

ОПТИМАЛЬНОЕ ВНЕШНЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ МАЛОЙ МОЩНОСТИ ДЛЯ АКТИВАЦИИ ОДНОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С.А. Григорьева, Г.В. Осипов

Работа посвящена исследованию оптимальной формы внешнего воздействия малой мощности необходимой для активации одномерной динамической системы. Поиск данного воздействия осуществляется с помощью метода множителей Лагранжа. Оптимальное воздействие малой мощности и оптимальный закон изменения состояния динамической системы определяются аналитически для линейной динамической системы и численно для нелинейной динамической системы. Изучается возможность уменьшения мощности воздействия за счет увеличения его продолжительности. Исследуется эффективность оптимального воздействия, выраженная в экономии количества энергии, затраченной на него, по сравнению с прямоугольным воздействием.

Ключевые слова: Оптимальная форма внешнего воздействия, активация динамической системы, метод множителей Лагранжа, мощность воздействия.

Введение

В организме человека электрический ток является адекватным раздражителем для всех возбудимых тканей. Адекватность электрического тока проявляется в том, что он при минимальных энергетических затратах вызывает возбуждение ткани в естественных условиях существования организма [1]. На сегодняшний день в клинической практике широко используются методы регистрации биоэлектрических потенциалов, отражающих различные стороны работы сердца (электрокардиография [2]), головного мозга (электроэнцефалография [3]), моторной активности желудка (электрогастрография [4]) и мышц (электромиография [5]). Одним из важнейших элементов реанимации при сердечных аритмиях (фибрилляциях) является дефибрилляция сердца, которая активирует возбудимые сердечные клетки, устраняя разрозненные, хаотичные сокращения отдельных мышечных волокон с помощью одиночного электрического импульса достаточной силы и продолжительности [6].

Для возникновения активации (потенциала действия) в возбудимой клетке раздражителю необходимо деполяризовать ее до уровня критической деполяризации

мембраны, то есть до ее порогового потенциала. Таким образом, в момент изменения потенциала мембраны от потенциала покоя до порогового потенциала происходит активация потенциалуправляемых Na^+ -каналов и возникает электрический ток, ведущий к дальнейшей интенсивной деполяризации мембраны в виде потенциала действия.

Процессы на клеточном уровне описываются обычно обобщениями классической модели Ходжкина–Хаксли [7], для которой потенциал $V(t)$ отвечает соотношению

$$\dot{V} + f(V, I_i, I) = 0, \quad (1)$$

где $f(V, I_i, I)$ – нелинейная функция от потенциала $V(t)$, ионных токов $I_i(V, t)$ и внешнего воздействия $I(t)$. Достижение биологической релевантности моделей приводит к не всегда оправданной трудоемкости в исследовании. Как показано в [8], для активации возбудимой клетки достаточно использовать линейное дифференциальное уравнение первого порядка, описывающее изменение трансмембранного потенциала клетки

$$RC\dot{V} + V - IR - V_0 = 0. \quad (2)$$

Переменные и параметры уравнения (2) имеют следующий смысл: $V(t)$ – электрический потенциал клетки; R и C – резистивная и емкостная компоненты мембраны, соответственно; $I(t)$ – подаваемый внешний ток; V_0 – потенциал покоя (начальное условие).

В данной работе производится поиск и исследование оптимальной формы внешнего воздействия на качественно подобную линейную динамическую систему

$$\dot{x} = -\alpha x + u(t), \quad (3)$$

в которой опущен биологический смысл переменных уравнения (2). Уравнение (3) получается из (2) при следующих заменах: $V(t) = x(t)$, $1/(RC) = \alpha$, $I(t)/C = u(t)$ и $V_0 = x(0) = 0$. Система (3) при $u(t) = 0$ и $\alpha > 0$ имеет устойчивое состояние равновесие $\bar{x} = 0$.

Под критерием оптимальности в работе понимается наименьшее количество энергии [9]

$$\xi = \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

необходимое на совершение воздействия, возбуждающего динамическую систему. Это условие является весьма важным, поскольку чем меньше воздействие по мощности, тем меньше разрушение наносит оно как одной клетке, так и органу в целом.

Задачи на отыскание минимальной энергии оптимального управления уже решались в теории оптимального управления линейными системами. Наиболее наглядными примерами являются управление полетом реактивного аппарата, которое осуществляется выбором реактивного ускорения с минимальным расходом рабочего тела [10], и поворот вала двигателя постоянного тока с управлением по току возбуждения [11]. В ряде случаев целью управления является стабилизация заданного программного движения, то есть удержание истинной траектории движения в некоторой окрестности желаемой траектории. Тогда подынтегральная часть целевого

функционала (4) должна характеризовать отклонение реальной траектории от программной. Довольно часто для этой цели используют квадратичные функционалы, частным случаем которых и является функционал (4).

Таким образом, первая часть данной работы, в которой описывается управление линейной системой, в некоторой степени является приложением к уже известным результатам. Заметим, что, в основном, решение задач оптимального управления опирается на принцип максимума Л.С. Понтрягина [12]. Данный способ имеет существенные недостатки, а именно: разрывную правую часть динамической системы, увеличение размерности системы, наличие различных типов ограничений, в том числе на управление и фазовые координаты. Целью данной работы является определение непрерывной фазовой траектории под воздействием непрерывного оптимального управления на линейную и нелинейную динамические системы. Поставленная задача в статье разрешена методом множителей Лагранжа с применением элементов теории динамических систем.

