеаризуем (1)–(6) на $w = w(K, \gamma)$

$$v_t + v = D\triangle v - K\gamma \sin w\, Qv + S(Qv),$$

где $S(v) = K\gamma((\cos w(\cos v - 1) - \sin w(\sin v - v))$.

Таким образом, уравнение для v с выделенным линейным оператором L имеет вид

$$\begin{aligned} &v_t + Lv = K\gamma((\cos w(\cos Qv - 1) - \sin w(\sin Qv - Qv)), \\ &Lv = v - D\triangle v + K\gamma \sin w\, Qv. \end{aligned} \tag{9}$$

Оператор L представим в виде суммы двух операторов

$$Lv = (L_0 + L_1)v, \quad L_0 = I - D\triangle, \quad L_1 = -\Lambda Q, \quad \Lambda = \Lambda(K, \gamma) = -K\gamma \sin w,$$

где оператор отражения Q определен согласно равенству $Qv(r, \varphi, t) = v(r, \pi - \varphi, t)$ и обладает свойством $Q^2 = I$.

Используя разложение для функций $\cos v$ и $\sin v$, получаем

$$v_t + v = D\triangle v + K\gamma Q \left[\cos w \left(-\frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \ldots\right) - \sin w \left(v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \ldots\right)\right],$$

что позволяет записать варианты моделей с выделенной линейной частью: квадратичное уравнение $v_t = D\triangle v - v - K\gamma \sin w\, Qv - K\gamma \frac{\cos w}{2!} Qv^2$; кубическое уравнение $v_t = D\triangle v - v - K\gamma \sin w\, Qv - K\gamma \frac{\cos w}{2!} Qv^2 + K\gamma \frac{\sin w}{3!} Qv^3$; а также уравнение с выделенной линеаризованной частью и слагаемым, содержащим разложение v по нечетным степеням или по четным.

Заметим, что условие $\cos w = 0$ приводит к разложению нелинейного оператора только по нечетным степеням. В этом случае первое условие в (8) имеет вид $w = K$ и не зависит от γ, $K = w = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{2n+1}{2}\pi$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ А второе условие в (8) $1 + K\gamma \sin w = 1 + K\gamma(-1)^n \neq 0$ для нечетных n ($K\gamma \neq 1$) и для четных ($K\gamma \neq -1$) выполняется автоматически, так как $K > 0$, $0 < \gamma < 1$.

1.3. Собственные функции линеаризованной задачи. Найдем собственные значения и собственные функции линеаризованной задачи. А именно, рассматривается параболическое уравнение в круге

$$v_t + Lv \equiv v_t + v - D\triangle v + K\gamma \sin w\, Qv = 0, \tag{10}$$

где $v = v(r, \varphi, t)$ – искомая функция, $0 < r < r_1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $t > 0$, $\triangle v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат.

В соответствии с (4)–(6) для v получаем условия Неймана на границе при $r = r_1$: $\frac{\partial v(r_1, \varphi, t)}{\partial r} = 0$; условие периодичности $v(r, \varphi, t) = v(r, 2\pi + \varphi, t)$; условие ограниченности в начале координат $|v(0, \varphi, t)| \leq c < \infty$ и начальное условие $v(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi) - w = v_0$.

Решение (10) будем строить, используя метод разделения переменных

$$\begin{aligned} &v = X(r, \varphi)T(t), \\ &XT' + XT = D\triangle XT - K\gamma \sin w \cdot QXT, \\ &\frac{\partial X(r_1, \varphi)}{\partial r} = 0, \quad X(r, \varphi) = X(r, 2\pi + \varphi). \end{aligned}$$

Для нетривиальных решений имеем

$$\frac{T'}{T} = -1 + D\frac{\triangle X}{X} - K\gamma \sin w \frac{QX}{X} = -\lambda.$$

Тогда для функции X получаем задачу Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} D\triangle X - K\gamma \sin w \cdot QX + (-1+\lambda)X = 0, \\ \dfrac{\partial X(r_1,\varphi)}{\partial r} = 0, \\ X(r,\varphi) = X(r, 2\pi+\varphi), \\ |X(0,\varphi)| < \infty, \end{cases} \tag{11}$$

