



УДК 517.9:534.1

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-99-113>

## Хаотическая динамика кольцевой цепочки маятников с вибрирующим подвесом

*С. П. Кузнецов*

Удмуртский государственный университет  
Россия, 426034 Ижевск, Университетская, 1  
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал  
Россия, 410019 Саратов, Зеленая, 38  
E-mail: [spkuz@yandex.ru](mailto:spkuz@yandex.ru)

*Поступила в редакцию 25.04.2019, принята к публикации 14.06.2019*

**Тема и цель исследования.** Цель работы – ввести в рассмотрение механическую систему в виде цепочки осцилляторов, способную демонстрировать гиперболический хаос, обусловленный присутствием соленоида Смейла–Вильямса. **Исследуемые модели.** Изучается кольцевая цепочка маятников с параметрическим возбуждением за счет вертикального осциллирующего движения подвеса попеременно на двух разных частотах, так что в цепочке по очереди возникают паттерны стоячих волн с пространственным масштабом, отличающимся в три раза. При этом пространственная фаза за полный период модуляции трансформируется в соответствии с трехкратно растягивающим отображением окружности, а благодаря сжатию по остальным направлениям в пространстве состояний отображения Пуанкаре в силу присутствующей диссипации реализуется аттрактор Смейла–Вильямса. **Результаты.** Проведено численное исследование динамики математической модели, подтвердившее существование аттрактора в виде соленоида при подобранных надлежащим образом параметрах системы. Представлены иллюстрации динамики системы: диаграммы, иллюстрирующие топологическую природу отображения для пространственной фазы стоячих волн, портреты аттрактора, демонстрирующие характерную для соленоида Смейла–Вильямса структуру, спектры колебаний, показатели Ляпунова. **Обсуждение.** В методическом плане предлагаемый материал может быть интересен для студентов и аспирантов в плане обучения принципам построения и анализа систем с хаотическим поведением. Поскольку уравнения с характерной для маятника нелинейностью в виде функции синуса встречаются в электронике (контакты Джозефсона, цепочки фазовой автоподстройки частоты), представляется возможным построение электронных аналогов данной системы, которые будут выступать как генераторы хаоса, нечувствительного к вариации параметров и несовершенствам изготовления в силу присущего гиперболическому аттрактору Смейла–Вильямса свойства структурной устойчивости.

*Ключевые слова:* динамическая система, хаос, маятник Капицы, параметрические колебания, стоячие волны.

*Образец цитирования:* Кузнецов С.П. Хаотическая динамика кольцевой цепочки маятников с вибрирующим подвесом // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 4. С. 99–113. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-99-113>

*Финансовая поддержка.* Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 15-12-20035.

## Chaotic dynamics of pendulum ring chain with vibrating suspension

*S. P. Kuznetsov*

Udmurt State University  
1, Universitetskaya Str., Izhevsk 426034, Russia  
Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Saratov Branch  
38, Zelenaya, Saratov 410019, Russia  
E-mail: [spkuz@yandex.ru](mailto:spkuz@yandex.ru)

*Received 25.04.2019, accepted for publication 14.06.2019*

**Topic and aim.** The aim of the work is to introduce into consideration a mechanical system that is a chain of oscillators capable of demonstrating hyperbolic chaos due to the presence of attractor in the form of the Smale–Williams solenoid. **Investigated model.** We study the pendulum ring chain with parametric excitation due to the vertical oscillating motion of the suspension alternately at two different frequencies, so that the standing wave patterns appear in the chain with a spatial scale that differs by three times. In this case, the spatial phase on a full modulation period is transformed in accordance with the three-fold expanding circle map, and due to the present dissipation, compression in the remaining directions in the state space of the Poincaré map gives rise to the Smale–Williams attractor. **Results.** A numerical study of the dynamics of the mathematical model was carried out, which confirmed the existence of attractor in the form of a solenoid, if the system parameters are selected properly. The illustrations of the dynamics are presented: diagrams illustrating the topological nature of the mapping for the spatial phase of standing waves, portraits of the attractors showing structure characteristic of the Smale–Williams solenoid, power density spectra, Lyapunov exponents. **Discussion.** Methodically, the proposed material may be interesting for students and post-graduate students for teaching principles of design and analyzing for systems with chaotic behavior. Since equations with nonlinearity intrinsic to a pendulum in a form of sine function occur in electronics (Josephson junctions, phase-locked loops), it may be possible to build electronic analogs of this system, which will operate as chaos generators insensitive to variation of parameters and fabrication imperfections because of the property of structural stability inherent to the hyperbolic Smale–Williams attractor.

*Key words:* dynamical system, chaos, Kapitza pendulum, parametric oscillations, standing waves.

*Reference:* Kuznetsov S.P. Chaotic dynamics of pendulum ring chain with vibrating suspension. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 4, pp. 99–113. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-99-113>

*Acknowledgements.* The work was supported by Russian Science Foundation, grant no. 15-02-20035.

### Введение

Маятник в виде стержня, точка подвеса которого совершает заданное периодическое движение в вертикальном направлении, – интересный пример простой механической системы с нетривиальной динамикой, для которой П.Л. Капица исследовал и продемонстрировал один из замечательных феноменов, а именно, динамическую стабилизацию маятника с вибрирующим подвесом около перевернутого положения [1, 2].

В зависимости от параметров, у маятника с вибрирующим подвесом можно наблюдать множество различных режимов [3–5]. Например, в ситуации, когда частота колебаний точки подвеса в целое число раз больше частоты малых колебаний маятника, может возникать параметрическая неустойчивость, в результате которой колебания около нижнего положения равновесия нарастают, стабилизируясь на уровне достаточно больших амплитуд в присутствии диссипации за счет присущей нелинейности. При интенсивном воздействии реализуются многообразные регулярные и хаотические движения маятника, зачастую сосуществующие при одних и тех же параметрах (мультистабильность).

Дифференциальные уравнения с характерной для маятника нелинейностью в виде функции синуса встречаются в разных областях физики [6, 7]. Например, в электронике это контакты

Джозефсона и цепочки фазовой автоподстройки частоты [8–10]. Наличие наглядного механического объекта, допускающего интуитивно очевидное представление и прямую визуализацию движений, весьма продуктивно для понимания поведения сложных систем.

Феноменология динамических явлений становится еще более богатой, если обратиться к рассмотрению систем на основе связанных маятников, как в виде конечных цепочек, так и при переходе к непрерывному пределу – одномерной среде локально связанных элементов, описываемой уравнением синус-Гордона [6, 11–16].

В настоящей заметке рассматривается кольцевая система маятников, отвечающая пространственно-дискретной версии уравнения синус-Гордона, с параметрическим возбуждением при наличии диссипации. Если принять, что частота вертикальных колебаний подвеса переключается так, чтобы обеспечить попеременное параметрическое возбуждение стоячих волн, у которых по длине цепочки укладывается поочередно, скажем, одна или три длины волны, то в системе оказывается возможным наблюдать хаотическую динамику, отвечающую аттрактору типа соленоида Смейла–Вильямса [17–21].