Из наиболее близких работ по поиску оптимального сигнала управления для биологических пороговых систем можно назвать работу [13]. Предложенный в ней метод определения сигнала, приводящего к активации возбудимой динамической системы при энергии сигнала, близкой к минимальной, основывается на записи и обработке реализаций внешнего шума, предшествующих активации, и дает квазиоптимальный сигнал. В настоящей статье рассматривается детерминированная система, конечное состояние которой однозначно определяется оказанным на нее управляющим воздействием. Применение метода множителей Лагранжа [10, 12] позволяет найти единственный оптимальный сигнал, активирующий возбудимую динамическую систему, с наименьшей затраченной на это энергией.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления динамической системой по переводу изображающей точки из устойчивого состояния равновесия \bar{x} ($\alpha > 0$) в заданную точку $x(T) = \Delta$ ($\Delta > 0$) за определенное время T с наименьшим затраченным на это количеством энергии ξ_{\min}

$$\begin{aligned} J_0(u) = \xi_{\min} &= \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= -\alpha x + u(t), \\ J_1(u) = x(0) &= 0, \\ J_2(u) = x(T) - \Delta &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Под активацией одномерной динамической системы (5) внешним воздействием $u(t)$ здесь понимается достижение переменной $x(t)$ некоторого финального положения $x(T) = \Delta$.

2. Метод множителей Лагранжа

Удобным и эффективным методом получения необходимых условий оптимальности в конечномерных задачах оптимизации и в вариационном исчислении является

метод множителей Лагранжа. Используя понятие множителей Лагранжа, приведем необходимые условия оптимальности для задачи (5).

Пусть решение задачи (5) существует и имеет вид $(T, u(t), x(t))$. Здесь $u(t)$ – оптимальное управление, $x(t)$ – оптимальный закон движения, T – фиксированное время воздействия.

Функция $F = (u^2(t), 0, 0)$, состоящая из подынтегральных выражений функционалов $J_i, i = \overline{0, 2}$, и функция $\varphi = (0, x(0), x(T) - \Delta)$, состоящая из терминальных выражений функционалов $J_i, i = \overline{0, 2}$, являются непрерывными в некоторой окрестности $(x(t), u(t), t), t \in [0, T]$.

Согласно теореме, описывающей метод множителей Лагранжа [10, 12], существуют такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ и функция $\psi(t) \in R^1$, причем ψ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, и при этом справедливы:

- уравнение (3);
- уравнение Эйлера (сопряженная задача)

$$\dot{\psi} = -H_x(t, x, u, \psi) = \alpha\psi, \quad (6)$$

где $H = \psi(-\alpha x + u) + \lambda_0 u^2$ – функция Гамильтона;

- условия трансверсальности

$$\psi(0) = -\varphi_{x(0)}(0, x(0), T, x(T))\lambda = -\lambda_1, \quad (7)$$

$$\psi(T) = \varphi_{x(T)}(0, x(0), T, x(T))\lambda = \lambda_2,$$

где $\varphi_{x(0)} = (0, 1, 0)$, $\varphi_{x(T)} = (0, 0, 1)$;

- условие стационарности ($H_u = 0$)

$$\psi + 2\lambda_0 u = 0; \quad (8)$$

- условие неположительности

$$\lambda_0 \leq 0. \quad (9)$$

Способ определения оптимального управления, основанный на приведенных выше необходимых условиях оптимальности, состоит в выполнении следующих шагов.

1. Из условия стационарности (8) находим управление $u(t)$ в виде функции $\psi(t)$ и множителей Лагранжа λ .

2. Разрешаем уравнение Эйлера (6) с использованием условий трансверсальности (7) и получаем $\psi(t)$.

3. Подставляем найденное $\psi(t)$ в $u(t)$, а затем в (3), и из него с граничными условиями из (5) выражаем оптимальный закон движения $x(t)$.

4. Определяем оптимальное количество энергии ξ_{\min} по формуле (4).

Ниже получим аналитические выражения для оптимального управления и закона движения.

3. Аналитические результаты

В результате применения метода множителей Лагранжа оптимальная форма внешнего воздействия $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} \frac{2\alpha\Delta e^{\alpha(t-T)}}{1 - e^{-2\alpha T}}, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases} \quad (10)$$

в которую явно входит собственное число α системы (3), определяющее характер ее поведения. Воздействие (10) позволяет вывести динамическую систему (3) из устойчивого состояния равновесия $x(0) = 0$ на заданное расстояние Δ по оптимальному закону

$$x(t) = \frac{\Delta e^{-\alpha T}}{1 - e^{-2\alpha T}} [e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}]. \quad (11)$$

Количество затраченной энергии ξ_{\min} на совершенное воздействие (10) определяется выражением

$$\xi_{\min} = \frac{2\alpha\Delta^2}{1 - e^{-2\alpha T}}, \quad (12)$$

полученным подстановкой (10) в ξ_{\min} из (5).

Заметим, что с увеличением длительности T внешнего воздействия (10) уменьшается количество подаваемой энергии ξ_{\min} (обратное также справедливо, рис. 1, а). Причем при $T \rightarrow +\infty$ мощность стимула будет равна предельной величине $\xi_{+\infty} = 2\alpha\Delta^2$ (рис. 1, б). Это означает, что как бы долго ни было приложено воздействие, затраты на его осуществление всегда будут отличны от нуля. Справедливость данного факта следует из взаимно-обратной задачи на быстроедействие

$$\begin{aligned} J_0(u) &= T \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= -\alpha x + u(t), \\ J_1(u) &= x(0) = 0, \\ J_2(u) &= x(T) - \Delta = 0, \\ J_3(u) &= \xi - \int_0^T u^2(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

