



ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ МОД В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

С. А. Щербинин, П. П. Гончаров, Г. М. Чечин

Исследуются проблемы существования и устойчивости симметрично-обусловленных нелинейных нормальных мод в электрической цепочке из нелинейных конденсаторов, связанных линейными индуктивностями (модель описана в Physica D 238 (2009) 1228). Для всех мод этого типа определена верхняя граница области устойчивости по амплитуде колебаний напряжения на конденсаторах в зависимости от числа ячеек цепочки. Найдены асимптотические формулы при стремящемся к бесконечности числе ячеек.

Ключевые слова: Нелинейная динамика, решеточные модели, нелинейные нормальные моды, инвариантные многообразия, теоретико-групповые методы.

Введение

В последние годы существенно повысился интерес к исследованию нелинейных колебаний в мезоскопических системах различной физической природы. В частности, активно изучались дискретные бризеры и солитоноподобные возбуждения в системах контактов Джозефсона [1, 2], кантилеверных массивах [3, 4], гранулированных кристаллах [5], электрических цепях, выполненных на кремниевой подложке с помощью CMOS-технологии [6–9] и т.д.

Работа [9] посвящена анализу устойчивости так называемой π -моды в электрической цепи, изображенной на рис. 1, *а* и представляющей собой цепочку N нелинейных конденсаторов, которые связаны друг с другом линейными индуктивностями. При этом предполагается наличие периодических граничных условий, что позволяет считать рассматриваемую цепочку замкнутой в кольцо. В качестве примера такое кольцо для случая $N = 4$ показано на рис. 1, *б*.

В статье [9] анализируется случай следующей нелинейной зависимости емкости конденсаторов C от напряжения V

$$C(V) = C_0(1 - bV^2), \quad (1)$$

где C_0 и b представляют собой некоторые положительные константы. Применяя законы Кирхгофа для квазипостоянного тока к схеме, изображенной на рис. 1, можно получить следующую систему уравнений [9]:

$$L_j \frac{dI_j}{dt} = V_j - V_{j+1}, \quad \frac{d}{dt}Q(V_j) = I_{j-1} - I_j. \quad (2)$$

Здесь $Q(V_j)$ – заряд j -го конденсатора в тот момент времени t , когда напряжение на нем равно $V_j(t)$, а $I_j = I_j(t)$ – ток, протекающий через индуктивность L_j .

Исключая из этих уравнений $Q_j(t)$ с помощью соотношения $Q_j(t) = C_0(1 - bV_j^2)V_j$, приходим к следующей нелинейной динамической модели, которая и будет исследоваться в настоящей работе:

$$\ddot{V}_j(1 - bV_j^2) - 2bV_j(\dot{V}_j)^2 = \gamma(V_{j-1} - 2V_j + V_{j+1}), \quad (3)$$

где $\gamma = 1/(L_0C_0)$ (предполагается, что $L_j = L_0$ для всех j), $j = 1..N$, причем $V_0(t) \equiv V_N(t)$, $V_{N+1}(t) \equiv V_1(t)$ в силу периодических граничных условий. С помощью обезразмеривания уравнения (3) параметр b можно исключить, поэтому далее считаем его равным единице.

Для модели (3) π -мода Φ_1 в произвольный момент времени t определяется выражением

$$\Phi_1 = \{V(t), -V(t)|V(t), -V(t)|V(t), -V(t)|\dots\}. \quad (4)$$

Таким образом, в режиме π -моды напряжения на любых двух соседних конденсаторах имеют противоположные знаки. Для существования такого периодического режима необходимо, чтобы число N ячеек рассматриваемой электрической цепи было четным.

Существует весьма большое число работ по исследованию π -моды в моноатомных цепочках типа Ферми–Пасты–Улама (ФПУ) [10–14], однако модель (3) существенным образом отличается от модели ФПУ. Следует отметить, что в приложении к [9] авторы в некотором приближении сводят модель (3) к обобщенной модели ФПУ, однако мы предпочитаем работать непосредственно с уравнениями в форме (3).