а для функций T:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{12}$$

Лемма 1. *Задача Штурма – Лиувилля* (11) *имеет собственные функции вида*

$$X_{km}(r,\varphi) = \{J_k(\lambda^c_{km} r)\cos k\varphi, J_k(\lambda^s_{km} r)\sin k\varphi\},$$

которым соответствуют собственные значения

$$\begin{aligned} \lambda^c_{km} &= D\left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2 + (-1)^k K\gamma \sin\, w + 1, \\ \lambda^s_{km} &= D\left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2 + (-1)^{k+1} K\gamma \sin\, w + 1, \\ k &= 0,1,2,\ldots, \quad m = 1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{13}$$

где $J_k(x)$ *– функция Бесселя,* μ_{km} *– корни уравнения*

$$J'_k(\mu_{km}) = 0,\ k = 0,1,2,\ldots, \quad m = 1,2,\ldots. \tag{14}$$

Доказательство. Решение задачи (11) будем искать в виде $X(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, в результате получаем

$$D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR'(r))\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi)\right] - K\gamma \sin\, wR(r)Q\Phi(\varphi) + (\lambda-1)R(r)\Phi(\varphi) = 0,$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi(2\pi+\varphi), \quad R'(r_1) = 0, \quad |R(0)| < \infty.$$

В представлении

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} - \frac{K\gamma \sin\, w}{D} r^2 \frac{Q\Phi(\varphi)}{\Phi(\varphi)} + \frac{(-1+\lambda)r^2}{D} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu$$

выражение $\frac{Q\Phi(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$ является постоянным на собственных функциях $\Phi_k(\varphi)$ задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(2\pi+\varphi), \end{cases}$$

$$\Phi_k(\varphi) = \{\cos k\varphi, \sin k\varphi\}, \quad \nu_k = k^2, \quad k = 0,1\ldots.$$

Оператор Q на системе функций $\Phi_k(\varphi)$ принимает следующие значения

$$Q\cos k\varphi = \cos k(\pi-\varphi) = (-1)^k \cos k\varphi, \quad k = 0,1\ldots,$$

$$Q\sin k\varphi = \sin k(\pi-\varphi) = (-1)^{k+1} \sin k\varphi, \quad k = 0,1\ldots$$

Уравнение Бесселя для функций $R(r)$ также принимает различные значения на системе функций $\{\cos k\varphi, \sin k\varphi\}$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \left(\widetilde{\lambda} r^2 - k^2\right) R(r) = 0,\ k = 0, 1\ldots,$$

где для $\cos k\varphi$ $\widetilde{\lambda} = \frac{(-1+\lambda)-(-1)^k K\gamma \sin w}{D}$ и для $\sin k\varphi$ $\widetilde{\lambda} = \frac{(-1+\lambda)-(-1)^{k+1} K\gamma \sin w}{D}$.

В уравнении Бесселя сделаем замену $\sqrt{\widetilde{\lambda}}r = x$, $R(r) = R\left(x/\sqrt{\widetilde{\lambda}}\right) = y(x)$. Получаем классическую форму уравнения Бесселя

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - k^2) y(x) = 0, \quad k = 0, 1\ldots$$

Из условия ограниченности решения $R(r)$ в нуле следует выбрать ограниченные решения уравнения Бесселя $y(x) = J_k(x)$, $k = 0, 1\ldots$ Условие Неймана на границе приводит к соотношению $R'(r_1) = y'\left(\sqrt{\widetilde{\lambda}}r_1\right) = 0$, $J'_k\left(\sqrt{\widetilde{\lambda}}r_1\right) = 0$, $k = 0, 1\ldots$ Для каждого k уравнение (14) имеет счетное число корней μ_{km}: $J'_k(\mu_{km}) = 0$, $k = 0, 1\ldots$, $m = 1, 2\ldots$

Для собственных значений $\widetilde{\lambda}$ получаем $\sqrt{\widetilde{\lambda}}r_1 = \mu_{km}$ или $\widetilde{\lambda}_{km} = \left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2$, $k = 0, 1\ldots$, $m = 1, 2\ldots$ Тогда для функций $\cos k\varphi$ находим

$$D\widetilde{\lambda}_{km} = -1 + \lambda^c_{km} - (-1)^k K\gamma \sin w = D\left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2,$$

$$\lambda^c_{km} = D\left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2 + (-1)^k K\gamma \sin w + 1,$$