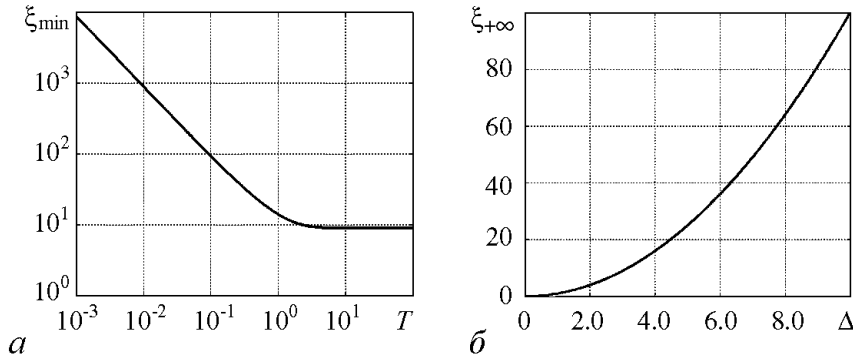


Рис. 1. Изменение мощности внешнего воздействия (10) при увеличении его продолжительности T в случае $\Delta = 3$ и $\alpha = 0.5$ (а); зависимость предельной величины количества подаваемой энергии $\xi_{+\infty}$ от заданного расстояния Δ (б)

В этой задаче требуется в наикратчайшее время перевести динамическую систему (3) из устойчивого состояния равновесия $x(0) = 0$ ($\alpha > 0$) в состояние $x(T) = \Delta > 0$ посредством определенного количества энергии ξ . Таким образом, в данной задаче величина $\xi_{+\infty}$ ограничивает количество подаваемой энергии ξ , являющееся параметром, то есть под воздействием с заданной мощностью $\xi < \xi_{+\infty}$ перевод динамической системы (3) из начального состояния на заданное расстояние Δ невозможен.

Таким образом, в исходной задаче (5) найденное оптимальное управление $u(t)$ (10) малой мощности ξ_{\min} (12) и соответствующая ему временная реализация фазовой переменной $x(t)$ (11) являются единственными при достижении изображающей точкой состояния $x(T) = \Delta$ за время T .

Подтверждением тому является фазовый портрет динамической системы, полученной из (3) и (6)

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x + \psi, \\ \dot{\psi} = \alpha \psi \end{cases} \quad (14)$$

в предположении, что $u(t) \equiv \psi(t)$ при $\lambda_0 = -1/2$. В фазовом пространстве динамической системы (14) существует лишь одна фазовая траектория $\psi(x)$, стартующая с прямой $x = 0$ и заканчивающаяся на $x = \Delta$ через заданное время T . Располагается кривая $\psi(x)$ в первом квадранте фазового пространства (x, ψ) , выше выходящей сепаратрисы седла $(0; 0)$, поэтому начальное значение $\psi(0)$ всегда больше нуля и стремится к нулю при $T \rightarrow +\infty$.

4. Эффективность оптимальной формы воздействия малой мощности

Для демонстрации эффективности найденного оптимального управления (10) рассмотрим также внешнее воздействие прямоугольной формы, которое наиболее часто используется на практике

$$u_{\text{rec}}(t) = \begin{cases} \Delta_1, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases} \quad (15)$$

Оно также выводит систему (3) из состояния равновесия $x(0) = 0$ на расстояние Δ за время T . Таким образом, требуется решить краевую задачу поиска интегральной кривой для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x + \Delta_1, \\ x(0) &= 0, \\ x(T) &= \Delta. \end{aligned} \quad (16)$$

Решением задачи (16) является кривая

$$x_{\text{rec}}(t) = \Delta_1(1 - e^{-\alpha t})/\alpha, \quad (17)$$

полученная под управлением (15),

$$\Delta_1 = \frac{\alpha \Delta}{1 - e^{-\alpha T}}. \quad (18)$$

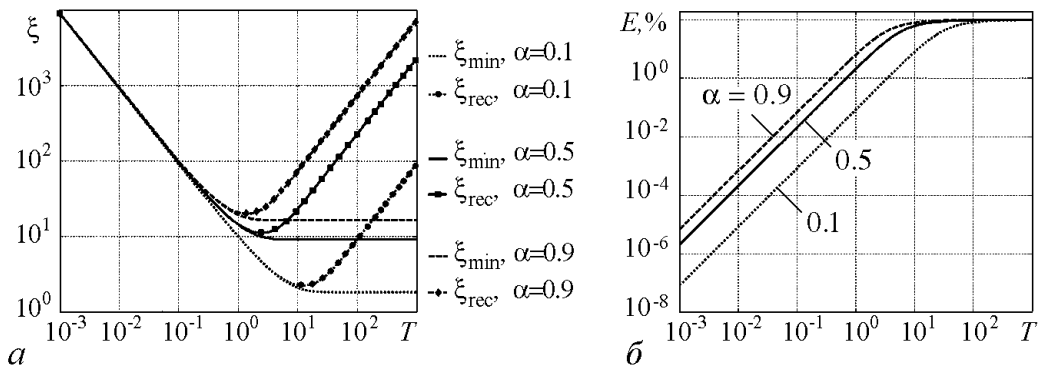


Рис. 2. Зависимости мощностей ξ_{\min} и ξ_{rec} соответствующих воздействий (10) и (15) от времени (а) и экономии энергии от времени при различных значениях параметра α (б)

При этом количество энергии, затраченное на данное воздействие, определяется выражением

$$\xi_{\text{rec}} = \frac{\alpha^2 \Delta^2 T}{(1 - e^{-\alpha T})^2}. \quad (19)$$