Формальное математическое построение такого аттрактора состоит в следующем. Представим себе отображение пространства состояний абстрактной динамической системы, заключающееся в том, что точки, заполняющие область в форме тора, перемещаются так, что занимаемая область испытывает растяжение в продольном направлении и поперечное сжатие, складывается в виде петли с числом оборотов  $M \geq 2$ , и оказывается помещенной внутрь исходного тора. Рис. 1, *a* иллюстрирует данное построение для случая  $M = 3$ . На каждой итерации объем объекта уменьшается (в этом выражается диссипативная природа отображения), а число витков увеличивается в  $M$  раз. В пределе число витков стремится к бесконечности, и возникает так называемый соленоид, имеющий в поперечном сечении канторову структуру. Это и есть аттрактор Смейла–Вильямса. Существенный момент состоит в том, что одна из динамических переменных, имеющая смысл угловой координаты  $\varphi$ , претерпевает за одну итерацию преобразование такой топологической природы, что один обход полной окружности для прообраза соответствует  $M$ -кратному обходу для образа (рис. 1, *b*). Для индивидуальной представительной точки, совершающей движение в соответствии с рассмотренным отображением, динамика хаотическая. Хотя описанное построение апеллирует для наглядности к трехмерному пространству состояний, аттракторы такого типа могут реализоваться и в пространствах большей размерности.

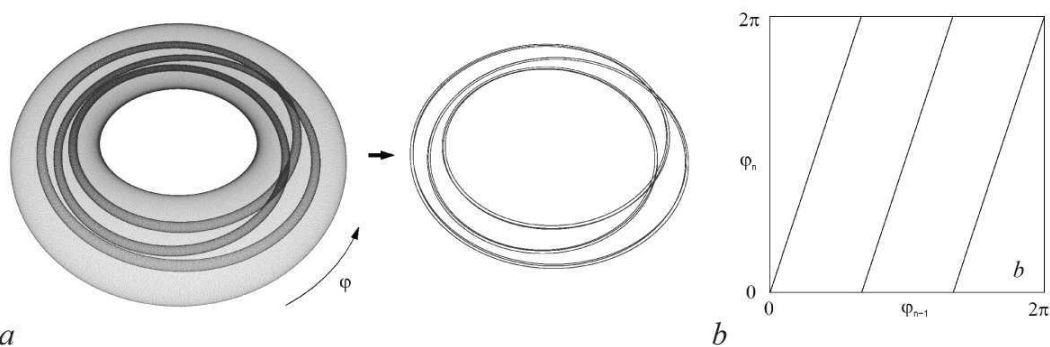


Рис. 1. Преобразование области в форме тора за один шаг эволюции во времени и предельный объект – аттрактор в виде соленоида при кратности растяжения по угловой координате  $M = 3$  (*a*). График зависимости угловой координаты точки на аттракторе в  $n$ -й момент времени от предыдущего значения (*b*)

Fig. 1. Transformation of a region in the form of a torus in one evolutionary step in time and a limiting object – an attractor in the form of a solenoid at a ratio of stretching along the angular coordinate  $M = 3$  (*a*). A plot of the angular coordinate of a state point on the attractor at the  $n$ -th instant of time depending on the previous value (*b*)

Аттрактор Смейла–Вильямса относится к категории равномерно гиперболических аттракторов, математическая теория которых формировалась в 60–70-х годах XX века благодаря трудам Смейла, Аносова, Синая и других исследователей [17–21]. Гиперболические аттракторы характеризуются свойством грубости или структурной устойчивости. В контексте физических или технических объектов, возможность реализации которых отмечена в последнее время [22–30], это свойство выражается в нечувствительности динамического поведения к малым изменениям параметров, несовершенству изготовления, помехам и т.п., что может быть критически важным для возможных приложений [31, 32].

В рассматриваемой ниже системе в качестве угловой переменной в конструкции соленоида Смейла–Вильямса будет выступать пространственная фаза стоячих волн, образующихся при параметрическом возбуждении кольцевой цепочки маятников. Механизм формирования гиперболического аттрактора подобен тому, который был описан ранее для модельной задачи о параметрическом возбуждении колебаний нелинейной струны [29, 30]. Предлагаемая здесь система проще, в частности для реализации в эксперименте, в силу своей дискретной структуры, а также в связи с тем, что не нуждается в искусственном внесении дополнительной нелинейности.

### 1. Модель кольцевой цепочки связанных маятников

Рассмотрим набор из  $N$  маятников, подвешенных на кольцевом обруче, которому сообщают заданное колебательное движение в вертикальном направлении (рис. 2). Каждый маятник представляет собой стержень длины  $l$ , имеющий на конце точечную массу, и связан с ближайшими соседями посредством спиральных пружин, так что момент силы взаимодействия пропорционален относительному углу отклонения соседних маятников. Избегая излишнего усложнения модели, полагаем, что диссипация обусловлена наличием момента силы трения между маятниками и обручем, величина которого пропорциональна мгновенной угловой скорости. Пусть

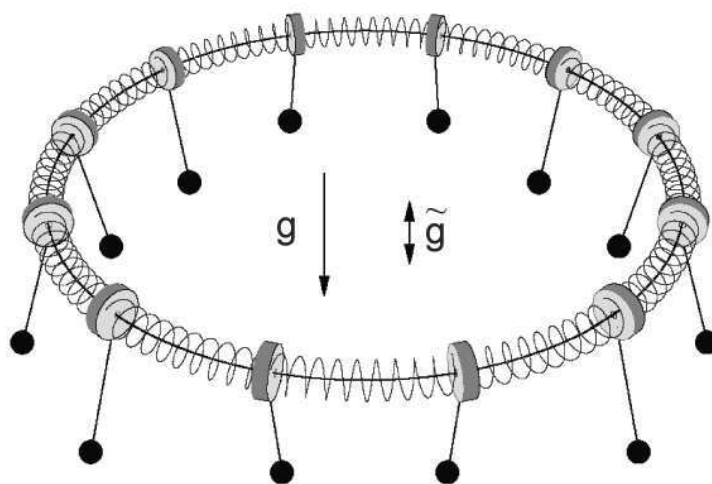


Рис. 2. Кольцевая цепочка связанных маятников. Параметрическое возбуждение обеспечивается вертикальными колебаниями обруча, к которому подвешены маятники, попеременно на одной из двух частот, близких к удвоенным частотам первой и третьей линейной собственной моды системы маятников

Fig. 2. A ring chain of pendulums, where parametric excitation is provided by vertical oscillations of the hoop, to which the pendulums are suspended, alternately at one of two frequencies close to twice the frequencies of the first and the third linear eigenmode of the pendulum system.