В общем случае, устойчивость π -моды в моноатомной цепочке зависит от количества N образующих ее частиц. Поскольку π -мода представляет собой периодический режим, ее устойчивость можно исследовать с помощью метода Флоке. Размерность возникающей при этом вариационной системы (системы уравнений, линеаризованных в окрестности изучаемого периодического режима), равна N ,

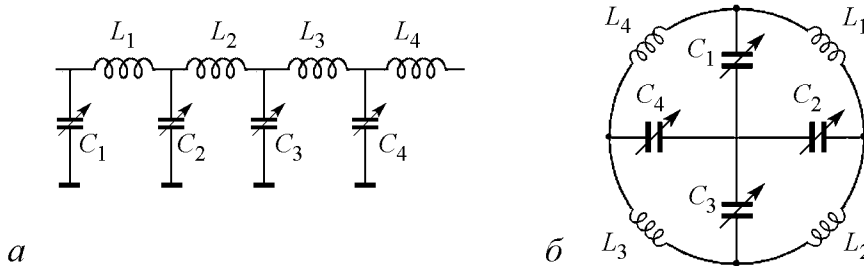


Рис. 1. Цепочка нелинейных конденсаторов, связанных линейными индуктивностями

в связи с чем при $N \gg 1$, особенно при исследовании асимптотического поведения устойчивости при $N \rightarrow \infty$, возникают большие вычислительные трудности. В работе [9] для преодоления этих трудностей предложен некоторый метод расщепления вариационной системы на независимые двумерные подсистемы, для которых анализ устойчивости в рамках метода Флоке проводится относительно просто. Этот метод расщепления вариационной системы существенным образом использует особенности структуры динамических уравнений (3) и является, с нашей точки зрения, достаточно сложным.

С другой стороны, в работах [15, 16] был разработан общий теоретико-групповой метод, позволяющий проводить аналогичное расщепление вариационной системы на основе свойств симметрии исследуемой динамической модели. Этот метод опирается не на специфику изучаемой модели, а лишь на ее симметрию и базируется на теории представлений конечных групп. В работах [17, 18] данный теоретико-групповой метод был нами использован для анализа устойчивости всех симметрично-обусловленных нелинейных нормальных мод (ННМ) Розенберга в цепочках ФПУ, а в работах [19, 20] – для исследования локализованных нелинейных колебаний (дискретных бризеров и квазibriзеров) в двумерных скалярных моделях на плоской квадратной решетке.

В настоящей работе вышеуказанный теоретико-групповой метод для исследования устойчивости применяется не только для π -моды, но и для других четырех возможных в модели (3) ННМ.

Настоящая статья имеет следующую структуру. В разделе 1 обсуждаются все возможные в системе (3) симметрично-обусловленные делокализованные ННМ, а в разделе 2 описывается применяемый нами метод исследования устойчивости этих мод. Анализ устойчивости π -моды посвящен раздел 3, а в разделе 4 проведено исследование устойчивости всех других ННМ. В Заключение подводятся итоги настоящей работы и намечаются пути дальнейшего исследования нелинейных колебаний в модели (3).

1. Симметрично-обусловленные нелинейные нормальные моды

Концепция нелинейных нормальных мод была разработана Розенбергом в [21]. Суть этого понятия заключается в том, что в режиме данной ННМ все элементы системы совершают согласованные колебания, временная зависимость которых определяется одной и той же функцией $f(t)$. В приложении к динамической модели (3) это значит, что

$$V_j(t) = c_j f(t), j = 1..n, \quad (5)$$

где c_j – некоторые постоянные коэффициенты.

Обычные линейные нормальные моды также удовлетворяют определению (5), причем в этом случае $f(t) = \sin(\omega t + \phi_0)$, где ω – частота данной моды, ϕ_0 – начальная фаза, а c_j – амплитуда колебаний различных элементов рассматриваемой системы.

ННМ Розенберга существуют только в нелинейных гамильтоновых системах с весьма специфическими типами взаимодействий, например, в тех случаях, когда потенциальная энергия является однородной функцией всех своих аргументов.

Однако даже при достаточно общем виде взаимодействий существование ННМ может быть обеспечено наличием у системы некоторой группы дискретной симметрии [13, 18, 22]. Эти ННМ принято называть симметрично-обусловленными. Количество всех мод такого типа в любой пространственно-периодической структуре (в частности, одномерной) ограничено некоторым небольшим числом, что можно установить с помощью теоретико-групповых методов. Причина этого явления неоднократно обсуждалась нами в различных работах (см., например, [18, 23, 24]). Дело в том, что попытка построить периодический динамический режим с большой мультипликацией (см. ниже) элементарной ячейки в колебательном состоянии рассматриваемой решеточной модели приводит к возникновению *бушей* ННМ с размерностью $m > 1$, которые описывают уже непериодические колебания – им отвечают m различных базисных частот в спектре Фурье (теория бушей мод была развита в работах [26–28]).