для $\sin k\varphi$

$$D\widetilde{\lambda}_{km} = -1 + \lambda^s_{km} - (-1)^{k+1} K\gamma \sin w = D\left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2,$$

$$\lambda^s_{km} = D\left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2 + (-1)^{k+1} K\gamma \sin w + 1.$$

Для $r_1 = 1$ собственные значения λ задачи Штурма–Лиувилля (11) на функциях $\cos k\varphi$ равны $\lambda^c_{km} = D\mu^2_{km} + (-1)^k K\gamma \sin w + 1$, а для $\sin k\varphi$: $\lambda^s_{km} = D\mu^2_{km} + (-1)^{k+1} K\gamma \sin w + 1$.

Им отвечают собственные функции

$$X_{km}(r, \varphi) = \{J_k(\lambda^c_{km} r) \cos k\varphi, \quad J_k(\lambda^s_{km} r) \sin k\varphi\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Лемма доказана.

2. Нелинейное интегральное уравнение

2.1. Представление решения линеаризованной задачи. Решение задачи (10) представимо в виде ряда по функциям (15), то есть

$$v(r, \varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_{km} e^{-\lambda^c_{km} t} J_k(\lambda^c_{km} r) \cos k\varphi + d_{km} e^{-\lambda^s_{km} t} J_k(\lambda^s_{km} r) \sin k\varphi \right), \tag{16}$$

где $\lambda_{km}^c, \lambda_{km}^s$ определяются формулами (13). Коэффициенты c_{km}, d_{km} определяются из начальных условий.

Перепишем (16) в виде

$$v(r,\varphi,t) = \frac{a_0(r,0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(r,t)\cos k\varphi + b_k(r,t)\sin k\varphi), \tag{17}$$

где

$$\frac{a_0(r,0)}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} c_{0m} e^{-\lambda_{0m}^c t} J_0(\lambda_{0m}^c r), \quad a_k(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{km} e^{-\lambda_{km}^c t} J_k(\lambda_{km}^c r),$$

$$b_k(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{km} e^{-\lambda_{km}^s t} J_k(\lambda_{km}^s r).$$

Если ряд (17) сходится, то из начального условия следует

$$q_0(r,\varphi) - w = \frac{a_0(r,0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(r,0)\cos k\varphi + b_k(r,0)\sin k\varphi).$$

Отсюда

$$a_k(r,0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[q_0(r,\varphi) - w]\cos k\varphi\, d\varphi, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$
$$b_k(r,0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[q_0(r,\varphi) - w]\sin k\varphi\, d\varphi, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Очевидно, коэффициенты c_{km}, d_{km} определяются разложениями

$$a_k(r,0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{km} J_k(\lambda_{km}^c r), \quad b_k(r,0) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{km} J_k(\lambda_{km}^s r), \quad \frac{a_0(r,0)}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} c_{0m} J_0(\lambda_{0m}^c r).$$

Откуда следует, что

$$c_{km} = \frac{\displaystyle\int_0^{r_1} a_k(r,0) J_k(\lambda_{km}^c r) r\, dr}{\displaystyle\int_0^{r_1} J_k^2(\lambda_{km}^c r) r\, dr}, \quad d_{km} = \frac{\displaystyle\int_0^{r_1} b_k(r,0) J_k(\lambda_{km}^s r) r dr}{\displaystyle\int_0^{r_1} J_k^2(\lambda_{km}^s r) r\, dr}.$$

2.2. Нелинейное интегральное уравнение. Полученное разложение используем для сведения решения задачи для исходного нелинейного уравнения (9) к интегральному уравнению типа Вольтерры II рода. Для этого правую часть уравнения $v_t + Lv = f$ разложим в ряд по собственным функциям

$$f(r,\varphi,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[f_{km}^c(t) J_k(\lambda_{km}^c r)\cos k\varphi + f_{km}^s(t) J_k(\lambda_{km}^s r)\sin k\varphi\right].$$

