



УПРАВЛЕНИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬЮ И ВЫНУЖДЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СВЯЗАННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С БИФУРКАЦИЯМИ УДВОЕНИЙ ПЕРИОДА

А.В. Шабунин

В работе исследуется управление фазовой мультистабильностью и синхронизация в двух связанных фейгенбаумовских системах. В качестве модели рассматриваются два генератора Чуа с симметричной диффузионной связью. Управление осуществляется периодическим сигналом, действующим одновременно на оба генератора с одинаковыми амплитудами и частотами, но с разными начальными фазами. Рассматривается зависимость динамики системы от амплитуды, частоты и разности фаз между сигналами воздействия. Анализируется влияние фаз управляющих сигналов на ширину языка синхронизации.

Ключевые слова: Фазовая мультистабильность, синхронизация, управление мультистабильностью.

Введение

Мультистабильность – одно из ключевых свойств нелинейных динамических систем [1–4]. Оно означает сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, выбор между которыми осуществляется посредством выбора начальных условий. Одним из видов мультистабильности, встречающимся, как правило, в ансамблях взаимодействующих систем, является фазовая мультистабильность (ФМ), при которой колебания сосуществующих аттракторов одинаковы по форме и отличаются только значениями фазовых сдвигов между временными реализациями подсистем. В ансамблях из нескольких осцилляторов фазовая мультистабильность проявляется, например, в виде режимов бегущих волн [5–8]. В 1989 году было открыто явление *развитой* фазовой мультистабильности (РФМ) во взаимодействующих фейгенбаумовских системах [9], при которой число сосуществующих фазовых мод удваивается после каждой бифуркации удвоения периода и становится бесконечно большим на пороге перехода к хаосу. Впоследствии это явление было изучено на большом числе осцилляторов и отображений [10–17]. В работах [14, 15] были исследованы бифуркационные механизмы, а в работах [13, 17] – спектральные закономерности формирования РФМ в связанных системах с удвоениями периода.

В работе [16] рассмотрены закономерности расположения бассейнов притяжения сосуществующих ФМ-режимов.

При фазовой мультистабильности, как отмечалось выше, различие между сосуществующими колебаниями заключается в значениях разностей фаз между временными реализациями осцилляторов в ансамбле, что выражается в разных фазовых спектрах колебаний. Такие системы, в отличие от одиночных осцилляторов, должны быть чувствительны к значениям фаз сигналов внешнего воздействия. В работе [18] рассматривалась возможность управляемого переключения между мультистабильными состояниями в связанных фейгенбаумановских системах при одновременном воздействии на них периодических сигналов с разными начальными фазами. В ходе исследований, проведенных на системе двух генераторов Чуа, было показано, что, если воздействовать одновременно на оба генератора гармоническими сигналами с определенной разностью фаз (выбор которой обусловлен характером мультистабильности), наблюдается управляемое переключение между аттракторами. Причем, необходимая для управления амплитуда воздействия составляет доли процента от амплитуды собственных колебаний в системе. Настоящая работа является продолжением указанных исследований. В ней проводится детальный анализ обнаруженного эффекта, исследуются его механизмы, а также рассматривается явление синхронизации колебаний при би-фазном воздействии на мультистабильную систему.

Исследования проводятся на примере двух диффузионно связанных генераторов Чуа. Генератор Чуа представляет собой простую радиоэлектронную схему, демонстрирующую переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [19]. Связанные генераторы Чуа – система с развитой фазовой мультистабильностью, при которой в зависимости от параметров в фазовом пространстве может сосуществовать множество аттракторов [12]. Данная модель демонстрирует все типичные свойства связанных осцилляторов с бифуркациями удвоения периода, поэтому полученные результаты могут быть распространены и на другие связанные фейгенбаумовские системы.