В математической модели, уравнения которой инвариантны относительно группы дискретной симметрии G_0 , все возможные динамические режимы, в частности ННМ, можно классифицировать по подгруппам этой группы [26, 28].

Нетрудно убедиться в том, что уравнения модели (3) инвариантны относительно той же самой группы преобразований $G_0 = D_N$, что и динамические уравнения известной модели Ферми–Пасты–Улама β -типа [18]. Эта группа имеет три генератора a, i, u , которые можно определить их действием на вектор состояния

$$\mathbf{V} = \{V_1(t), V_2(t), \dots, V_N(t)\},$$

представляющий собой упорядоченную совокупность всех динамических переменных $V_j(t)$ модели (3).

Трансляционное преобразование a осуществляет циклическую перестановку компонент вектора \mathbf{V}

$$a\mathbf{V} = \{V_2(t), V_3(t), \dots, V_N(t), V_1(t)\}. \quad (6)$$

Преобразование i соответствует инверсии относительно произвольно выбранной «середины» рассматриваемой цепочки конденсаторов

$$i\mathbf{V} = \{V_N(t), V_{N-1}(t), \dots, V_2(t), V_1(t)\},$$

а преобразование u изменяет знаки всех компонент вектора \mathbf{V} без их перестановки

$$u\mathbf{V} = \{-V_1(t), -V_2(t), \dots, -V_N(t)\}.$$

Можно убедиться, что под действием каждого из этих генераторов система (3) преобразуется в себя и, стало быть, a, i, u являются преобразованиями инвариантности рассматриваемой нами динамической модели.

Генераторы a, i, u имеют порядки $N, 2, 2$, соответственно, то есть $a^N = e, i^2 = e, u^2 = e$, где e – единичный элемент группы G_0 (тождественное преобразование). Таким образом, группа G_0 состоит из $4N$ элементов, представляющих собой различные произведения указанных трех генераторов, причем является неабелевой (например, $ia \neq ai$).

Каждая подгруппа G_j группы G_0 определяет соответствующий ей специфический динамический режим, который может реализоваться в модели (3), и называется

его группой симметрии, поскольку под действием всех ее элементов вектор \mathbf{V} преобразуется сам в себя: $G_j \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

Рассмотрим подгруппу G_1 группы G_0 , в которую входят только единичное преобразование e и преобразование a^2 , в силу чего она является подгруппой второго порядка. Из условия инвариантности вектора \mathbf{V} относительно группы G_1 для случая цепочки из $N = 6$ элементов имеем

$$a^2 \mathbf{V} = \mathbf{V}. \quad (7)$$

Поскольку

$$a^2 \mathbf{V} = \{V_3, V_4, V_5, V_6, V_1, V_2\}, \quad (8)$$

из уравнения (7) следует:

$$V_3 = V_1, \quad V_4 = V_2, \quad V_5 = V_3, \quad V_6 = V_4, \quad V_1 = V_5, \quad V_2 = V_6. \quad (9)$$

Таким образом, $V_1 = V_5 = V_3$, $V_2 = V_4 = V_6$ и шестимерный вектор \mathbf{V} определяется только двумя независимыми переменными $V_1(t)$ и $V_2(t)$

$$\mathbf{V} = \{V_1, V_2 | V_1, V_2 | V_1, V_2\} \quad (10)$$

Учитывая соотношения (9) между динамическими переменными $V_j(t)$, из уравнений (3) получим систему двух дифференциальных уравнений относительно $V_1(t)$ и $V_2(t)$ (все другие уравнения системы (3) им эквивалентны). В таком случае мы говорим, что имеем двухпараметрический динамический режим (10): в его спектре Фурье будут присутствовать две разные базовые частоты, соответствующие переменным $V_1(t)$ и $V_2(t)$, и разные их целочисленные линейные комбинации.