Учитывая условия ортогональности собственных функций задачи, имеем

$$f^c_{km}(t)\int\limits_0^{r_1} J_k^2(\lambda^c_{km}r)r\,dr=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{r_1}\int\limits_0^{2\pi} f(r,\varphi,t)J_k(\lambda^c_{km}r)\,r\cos k\varphi\,d\varphi\,dr,$$

$$f^s_{km}(t)\int\limits_0^{r_1} J_k^2(\lambda^s_{km}r)r\,dr=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{r_1}\int\limits_0^{2\pi} f(r,\varphi,t)J_k(\lambda^s_{km}r)\,r\sin k\varphi\,d\varphi\,dr,$$

$$\frac{f^c_{0m}(t)}{2}\int\limits_0^{r_1} J_0^2(\lambda^c_{0m}r)r\,dr=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{r_1}\int\limits_0^{2\pi} f(r,\varphi,t)J_0(\lambda^c_{0m}r)\,r\,d\varphi\,dr.$$

Для определения функций $T(t)$, в отличии от (12), получаем неоднородные дифференциальные уравнения

$$T'_{km}(t)+\lambda^c_{km}T_{km}(t)=f^c_{km}(t),\quad T'_{km}(t)+\lambda^s_{km}T_{km}(t)=f^s_{km}(t).$$

Отсюда следует, что

$$T^c_{km}(t)=c_{km}e^{-\lambda^c_{km}t}+\int\limits_0^t e^{-\lambda^c_{km}(t-\tau)}f^c_{km}(\tau)\,d\tau,$$

$$T^s_{km}(t)=d_{km}e^{-\lambda^s_{km}t}+\int\limits_0^t e^{-\lambda^s_{km}(t-\tau)}f^s_{km}(\tau)\,d\tau.$$

Получим представление, в котором $v_0(r,\varphi,t)$ соответствует (16)

$$v(r,\varphi,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg[\Bigg(c_{km}e^{-\lambda^c_{km}t}+\int\limits_0^t e^{-\lambda^c_{km}(t-\tau)}f^c_{km}(\tau)\,d\tau\Bigg)J_k(\lambda^c_{km}r)\cos k\varphi+$$
$$+\Bigg(d_{km}e^{-\lambda^s_{km}t}+\int\limits_0^t e^{-\lambda^s_{km}(t-\tau)}f^s_{km}(\tau)\,d\tau\Bigg)J_k(\lambda^s_{km}r)\sin k\varphi\Bigg],$$

$$v(r,\varphi,t)=v_0(r,\varphi,t)+I^c(f)+I^s(f),$$

где

$$I^{c,s}(f)\;=\;\frac{1}{\pi}\int\limits_0^t\int\limits_0^{r_1}\int\limits_0^{2\pi}(f(\rho,\theta,\tau))\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\lambda^{c,s}_{km}(t-\tau)}J_k(\lambda^{c,s}_{km}\rho)\cos k\theta J_k(\lambda^{c,s}_{km}r)\rho\cos k\varphi\,d\varphi\,d\rho\,d\tau.$$

Обозначим ядра интегральных операторов I^c, I^s через

$$k^{c,s}(t-\tau,\varphi,\theta,r,\rho)=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\lambda^{c,s}_{km}(t-\tau)}J_k(\lambda^{c,s}_{km}r)J_k(\lambda^{c,s}_{km}\rho)\rho\cos k\varphi\cos k\theta}{\displaystyle\int_0^{r_1}J_k^2(\lambda^{c,s}_{km})r\,dr}. \tag{18}$$

Подставляя в $v(r,\varphi,t)$ выражение $f = S(Qv)$ получим нелинейное интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (9)

$$v(r,\varphi,t) = v_0(r,\varphi,t) + I^c S(Qv) + I^s S(Qv). \tag{19}$$

Интегральное уравнение для Qv будет иметь вид

$$Qv = Qv_0 + QI^c S(Qv) + QI^s S(Qv),$$

$$QI^c S(Qv) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t \int\limits_0^{r_1} \int\limits_0^{2\pi} S(Qv) k^c(t-\tau, Q\varphi, \theta, r, \rho)\, d\varphi\, d\rho\, d\tau,$$

$$QI^s S(Qv) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t \int\limits_0^{r_1} \int\limits_0^{2\pi} S(Qv) k^s(t-\tau, Q\varphi, \theta, r, \rho)\, d\varphi\, d\rho\, d\tau.$$

Ядро $k^c(t-\tau, Q\varphi, \theta, r, \rho)$ содержит под знаком суммы $(-1)^k$, а $k^s(t-\tau, Q\varphi, \theta, r, \rho)$ содержит $(-1)^{k+1}$, то есть являются знакопеременными.