1. Исследуемая система и исходные колебательные режимы

Запишем уравнения двух диффузионно связанных генераторов Чуа при гармоническом воздействии на оба генератора

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \alpha(y_1 - \varphi(x_1)), \\
 \dot{y}_1 &= x_1 - y_1 + z_1 + K(y_2 - y_1), \\
 \dot{z}_1 &= -\beta y_1 + s_1(t), \\
 \dot{x}_2 &= \alpha(y_2 - \varphi(x_2)), \\
 \dot{y}_2 &= x_2 - y_2 + z_2 + K(y_1 - y_2), \\
 \dot{z}_2 &= -\beta y_2 + s_2(t).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varphi(x) = 0.0625x^3 - 0.166667x$ – сглаженная характеристика нелинейного элемента цепи – диода Чуа [20], α и β – управляющие параметры, K – коэффициент

линейной связи. На оба генератора одновременно воздействуют гармонические сигналы $s_{1,2} = A \cos(2\pi ft + \varphi_{1,2})$ одинаковой амплитуды A и частоты f , но с разными начальными фазами φ_1 и $\varphi_2 = \varphi_1 + \phi$. Данный вид воздействия, как было показано в [18], позволяет целенаправленно переключать систему между сосуществующими мультистабильными состояниями, если частота сигналов близка к частоте субгармоники, фаза которой различна для сосуществующих режимов.

Выберем значения управляющих параметров для автономной системы (1) таким образом ($\alpha = 8.3$, $\beta = 14$, $K = 0.01$), чтобы обеспечить простейший вид ФМ, которым является сосуществование двух предельных циклов периода два, обозначаемые как $2C^0$ (рис. 1, *a*) и $2C^1$ (рис. 1, *б*). Оба сосуществующих режима соответствуют колебаниям одинаковой формы, но отличаются разными временными сдвигами между реализациями в первом и втором осцилляторах. В случае $2C^0$ колебания в обеих подсистемах синфазны, а в случае $2C^1$ – сдвинуты во второй подсистеме относительно первой на полпериода: $x_2(t) = x_1(t - T)$, где T – период однооборотного предельного цикла. Соответственно, режимы $2C^0$ и $2C^1$ имеют одинаковые амплитудные спектры $|X(f)|$, но разные взаимные фазовые спектры $\theta(f)$. Здесь

$$X(f) = |X(f)| \exp[j\theta(f)] = X_1(f)X_2^*(f)$$

– комплексный взаимный спектр; $X_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) \exp(-j2\pi ft) dt$ – фурье-трансформанта переменной x_i . Различие фазовых спектров указанных режимов заключается в разных фазах субгармоник на «половинной» частоте $f = f_0/2$ ($f_0 = 1/T$ – базовая частота колебаний): для колебаний $2C^0$ эта фаза равна нулю, а для $2C^1$ – π . Амплитудные и фазовые спектры указанных предельных циклов приведены на рис. 1. В дальнейшем, субгармонику на частоте $f_0/2$, фаза которой различается для сосуществующих мод, будем называть *определяющей субгармоникой*, так как, изменив ее фазу, мы перейдем с одного аттрактора на другой.

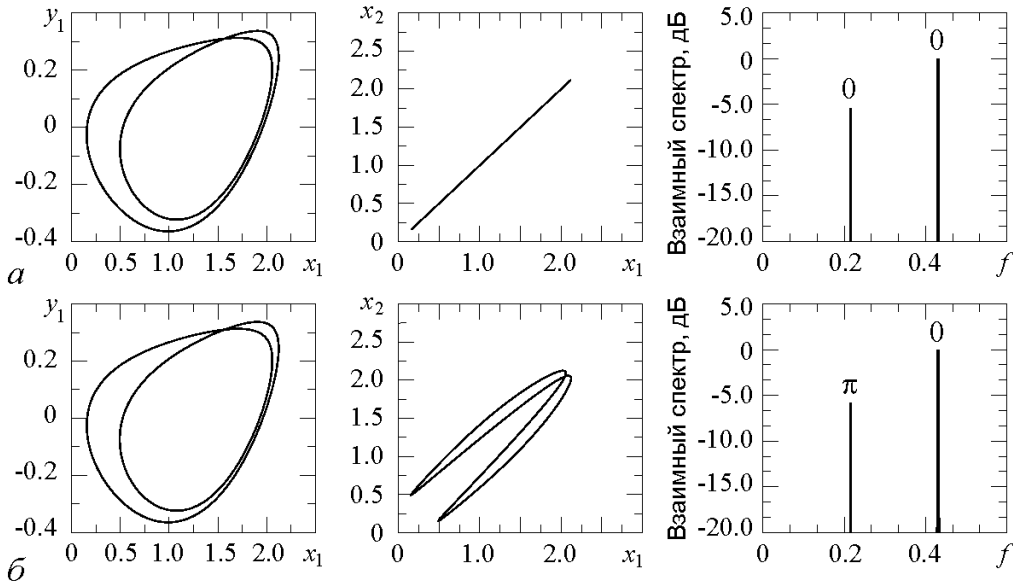


Рис. 1. Проекция фазовых портретов (левый и центральный столбцы) и взаимный спектр мощности (правый столбец) режимов: *a* – $2C^0$ и *б* – $2C^1$ при $A = 0$

При выбранных значениях параметров основная (максимальная) гармоника в спектре находится на частоте $f_0 = 0.43$ и, соответственно, частота определяющей субгармоники равна $f_0/2 = 0.215$. Воздействие на систему двумя сигналами на частоте этой субгармоники должно проявляться по-разному, в зависимости от фазового сдвига между s_1 и s_2 , и от выбранного колебательного режима.