Поскольку в настоящей работе мы исследуем *периодические* динамические режимы, нам необходимо отобрать из всех возможных симметрично-обусловленных режимов только *однопараметрические*, которые и представляют собой ННМ Розенберга. Эта проблема может быть решена с помощью определенных теоретико-групповых методов, которые подробно описаны в работе [18]. Ниже приведены лишь окончательные результаты такого отбора подгрупп $G_j \subset G_0$ и соответствующих им динамических режимов.

Оказывается, что в модели (3) могут существовать только следующие 5 симметрично-обусловленных ННМ:

$$G_1 = [a^2, iu] : \Phi_1 = V(t)\{1, -1|1, -1|1, -1|\dots|1, -1\}. \quad (11)$$

Это уже упоминавшаяся π -мода.

$$G_2 = [a^4, iu] : \Phi_2 = V(t)\{1, 1, -1, -1|1, 1, -1, -1|\dots\}. \quad (12)$$

$$G_3 = [a^4, ai] : \Phi_3 = V(t)\{1, 0, -1, 0|1, 0, -1, 0|\dots\}. \quad (13)$$

$$G_4 = [a^3, iu] : \Phi_4 = V(t)\{1, 0, -1|1, 0, -1|\dots\}. \quad (14)$$

$$G_5 = [a^3 u, ai u] : \Phi_5 = V(t)\{1, 1, 0, -1, -1, 0|1, 1, 0, -1, -1, 0|\dots\}. \quad (15)$$

Поясним использованные здесь обозначения. Каждая подгруппа задается набором своих генераторов, заключенных в квадратные скобки. При этом исходная группа $G_0 = [a, i, u]$ определяется тремя генераторами, а перечисленные выше ее подгруппы – двумя генераторами. Например, подгруппа $G_1 = [a^2, iu]$ имеет два генератора, одним из которых является квадрат элемента a , действие которого на вектор состояния \mathbf{V} определяется формулой (8). Из требования инвариантности вектора \mathbf{V} относительно этого генератора мы получили динамический режим (10). Наличие в группе G_1 второго генератора iu приводит к условию $iu\mathbf{V} = \mathbf{V}$, которое порождает дополнительную связь между переменными $V_1(t)$ и $V_2(t)$ в формуле (10): $V_2(t) = -V_1(t)$, что, в свою очередь, дает однопараметрический режим, представляющий собой π -моду (4). В вышеприведенных формулах вертикальной черточкой отделяются друг от друга «ячейки» изучаемой нами электрической цепочки в ее колебательном состоянии.

Модам (12) и (13) соответствуют ячейки, образованные четырьмя соседними конденсаторами. Моде (14) отвечают ячейки из трех, а моде (15) – из шести конденсаторов.

Существенно, что нелинейных мод с ячейками большего размера не существует – при попытке их построения мы приходим к непериодическим динамическим режимам – уже упоминавшимся бушам нелинейных нормальных мод.

При подстановке каждой из мод (11–15) в систему (3) последняя сводится к одному дифференциальному уравнению относительно переменной $V(t)$ (все остальные уравнения этой системы ему идентичны!). Такое уравнение называется *ведущим уравнением*, и определяет временную эволюцию рассматриваемой электрической цепочки. Для всех ННМ (11–15) оно имеет вид

$$\ddot{V}(t)[1 - V^2(t)] - 2V(t)[\dot{V}(t)]^2 + \mu V(t) = 0, \quad (16)$$

причем разным модам соответствуют разные, перечисленные ниже, значения параметра μ :

1. $G_1 = [a^2, iu] : \mu = 4,$
2. $G_2 = [a^4, iu] : \mu = 2,$
3. $G_3 = [a^4, ai] : \mu = 2,$
4. $G_4 = [a^3, iu] : \mu = 3,$
5. $G_5 = [a^3u, aiu] : \mu = 1.$

2. Метод исследования устойчивости нелинейной нормальной моды

Поскольку каждая ННМ представляет собой периодический динамический режим, исследование ее устойчивости можно осуществить стандартным методом Флорке, линеаризуя около этой моды систему нелинейных дифференциальных уравнений (3). В результате получается вариационная система уравнений, размерность которой равна числу элементов N рассматриваемой электрической цепи. При $N \gg 1$, особенно при $N \rightarrow \infty$, исследование такой системы линейных дифференциальных

уравнений с переменными коэффициентами представляет большие вычислительные трудности. Эти трудности можно в значительной степени нивелировать с помощью специфического теоретико-группового метода, развитого в работах [15, 16]. Ниже приведен краткий обзор основных идей этого метода.