2.3. Корректность начально-краевой задачи. При исследовании существования и единственности начально краевой задачи (1)–(6) специфика краевых условий явно не применяется, а используются функциональные свойства оператора $L_0 u = u - D\triangle u$, определенном на множестве функций с рассматриваемыми краевыми условиями (2)–(5). В этом случае граничные условия записываются в виде $\Gamma(u) = 0$. Рассматривается абстрактная задача Коши для неоднородного нелинейного уравнения (9)

$$v_t + L_0 v = f(Qv), \quad v(0) = v_0, \quad (f = L_1 + S).$$

Доказательство существования и единственности начально-краевой задачи функционально-дифференциального уравнения диффузии проводится по следующей схеме. Исходная задача записывается в виде задачи Коши для нелинейного операторного функционально-дифференциального уравнения в соответствующем функциональном пространстве с учетом граничных условий. Далее используются результаты по разрешимости операторных дифференциальных уравнений [11, 12]. Сводим задачу к операторному уравнению, для которого выполняются условия теоремы Лерэ–Шаудера о разрешимости нелинейных операторных уравнений ([13], с. 84–85). Эти результаты при фиксированных параметрах позволяют установить единственность и непрерывную зависимость решения от начальных условий. Приведем соответствующие выкладки.

Используя свойство полугруппы, порожденной уравнением (1) на $\Omega = \{0 \le r \le r_1, 0 \le \varphi \le 2\pi\} \in R^2$, уравнение рассматриваем при условии (6). Обозначим через $H = L_2(\Omega)$ гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle u, v\rangle = \int_\Omega uvdx$, $H^l(\Omega)$, $l \in Z_+$, пространство Соболева измеримых на Ω функций со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_l = \sum_{0\le|\alpha|<l} \int\limits_\Omega \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in Z^2_+$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Обозначим через $H^l = H^l(\Omega) \bigcap \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega} \equiv$ $\equiv \frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_1} = 0$, $l \in R_+$ с нормой $\|\cdot\|_l$. Пусть H^{-1} – пространство, сопряженное H^1; норма определяется равенством $\|u\|_{H^{-1}} = sup\{\langle u, v\rangle / \|v\|_{H^1}, v \in H^1, v \ne 0\}$. Имеет место вложение $H^1 \subset H \subset H^{-1}$ (по теореме Соболева), вложение $H^1 \subset H$ вполне непрерывно.

Пусть B – банахово пространство. Обозначим через $C(B)$ банахово пространство непрерывных и ограниченных по вещественной оси функций со значениями в пространстве B и нормой $\|f\|_{C(B)} = sup_{t\in R}\|f(t)\|_B$. Введем пространство $U = C(H)\bigcap M^2(H^1)$ с нормой $\|f\|_U = \|f\|_{C(H)} + \|f\|_{M^2(H^1)}$, где $M^2(B)$ банахово пространство измеримых функций $f : R \to B$ с нормой

$$\|f\|_{M^2(B)} = sup_{t\in R}\int_0^1 \|f(t+s)\|_B^2 ds.$$

Отображение $F : v \to \cos Qv \equiv \Phi(Qv)$ из U в $M^2(H^{-1})$ дифференцируемо по Фреше. Действительно, $\Phi \in C^2(R)$ – вещественнозначная функция и $|\Phi^{(n)}(\xi)| < M$, $n = 1, 2$ для всех $\xi \in R$. Из [14], неравенства Гельдера и теоремы Соболева о вложениях следует, что

$$\|uv\|_{H^{-1}} \le C\|uv\|_{L_{3/2}(\Omega)} \le \widetilde{C}\|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} \le \widehat{C}\|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Так как

$$\int_0^1 \|uv\|_{H^{-1}}^2 dt \le C sup_{t\in R}\|u\|^2 \int_0^1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 dt\,,$$