$\theta_j$  обозначает зависящий от времени угол отклонения, а  $m_j$  – массу  $j$ -го маятника. Уравнения системы имеют вид

$$m_j l^2 \ddot{\theta}_j + m_j (g + \tilde{g}(t)) l \sin \theta_j = -\alpha \dot{\theta}_j + \mu (\theta_{j-1} - 2\theta_j + \theta_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\tilde{g}(t) = ga(t)$  – мгновенное ускорение колебаний подвеса, коэффициент  $\mu$  характеризует жесткость спиральной пружины,  $\alpha$  – коэффициент трения.

Расположение маятников в виде кольцевой цепочки подразумевает наложение граничных условий периодичности:  $\theta_{j+N} = \theta_j$ .

Пусть движение по вертикали, сообщаемое обручу, к которому подвешены маятники, следует синусоидальному закону с амплитудой  $A_2$  и частотой  $\omega_2$  в течение  $N_2$  осцилляций, а затем с амплитудой  $A_1$  и частотой  $\omega_1$  на протяжении  $N_1$  осцилляций, после чего процесс переключения периодически повторяется.

Введем нормированное время  $t' = t\sqrt{g/l}$  и обозначения  $\gamma = \alpha/(\bar{m}l\sqrt{gl})$ ,  $D = \mu/\bar{m}$ ,  $\kappa_{1,2} = A_{1,2}\omega_{1,2}^2$ ,  $\omega'_{1,2} = \omega_{1,2}\sqrt{l/g}$ ,  $a = \tilde{g}/g$ ,  $m_i = \bar{m}(1 + \varepsilon\delta_j)$ , где  $\varepsilon\delta_j$  – относительное отклонение массы  $j$ -го маятника от средней величины  $\bar{m}$ . Далее используем уравнения в безразмерной форме

$$(1 + \varepsilon\delta_j)[\ddot{\theta}_j + (1 + a(t)) \sin \theta_j] = -\gamma \dot{\theta}_j + D(\theta_{j-1} - 2\theta_j + \theta_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

где штрихи в обозначениях безразмерных величин для краткости опущены, зависимость безразмерного ускорения подвеса от нормированного времени дается выражениями

$$a(t) = \begin{cases} \kappa_2 \sin \omega_2 t, & 0 \leq t < \tau, \\ \kappa_1 \sin \omega_1 (t - \tau), & \tau \leq t < T, \end{cases} \quad a(t) = a(t + T), \quad \tau = 2\pi \frac{N_2}{\omega_2}, \quad T = 2\pi \left( \frac{N_2}{\omega_2} + \frac{N_1}{\omega_1} \right) \quad (3)$$

и наложено условие периодичности  $\theta_{j+N} = \theta_j$ .

Динамику данной неавтономной системы можно рассматривать в дискретном времени с помощью отображения Пуанкаре  $\mathbf{X}_n = \mathbf{F}(\mathbf{X}_{n-1})$ , задающего трансформацию  $(2N)$ -мерного вектора состояния

$$\mathbf{X}_n = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_{N-1})_{t=nT}$$

за один период модуляции накачки. Это отображение нетрудно реализовать в виде компьютерной программы, выполняющей решение системы дифференциальных уравнений (2) конечно-разностным методом за время  $T$ , имея в качестве начального условия вектор  $\mathbf{X}_{n-1}$  и в качестве результата вектор  $\mathbf{X}_n$ .

## 2. Механизм возникновения аттрактора Смейла–Вильямса

Имея в виду, что собственные частоты линейных мод колебаний кольцевой цепочки маятников, рассчитанные без учета накачки и в отсутствие диссипации и вариации масс, даются выражением  $\Omega_s = \sqrt{4D \sin^2(\pi s N^{-1}) + 1}$ , примем частоты накачки  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответствующими удвоенным частотам первой и третьей моды:  $\omega_1 = 2\Omega_1$ ,  $\omega_2 = 2\Omega_3$ .

Механизм, который при надлежащем подборе параметров приводит к возникновению в системе гиперболического хаоса, состоит в следующем. При накачке на частоте  $\omega_1$  в цепочке будет возбуждаться стоячая волна с волновым числом  $k_1 = 2\pi/N$ . В грубом приближении можно записать  $\theta_j \sim \sin(k_1 j + \varphi)$ , где фазовая постоянная  $\varphi$  зависит от начальных условий и характеризует расположение узлов и пучностей стоячей волны. Амплитуда колебаний стабилизируется на конечном уровне благодаря нелинейности маятников. Также из-за нелинейности

будет присутствовать составляющая в виде третьей пространственной гармоники, имеющей пространственную фазу  $3\varphi$ .

На следующем этапе временной эволюции накачка на частоте  $\omega_1$  прекращается, и колебания первой моды затухают. Теперь, однако, включается накачка на частоте  $\omega_2$ , что приводит к развитию параметрической неустойчивости стоячей волны с волновым числом  $k_3 = 3k_1$ . Эта волна формируется из начального возмущения, даваемого третьей пространственной гармоникой волны, присутствовавшей на предыдущей стадии, так что ей будет отвечать сдвиг пространственной фазы  $3\varphi$ .

Далее вновь наступает ситуация, когда накачка производится на частоте  $\omega_1$ . Затравочное возбуждение с волновым числом  $k_1$  для параметрических колебаний обеспечивается теперь благодаря комбинации возмущения  $\theta_j \sim \sin(3k_1j + 3\theta)$ , оставшегося от предыдущей стадии процесса, и пространственно-периодического возмущения, которое обусловлено неоднородностью распределения масс по цепочке, заданной величинами  $\delta_j$ . Если неоднородность отвечает второй пространственной гармонике,  $\delta_j \sim \sin(2k_1j)$ , то комбинационная составляющая затравочного возмущения с волновым числом  $k_1$  будет иметь пространственную фазу  $\varphi_{\text{new}} = 3\varphi + \text{const}$ . (Это можно видеть, записав произведение синусов через разность косинусов:  $\sin(2k_1j) \sin(3k_1j + 3\theta) = \frac{1}{2} \cos(k_1j + 3\theta) - \frac{1}{2} \cos(5k_1j + 3\theta)$ .) Ту же фазу унаследует параметрически возбужденная стоячая волна в цепочке. Таким образом, на каждом новом периоде модуляции накачки будет осуществляться трехкратно растягивающее преобразование пространственной фазы, как показано на графике рис. 1, *b*. По остальным направлениям в пространстве состояний системы будет иметь место сжатие из-за присутствия диссипации. Результатом многократного повторения преобразования в процессе временной эволюции будет формирование аттрактора в виде соленоида Смейла–Вильямса в пространстве состояний отображения  $\mathbf{X}_n = \mathbf{F}(\mathbf{X}_{n-1})$ , описывающего изменение состояния за период модуляции накачки.