Рассмотрим группу инвариантности G_0 динамических уравнений (3). Под действием каждого элемента g этой группы происходит определенная перестановка динамических переменных V_j , возможно, сопровождаемая изменением знаков некоторых из них. В результате осуществления такой перестановки имеет место точно такая же перестановка уравнений системы (3) с точно такими же изменениями их знаков.

Разумеется, не всякая перестановка переменных V_j является преобразованием инвариантности системы (3). Например, если переставить только две переменные V_2 и V_3 без каких-либо перестановок других переменных, система (3) не перейдет в себе эквивалентную. Действительно, в результате такого преобразования уравнения с номерами 2 и 3, имевшие в системе (3) вид

$$\ddot{V}_2(1 - V_2^2) - 2V_2(\dot{V}_2)^2 = \gamma(V_1 - 2V_2 + V_3),$$

$$\ddot{V}_3(1 - V_3^2) - 2V_3(\dot{V}_3)^2 = \gamma(V_2 - 2V_3 + V_4),$$

перейдут в уравнения

$$\ddot{V}_3(1 - V_3^2) - 2V_3(\dot{V}_3)^2 = \gamma(V_1 - 2V_3 + V_2),$$

$$\ddot{V}_2(1 - V_2^2) - 2V_2(\dot{V}_2)^2 = \gamma(V_3 - 2V_2 + V_4).$$

Таким образом, уравнения 2 и 3 после преобразования $V_2 \leftrightarrow V_3$ не переходят друг в друга (а перейти в какие-либо другие уравнения системы (3) они, очевидно, не могут!) и, следовательно, преобразование $V_2 \leftrightarrow V_3$ не является преобразованием инвариантности рассматриваемой нами математической модели.

На методике поиска группы инвариантности G_0 системы динамических уравнений мы здесь не останавливаемся, отсылая читателя к нашей работе [18]. Заметим только, что все преобразования симметрии в ее равновесном состоянии заведомо должны входить в эту группу.

Рассмотрим теперь некоторый динамический режим, описываемый вектором состояния $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$. Действуя на него последовательно всеми элементами группы G_0 , отберем те из них, которые оставляют этот вектор неизменным, то есть те $g \in G_0$, для которых имеет место соотношение $g\mathbf{V} = \mathbf{V}$. Очевидно, что полученная совокупность таких элементов образует некоторую группу G , которая является подгруппой группы G_0 : $G \subset G_0$. Группу G естественно назвать группой симметрии рассматриваемого динамического режима.

В работе [15] доказана теорема, утверждающая, что вариационная система $\ddot{\delta} = J(t)\delta$, получаемая в результате линеаризации системы уравнений (3) около данного динамического режима \mathbf{V} , инвариантна именно по отношению к группе G (таким образом, некоторые элементы $g \in G_0$, которые были преобразованиями инвариантности системы (3), не являются таковыми для вариационной системы $\ddot{\delta} = J(t)\delta$).

Действие любого оператора $g \in G$ на произвольный вектор \mathbf{V} можно заменить действием на него некоторой квадратной N -мерной матрицы. В этом смысле будем

говорить, что каждому элементу $g \in G$ сопоставляется $N \times N$ матрица, действующая в N -мерном пространстве всех возможных векторов состояний. Совокупность таких матриц, соответствующих всем элементам $g \in G$, образует некоторое матричное представление Γ группы G .

Как уже отмечалось, G является группой инвариантности (группой симметрии) вариационной системы $\ddot{\mathbf{d}} = J(t)\mathbf{d}$. Математически этот факт выражается в том, что матрица $J(t)$ коммутирует со всеми матрицами представления Γ , в силу чего к ней можно применить известную теорему Вигнера [29].

Из этой теоремы следует, что если разложить представление Γ на неприводимые представления (НП) группы G , то есть привести его подходящим преобразованием базиса в пространстве всех возможных векторов состояния \mathbf{V} к виду

$$\Gamma = \sum_j^{\oplus} m_j \Gamma_j, \quad (17)$$

то матрица $J(t)$ приобретает блочно-диагональную форму, причем каждому НП Γ_i размерности n_i будет отвечать некоторый блок D_i являющийся квадратной матрицей размерности $m_i n_i$. Более того, любой блок D_i имеет весьма специфическую структуру – он состоит из различных, кратных единичной, матриц размерности n_i , которые m_i раз повторяются вдоль строк и столбцов этого блока [15, 16].