2. Переключение между сосуществующими модами при внешнем воздействии

Будем исследовать влияние резонансного внешнего воздействия на систему в зависимости от фазового сдвига между сигналами. В работе [18] было показано, что данный вид воздействия позволяет осуществлять целенаправленное переключение между сосуществующими аттракторами. Переключением на целевой режим назовем такую смену характера колебаний, при котором отключение внешнего воздействия приводит к переходу траектории на выбранный аттрактор. Рассмотрим этот эффект более подробно и в широком диапазоне частот. Для этого выберем в качестве исходного режима синфазные колебания $2C^0$, а в качестве целевого режима – $2C^1$. Соответственно, для переключения с режима $2C^0$ на режим $2C^1$ выберем разность фаз между управляющими сигналами $\phi = \pi$. Плавно увеличивая амплитуду воздействия, будем следить за эволюцией колебаний в системе. Проведенные исследования показали, что:

- эффект носит пороговый характер – переключение происходит, если амплитуда воздействия превосходит некоторое пороговое значение A_0 ;
- величина порога существенно зависит от частоты – A_0 монотонно возрастает при отстройке частоты от частоты субгармоники $f_0/2$;
- переключение на целевой режим происходит в достаточно широкой, но ограниченной области частот, в окрестности частоты $f_0/2$;
- при выходе за эту область частот эффект переключения также наблюдается, но он носит случайный характер – траектория может перейти на $2C^1$, а может, с ненулевой вероятностью, вернуться на $2C^0$.

На рис. 2 отображена зависимость A_0 от f в виде сплошной линии. Переключение на целевой режим происходит при пересечении этой линии снизу вверх. В диапазоне

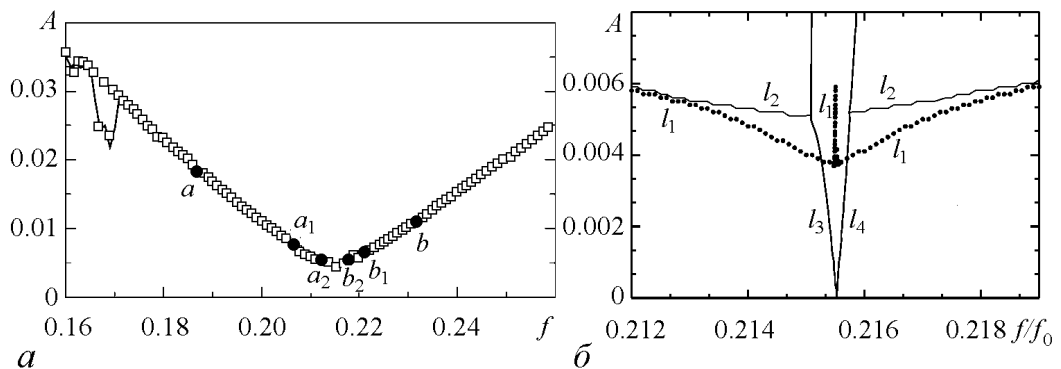


Рис. 2. Зависимость от частоты сигналов порога переключения между сосуществующими режимами $2C^0 \rightarrow 2C^1$ и $2C^1 \rightarrow 2C^0$: a – в широком диапазоне частот и \bar{b} – в окрестности частоты субгармоники

частот $0.183 \lesssim f \lesssim 0.232$ (между точками a и b) данный переход носит детерминированный характер. Это означает, что после того, как внешнее воздействие снимается, в ста процентах случаев наблюдается аттрактор $2C^1$.

Вне этого диапазона, при пересечении сплошной линии переключения на целевой режим также происходят, но они носят случайный характер – при снятии внешнего воздействия система может как перейти на режим $2C^1$, так и вернуться на исходный режим $2C^0$.