Аналогичный характер будет иметь динамическое поведение системы маятников также и в том случае, если в распределении масс доминирует четвертая гармоника,  $\delta_j \sim \sin(4k_1j)$ , с той разницей, что трансформация пространственной фазы сопровождается инверсией и выражается соотношением  $\varphi_{\text{new}} = -3\varphi + \text{const}$ . Это отвечает другой разновидности аттрактора Смейла–Вильямса.

### 3. Численные результаты

Обратимся к цепочке в виде кольца из двенадцати маятников. Выбор  $N = 12$  объясняется тем, что это минимальное число, при котором пространственные гармоники от первой до четвертой, задействованные при функционировании обсуждавшегося выше механизма, характеризуются целым числом узлов решетки на длину волны. Все расчеты выполнялись методом Рунге–Кутты четвертого порядка, характерный шаг интегрирования порядка  $10^{-3}$ . Для представления чисел используется стандартная двойная точность (15 десятичных цифр).

На протяжении дальнейшего изложения полагаем, что переключения частот накачки производятся между  $\omega_1 = 2\Omega_1 \approx 2.297$  и  $\omega_2 = 2\Omega_3 \approx 3.675$  через каждые  $N_1 = 85$  и  $N_2 = 136$  периодов колебаний подвеса, параметры интенсивности накачки  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.6$ . Параметр связи примем равным  $D = 1.19$ , параметр диссипации  $\gamma = 0.12$ , параметр амплитуды пространственной вариации масс маятников  $\varepsilon = 0.01$ .

Для задания распределения вариации масс будем использовать набор

$$\delta_j = \{0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1\}, \quad (4)$$

где доминирует вторая пространственная гармоника, или набор

$$\delta_j = \{0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1\}, \quad (5)$$

где основной является четвертая гармоника. Эти два типа пространственной модуляции, как следует из анализа в предыдущем разделе, приводят к двум топологически отличающимся разновидностям аттрактора Смейла–Вильямса, и соответствующую им динамику интересно пронаблюдать и сопоставить.

На рис. 3 показаны пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие колебания цепочки маятников для установившегося хаотического режима в системе с распределением вариаций масс согласно (4) по результатам численного решения дифференциальных уравнений. При графическом представлении использованы ускорения  $\ddot{\theta}_j$ , а не переменные  $\theta_j$  или  $\dot{\theta}_j$ , для того чтобы можно было визуальнo соотнести колебания, имеющие место на стадиях высокой и низкой частоты накачки, поскольку амплитуды развившихся колебаний сопоставимы именно для ускорений (по крайней мере, при заданных параметрах системы).

Панель *a* демонстрирует графики зависимостей углового ускорения маятников от времени. На диаграмме можно видеть чередование стадий возбуждения стоячих волн разного пространственного масштаба, а также изменение пространственного положения пучностей и узлов от одного периода модуляции накачки к другому. Колебания на масштабе периода маятника графически не разрешаются, но диаграмма позволяет судить об амплитудах маятников на разных стадиях процесса и сопоставить амплитуды разных маятников – как они меняются во времени и как распределены в пространстве.

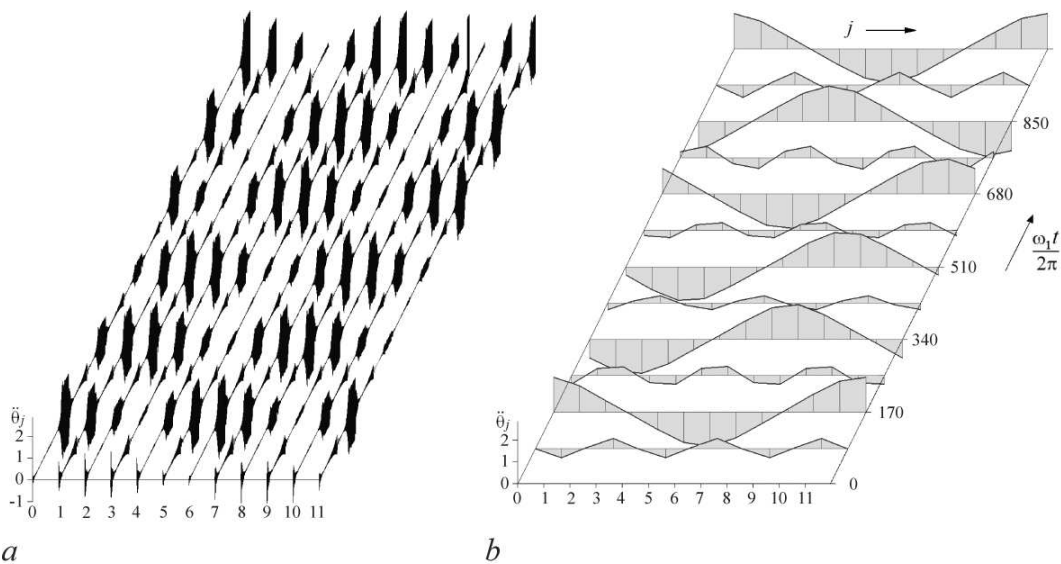


Рис. 3. Пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие колебания цепочки маятников, по результатам численного решения дифференциальных уравнений (2) для установившегося хаотического режима: графики зависимостей углового ускорения маятников от времени (*a*) и распределения углового ускорения маятников по кольцу в моменты переключения накачки (*b*). Число маятников  $N = 12$ , параметр связи  $D = 1.19$ , параметр диссипации  $\gamma = 0.12$ . Вариация масс характеризуется набором  $\delta_j = \{0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1\}$  при  $\varepsilon = 0.01$ . Переключения частот накачки между величинами  $\omega_1 = 2\Omega_1 \approx 2.297$  и  $\omega_2 = 2\Omega_3 \approx 3.675$  производятся через  $N_1 = 85$  и  $N_2 = 136$  периодов колебаний подвеса, параметры интенсивности накачки  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.6$

Fig. 3. Spatio-temporal diagrams illustrating oscillations of the chain of pendulums plotted using the data of numerical integration of differential equations (2) for sustained chaotic regime: graphs of the angular accelerations of the pendulums versus time (*a*) and distributions of the angular accelerations of the pendulums around the ring at instants of pump switching (*b*). The number of pendulums is  $N = 12$ , the coupling parameter is  $D = 1.19$ , the dissipation parameter is  $\gamma = 0.12$ . Mass variation is characterized by the set  $\delta_j = \{0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1\}$  at  $\varepsilon = 0.01$ . The pump frequency switching between  $\omega_1 = 2\Omega_1 \approx 2.297$  and  $\omega_2 = 2\Omega_3 \approx 3.675$  take place through  $N_1 = 85$  and  $N_2 = 136$  periods of the suspension oscillations providing the pump; the parameters of the pump intensity are  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.6$