Следствием такой структуры блоков D_i является расщепление N -мерной вариационной системы $\ddot{\mathbf{d}} = J(t)\mathbf{d}$ на независимые подсистемы значительно меньшей размерности. А именно, каждому блоку D_i отвечает n_i идентичных подсистем размерности m_i . Множители m_i , появляющиеся в формуле (17), называются кратностями вхождения НП Γ_i в состав приводимого представления Γ . Их можно найти с помощью следующей формулы теории характеров представлений конечных групп [29]:

$$m_i = \frac{1}{\|G\|} \sum_{g \in G} \chi_{\Gamma}(g) \bar{\chi}_{\Gamma_i}(g), \quad (18)$$

где $\|G\|$ – порядок группы G (число ее элементов), а $\chi_{\Gamma}(g)$ и $\bar{\chi}_{\Gamma_i}(g)$ суть следы матриц, которые соответствуют элементу $g \in G$ в представлениях Γ и Γ_i , соответственно. Черта над символом $\bar{\chi}_{\Gamma_i}(g)$ означает комплексное сопряжение.

Явный вид вариационной системы, расщепленной на независимые подсистемы, можно получить с помощью перехода к новому базису в пространстве инфинитезимальных векторов \mathbf{d} в соответствии с формулой

$$\mathbf{y} = S\mathbf{d}. \quad (19)$$

Столбцы ортогональной матрицы S в формуле (19) являются базисными векторами всех НП Γ_i , входящих в разложение (17) приводимого представления Γ .

В работах [13, 15, 16, 19, 20] приведен целый ряд различных примеров расщепления вариационной системы, достигаемого с помощью вышеописанного теоретико-группового метода. В настоящей работе мы используем этот метод для исследования устойчивости ННМ Розенберга в математической модели (3).

3. Устойчивость π -моды

Использование в вышеописанном теоретико-групповом подходе полной группы симметрии G данной ННМ приводит, в общем случае, к расщеплению соответствующей ей вариационной системы на подсистемы *разной* размерности [15, 16]. Такой способ расщепления не всегда удобен, поскольку далее необходимо применять метод Флоке для исследования устойчивости нулевого решения каждой из подсистем. В нашем случае было целесообразно производить расщепление вариационной системы лишь по *трансляционной* подгруппе исследуемой ННМ, поскольку тогда все указанные подсистемы будут иметь одинаковую размерность. Приводимые далее подсистемы, на которые расщепляется вариационная система для каждой из ННМ (11–15) построены именно таким способом. Разумеется, для разных ННМ размерности указанных подсистем могут быть различными. Наиболее простым оказывается характер расщепления N -мерной вариационной системы для π -моды (11) – она распадается на N независимых скалярных уравнений вида

$$\ddot{\delta} = -4\delta c(t) \cos^2 \frac{k}{2}. \quad (20)$$

Поясним использованные здесь обозначения. При малых амплитудах ННМ переходят в линейные нормальные моды, которые в пределе $N \rightarrow \infty$ принято нумеровать волновым вектором (в нашем случае одномерным) $k = (2\pi/N)j$, где $j = 1, \dots, N$ – номер моды. Периодическая во времени функция $c(t) = 1/[1 - V^2(t)]$ определяется решением ведущего дифференциального уравнения (16) при $\mu = 4$, которое мы будем решать при начальных условиях

$$V(0) = A, \dot{V}(0) = 0. \quad (21)$$

Таким образом, A является амплитудой колебаний напряжения на конденсаторах.

Как показано в работе [9], при $A < 1$ уравнения (20) описывают периодический колебательный режим. При $A = 1$ это уравнение имеет особую точку, выше которой движение становится инфинитным. На рис. 2 приведены графики $V(t)$ как функции времени t при трех различных значениях амплитуды напряжения: $A = 0.1, 0.8, 0.999$. Из этого рисунка видно, что при малых амплитудах ($A = 0.1$) мы имеем практически гармонические колебания. При $A = 0.8$ уже отчетливо видна нелинейность рассматриваемого динамического режима, а при $A \rightarrow 1$ осцилляции $V(t)$ приобретают характерную «треугольную» форму.