Рассмотрим, что происходит на линии переключений между мультистабильными состояниями. Выберем значение частоты воздействия вблизи $0.5f_0$, например, $f = 0.2$ и будем исследовать процессы в системе при постепенном увеличении амплитуды воздействия A . При $A = 0$ предельный цикл мягко трансформируется в двумерный тор $2C^0 \rightarrow 2T_1^0$. При малом A (рис. 3, a) тор является двухоборотным. Спектр состоит из базовой субгармоники на частоте $0.5f_0$, основной гармонике на частоте f_0 , гармонике на частоте воздействия f_1 , а также из гармоник на комбинационных частотах. Как видим из рисунка, фазы «старых» гармоник сохраняют свои значения равными нулю, в то время как фазы «новых» равны π . Увеличение A ведет к постепенному росту π -гармоник и подавлению синфазной субгармоники. Этот процесс можно проследить как по изменениям в спектре, так и по постепенному «схлопыванию» стробоскопического сечения из двухоборотного в однооборотное (рис. 3, b). Наконец, при $A \simeq 0.011$ процесс завершается полным подавлением собственной субгармоники, что сопровождается переходом с двухоборотного тора $2T_1^0$ на однооборотный $1T_1$ (рис. 3, b). Данный переход при выбранной частоте воздействия является необратимым, поскольку обратное уменьшение параметра A ниже значения A_0 не приводит к возвращению на исходный режим $2T_1^0$. Вместо этого, траектория оказывается на другом квазипериодическом режиме $2T_1^1$, соответствующему двухоборотному тору, который, как видно из рис. 3, z , уже не является тором $2T_1^0$, так как фаза субгармоники на частоте $f_0/2$ равна для него не нулю, а π . Для этого нового режима дальнейшее понижение амплитуды воздействия до нуля ведет к постепенному «вырождению» в предельный цикл $2C^1$. Таким образом, данный квазипериодический режим образован на базе предельного цикла $2C^1$.

Если в качестве исходного режима выбрать предельный цикл $2C^1$, воздействуя на его двумя сигналами с той же разностью фаз $\phi = \pi$, то эволюция системы будет иной. При $A = 0$ двухоборотный предельный цикл преобразуется в уже отмеченный выше двухоборотный тор $2T_1^1$. Рост амплитуды воздействия ведет к подавлению субгармоники на частоте $f_0/2$ и переходу при $A \simeq 0.011$ на однооборотный тор $1T_1$. Однако в этом случае данный переход является обратимым. Уменьшение A возвращает траекторию на режим $2T_1^1$. Последующее увеличение амплитуды воздействия до значений, больших чем $A = 0.011$, не приводит к качественным изменениям в динамике, вплоть до $A \simeq 0.03$, когда происходит разрушение однооборотного тора $1T_1$ и переход к хаосу.

Таким образом, внешнее воздействие вызывает эффект, подобный «подавлению собственной частоты колебаний», при воздействии единственного сигнала на автоколебательную систему. Однако в нашем случае данный эффект не приводит к синхронизации колебаний, а ведет к колебаниям более простой формы, одновременно подавляя бистабильность в системе: вместо двух сосуществующих квазипериодических режимов наблюдается единственный квазипериодический режим.

Если поменять местами режимы $2C^0$ и $2C^1$, то есть выбрать в качестве исходного режим $2C^1$ и заменить разность фаз между сигналами воздействия на $\phi = 0$, то будет наблюдаться сходная последовательность бифуркаций, но уже относительно колебаний $2C^1$. Зависимость амплитуды порога A_0 от частоты воздействия практически полностью повторяет аналогичную зависимость для режимов на базе $2C^0$ (на рис. 2 она отмечена символами \square). Это означает, что переход с двухоборотного тора к однооборотному происходит при одинаковой амплитуде воздействия как при $\phi = 0$, так и при $\phi = \pi$.