Сравним эффективность двух рассмотренных видов воздействий. Пусть продолжительностью воздействия для рассматриваемых управлений будет одинаковая величина T . Тогда количество энергии ξ_{\min} , затраченное на воздействие (10), всегда будет меньше, чем у импульса прямоугольной формы ξ_{rec} (рис. 2, а). Причем при $\alpha \rightarrow 0$ количество подаваемой энергии в целом уменьшается. Разницу в процентном соотношении между значениями ξ_{\min} и ξ_{rec} назовем экономией энергии при совершении воздействия (10), которую можно выразить следующим образом:

$$E = 100 \left(\frac{\xi_{\text{rec}} - \xi_{\min}}{\xi_{\text{rec}}} \right) \% \Leftrightarrow E = 100 - \frac{200(1 - e^{-\alpha T})}{\alpha T(1 + e^{-\alpha T})}. \quad (20)$$

Это выражение получено из предположения, что $\xi_{\text{rec}} = 100\%$ и показывает, на сколько процентов меньше может быть степень повреждения клетки оптимальным воздействием $u(t)$ (10) по сравнению с прямоугольным воздействием $u_{\text{rec}}(t)$ (15). Это следует из того, что уменьшение энергии на подачу воздействия приводит к уменьшению количества тепла, выделенного при этом. В свою очередь, чем меньше воздействие на живую клетку, тем меньше степень ее повреждения. К примеру, за время $T = 5$ энергозатраты на вывод системы (3) (рис. 3) из устойчивого состояния равновесия x_0 на расстояние $\Delta = 3$ под воздействиями (10) и (15) составят, соответственно, $\xi_{\min} = 9.0611$ и $\xi_{\text{rec}} = 13.3520$. Тогда, по формуле (20) экономия энергии подаваемого воздействия (10) составляет 32.13%.

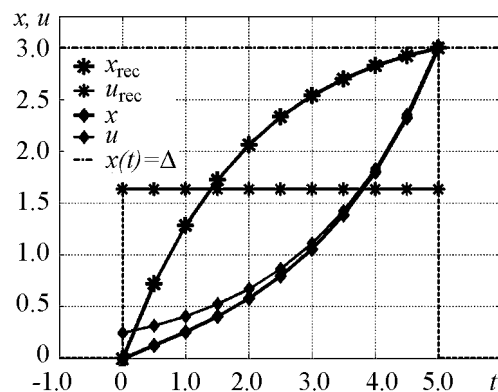


Рис. 3. Активация системы (3) при $\alpha = 0.5$. Пороговое значение $x(T) = \Delta = 3$. Представлены эволюции переменных x и x_{rec} под внешними воздействиями $u(t)$ (10) и $u_{\text{rec}}(t)$ (15) продолжительностью $T = 5$

Для активации трансмембранного потенциала (2) желудочкового кардиомиоцита (его форма близка к цилиндрической и имеет следующие размеры: длина клетки 100 мкм, диаметр 20 мкм [14, 15]) при $\alpha = 1/(RC) = 1/(4 \cdot 10^5 \text{ [Ом]} \times 63 \cdot 10^{-9} \text{ [мФ]}) = 5/126 \text{ [мс}^{-1}\text{]}$ и длительности воздействий (10) и (15) $T = 0.1 \text{ мс}$ энергозатраты составят $\xi_{\min} = 2.836 \cdot 10^{-10} \text{ мс} \cdot \text{мА}^2$, $\xi_{\text{rec}} = 5.8439 \cdot 10^{-10} \text{ мс} \cdot \text{мА}^2$, что даст экономию $E = 51.47\%$. Учитывая малые размеры клетки, полученные результаты являются весьма существенными.

Из рис. 2, б видно, что величина E положительна, а значит, степень повреждения при воздействии (10) всегда ниже, чем при воздействии прямоугольной формы (15). Скорость стремления величины E к 100% при $T \rightarrow +\infty$ увеличивается при $\alpha \rightarrow 1$.

Выше было показано, что с уменьшением длительности воздействия T увеличивается его мощность ξ_{\min} . Согласно этому можно найти такой временной интервал для воздействия (10), в котором финальное состояние $x(T) = \Delta$ системы (3) достигается с меньшей мощностью и продолжительностью, чем под прямоугольным воздействием (15). Тогда получается система неравенств

$$\begin{cases} \xi_{\min} < \xi_{\text{rec}}, \\ T < T_{\text{rec}}, \end{cases} \quad (21)$$

решением которой является интервал

$$-\frac{1}{2\alpha} \ln \left(1 - \frac{2(1 - e^{-\alpha T_{\text{rec}}})^2}{\alpha T_{\text{rec}}} \right) < T < T_{\text{rec}}. \quad (22)$$

Для рассмотренного выше примера (см. рис. 3) параметрами в системе (21) являются: $\xi_{\text{rec}} = 13.3520$, $T_{\text{rec}} = 5$. Тогда временной интервал (22) составляет $1.121 < T < 5$, и соответствующая ему экономия энергии воздействия (10) изменится от 0 до 32.13%. Уменьшение длительности воздействия в два раза ($T = 2.5$) дает ощутимую экономию энергии (26.56%).

Задача поиска затраченной энергии (16) имеет единственное решение, то есть заданному времени T_{rec} соответствует единственное значение ξ_{rec} (см. рис. 2, а). Однако обратная задача к задаче (16)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x + u(t), \\ x(0) &= 0, \\ x(T) &= \Delta, \\ \int_0^T u^2(t) dt &= \xi_{\text{rec}}, \end{aligned} \quad (23)$$

в которой определяется продолжительность T воздействия $u(t) \equiv \Delta_1$ заданной мощности ξ_{rec} , переводящего систему (3) из состояния равновесия $x(0) = 0$ на расстояние Δ , теряет единственность решения. Это следует из того, что выражение (19) в задаче (23) является трансцендентным уравнением относительно T при известном ξ_{rec} . Зависимость ξ_{rec} от T является квадратичной (см. рис. 2, а), поэтому одной и той же

мощности прямоугольного воздействия соответствуют два значения его продолжительности (рис. 4). Однако существует определенное значение мощности, которому соответствует единственное значение продолжительности воздействия (при $T \neq 0$), находящееся в стационарной точке выражения (19) и определяемое из уравнения

$$e^{\alpha T} = 1 + 2\alpha T. \quad (24)$$

Неоднозначность в задаче (23) легко устраняется путем выбора наименьшего значения T среди имеющихся, если рассматривать сравнение с задачей быстрогодействия (13).