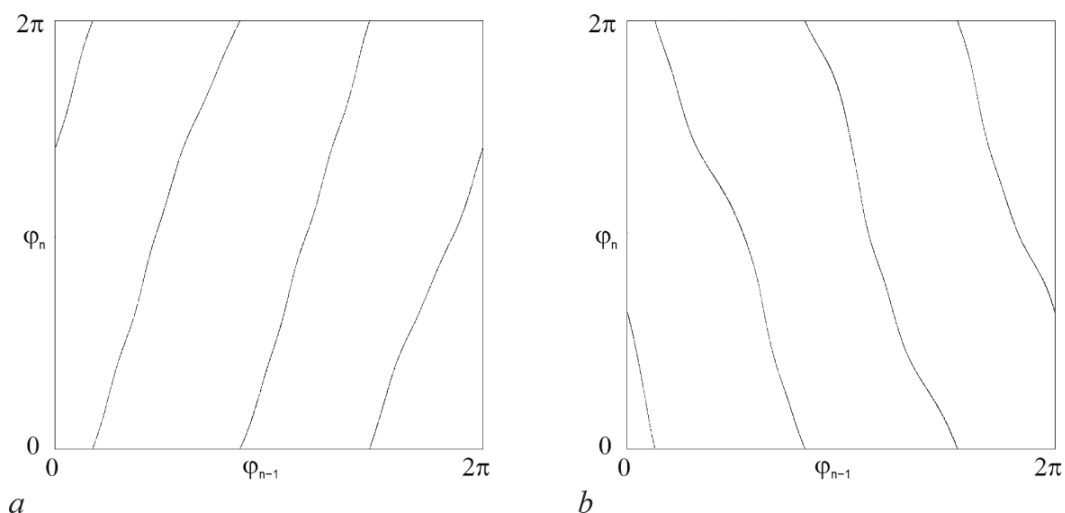


Рис. 4. Диаграммы трансформации пространственной фазы за период модуляции накачки по результатам численного моделирования в установившемся хаотическом режиме. Панель (а) отвечает распределению добавок к массам маятников по кольцу, даваемому второй пространственной гармоникой (4), а панель (б) – четвертой гармоникой (5)

Fig. 4. Diagrams of transformation of the spatial phases over the pump modulation period obtained from results of numerical simulation in the sustained chaotic mode. Panel (a) corresponds to a distribution of additives to the pendulum masses given by the second spatial harmonic (4), and panel (b) to that with the fourth harmonic (5)

Более наглядную иллюстрацию механизма функционирования системы доставляет панель *b*. Здесь показана последовательность распределений углового ускорения маятников по кольцу в моменты переключения накачки. Хотя величины  $\ddot{\theta}_j$  определены в равноотстоящих дискретных точках кольца, где расположены маятники, для лучшей визуализации пространственных паттернов, точки, относящиеся к соседним маятникам, соединены отрезками прямых линий. На диаграмме можно видеть чередование паттернов в виде стоячих волн, у которых по длине кольца укладывается две или шесть полуволн. При этом на каждом новом этапе упомянутого чередования наблюдается изменение пространственного положения пучностей и узлов, как этого и следовало ожидать на основе обсуждения в предыдущем разделе.

На рис. 4 показаны диаграммы, иллюстрирующие трансформацию пространственной фазы стоячих волн за период модуляции накачки в установившемся хаотическом режиме, по результатам численного моделирования. Пространственная фаза стоячей волны вычислялась в моменты переключения частоты накачки от  $\omega_1$  к  $\omega_2$ , когда имеют место колебания, пространственное распределение которых близко к первой моде, посредством соотношения  $\varphi_n = \arg[\theta_0(nT) + i\theta_{N/4}(nT)]$ , то есть через мгновенные углы отклонения нулевого и третьего маятника в цепочке.<sup>1</sup> Панель *a* относится к ситуации распределения масс по кольцу, содержащего вторую пространственную гармонику, панель *b* отвечает распределению, где основной является четвертая гармоника. Эти диаграммы – главное свидетельство того, что в системе реализуется аттрактор типа Смейла–Вильямса, поскольку из них видно, что один обход полной окружности угловой переменной для прообраза  $\varphi_{n-1}$  соответствует трехкратному обходу для образа  $\varphi_n$ , в прямом направлении в первом случае и в обратном направлении во втором случае.

<sup>1</sup>Подчеркнем еще раз, что речь идет именно о стоячей волне. Колебания всех маятников ансамбля происходят синфазно (точнее, синфазно в одной полуволне и со сдвигом на  $\pi$  в соседней), тогда как амплитуда промодулирована по кольцу маятников. Иными словами, фаза колебаний во времени однозначно определяется фазой колебаний накачки, при том, что пространственная фаза стоячей волны меняется от одного периода модуляции накачки к другому в соответствии с механизмом, описанным в разделе 3.



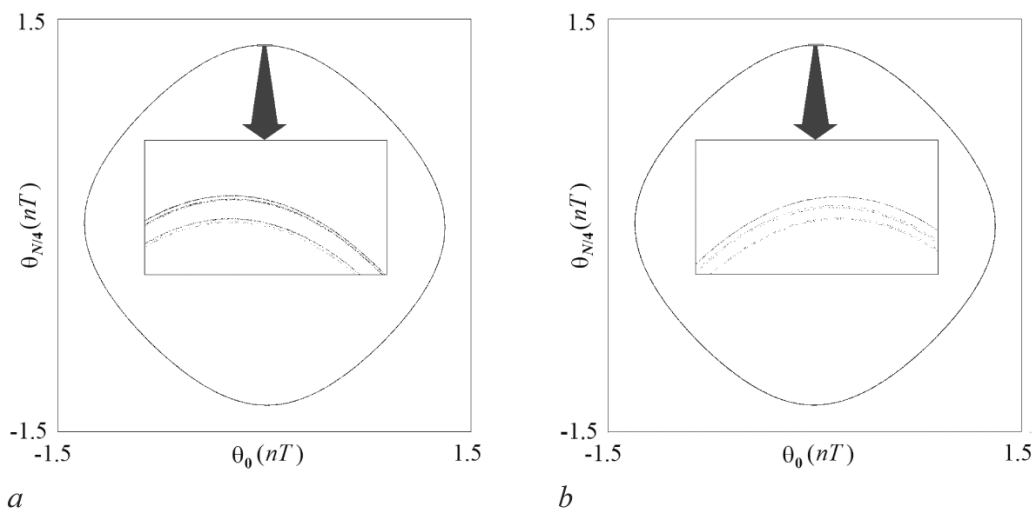


Рис. 5. Портрет аттрактора отображения Пуанкаре в проекции на плоскость углов отклонения маятников с номерами 0 и 3. Увеличенный фрагмент в центре выявляет поперечную канторову структуру аттрактора Смейла–Вильямса; интервал по горизонтали  $(-0.05, 0.05)$ , интервал по вертикали  $(1.3075, 1.3125)$ . Панель (a) отвечает распределению добавок к массам маятников по кольцу, даваемому второй гармоникой (4), а панель (b) – четвертой гармоникой (5)

Fig. 5. Portrait of attractor of the Poincaré map in projection on the plane of the angles of deflection of the pendulums with numbers 0 and 3. The enlarged fragment shown in the center reveals the transverse Cantor structure of the Smale – Williams attractor; horizontal spacing is  $(-0.05, 0.05)$ , vertical spacing is  $(1.3075, 1.3125)$ . Panel (a) corresponds to a distribution of additives to the pendulum masses given by the second spatial harmonic (4), and panel (b) with the fourth harmonic (5)

В рассматриваемой системе соленоид представляет собой объект, вложенный в пространство состояний отображения Пуанкаре размерности  $2N = 24$ . На рис. 5 показан вид аттрактора в двумерной проекции на плоскость переменных  $\theta_0(nT)$ ,  $\theta_{N/4}(nT)$  для случаев, соответствующих панелям *a* и *b* предыдущего рисунка. Сходство изображений с замкнутой инвариантной кривой (предельным циклом) – это видимость, связанная с тем, что в рассматриваемой проекции аттрактор–соленоид располагается в кольцевой полосе малой ширины. Принципиальное отличие от предельного цикла в том, что в данном случае изображающая точка «прыгает» по угловой координате в соответствии с хаотическим отображением. Поперек полосы объект имеет характерную для соленоида тонкую поперечную структуру, которую можно визуализировать, рассматривая малый фрагмент картинки с достаточно сильным увеличением. Это демонстрируют вставки, приведенные в центральной части диаграмм на рис. 5.<sup>2</sup> Наблюдаемая поперечная волокнистая структура отвечает той, что ожидалась для соленоида Смейла–Вильямса в соответствии с его классическим построением (см. Введение).

Для количественной характеристики хаотической динамики на аттракторе естественно обратиться к вычислению показателей Ляпунова. В соответствии с размерностью отображения Пуанкаре, полное количество показателей Ляпунова составляет  $2N = 24$ , однако для того, чтобы судить о хаотической природе аттрактора и его фрактальных свойствах, достаточно рассчитать несколько показателей, наибольших по величине. Расчеты производятся по стандартному алго-

<sup>2</sup>Отметим, что на увеличенных фрагментах диаграмм на рис. 5 графическое разрешение не настолько велико, чтобы стали заметны эффекты конечной точности представления чисел. В рассмотренном режиме масштаб, на котором фактически наблюдается тонкая структура, составляет в безразмерных единицах порядка  $10^{-3}$ , так что у арифметики двойной точности в запасе еще много порядков. Расчеты контролировались путем сравнения графиков, полученных для исходного шага интегрирования и при его уменьшении в два и четыре раза, откуда с уверенностью можно заключить, что наблюдаемая структура не является артефактом.

ритму [33–36], включающему совместное решение системы уравнений (2) и комплекта уравнений в вариациях

$$(1 + \varepsilon \delta_j) [\ddot{\tilde{\theta}}_j + (1 + a(t)) \tilde{\theta}_j \cos \theta_j] = -\gamma \dot{\tilde{\theta}}_j + D(\tilde{\theta}_{j-1} - 2\tilde{\theta}_j + \tilde{\theta}_{j+1}), \quad (6)$$

с граничными условиями  $\tilde{\theta}_{j+N} = \tilde{\theta}_j$ . Количество рассчитываемых векторов возмущений  $(\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_{N-1}, \dot{\tilde{\theta}}_0, \dot{\tilde{\theta}}_1, \dots, \dot{\tilde{\theta}}_{N-1})_{t=nT}$  берется равным требуемому числу показателей, и на каждом шаге отображения Пуанкаре выполняется их ортогонализация по Граму–Шмидту и нормировка на единицу. Показатели Ляпунова получаются усреднением накапливающихся сумм логарифмов норм векторов, рассчитанных после ортогонализации и до нормализации.

Первые три показателя Ляпунова отображения Пуанкаре для аттрактора на рис. 5, *a* согласно вычислениям составляют

$$\Lambda_1 = 1.0913, \quad \Lambda_2 = -2.484, \quad \Lambda_3 = -14.70, \dots, \quad (7)$$

а для аттрактора на рис. 5, *b*, соответственно,

$$\Lambda_1 = 1.0076, \quad \Lambda_2 = -2.322, \quad \Lambda_3 = -14.65, \dots \quad (8)$$

Положительный показатель отвечает за неустойчивость фазовых траекторий на аттракторе и за хаотическую природу динамики. Его величина близка к значению  $\ln 3 = 1.0986\dots$ , что ассоциируется с трехкратно растягивающим отображением для угловой переменной в конструкции соленоида. Остальные показатели отрицательные и отвечают за поперечное сжатие и формирование канторовой поперечной структуры соленоида. Используя известную формулу Каплана–Йорке [35], можно получить оценку фрактальной размерности соленоида в данном конкретном режиме  $D \approx 1.44$  в первом и  $D \approx 1.43$  во втором случае.

На рис. 6 показаны спектры колебаний одного из маятников, построенные обработкой результатов численного моделирования в установившемся хаотическом режиме, для случаев, когда распределение вариаций масс элементов цепочки дается второй и четвертой пространственной

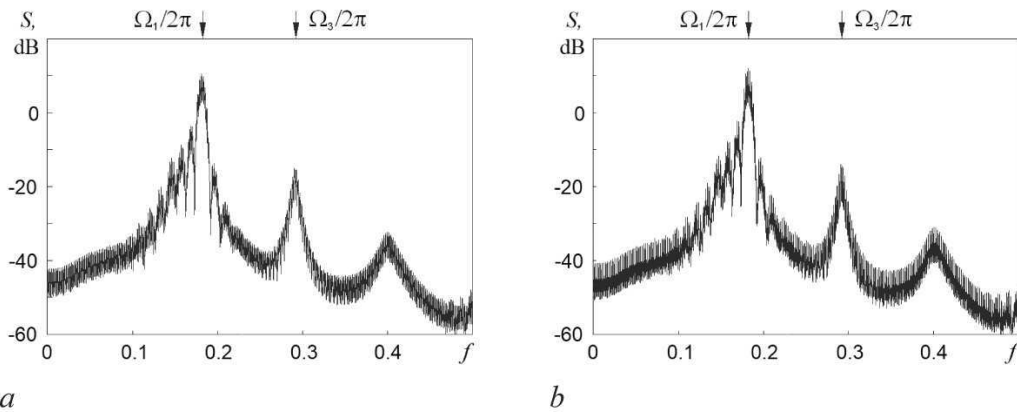


Рис. 6. Спектры колебаний маятника с номером  $j = 0$ , построенные обработкой результатов численного моделирования в установившемся хаотическом режиме; для остальных маятников спектры выглядят точно так же. Панель *a* отвечает распределению добавок к массам маятников по кольцу, даваемому второй пространственной гармоникой (4), а панель *b* – четвертой гармоникой (5)

Fig. 6. Spectra of oscillations of a pendulum with the number  $j = 0$  obtained by processing data of numerical simulation in a sustained chaotic regime; for other pendulums the spectra look exactly the same. Panel *a* corresponds to distribution of additives to the pendulum masses given by the second spatial harmonic (4), and panel *b* with the fourth harmonic (5)

гармоникой. Спектры сплошные, в чем выражается хаотическая природа динамики, но имеют выраженные максимумы в окрестности собственных частот первой и третьей линейных мод системы (указаны стрелками).

Сопоставляя результаты, относящиеся к двум типам пространственной модуляции, можно констатировать соответствие наблюдаемой динамики качественному анализу раздела 2 и сделать заключение, что две топологически отличающиеся разновидности аттрактора Смейла–Вильямса проявляют весьма близкие динамические характеристики. В самом деле, диаграммы на рис. 5 и 6 выглядят в высокой степени сходными, как и спектры на рис. 6. Также очень близки показатели Ляпунова (7) и (8). Существенная разница видна только на диаграммах рис. 4, где наклон ветвей графика на панелях *a* и *b* противоположный.

### Заключение

Рассмотренный пример механической системы в виде цепочки маятников с вибрирующим подвесом пополняет коллекцию известных к настоящему времени систем с гиперболическим хаосом, что важно в плане придания физического содержания соответствующей глубокой и фундаментальной математической теории. Отметим, что в данной системе реализация аттрактора Смейла–Вильямса обусловлена растягивающим отображением для пространственной фазы формирующихся в системе паттернов, как в работах [28–30], в отличие от множества других примеров, где эту роль играет временная фаза колебательных процессов [22–27]. Варьируя число элементов в цепочке и закон распределения масс маятников, можно получить также примеры систем с другими целочисленными факторами растяжения по угловой координате для соленидов типа Смейла–Вильямса.

Обсуждаемый объект будет интересен для студентов и аспирантов, обучающихся основам нелинейной динамики и теории хаоса и, как можно надеяться, привлекателен для постановки экспериментальных работ научного и учебного плана. Также данный пример может послужить основой для построения электронных аналогов, функционирующих как генераторы хаоса, где грубость, обусловленная гиперболической природой аттрактора, будет достоинством с точки зрения возможных информационно-коммуникационных приложений [32, 37, 38].

### Библиографический список

1. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 588–597.
2. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. Т. 44. С. 7–20.
3. Бутиков Е.И. Маятник с осциллирующим подвесом (к 60-летию маятника Капицы). Учебное пособие. 2017. 42 с.
4. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
5. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, Физматлит, 1997. 496 с.
6. Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P. G., Williams F. (ed.). The Sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Springer, 2014. 263 p.
7. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания, 2-е изд. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
8. Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985. 320 с.
9. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 446 с.

10. *Best Roland E.* Phase-Locked Loops: Design, Simulation and Applications. 6th ed. McGraw Hill, 2007. 490 p.
11. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977. 368 с.
12. *Goedde C.G., Lichtenberg A.J., Lieberman M.A.* Parametric instabilities in the discrete sine-Gordon equation // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1990. Vol. 41, no. 3. P. 341–355.
13. *Watanabe S., van der Zant H.S., Strogatz S.H., and Orlando T.P.* Dynamics of circular arrays of Josephson junctions and the discrete sine-Gordon equation // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1996. Vol. 97, no. 4. P. 429–470.
14. *Van der Zant H.S.J., Barahona M., Duwel A.E., Trías E., Orlando T.P., Watanabe S. and Strogatz S.* Dynamics of one-dimensional Josephson-junction arrays // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1998. Vol. 119, no. 1–2. P. 219–226.
15. *Zheng Z., Hu B., Hu G.* Spatiotemporal dynamics of discrete sine-Gordon lattices with sinusoidal couplings // *Physical Review E*. 1998. Vol. 57, no. 1. P. 1139–1144.
16. *Chacon R., Marcheggiani L.* Controlling spatiotemporal chaos in chains of dissipative Kapitza pendula // *Physical Review E*. 2010. Vol. 82, no. 1. 016201.
17. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // *Успехи математических наук*. 1970. Т. 25, № 1(151). С. 113–185.
18. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // *Нелинейные волны*. М.: Наука, 1979. С. 192–212.
19. *Shilnikov L.* Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: A Tutorial // *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 1997. Vol. 7, no. 9. P. 1353–2001.
20. *Аносов Д.В. и др.* Динамические системы с гиперболическим поведением // *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»*. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 66. 242 с.
21. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.
22. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: От математики к физике // *УФН*. 2011. Т. 181, № 2. С. 121–149.
23. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press: Beijing and Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2012, 336 p.
24. *Кузнецов С.П., Круглов В.П.* О некоторых простых примерах механических систем с гиперболическим хаосом // *Труды МИАН*. 2017. Т. 297. С. 232–259.
25. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *ЖЭТФ*. 2006. Т. 129, № 2. С. 400–412.
26. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Автономная система – генератор гиперболического хаоса. Схемотехническое моделирование и эксперимент // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2013. Т. 21. № 5. С. 17–30.
27. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Savin D.V., Seleznev E.P.* Hyperbolic chaos and other phenomena of complex dynamics depending on parameters in a nonautonomous system of two alternately activated oscillators // *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2015. Vol. 25, no. 12. 1530033.
28. *Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P., Pikovskiy A.* Hyperbolic chaos of Turing patterns // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 108. 194101.
29. *Isaeva O.B., Kuznetsov A.S., Kuznetsov S.P.* Hyperbolic chaos of standing wave patterns generated parametrically by a modulated pump source // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 87. 040901.

30. *Круглов В.П., Кузнецов А.С., Кузнецов С.П.* Гиперболический хаос в системах с параметрическим возбуждением паттернов стоячих волн // *Нелинейная динамика*. 2014. Т. 10, № 3. С. 265–277.
31. *Elhadj Z. and Sprott J.C.* Robust Chaos and Its Applications. World Scientific, Singapore, 2011. 472 p.
32. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И.* Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012. 424с.
33. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them // *Meccanica*. 1980. Vol. 15, no. 1. P. 9–20.
34. *Shimada I., Nagashima T.* A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems // *Progress of Theoretical Physics*. 1979. Vol. 61, no. 6. P. 1605–1616.
35. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос, 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.
36. *Pikovsky A., Politi A.* Lyapunov Exponents: A Tool to Explore Complex Dynamics. Cambridge University Press, 2016. 295 p.
37. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // *УФН*. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281–1310.
38. *Isaeva O.B., Jalnina A.Yu., Kuznetsov S.P.* Chaotic communication with robust hyperbolic transmitter and receiver // *IEEE Xplore. Progress In Electromagnetics Research Symposium. Proceedings: St Petersburg, Russia, 22–25 May 2017*. P. 3129–3136.