Представляется интересным рассмотреть, насколько значение разности фаз ϕ влияет на эффект управления. Чтобы ответить на этот вопрос, выберем в качестве

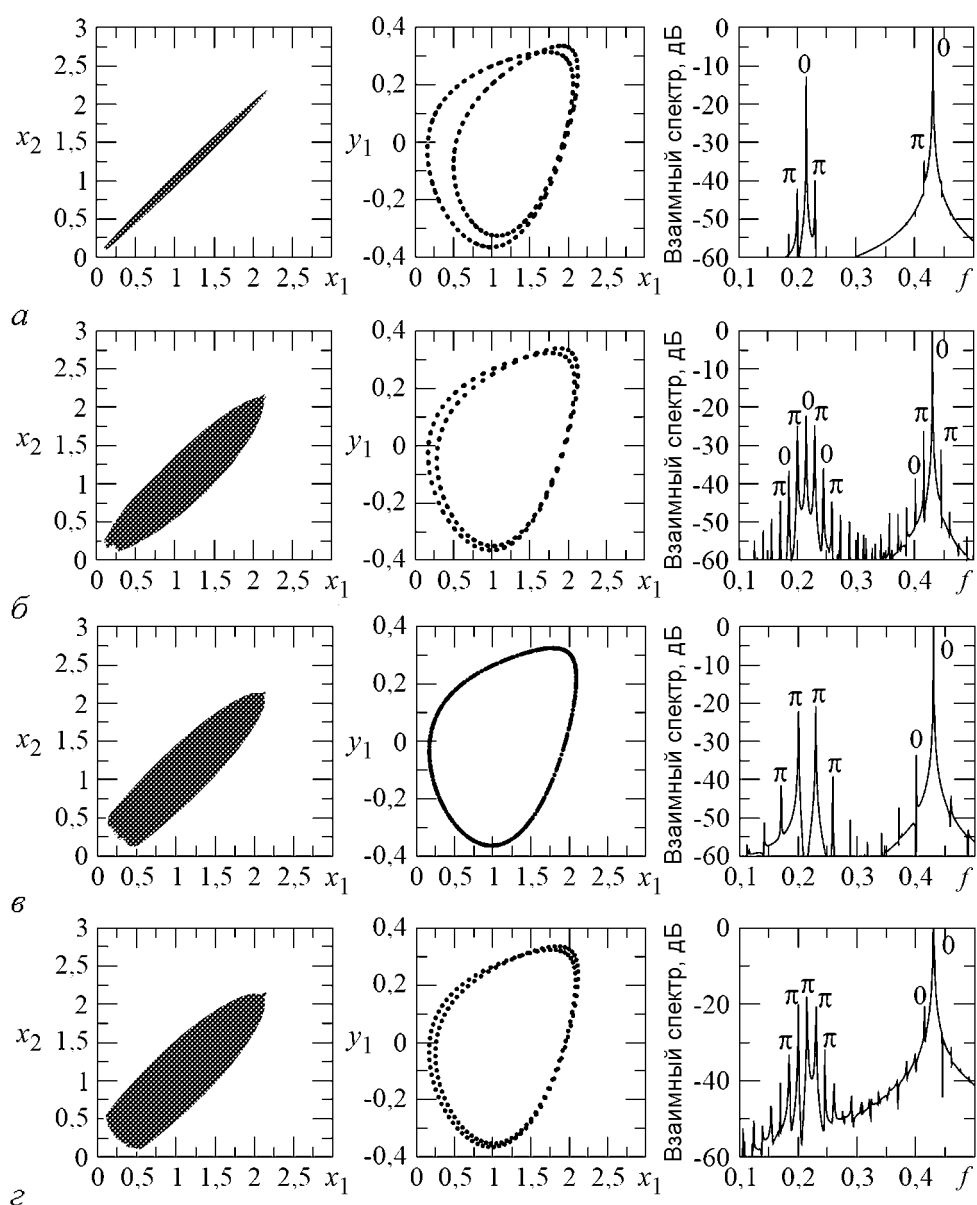


Рис. 3. Эволюция колебательных режимов на базе цикла $2C^0$ при противофазном воздействии для различных значений амплитуды воздействия A : а – 0.003, б – 0.01, в – 0.011, г – 0.01. Левый и средний столбцы отображают проекции фазового портрета, правый – взаимный спектр мощности

исходного режима $2C^0$ и рассмотрели, как происходит переключение к режимам семейства $2C^1$ для нескольких значений $\phi = 5\pi/6, 2\pi/3, \pi/2$. Как оказалось, значение разности фаз ϕ не влияет на расположение бифуркационной линии перехода от двухоборотного тора к однооборотному, что повторяет результат, полученный для $\phi = 0$ и $\phi = \pi$. Однако оно влияет на интервал частот, при котором вблизи этой линии наблюдается однозначный переход с одного семейства режимов на другое. В нашем случае, это значение частоты воздействия, при котором при обратном движении по параметру A траектория однозначно переходит на семейство режимов $2C^1$. На рис. 2 точками a_1, b_1 ограничена область, где при отключении внешнего воздействия наблюдается детерминированный переход на режим $2C^1$ при $\phi = 5\pi/6$, а точками a_2, b_2 – при $\phi = 2\pi/3$, соответственно. Видно, что отход от противофазного характера воздействия сужает диапазон частот, где наблюдается переключение. При $\phi \leq \pi/2$ переключение на режим $2C^1$ не происходит вообще.