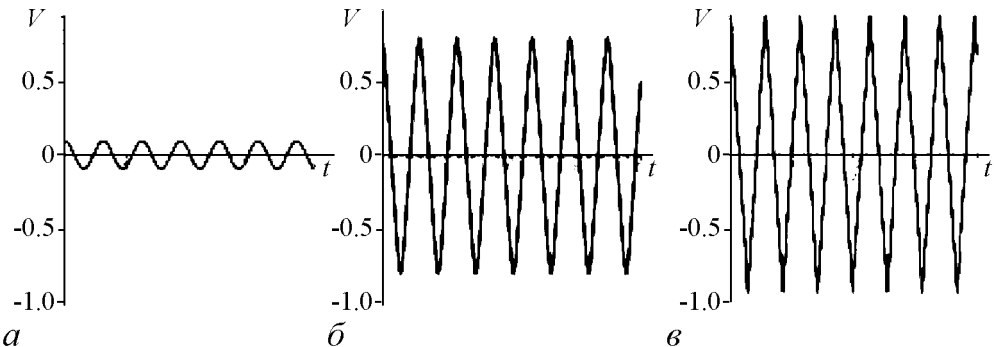


Рис. 2. График решения уравнения для π -моды при разных значениях ее амплитуды A : 0.1 (а); 0.8 (б); 0.999 (в)

Физической причиной потери устойчивости π -моды (как и всех других ННМ!) является *параметрический резонанс*. Рассмотрим этот вопрос на примере колебаний с достаточно малыми амплитудами. В случае $A \rightarrow 0$ можно пренебречь всеми нелинейными членами в уравнении (16), в результате чего оно превратится для π -моды в уравнение гармонического осциллятора с собственной частотой $\omega = 2$

$$\ddot{V} + 4V = 0. \quad (22)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$V(t) = A \sin(2t + \phi_0), \quad (23)$$

где ϕ_0 – некоторая начальная фаза. Рассмотрим теперь скалярные уравнения (20), на которые распадается вариационная система для π -моды. В принятом выше приближении $A \rightarrow 0$ можно считать, что $|V(t)| \ll 1$, и разложить входящую в (20) функцию $c(t) = 1/[1 - V^2(t)]$ в ряд по $V(t)$. Ограничившись лишь членами второго порядка, получим

$$\ddot{\delta} + 4\gamma[1 + V^2(t)]\delta = 0, \quad (24)$$

где $\gamma = \cos^2(k/2)$.

Полученное уравнение с учетом (23) и с заменой временной переменной $\tau = 2t + \phi_0$ преобразуется в уравнение Матье [30]

$$y'' + \{a - 2q \cos(2\tau)\}y = 0. \quad (25)$$

Здесь $y(\tau) = \delta(\tau - \phi_0)/2$, $a = (1 + A^2/2)\gamma$, $q = (A^2/4)\gamma$, а штрихами обозначено дифференцирование по новому временному аргументу τ .

Из приведенных соотношений следует линейная связь между параметрами a и q уравнения Матье

$$a = \gamma + 2q. \quad (26)$$

Хорошо известно, что в плоскости параметров $(a - q)$ уравнение Матье имеет бесконечное число зон устойчивости и неустойчивости нулевого решения. Последние суть области *параметрического резонанса*.

Для исследования устойчивости π -моды нам будет достаточно рассмотреть лишь первую зону неустойчивости уравнения Матье, которая на рис. 3 изображена серым цветом. На этом же рисунке показаны прямые линии $a = \gamma + 2q$ (см. уравнение (26)) для разных значений параметра γ , который, в свою очередь, связан с номером нормальной моды j формулой

$$\gamma = \cos^2\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad (27)$$

где N – количество элементов рассматриваемой электрической цепочки.