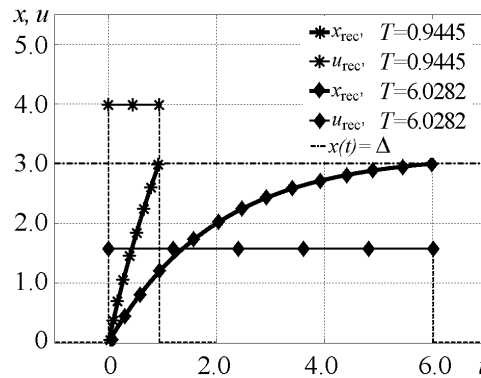


Рис. 4. Активация системы (3) при $\alpha = 0.5$. Пороговое значение $x(T) = \Delta = 3$. Эволюция переменной x под внешним прямоугольным воздействием $u_{\text{rec}}(t)$ мощностью $\xi_{\text{rec}} = 15$ и продолжительностями: $T = 0.9445$ и $T = 6.0282$

5. Активация нелинейной динамической системы первого порядка

Рассмотрим задачу управления нелинейной динамической системой первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\beta x - \alpha) + u, \\ x(0) &= 0, \\ x(T) &= \Delta, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\Delta > \alpha/\beta$ – заданный параметр.

Данная система без возмущения ($u(t) = 0$) имеет два состояния равновесия: устойчивое ($x = 0$) и неустойчивое ($x = \alpha/\beta$). Задача активации сводится к переводу системы из начального состояния – устойчивого состояния равновесия $x(0) = 0$ на расстояние $x(T) = \Delta > \alpha/\beta$ посредством воздействия $u(t)$ за заданное время T .

5.1. Оптимальная форма воздействия. Для поиска воздействия оптимальной формы на систему (25) снова воспользуемся критерием оптимальности (4) и методом множителей Лагранжа, который сводится к краевой задаче для нелинейной динамической системы второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\beta x - \alpha) + u(t), \\ \dot{\psi} = \psi(\alpha - 2\beta x) \end{cases} \quad (26)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \psi(0) = -\lambda_1 \end{cases} \quad (27)$$

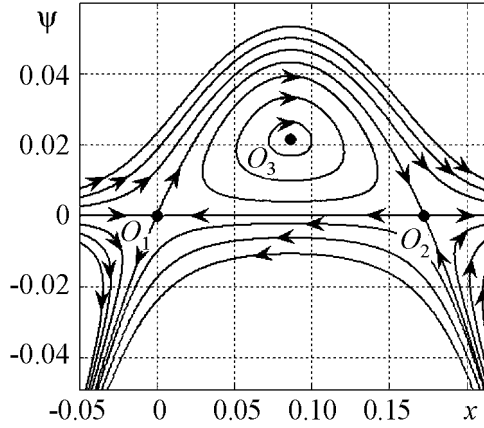


Рис. 5. Фазовый портрет динамической системы (31) при $\alpha = 0.5$, $\beta = 2.9$, $\Delta = 3$

и предполагая, что $\lambda_0 = -1/2$, получим тождественное совпадение оптимального управления $u(t)$ и решения сопряженной задачи $\psi(t)$

$$u(t) \equiv \begin{cases} \psi(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases} \quad (30)$$

Таким образом, систему (26) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\beta x - \alpha) + \psi, \\ \dot{\psi} = \psi(\alpha - 2\beta x). \end{cases} \quad (31)$$

Нелинейная краевая задача (27), (28), (31) неразрешима аналитически, поэтому ее решение определяется численно. При численном анализе воспользуемся следующим качественным исследованием нелинейной динамической системы (31).

Фазовый портрет (31) (рис. 5) является симметричным относительно прямой $x = \alpha/(2\beta)$. Система имеет три состояния равновесия: два седла $O_1(0; 0)$, $O_2(\alpha/\beta; 0)$ и центр $O_3(\alpha/(2\beta); \alpha^2/(4\beta))$. Задача активации состоит в переводе системы (31) из состояния равновесия $(0; 0)$ на расстояние Δ по абсциссе, то есть правее состояния равновесия $(\alpha/\beta; 0)$, за заданное время T . Это возможно осуществить только по траекториям, лежащим в первом квадранте фазового пространства системы (31) выше сепаратрисы, идущей из седла $(0; 0)$ в седло $(\alpha/\beta; 0)$. Поэтому $\psi(0) > 0$. Найденная функция $\psi(t)$ будет оптимальным управлением $u(t)$ в динамической системе (25) при достижении финального состояния с наименьшим количеством подаваемой энергии ξ_{\min} (4).

Таким образом, для численной реализации оптимального внешнего воздействия (30) на нелинейную динамическую систему (25) имеем задачу (31) с граничными условиями (27) и (28), где $\psi(0)$ больше нуля, и стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$.

Результатом численной реализации поставленной задачи является оптимальное внешнее воздействие u и соответствующая ему оптимальная эволюция переменной x . Форма данного воздействия близка к колоколообразной, а мощность убывает с увеличением его продолжительности. Заметим, что данная форма воздействия качественно останется неизменной для систем с квадратичной нелинейностью. Результаты и сравнение эффективности различных форм воздействий приведены далее.