то $\|uv\|_{M^2(H^{-1})}^2 \le C\|u\|_{C(H)}^2\|v\|_{M^2(H^1)}^2 \le \widehat{C}\|u\|_U^2\|v\|_v^2$. Из интегрального неравенства и свойств Φ следует:

$$\left|\Phi(Q(u+v)) - \Phi(Qu) - \Phi'(Qu)v\right| = \left|\int_0^1 (\Phi'(Q(u+sv)) - \Phi(Qu) - \Phi'(Qu)Qv)ds\right| \le M|Qv|^2,$$

то есть получаем $\|\Phi(Q(u+v)) - \Phi(Qu) - \Phi'(Qu)Qv\|_{M^2(H^{-1})} \le C\|v\|_U^2$. Следовательно, дифференциал F' задается формулой $F'(u)v = \Phi'(Qu)Qv$ и имеют место оценки

$$\|F'(u)v\|_{M^2(H^{-1})} \le C\|v\|_U, \quad \|F'(u+w) - F'(u)v\|_{M^2(H^{-1})} \le C\|w\|_U\|v\|_u,$$

где постоянная C не зависит от u, v, w.

Таким образом, $F : v \to \Phi(Qv)$ из H^1 в H^{-1} является дифференцируемым по Фреше в каждой точке пространства H^1. Значит, для $T > 0$ из [14] получаем следующий результат.

Утверждение 1. *Задача* (1)–(5) *с начальным условием* (6) *имеет единственное решение u, принадлежащее классу $L_\infty([0,T], H) \cap L_2([0,T], H^1)$.*

Докажем справедливость оценок для решений, которые получены на основании следующих ниже выкладок. Умножим (1) в H на u. Используя интегрирование по частям и условие (6), получаем

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u\|^2 + \|u\|^2 + D\|\nabla u\|^2 = K\int_\Omega (1 + \gamma\cos Qu)ud\varphi.$$

Далее, из неравенства

$$\frac{1}{\pi}K\int_\Omega (1+\gamma\cos Qu)ud\varphi \le \frac{1}{2}(K(1+\gamma))^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2$$

следует $\partial_t\|u\|^2 + \|u\|^2 \le (K(1+\gamma))^2$. Откуда получаем

$$\|u(t)\|^2 \le \|u(0)\|^2 e^{-t} + (K(1+\gamma))^2(1+e^{-t}). \tag{20}$$

Следовательно, решение задачи (1)–(5) с начальным условием (6) продолжимо на положительную ось.

Утверждение 2. *Полугруппа* $\{S_t\}$ *порождается задачей* (1)–(6) *и обладает следующими свойствами:*

1) $\{S_t\}(H,H)$ *– равномерно непрерывна*;
2) $\{S_t\}(H,H)$ *– равномерно ограничена при* $t \geq 0$;
3) *полугруппа* $\{S_t\}$ *имеет поглощающее множество, ограниченное в* H.

Действительно, если равенство

$$\partial_t(u-v)+(u-v)=D\triangle(u-v)+K\gamma(\cos Qu-\cos Qv)$$

умножить на $u-v$ в H, то получим

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u-v\|^2+\|u-v\|^2+D\|\nabla(u-v)\|^2 \leq \alpha K\gamma\|u-v\|^2.$$

Откуда

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u-v\|^2 \leq (\alpha K\gamma-1)\|u-v\|^2.$$

Здесь α^{-1} – значение нормы оператора Q. Непрерывность $\{S_t\}$ из H в H следует из неравенства $\|u(t)-v(t)\|^2 \leq \|u(0)-v(0)\|^2 e^{2(\alpha K\gamma-1)t}$. Справедливость 2) следует из (20). В качестве поглощающего множества $\{S_t\}$ можно взять шар $\{u \in H : \|u\| \leq K(1+\gamma)+1\}$.

2.4. Устойчивость структуры решения. Для анализа устойчивости структуры решения в зависимости от параметра D необходимо оценить собственные значения λ^c_{km} и λ^s_{km} (13)

$$\lambda^c_{km}=D\left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2+(-1)^k\Lambda+1,\ \lambda^s_{km}=D\left(\frac{\mu_{km}}{r_1}\right)^2+(-1)^{k+1}\Lambda+1,$$

где w есть корень уравнения $w = K(1+\gamma\cos w)$ при условии, что $1+K\gamma\sin w(K,\gamma) \neq 0$, а μ_{km} – корни уравнения $J'_k(\mu_{km})=0$, $k=0,1\ldots$, $m=1,2\ldots$.

Как правило, фиксируется K и выбирается $D \gg 1$ так, чтобы при выполнении условия 1: $\Lambda=\Lambda(K,\gamma)<-1$, $\Lambda=-K\gamma\sin w$ решение было асимптотически устойчивым.

Например, $k=1$. Тогда

$$\lambda^c_{1m}=D\left(\frac{\mu_{1m}}{r_1}\right)^2-K\gamma\sin w+1,\quad \lambda^s_{1m}=D\left(\frac{\mu_{1m}}{r_1}\right)^2-(-K\gamma\sin w)+1,$$

λ^c_{1m} может менять знак при уменьшении D.

Критические собственные значения

$$\lambda^c_{2l+1,m}=D\left(\frac{\mu_{2l+1,m}}{r_1}\right)^2+(-1)^{2l+1}\Lambda+1,\quad \lambda^s_{2l,m}=D\left(\frac{\mu_{2l,m}}{r_1}\right)^2+(-1)^{2l}\Lambda+1,$$

которым отвечают критические собственные функции

$$J_{2l+1}\left(\lambda^c_{2l+1,m}r\right)\cos(2l+1)\varphi,\quad J_{2l}\left(\lambda^s_{2l,m}r\right)\sin(2l)\varphi,\quad l=0,1,2,\ldots,$$

при изменении параметра D меняют знак на противоположный.

Теорема 1. *Существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что, если* $0 < D - D_1 < \delta_0$, *то уравнение имеет два асимптотически устойчивых решения:*

$$v^{\pm}(r,\varphi,D) \approx \pm\left(\frac{D-D_1}{c_1(D_1)}\right)^{1/2} J_1(\lambda_{11}^c r)\cos\varphi +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{D-D_1}{c_1(D_1)}\right)\frac{\Lambda}{2} ctg\, w((\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + (\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1}\cos 2\varphi) J_1^2(\lambda_{11}^c r) \pm$$
$$\pm\frac{1}{3!}\left(\frac{D-D_1}{c_1(D_1)}\right)^{3/2}(\lambda_{13}^c - 3\lambda_{11}^c)^{-1}\left(\frac{\Lambda}{4} - \frac{3}{4}\Lambda^2 ctg^2\, w(\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1}\right)\times$$
$$\times J_1^2(\lambda_{11}^c r) J_3(\lambda_{11}^c r)\cos 3\varphi,$$

где $c_1(D) = \left[\frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{4}(\Lambda ctg\, w)^2\left((\lambda_{10}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_{12}^c - 2\lambda_{11}^c)^{-1}\right)\right] J_1^2(\lambda_{11}^c r) < 0.$

Необходимые выкладки для доказательства теоремы можно найти в работе [5].

Заключение

Исследована параболическая задача с преобразованием отражения пространственной переменной и условиями на круге. С использованием метода Фурье была сформулирована и доказана лемма о собственных значениях и собственных функциях поставленной задачи. При помощи интегральных методов найдено асимптотическое представление решения для линеаризованной и соответствующей нелинейной параболической задачи. Методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости асимптотического представления решения исходной задачи.

Библиографический список

1. *Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // в кн. Новые физические принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. С. 263–325.
2. *Разгулин А.В., Романенко Т.Е.* Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. № 53. С. 1804–1821.
3. *Budzinskiy S.S., Larichev V.A., Razgulin V.A.* Reducing dimensionality to model 2D rotating and standing waves in a delayed nonlinear optical system with thin annulus aperture // Nonlinear Anal.-Real World Appl. 2018. No. 44. P. 559–572.
4. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // ТМФ. 2004. Т. 140, № 1. С. 14–28.
5. *Хазова Ю.А., Шиян О.В.* Теорема о существовании и устойчивости решения одного параболического уравнения // Динамические системы. 2018. Т. 8(36), № 3. С. 275–280.
6. *Хазова Ю.А.* Решение типа «бегущие волны» в параболической задаче с преобразованием поворота // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 57–69.
7. *Белан Е.П., Хазова Ю.А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной //Динамические системы. 2014. Т. 4(32), № 1–2. С. 43–57.