Таким образом, бифазное гармоническое воздействие на систему связанных осцилляторов позволяет осуществлять управляемый переход с одного семейства режимов на другое семейство. Этот переход происходит практически одновременно с подавлением собственной субгармоники на частоте $f_0/2$, что сопровождается обратной бифуркацией удвоения для торов. В результате вместо двух сосуществующих двухоборотных торов $2T_1^0$ и $2T_1^1$ в фазовом пространстве остается единственный однооборотный тор $1T_1$. То есть система переходит от бистабильного к моностабильному состоянию. При обратном движении по параметру A происходит возвращение к мультистабильности, однако, если частота воздействия близка к частоте субгармоники $f_0/2$, система из двух сосуществующих режимов всегда выбирает тот, чья фаза субгармоники оказывается ближе к разности фаз сигналов воздействия ϕ . При удалении частоты воздействия от $f_0/2$ детерминированный характер выбора нарушается. За счет чего в системе наблюдается неравноправие в выборе режимов при переходе от моностабильного состояния к бистабильному?

Более детальный анализ переключения с режима $2C^0$ на $2C^1$ при π -воздействии показывает, что потеря устойчивости тором $2T_1^0$ на самом деле чуть опережает по параметру A бифуркацию обратного удвоения. Это можно заметить, если выбрать значение частоты воздействия в непосредственной близости от частоты субгармоники $f_0/2$. На рис. 2, б построены бифуркационные кривые потери устойчивости для тора $2T_1^0$ (l_1) и линия бифуркации удвоения для тора $1T_1$ (l_2) в окрестности $f_0/2$. Последняя упирается в «язык синхронизации» для колебаний на базе $2C^1$, ограниченный линиями l_3 и l_4 , о котором пойдет речь в следующем разделе. Видно, что вблизи $f_0/2$ (но исключая саму точку $f = f_0/2$) разрушение бистабильности происходит при заметно меньших значениях амплитуды воздействия, чем переход от двухоборотного тора к однооборотному. При уходе от частоты $f_0/2$ обе линии смыкаются и в эксперименте и та и другая бифуркации наблюдаются практически одновременно.

Таким образом, при увеличении A в системе наблюдается следующая последовательность переходов: $2T_1^0 \rightarrow 2T_1^1$ (жесткий) и $2T_1^1 \rightarrow 1T_1$ (мягкий). В окрестности частоты субгармоники расстояние между бифуркационными линиями является существенным, поэтому в этом случае при плавном отключении управляющего воздействия происходит сначала обратный переход к двухоборотному тору $1T_1 \rightarrow 2T_1^1$, а затем – к исходному предельному циклу $2T_1^1 \rightarrow 2C^1$. То есть наблюдается переключение на заданный колебательный режим. Если же выбрать частоту воздействия

вдали от частоты субгармоники, линии обеих бифуркаций оказываются совмещенными. В результате при уменьшении A траектория может с той или иной вероятностью оказаться как на торе $2T_1^1$, так и на $2T_1^0$ и соответственно перейти при снятии воздействия на любой из режимов $2C^0$ или $2C^1$. Переключение в этом случае носит случайный характер.

3. Синхронизация колебаний при бифазном воздействии

Как известно, внешнее периодическое воздействие на автоколебательную систему на частоте, кратной ее собственной частоте (или близкой к ней), ведет к синхронизации. Как синхронизация реализуется при двойном воздействии с разными фазами? Зависит ли синхронизация от фаз сигналов воздействия? Чтобы рассмотреть эти вопросы будем исследовать синхронизацию, происходящие в системе (1) в узкой полосе частот в окрестности частоты $f = 0.5f_0$ в зависимости от разности фаз воздействующих сигналов и выбранной исходной моды.