и финальными условиями

$$\begin{cases} x(T) = \Delta, \\ \psi(T) = \lambda_2. \end{cases} \quad (28)$$

Функция Гамильтона в данном случае имеет вид $H(t, x, u, \psi) = \psi(\beta x^2 - \alpha x + u) + \lambda_0 u^2$. Учитывая условие ее стационарности (8), имеем

$$u = -\frac{\psi}{2\lambda_0}, \quad (29)$$

5.2. Прямоугольная форма воздействия. Рассмотрим задачу активации нелинейной системы (25) с помощью прямоугольного воздействия

$$u = u_{\text{rec}} = \begin{cases} \Delta_1, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases} \quad (32)$$

определенным из трансцендентного уравнения

$$\frac{2\beta\Delta - \alpha}{\sqrt{4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2}} = \text{tg} \left(\left[\sqrt{4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2} T - \arctg(\alpha/\sqrt{4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2}) \right] / 2 \right). \quad (33)$$

Решением задачи (25) является следующее выражение для эволюции переменной x_{rec}

$$x_{\text{rec}}(t) = \frac{1}{2\beta} \left[\alpha + \sqrt{4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2} \times \right. \\ \left. \times \text{tg} \left(\left[\sqrt{4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2} t - 2 \arctg(\alpha/\sqrt{4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2}) \right] / 2 \right) \right], \quad (34)$$

где $4\beta u_{\text{rec}} - \alpha^2 > 0$.

Численной реализацией данной задачи является ступенчатое управление u_{rec} с соответствующей эволюцией переменной x_{rec} . Причем мощность воздействия увеличивается с увеличением его продолжительности.

5.3. Сравнение форм воздействий. Для сравнения эффективности двух форм воздействия возьмем рассмотренные ранее значения параметров $T = 5$, $\Delta = 3$, $\alpha = 0.5$ и $\beta = 0.9$. При данных значениях видно (рис. 6), что переменная x при любых t располагается выше переменной x_{rec} , а внешнее воздействие $u(t)$ охватывает меньшую площадь, чем воздействие u_{rec} . Это означает, что количество энергии, затраченной на оптимальное воздействие, значительно меньше, чем на воздействие прямоугольной формы. В нелинейной системе (25) количество затраченной энергии на воздействие $u(t)$ (30) равно $\xi_{\text{min}} = 0.2275$, а на воздействие $u_{\text{rec}}(t)$ (32) составляет $\xi_{\text{rec}} = 0.2949$, при этом экономия количества энергии (20) составляет $E = 22.84\%$. Величины E для линейного случая и для нелинейного случая при фиксированных значениях параметров различаются.

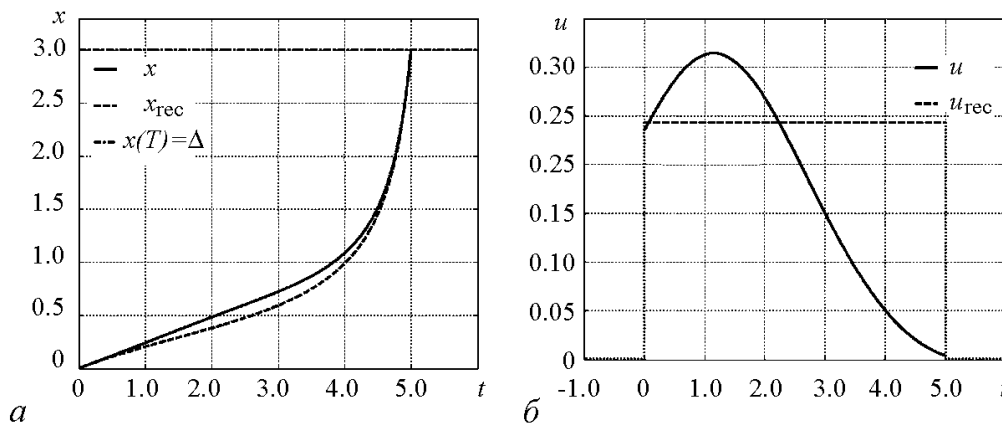


Рис. 6. Вывод системы (25) из устойчивого состояния равновесия $x(0) = 0$ на расстояние $\Delta = 3$ за время $T = 5$ при $\alpha = 0.5$ под внешними воздействиями: $u(t)$ (30) и $u_{\text{rec}}(t)$ (32). *a* – Достижение порогового значения $x(T) = \Delta = 3$ эволюцией переменных x и x_{rec} ; *b* – внешние воздействия u и u_{rec}

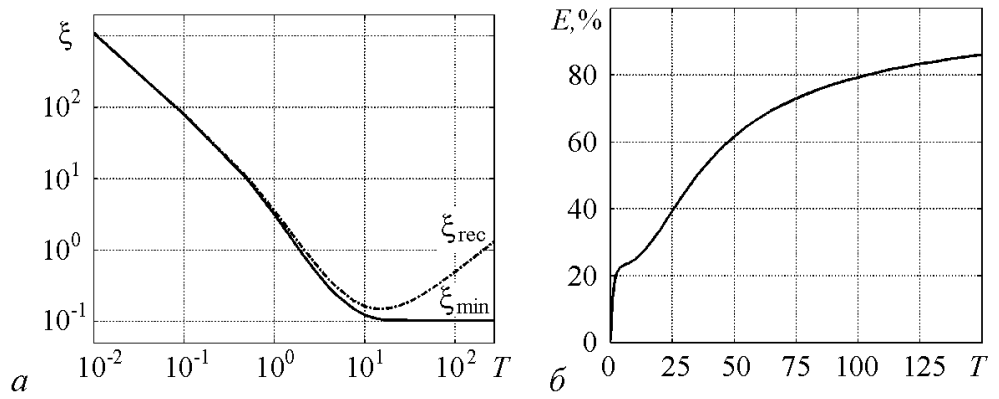


Рис. 7. Зависимости количества затраченной энергии на воздействия $u(t)$ (30) и $u_{rec}(t)$ (32) от их продолжительности (а) и экономии энергии оптимального воздействия (30) от времени (б)