8. *Хазова Ю.А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной // Динамические системы. 2014. Т. 4(32), № 3–4. С. 245–257.
9. *Хазова Ю.А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Таврический вестник информатики и математики. 2015. № 3(28). С. 82–95.
10. *Хазова Ю.А.* Интегральное представление приближенных решений параболического уравнения // Актуальные направления научных исследований XXI века: Теория и практика. 2018. Т. 6, № 6 (42). С. 384–386.
11. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
12. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Springer-Verlag, New York, 1997.
13. *Лерэ Ж., Шаудер Ю.* Топология и функциональные уравнения //Успехи математических наук. 1946. Т. 1, № 3–4. С. 71–95.
14. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.

References

1. Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics generations of spatiotemporal structures. *J. Optical Soc. Amer. Ser. B*, 1992, vol. 9, no. 1, pp. 78–90.
2. Razgulin A.V., Romanenko T.E. Rotating waves in parabolic functional differential equations with rotation of spatial argument and time delay. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, pp. 1804–1821 (in Russian).
3. Budzinskiy S.S., Larichev V.A., Razgulin V.A. Reducing dimensionality to model 2D rotating and standing waves in a delayed nonlinear optical system with thin annulus aperture. *Nonlinear Anal.-Real World Appl.*, 2018, no. 44, pp. 559–572.
4. Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Optical buffering and mechanisms for its occurrence. *Theoret. and Math. Phys.*, 2004, vol. 140, no. 1, pp . 14–28 (in Russian).
5. Khazova Yu.A., Shiyan O.V. Theorem on the existence and stability of the solution of one parabolic equation. *Dinamicheskie Sistemy*, 2018, vol. 8(36), no. 3, pp. 275–280 (in Russian).
6. Khazova Yu.A. Traveling waves solution in parabolic problem with a rotation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 6, pp. 57–69 (in Russian).
7. Belan E.P., Khazova Yu.A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dinamicheskie Sistemy (Dynamical Systems)*, 2014, vol. 4(32), no. 1–2, pp. 43–57 (in Russian).
8. Khazova Yu.A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a segment. *Dinamicheskie Sistemy (Dynamical Systems)*, 2014, vol. 4(32), no. 3–4, pp. 245–257 (in Russian).
9. Khazova Yu.A. Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. *Tavricheskiy vestnik matematiki i informatiki*, 2015, no. 3(28), p. 82–95 (in Russian).
10. Khazova Yu.A. Integral representation of approximate solutions for a parabolic equation. *Aktualniye napravleniya nauchnih issledovaniy XXI veka: Teoriya i praktika*, 2018, vol. 6, pp. 384–386 (in Russian).
11. Lions J.L., Magenes E. Problemes aux Limites Non Homogenes et Applications. Vol. 1, 2. Paris: Dunod, 1968.

12. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer-Verlag, New York, 1997.
13. Leray J., Schauder J. Topology and functional equations. *Uspehi Matem. Nauk*, 1946, vol. 1, no. 3–4, pp. 71–95.
14. Babin A.V., Vishik M.I. Attractors of Evolution Equations. North-Holland, Amsterdam, 1992.

Хазова Юлия Александровна – родилась в Севастополе (1989), окончила Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (2011) по специальности математика. Работает старшим преподавателем кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского. Опубликовала 14 научных статей по направлениям нелинейная оптика, параболические уравнения с преобразованиями пространственной переменной.

Россия, Республика Крым, 295007 Симферополь, просп. Академика Вернадского, д. 4,
ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»
E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

Лукьяненко Владимир Андреевич – родился в с. Юрковка Винницкой обл. (1949), окончил Одесский государственный университет имени И.И. Мечникова (1972) по специальности математика. Работает доцентом кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение), Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского. Опубликовал свыше 130 научных статей по направлениям уравнения типа свертки, краевые задачи теории аналитических функций и уравнения в частных производных, линейные и нелинейные уравнения 1-го рода, матмоделирование, интеллектуализация обработки данных.

Россия, Республика Крым, 295007 Симферополь, просп. Академика Вернадского, д. 4
ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»
E-mail: art-inf@yandex.ru