Выберем в качестве исходного режима колебания $2C^1$. Рассмотрим вначале синхронизацию внешними сигналами с разностью фаз, равной фазе выбранной субгармоники, то есть $\phi = \pi$. При близких к $0.5f_0$ значениях частоты воздействия наблюдается классическое явление синхронизации через захват собственной частоты колебаний. На рис. 4 построена область синхронизации на плоскости параметров «частота – амплитуда воздействия». Границы области являются линиями седло-узловых бифуркаций на торе, обозначенные на рисунке линиями l_1 и l_2 . Область синхронизации выглядит как классический «язык Арнольда», опирающийся на точку $A = 0, f = 0.5f_0$ (рис. 4). Слева и справа к языку синхронизации примыкают уже отмеченные выше линии обратной бифуркации удвоения торов, которые обозначены как l_3 и l_4 . Ниже этих линий синхронизация происходит на двухоборотном торе $2T_1^1$, выше – на однооборотном $1T_1$.

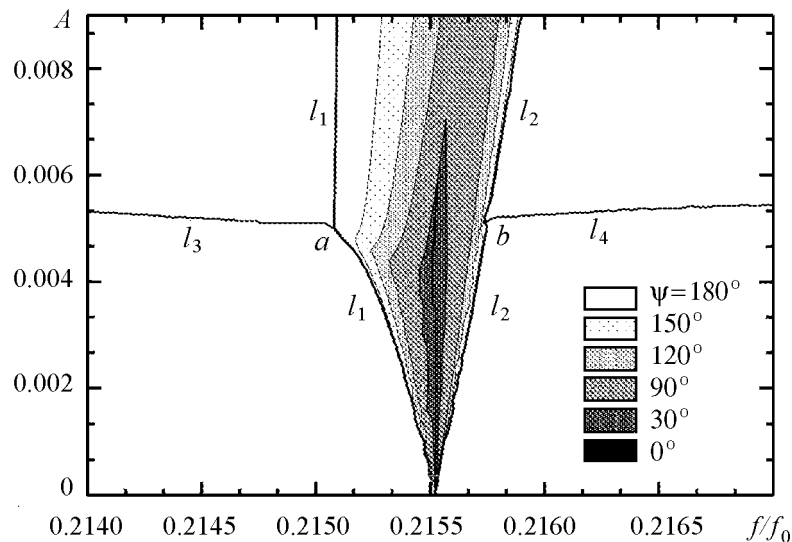


Рис. 4. Вид областей синхронизации при последовательно уменьшающихся значениях разности фаз сигналов воздействия ϕ от π до 0

Рассмотрим теперь, как на синхронизацию влияет разность фаз ϕ между сигналами. Будем постепенно уменьшать значение разности фаз между сигналами воздействия от π до нуля. Исследования показывают, что уменьшение разности фаз ведет к сужению языка синхронизации. На рис. 4 построены области синхронизации для $\phi = 5\pi/6$, $\phi = 2\pi/3$, $\phi = \pi/2$, $\phi = \pi/6$ и $\phi = 0$. Области синхронизации выделены оттенками серого цвета таким образом, что более темный оттенок соответствует меньшему значению ϕ . Видно, что при $\phi \geq \pi/2$ качественный вид языков сохраняется, но уменьшается их ширина. При переходе ϕ через значение $\pi/2$ области синхронизации режима $2C^1$ оказываются ограниченными сверху значениями амплитуды воздействия, при котором наблюдается жесткий переход на семейство режимов $2C^0$. При этом ширина области синхронизации для режима семейства $2C^1$ продолжает уменьшаться при уменьшении разности фаз ϕ . На рис. 4 приведены две области синхронизации для $\phi < \pi/2$: $\phi = \pi/6$ (темно-серый цвет) и $\phi = 0$ (черный цвет). В последнем случае при разности фаз $\phi = 0$ область синхронизации минимальна и, фактически, вырождается в линию.

Структура областей синхронизации, подобная изображенной на рис. 4, имеет место и для колебаний на базе цикла $2C^0$, однако с обратной зависимостью от ϕ . При $\phi = 0$ ширина языка синхронизации максимальна. В силу симметрии системы (1), синхронизация в этом случае не отличается от синхронизации несвязанного осциллятора Чуа под воздействием одного периодического сигнала. При последовательном увеличении ϕ до значения $\pi/2$ области синхронизации постепенно сжимаются. При $\pi/2 \leq \phi \leq \pi$ каждая из областей синхронизации оказывается ограниченной сверху линией перехода на семейство режимов на базе цикла $2C^1$. При $\phi = \pi$, так же как и при $\phi = 0$ для режима $2C^1$, область синхронизации вырождается в линию.