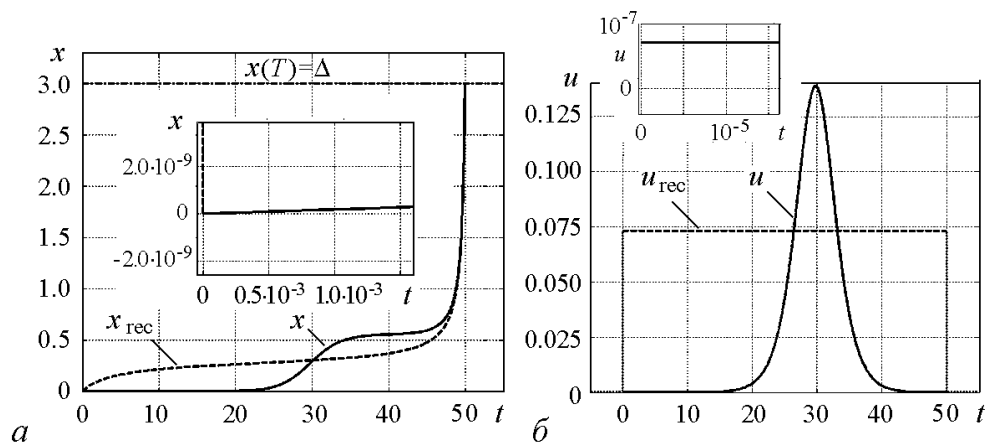


Рис. 8. Вывод системы (25) из устойчивого состояния равновесия $x(0) = 0$ на расстояние $\Delta = 3$ за время $T = 50$ при $\alpha = 0.5$ под внешними воздействиями: $u(t)$ (30) и $u_{rec}(t)$ (32). Достижение порогового значения $x(T) = \Delta = 3$ эволюцией переменных x и x_{rec} (а); внешние воздействия u и u_{rec} (б)

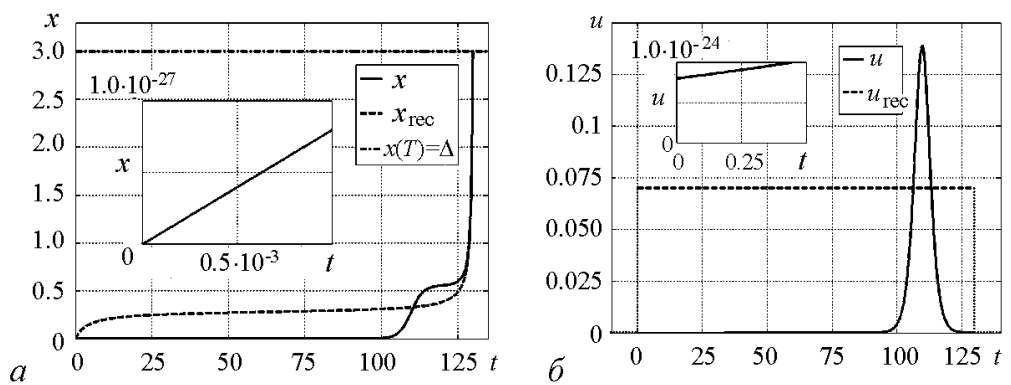


Рис. 9. Вывод системы (25) из устойчивого состояния равновесия $x(0) = 0$ на расстояние $\Delta = 3$ за время $T = 130$ при $\alpha = 0.5$ под внешними воздействиями: $u(t)$ (30) и $u_{rec}(t)$ (32). Достижение порогового значения $x(T) = \Delta = 3$ эволюцией переменных x и x_{rec} (а); внешние воздействия u и u_{rec} (б)

Увеличение продолжительности воздействия (30), так же как и в линейном случае, приводит к увеличению экономии количества энергии E (рис. 7). Так, при воздействии на систему (25) внешним стимулом (30) оптимальной формы в течение $T = 50$ значение экономии количества энергии от подачи прямоугольного стимула той же продолжительности составит $E = 61.56\%$ (рис. 7, б, рис. 8). С увеличением продолжительности воздействия до $T = 130$ происходит увеличение экономии количества энергии $E = 83.87\%$ (см. рис. 7, б, рис. 9). Заметим, что увеличение времени воздействия не изменяет качественного вида оптимальной формы сигнала. Кривая, соответствующая данному воздействию, имеет параболическую форму, максимум которой достигается в момент прохождения траектории $\psi(x)$ динамической системы (31) через абсциссу $x = \alpha/(2\beta)$ состояния равновесия типа центр O_3 . Так как стимул оптимальной формы имеет малую мощность (рис. 8, б и 9, б), то большая часть времени его воздействия (при достаточно большом значении T) затрачивается на вывод системы (31) из малой окрестности состояния равновесия типа седло O_1 , поскольку $\psi(0) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Из-за достаточно долгого выхода из окрестности состояния равновесия, соответствующего длительному близкому к нулю начальному воздействию, удается снизить мощность оптимального воздействия. Эта мощность уменьшается с увеличением продолжительности воздействия.

Во время нахождения изображаемой точки в окрестности состояния равновесия типа седло оптимальное воздействие (30) изменяется по экспоненциальному закону, что соответствует оптимальному управлению (10) в линейном случае. При этом значения амплитуды и аргумента экспоненты для обоих случаев совпадают с точностью до $2.5 \cdot 10^{-8}$, а за показатель экспоненты отвечает одно и то же собственное число α .

Заключение

В работе представлены оптимальные формы внешних воздействий малой мощности для линейной и нелинейной динамических систем первого порядка. Установлено, что в малой окрестности состояния равновесия, в котором находится система в начальный момент времени, оптимальные воздействия изменяются по экспоненциальному закону с совпадающими с точностью до $2.5 \cdot 10^{-8}$ амплитудой и аргументом экспоненты. За показатель экспоненты отвечает собственное число α , определяющее характер поведения динамической системы. Это означает, что оптимальный вывод системы из устойчивого состояния равновесия происходит по тому же закону, что и при стремлении к нему, но в обратном времени, в случае отсутствия воздействия.

Было показано, что при длительном импульсе мощность, необходимая для возбуждения, может быть небольшой. По мере сокращения длительности импульса необходимо увеличивать мощность, чтобы он сохранял свою эффективность в качестве раздражителя и приводил к возникновению потенциала действия.

Показано, что воздействие оптимальной формы имеет существенно меньшую мощность по сравнению с воздействием прямоугольной формы. Уменьшение мощности сигнала приводит к уменьшению количества тепла, выделяемого при этом. Этот факт весьма важен, поскольку чем больше тепловое воздействие на живую клетку, тем больше степень ее повреждения. Таким образом, можно резюмировать,

что оптимальное воздействие наносит меньшую степень повреждения клетке, чем прямоугольное. Это, в свою очередь, предотвращает возможное нарушение электрической проводимости в сердечной мышце и появление повторных фибрилляций.

Благодарим Баландина Д.В. и Половинкина А.В. за полезные советы и обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Федеральных целевых программ: «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013гг. (контракты № 14.740.11.0919) и «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России» на 2007–2013 гг. (контракты № 11.519.11.2015, 11.519.11.2022); при поддержке РФФИ (гранты 10-02-00940, 11-02-92003, 11-07-97013).

Библиографический список

1. Торшин В.И., Власова В.М., Агаджанян Н.А. Основы физиологии человека. М.: РУДН, 2001. С. 408.
2. Исаков И.И., Кушаковский М.С., Журавлева Н.Б. Клиническая электрокардиография. Л.: Медицина, Ленинградское отделение, 1984. С. 145.
3. Гусельников В.И. Электрофизиология головного мозга. М.: Высшая школа, 1976. С. 423.
4. Смирнова Г.О., Силуянов С.В. Периферическая электрогастроэнтерография в клинической практике. Пособие для врачей / Под ред. профессора В.А. Ступина. М.: 2009. С. 20.
5. Юсевич Ю.С. Очерки по клинической электромиографии. М.: Медицина, 1972. С. 128.
6. Гурвич Н.Л. Основные принципы дефибрилляции сердца. М.: Медицина, 1975. С. 231.
7. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane currents and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. Vol. 117. P. 500.
8. Камкин А.Г. Фундаментальная и клиническая физиология / Под ред. А.А. Каменского. М.: АКАДЕМИА, 2004. С. 1072.
9. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. С. 476.
10. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. С. 615.
11. Атанс М., Фалб П.Л. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. С. 764.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. С. 430.
13. Половинкин А.В., Крюков А.К. Восстановление квазиоптимального сигнала активации возбудимых систем по предшествующим реализациям шума // Известия вузов. Радиофизика. 2010. Т. LIII, № 1. С. 60.

14. *Афанасьева Ю.И., Юрина Н.А.* Гистология, цитология и эмбриология. М.: Медицина, 2002. С. 744.
15. *Грачева С.В., Иванова Г.Г., Сыркина А.Л.* Новые методы электрокардиографии. М.: Техносфера, 2007. С. 552.

*Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского*

*Поступила в редакцию 9.12.2011
После доработки 19.01.2012*

OPTIMUM EXTERNAL IMPULSE OF LOW POWER FOR ACTIVATION OF ONE-DIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEM

S.A. Grigoryeva, G.V. Osipov

In this paper we study the optimum form of external influence with low power necessary for activation of one-dimensional dynamical system. The Lagrange multipliers method is used. Optimum influence with low power and optimum law of change of a dynamical system state are determined analytically for linear dynamical system and numerically for nonlinear dynamical system. The opportunity of influence power reduction vs its duration is investigated. The efficiency of optimum influence expressed in economy of energy quantity, spent on it, in comparison to rectangular influence is studied.

Keywords: Optimum form of external influence, activation of dynamical system, Lagrange multipliers method, power of influence.



Григорьева Светлана Анатольевна – родилась в Нижнем Новгороде (1985), окончила Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). В 2008–2011 годах училась в аспирантуре на кафедре теории управления и динамики машин факультета ВМК Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Область научных интересов: оптимальное управление, нелинейная динамика, математическое моделирование. Соавтор 1 учебно-методической и 5 научных работ. Участница российских и международных научных проектов.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: sv.grigoryeva@gmail.com



Осипов Григорий Владимирович – родился в Горьком (1960), окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982). В 1986–1988 годах учился в аспирантуре Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» (НСК) АН СССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НСК (1988) по математическому моделированию и доктора физико-математических наук в ННГУ (2004) по радиофизике. С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года – заведующий кафедрой теории управления и динамики машин. Соавтор монографий «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал 128 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию. Руководитель российских и международных научных проектов.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: osipov@vmk.unn.ru