## References

1. Kapitza P.L. Dynamic stability of the pendulum with vibrating suspension point. *Sov. Phys. JETP*, 1951, vol. 21, pp. 588–597 (in Russian).
2. Kapitza P.L. A pendulum with oscillating suspension. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 1951, vol. 44, pp. 7–20 (in Russian).
3. Butikov E.I. Pendulum with oscillating suspension (to the 60th anniversary of Kapitza’s pendulum). Tutorial. 2017. 42 p. (in Russian).
4. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. Oscillations and Waves: In Linear and Nonlinear Systems. Springer Science & Business Media, 2012. 578 p.
5. Landa P.S. Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems. Springer, 1996. 544 p.
6. Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P.G., Williams F. (ed.). The Sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Springer, 2014. 263 p.
7. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Ryskin N.M. Nonlinear oscillations. Moscow, Fizmatlit, 2005. 292 p. (in Russian).
8. Likharev K.K. Dynamics of Josephson Junctions and Circuits. CRC Press, 1986. 614 p.
9. Shakhgildyan V.V. and Lyahovkin A.A. Phase-Locked Loops. Moscow, Svyaz’, 1972. 446 p. (in Russian).
10. Best Roland E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation and Applications. 6th ed. McGraw Hill, 2007. 490 p.
11. Scott A. Active and Nonlinear Wave Propagation in Electronics. John Wiley & Sons, 1970, 326 p.
12. Goedde C.G., Lichtenberg A.J., Lieberman M.A. Parametric instabilities in the discrete sine-Gordon equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1990, vol. 41, no. 3, pp. 341–355.
13. Watanabe S., van der Zant H.S., Strogatz S.H., and Orlando T.P. Dynamics of circular arrays of

- Josephson junctions and the discrete sine-Gordon equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1996, vol. 97, no. 4, pp. 429–470.
14. Van der Zant H.S.J., Barahona M., Duwel A.E., Trías E., Orlando, T.P., Watanabe S. and Strogatz S. Dynamics of one-dimensional Josephson-junction arrays. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1998, vol. 119, no. 1–2, pp. 219–226.
  15. Zheng Z., Hu B., Hu G. Spatiotemporal dynamics of discrete sine-Gordon lattices with sinusoidal couplings. *Physical Review E*, 1998, vol. 57, no. 1, pp. 1139–1144.
  16. Chacon R., Marcheggiani L. Controlling spatiotemporal chaos in chains of dissipative Kapitza pendula. *Physical Review E*, 2010, vol. 82, no. 1, 016201.
  17. Smale S. Differentiable Dynamical Systems. *Bull. Amer. Math. Soc. (NS)*, 1967, vol. 73, pp. 747–817.
  18. Sinai Ya.G. The Stochasticity of Dynamical Systems. Selected Translations. *Selecta Math. Soviet.*, 1981, Vol. 1, no. 1, pp. 100–119.
  19. Shilnikov L. Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: A Tutorial. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 1997, vol. 7, no. 9, pp. 1353–2001.
  20. Anosov D.V. *et al.* Dynamical Systems IX: Dynamical Systems with Hyperbolic Behaviour (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 9). Springer, 1995. 236 p.
  21. Katok A. and Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 54). Cambridge Univ. Press, 1996. 824 p.
  22. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: from mathematics to physics. *Physics-Uspekhi*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 119–144.
  23. Kuznetsov S.P. Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press: Beijing and Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2012. 336 p.
  24. Kuznetsov S.P., Kruglov V.P. On some simple examples of mechanical systems with hyperbolic chaos. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 297, pp. 208–234.
  25. Kuznetsov S.P., Seleznev E.P. A strange attractor of the Smale–Williams type in the chaotic dynamics of a physical system. *JETP*, 2006, vol. 102, no. 2, pp. 355–364.
  26. Ponomarenko V.I., Seleznev E.P., Kuznetsov S.P. Autonomous system generating hyperbolic chaos: Circuit simulation and experiment. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 21, no. 5, pp. 17–30 (in Russian).
  27. Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Savin D.V., Seleznev E.P. Hyperbolic Chaos and Other Phenomena of Complex Dynamics Depending on Parameters in a Nonautonomous System of Two Alternately Activated Oscillators. *International journal of bifurcation and chaos in applied sciences and engineering*, 2015, vol. 25, no. 12, 1530033.
  28. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P., Pikovsky A. Hyperbolic chaos of Turing patterns. *Phys. Rev. Lett.*, 2012, vol. 108, 194101.
  29. Isaeva O.B., Kuznetsov A.S., Kuznetsov S.P. Hyperbolic chaos of standing wave patterns generated parametrically by a modulated pump source. *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 87, 040901.
  30. Kuznetsov S.P., Kuznetsov A.S., Kruglov V.P., Hyperbolic chaos in systems with parametrically excited patterns of standing waves. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 265–277 (in Russian.)
  31. Elhadj Z. and Sprott J.C. Robust Chaos and Its Applications. World Scientific, Singapore, 2011. 472 p.
  32. Dmitriev A.S., Efremova E.V., Maksimov N.A., Panas A.I. Generation of chaos. Moscow, Technosfera, 2012. 424 p. (in Russian).

33. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–20.
34. Shimada I., Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Progress of Theoretical Physics*, 1979, vol. 61, no. 6, pp. 1605–1616.
35. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos, Moscow, Fizmatlit, 2006. 356 p. (in Russian).
36. Pikovsky A., Politi A. Lyapunov Exponents: A Tool to Explore Complex Dynamics. Cambridge University Press, 2016. 295 p.
37. Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E. On the use of chaotic synchronization for secure communication. *Physics–Uspekhi*, 2009, vol. 52, no. 12, pp. 1213–1238.
38. Isaeva O.B., Jalnina A.Yu., Kuznetsov S.P. Chaotic communication with robust hyperbolic transmitter and receiver. *IEEE Xplore. Progress In Electromagnetics Research Symposium. Proceedings: St Petersburg, Russia, 22–25 May 2017*, pp. 3129–3136.

*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиопизика в СГУ. Главный научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, где работает с 1988 г., руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Автор монографий «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике» и «Hyperbolic Chaos: a Physicist’s View». Автор учебно-научных монографий «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным) и «Динамический хаос». Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиопизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996). Член редакционной коллегии журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Regular and Chaotic Dynamics», «Russian Journal of Nonlinear Dynamics», «Известия Саратовского университета – Новая серия. Серия Физика».



Россия, 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1  
 Удмуртский государственный университет  
 Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал  
 E-mail: spkuz@yandex.ru