Таким образом, ширина области синхронизации определяется близостью разности фаз между сигналами воздействия к разности фаз между колебаниями подсистем на частоте субгармоники. Если ϕ совпадает с фазой субгармоники на частоте воздействия во взаимном спектре колебаний режима, то ширина области синхронизации максимальна. При отстройке ϕ от этого значения область синхронизации монотонно сужается. Наименьшее значение ширины области синхронизации достигается при противоположных значениях фазы субгармоники и разности фаз сигналов внешней силы.

Заключение

В работе рассмотрено влияние внешнего периодического воздействия, прикладываемого с разными начальными фазами к двум связанным автоколебательным системам в режиме бистабильности. В достаточно широкой области частот вокруг базовой частоты автоколебаний данный вид воздействия позволяет осуществлять переключения между сосуществующими семействами режимов. Механизм этого явления связан с подавлением собственной частоты, что сопровождается бифуркацией обратного удвоения периода и возвращением системы к моностабильному состоянию. При выключении управляющего воздействия траектория оказывается на том аттракторе, для которого разность фаз между управляющими сигналами совпадает (или близка) к разности фаз между колебаниями подсистем.

Проведено исследование синхронизации колебаний в системе в зависимости от разности фаз между сигналами воздействия и выбранного режима. Обнаружено, что ширина области синхронизации максимальна, если эта разность фаз совпадает с фазой гармоники на частоте воздействия во взаимном спектре мощности, построенном по колебаниям подсистем.

Библиографический список

1. *Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J.* Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49. P. 1217.
2. *Prengel F., Wacker A., Scholl E.* Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 50. P. 1705.
3. *Sun N.G., Tsironis G.P.* Multistability of conductance in doped semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B.* 1995. Vol. 51. P. 11221.
4. *Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.* Multistability and delayed recurrent loops // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 708.
5. *Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М.* О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // *Известия вузов. Радиофизика.* 1984. Т. 27, № 11. С. 1388.
6. *Ermentrout G.B.* The behaviour of rings of coupled oscillators // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23, № 1. P. 55.
7. *Ermentrout G.B.* Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // *SIAM J. of Appl. Math.* 1992. Vol. 52, № 6. P. 1664.
8. *Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т. 13, № 4. С. 37.
9. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах // *Письма в ЖТФ.* 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
10. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* Формы колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *ЖТФ.* 1990. Т. 60, № 10. С. 19.
11. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Мультистабильность в системе радиотехнических генераторов с емкостной связью // *Радиотехника и Электроника.* 1991. Т. 36, № 11. С. 2167.
12. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1995. Vol. 5, № 6. P. 1677.
13. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С.* Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода // *Радиотехника и Электроника.* 1997. Т. 42, № 8. С. 974.
14. *Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V.* Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. P. 1014.

15. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* Multistability formation and synchronization loss in coupled Hennon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. 056212.
16. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P.* Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2003. Vol. 15. P. 695.
17. *Shabunin A., Feudel U., Astakhov V.* Phase multistability and phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators // *Physical Review E.* 2009. Vol. 80. 026211.
18. *Шабунин А.В., Литвиненко А.Н., Астахов В.В.* Управление мультистабильностью с помощью би-фазного резонансного воздействия // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2011. Т. 19, № 1. С. 25.
19. *Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L.O., Hotta A.* Global bifurcation analysis of the double-scroll circuit // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1991. Vol. 1, № 1. P. 139.
20. *Khibnik A.I., Roose D., Chua L.* *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos.* Singapur: World Scientific, 1993. P. 145.

*Саратовский госуниверситет
им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 24.01.2012
После доработки 3.03.2012*

CONTROL OF MULTISTABILITY AND FORCED SYNCHRONIZATION IN COUPLED SELF-SUSTAINED OSCILLATORS WITH PERIOD-DOUBLING BIFURCATIONS

A. Shabunin

Control of phase multistability and synchronization are investigated in two coupled Feigenbaum systems on example of Chua's generators, coupled through symmetric diffusive link. The control is fulfilled by external periodic signals, which simultaneously influence the both oscillators with equal amplitudes and frequencies, but with different phases. The behaviour of the system is explored in dependence on amplitude, frequency and phase difference between the signals. Influence of the phase difference on width of the synchronization tongue is considered.

Keywords: Phase multistability, synchronization, control of multistability.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, доктор физико-математических наук (2008). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru