

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ НА ЭВОЛЮЦИЮ ТРЕХМЕРНОГО ТОРА В НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЕ

Е.С. Попова

На примере неавтономной системы с квазипериодическим воздействием исследуется переход к хаосу через разрушение трехмерного тора. Проводится анализ влияния аддитивного шума и флуктуаций частоты воздействия на устойчивость трехмерного тора. Показано, что при воздействии аддитивного шума и флуктуаций частоты воздействия ляпуновский показатель остается отрицательным. Последнее позволяет сделать вывод, что в отличие от автономных систем в данной модели трехмерный тор является структурно-устойчивым.

Ключевые слова: Трехмерный тор, квазипериодическое воздействие, влияние шума, показатель Ляпунова, странный нехаотический аттрактор.

В работе на примере квадратичного отображения с квазипериодическим воздействием исследуется влияние флуктуаций на эволюцию трехмерного тора. Интерес к данной проблеме вызван тем, что в автономных системах, как было показано Д. Рюэлем и Ф. Такенсом [1,2], квазипериодические движения с тремя и более несоизмеримыми частотами в спектре колебаний являются структурно-неустойчивыми и разрушаются при воздействии шумов или вариации управляющих параметров. Однако, как было показано в [3–9], случайные возмущения не всегда разрушают трехчастотные квазипериодические движения, более того, в [10] экспериментально были обнаружены движения с четырьмя и даже пятью несоизмеримыми частотами.

Интерес к изучению эволюции трехмерного тора в неавтономных системах обусловлен тем, что некоторые тонкие детали квазипериодической динамики трудно выявить в автономных системах, но их можно успешно анализировать в нелинейных системах с внешним квазипериодическим воздействием. В автономных системах характерные частоты определяются внутренней динамикой, и управлять ими независимо от других параметров трудно, если вообще возможно. Эффекты синхронизации не позволяют проследить эволюцию тора при изменении управляющего параметра, так как, начиная с некоторого критического значения, области существования квазипериодических движений занимают в пространстве параметров множество нулевой меры. В неавтономных системах частоты, представленные в спектре внешнего

воздействия, можно рассматривать как управляющие параметры и задавать их произвольно независимо от значений других параметров.

Целью данной работы является численное исследование влияния аддитивного шума и флуктуаций частот внешнего воздействия на эволюцию трехмерного тора в неавтономной нелинейной модели с дискретным временем.

В качестве объекта исследований использовалось отображение с квазипериодическим воздействием вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \sin(2\pi y_n) + \gamma \sin(2\pi z_n) + \zeta_n, \\ y_{n+1} = y_n + \omega_1 \bmod 1 + \xi_n, \\ z_{n+1} = z_n + \omega_2 \bmod 1 + \xi_n, \end{cases} \quad (1)$$

где λ – управляющий параметр; ε, γ – амплитуды гармонических составляющих воздействия, ω_1, ω_2 – их частоты; ζ_n, ξ_n, ξ_n – шумы. При этом случайные процессы ζ_n и ξ_n моделируют флуктуации частот гармонических составляющих воздействия. Значения частот выбирались как решения уравнений второй и третьей степени $\omega_1 = (\sqrt{5} - 1)/2$, $\omega_2 = 1.324718\dots$ [11]. Вычисления проводились в среде Delphi, шумы формировались стандартной процедурой Random, генерирующей нормальный случайный процесс.

На рис. 1 представлены карты областей колебаний с различными значениями ляпуновских показателей системы (1) в отсутствие шумов при фиксированном

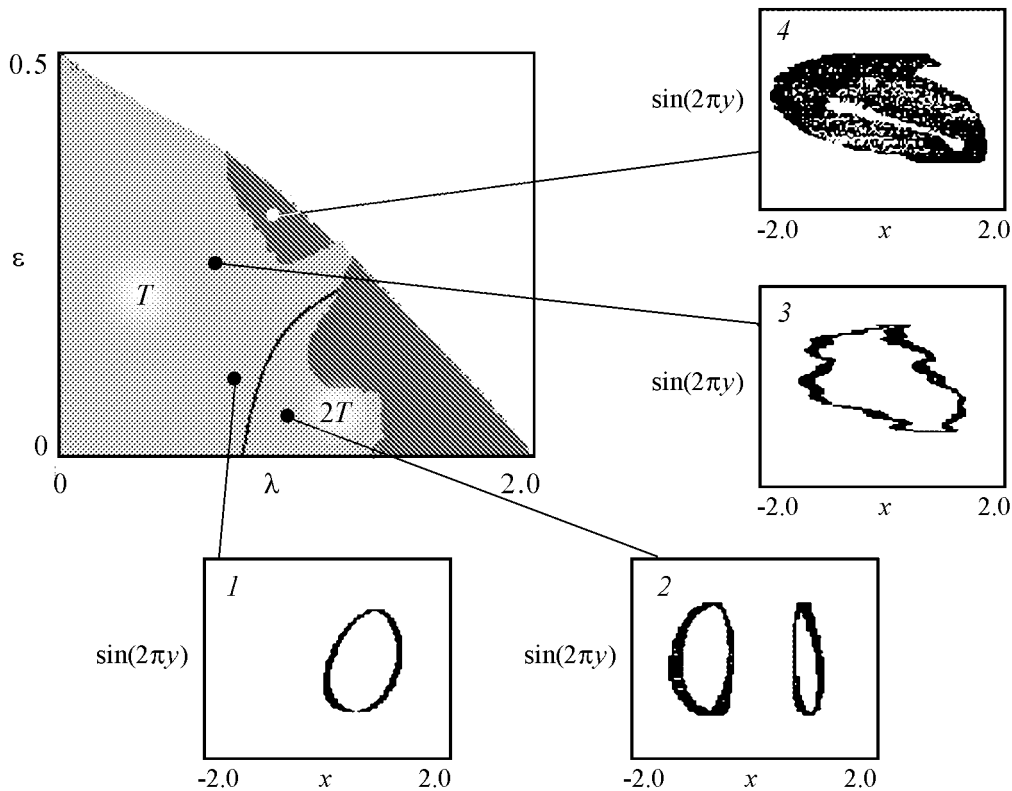


Рис. 1. Плоскость параметров (λ, ε) при фиксированном значении амплитуды воздействия $\gamma = 0.025$ и фазовые портреты в характерных точках: 1 – тор, 2 – удвоенный тор, 3 – странный нехаотический аттрактор, 4 – хаос

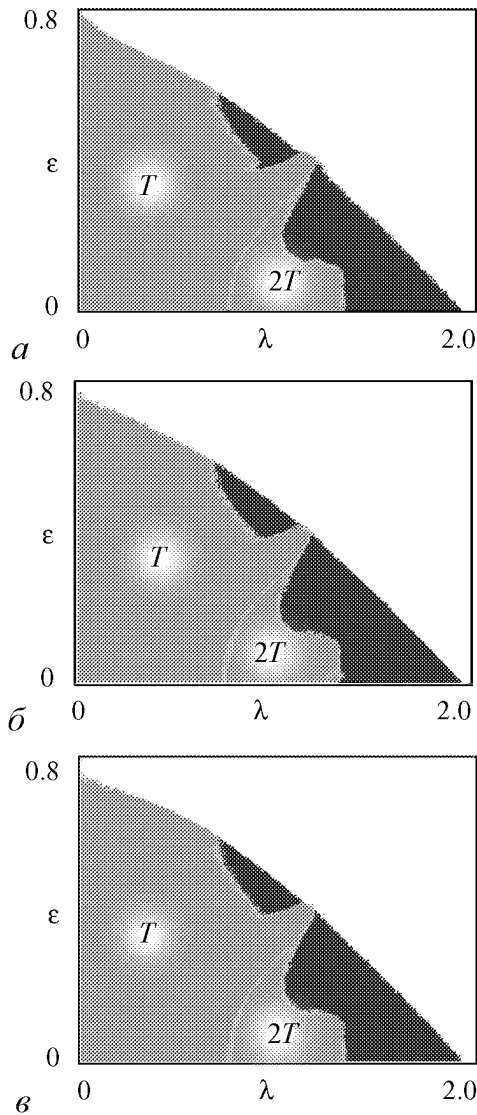


Рис. 2. Карты ляпуновских показателей системы (1) при наличии шумов

устойчивый по Ляпунову режим, обладающий фрактальными свойствами, то есть странный нехаотический аттрактор. Для хаотического аттрактора (фрагмент 4) с положительным значением ляпуновского показателя было получено значение $d_c=2.21$.

Рассмотрим влияние флуктуаций на эволюцию трехмерного тора в системе (1). На рис. 2 представлена карта ляпуновских показателей системы (1) при наличии шумов. Рис. 2, а соответствует присутствию лишь аддитивного шума ζ_n . Дисперсия шума выбиралась такой, что вероятность попадания изображающей точки в область начальных условий, откуда траектория убегает на бесконечность, очень мала. Такой выбор дисперсии позволил генерировать временные реализации динамической переменной длиной не менее чем 40000 отсчетов при наличии шума. Области существования различных режимов на рис. 2, б получены лишь при флуктуации частоты воздействия ζ_n , а на рис. 2, в – при наличии всех случайных процессов ζ_n, ζ_n, ξ_n . Система обозначений аналогична рис. 1, светло-серым цветом отмечены области движений, у которых значения ляпуновского показателя близки к нулю.

значении параметра $\gamma = 0.025$. Серым цветом обозначена область колебаний с отрицательным ляпуновским показателем, темная область соответствует движениям с положительным ляпуновским показателем, белым цветом обозначена область параметров, из которой система «убегает» на бесконечность. Для оценки ляпуновского показателя использовались ряды длиной 40000 отсчетов. В выделенных фрагментах представлены фазовые портреты аттракторов.

Переход к хаосу в данной системе происходит через рождение странного нехаотического аттрактора. Выделенные фрагменты на рис. 1 иллюстрируют аттракторы в сечении Пуанкаре. Фрагмент 1 соответствует гладкому тору, фрагмент 2 – удвоенному тору, 3 – странному нехаотическому аттрактору [12–14], 4 – хаотическому аттрактору. Переход к странному нехаотическому аттрактору определялся на основе совместной оценки корреляционной размерности d_c и ляпуновского показателя. Для гладкого тора (фрагмент 1) было получено значение $d_c = 1.98$, что близко к значению 2.00. Для аттрактора, представленного на фрагменте 3 было получено значение $d_c = 2.11$. Учитывая, что ляпуновский показатель для данного режима меньше нуля, можно считать, что в динамике системы (1) имеет место

Одной из причин разрушения трехчастотных квазипериодических движений под действием шумов в автономных системах является наличие в фазовом пространстве множества неустойчивых орбит. Шумы выбрасывают фазовую траекторию в окрестность неустойчивой орбиты, вследствие чего квазипериодические движения становятся неустойчивыми и разрушаются. Введение аддитивного шума не разрушает трехчастотные квазипериодические движения, области существования режимов с отрицательными значениями ляпуновского показателя на плоскости управляющих параметров сохраняются. Похожая ситуация реализуется в области параметров, где сосуществуют удвоенный тор T2 и неустойчивый тор T1. Как и ранее, в процессе движения случайные флуктуации ζ_n выбрасывают фазовую траекторию в окрестность фазового пространства, где в отсутствие шумов существует неустойчивый тор, что в свою очередь должно приводить к разрушению удвоенного тора T2. Однако, как показывают численные исследования, резкого увеличения ляпуновского показателя с изменением управляющих параметров не наблюдается. Имеет место лишь некоторое сглаживание границ областей существования регулярных и незначительное расширение области существования хаотических режимов.

На рис. 2, б представлена карта ляпуновских показателей, построенная при возмущении частоты воздействия ω_1 . Случайные отклонения частоты воздействия приводят к тому, что мгновенные значения ω_1 могут быть как иррациональными, так и рациональными.

В случае рациональных значений $\omega_1 = m/n$ (где m и n – целые числа) имеет место мультистабильность, в фазовом пространстве системы сосуществует множество различных устойчивых и неустойчивых циклов. При этом плоскость управляющих параметров имеет сложную многолистную структуру. Чем выше значения m и n , тем сложнее устроено фазовое пространство и пространство параметров системы. Рис. 3 иллюстрирует плоскость параметров (λ, ε) (1) при $\gamma = 0$, $\omega_1 = 3/5$ и отсутствии шумов. Светлые области соответствуют периодическим режимам, серые – хаотическим, тонкими сплошными обозначены линии бифуркаций удвоения периода (мультипликатор циклов на них обращается в -1), жирными – седло-узловые бифуркации (мультипликатор циклов на них обращается в $+1$). На плоскости управляющих параметров имеются сборки, обозначенные буквами A, B, C. Внутриборок сосуществуют два устойчивых и один неустойчивый цикл. Увеличение m и n делает структуру плоскости управляющих параметров более сложной.

В результате флуктуаций частоты воздействия фазовая траектория может попасть в окрестность как устойчивого цикла, так и неустойчивого. И в том и в другом случае такое блуждание фазовой траектории несомненно должно влиять на устойчивость тора. Однако, как и в предыдущем случае, введение флуктуаций частоты воздействия ζ_n качественно не изменяет структуру плоскости параметров, и резкого изменения значений ляпуновского показателя не происходит.

Введение всех случайных процессов ζ_n , ξ_n , η_n также качественно не изменяет структуру карты режимов (см. рис. 2, в). Области существования движений с отрицательным ляпуновским показателем на плоскости параметров сохраняются.

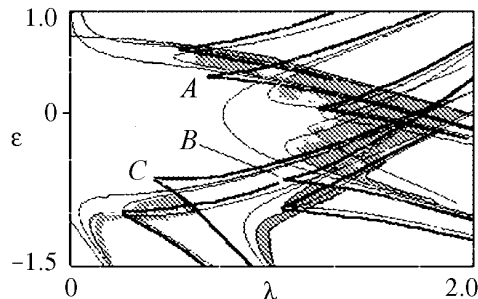


Рис. 3. Плоскость параметров (λ, ε) системы (1) при $\gamma = 0$ и $\omega_1 = 3/5$

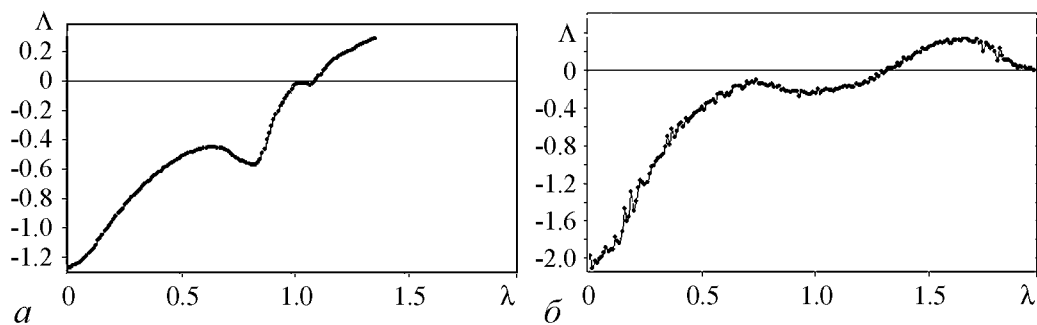


Рис. 4. Зависимость ляпуновского показателя Λ от значения управляющего параметра λ при фиксированных значениях амплитуд воздействия и дисперсии шума: $a - \varepsilon = 0.3, \gamma = 0.025$ и $p = 0.01$; $b - \varepsilon = 0.1, \gamma = 0.025$ и $p = 0.1$

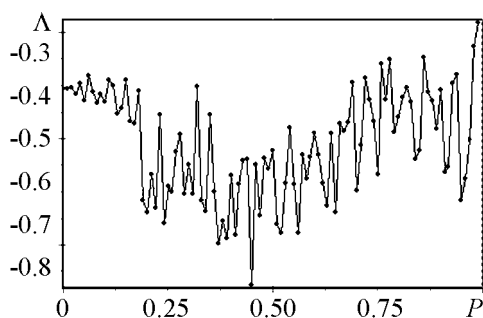


Рис. 5. Зависимость ляпуновского показателя Λ от дисперсии шума при фиксированном значении управляющего параметра $\lambda = 0.5$, амплитуд воздействия $\varepsilon = 0.1$ и $\gamma = 0.025$

На рис. 4 для различных значений дисперсии шума ζ_n представлена зависимость ляпуновского показателя Λ от управляющего параметра системы (1). Существует диапазон значений параметра λ , при котором $\Lambda < 0$. Локальный максимум, наблюдающийся с ростом λ , соответствует бифуркации удвоения трехмерного тора.

На рис. 5 представлена зависимость ляпуновского показателя от дисперсии шума. Из рисунка также видно, что в широкой области значений дисперсии шума показатель Ляпунова остается отрицательным.

Выводы

Таким образом, на примере квадратичного отображения с квазипериодическим воздействием численно исследован переход к хаосу через разрушение трехмерного тора. Воздействие аддитивного шума, флуктуации частоты воздействия, а также совместное их влияние не разрушают трехчастотные квазипериодические движения в неавтономной системе, что в свою очередь позволяет сделать предположение, что в отличие от автономных систем в данной неавтономной модели трехмерный тор является структурно устойчивым. Можно предположить, что аналогичным поведением будет обладать система (1) при добавлении во внешнее воздействие дополнительных гармонических составляющих с иррациональным значением частот.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 09-02-00426.

Библиографический список

1. Рюэль Д., Такенс Ф. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 117.
2. Newhouse S., Ruelle D., Takens F. // Commun. Math. Phys. 1978. Vol. 64. P. 35.
3. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. М.;Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.

4. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 339.
5. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. // Physica D. 1985. Vol. 15. P. 354.
6. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. // Physica D. 1984. Vol. 13. P. 261.
7. Tavakol R.K., Tworkowski A.S. // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 100. P. 65.
8. Tavakol R.K., Tworkowski A.S. // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 100. P. 273.
9. Хованов И.А., Хованова Н.А., Анищенко В.С., Мак-Клинток П.В.Е. Чувствительность к начальным условиям и ляпуновский показатель квазипериодической системы // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, вып. 5. С. 112.
10. Walden R.W., Kolodner P., Rössler A., Surko C.M. // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 242.
11. Kim S.-H. and Ostlund S. // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34, № 4. P. 3426.
12. Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П., Пиковский А.С., Фойдель У. О динамике нелинейных систем под внешним квазипериодическим воздействием вблизи точки окончания линии бифуркации удвоения тора // Изв. вузов. ПНД. 1997. Т. 5, № 6. С. 3.
13. Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev E.P. Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 6. P. 7828.
14. Khovanov I.A., Khovanova N.A., McClintock P.V.E., Anishchenko V.S. The effect of noise on strange nonchaotic attractors // Phys. Letters A. 2000. Vol. 268. P. 315.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию
После доработки

6.10.2012
30.01.2012

INFLUENCE OF FLUCTUATIONS ON EVOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL TORUS IN NONAUTONOMOUS SYSTEM

E.S. Popova

The transition to chaos through the destruction of three-dimensional torus is studied in a nonautonomous system with quasi-periodic impact as example. Analysis is carried out of the influence both of additive noise and frequency fluctuations impact on the stability of three-dimensional torus. It is shown that under the influence of additive noise and frequency fluctuations impact Lyapunov exponent remains negative. This allows to conclude that in this model three-dimensional torus is structurally stable in contrast to the autonomous system.

Keywords: Three-dimensional torus, quasi-periodic force, effect of noise, Lyapunov exponent, strange nonchaotic attractor.



Попова Елена Сергеевна – родилась в Саратове (1986), окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2008). Аспирант факультета нано- и биомедицинских технологий по специальности «радиофизика». Участница трех конференций «Нелинейные дни для молодых в Саратове», VIII Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур – 2007», III конференции молодых ученых «Нанозлектроника, нанофотоника и нелинейная физика – 2008», Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем – 2008», Международной школы-семинара «StatInfo-2009».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: LenchkaFNP@yandex.ru