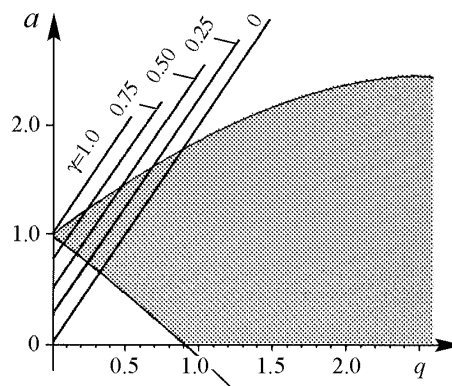


Рис. 3. Первая зона неустойчивости уравнения Матье и семейство прямых, определяемых уравнением (26)

При $A = 0$ коэффициент $c(t)$ в уравнениях (20) обращается в единицу, в силу чего они описывают набор гармонических осцилляторов с собственными частотами

$$\omega_j = \cos\left(\frac{k}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (28)$$

При $A \neq 0$ эти уравнения превращаются в уравнения Матье с параметрами, зависящими от номеров мод j . В силу периодической зависимости коэффициентов уравнений (20) от t , при определенных значениях параметров для некоторых из них может возникнуть явление параметрического резонанса: соответствующие переменные $\delta_j(t)$ начинают экспоненциально нарастать в процессе временной эволюции, что и приводит к потере устойчивости π -моды (для ее устойчивости необходимо, чтобы все возмущения $\delta_j(t)$ оставались бесконечно малыми на любом временном интервале).

Рассмотрим взаимодействие π -моды со «спящей» (равной нулю в начальный момент времени) j -й линейной нормальной модой $\delta_j(t)$. Будем постепенно увеличивать амплитуду π -моды A от значения $A = 0$. При этом из уравнения (26) с учетом $q = \gamma A^2/4$ видно, что точка с координатами (a, q) смещается в плоскости параметров уравнения Матье вдоль одной из изображенных на рисунке прямых вверх от своего начального положения $(\gamma, 0)$, причем вплоть до пересечения ею *нижней* границы заштрихованной области π -мода остается устойчивой. Этому пересечению отвечает максимальное значение амплитуды π -моды, A_c^j , при котором еще не происходит возбуждение спящей моды $\delta_j(t)$. Величину A_c^j можно найти, решая совместно уравнения

$$a = 1 - q - \frac{q^2}{8} \dots, \quad (29a)$$

$$a = \gamma + 2q, \quad (29b)$$

откуда имеем (уравнение (29a) определяет нижнюю границу серой области на рис. 3):

$$q = \frac{1 - \gamma}{3}. \quad (30)$$

С другой стороны, $q = \gamma A^2/4$, в силу чего окончательно получим, с учетом соотношения (27),

$$A_c^j = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi j}{N}\right). \quad (31)$$

Очевидно, потеря устойчивости π -моды будет определяться «самым слабым звеном», то есть той спящей нормальной модой $\delta_j(t)$, которой отвечает *минимальное значение* A_c^j . Из уравнения (31) следует, что это минимальное значение, A_c , достигается при $j = 1$, то есть нормальная мода $\delta_1(t)$ возбуждается первой при увеличении амплитуды π -моды A .

Тогда из формулы (31) следует, что при $N \rightarrow \infty$ критическое значение амплитуды π -моды, при которой теряется устойчивость, стремится к нулю: $A_c \rightarrow 0$.

На рис. 4 изображен график зависимости $A_c(N)$, который дает возможность судить об устойчивости π -моды для исследуемых электрических цепочек разной длины (N).

На этом рисунке сплошной линией изображен график функции $A_c(N)$, построенной на основе формулы (31) при $j = 1$ и вытекающей из анализа уравнения Матъе. Штрихпунктирной линией показан график той же самой функции $A_c(N)$, которая была найдена с помощью вычисления и анализа показателей Флоке для уравнения (20). π -мода считалась неустойчивой при заданной амплитуде $V(0) = A$, если хотя бы один из этих показателей, вычисленный для всех значений γ из уравнения (27), отклонялся от единицы более, чем на $\varepsilon = 10^{-5}$. Видно, что оба графика на рис. 4 достаточно хорошо совпадают друг с другом для больших значений N . Отклонения являются существенными только для малых N (они связаны со сделанными приближениями при переходе от уравнения (20) к уравнению (25)).

Из рис. 4 также видно, что с ростом N критическая амплитуда A_c уменьшается и стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. С другой стороны, из уравнения (31) при $j = 1$ можно получить следующую асимптотическую зависимость A_c от N :

$$A_c(N) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{N} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{N} + O \left(\frac{1}{N^3} \right). \quad (32)$$

Таким образом, убывание $A_c(N)$ при $N \rightarrow \infty$ определяется степенной зависимостью вида

$$A_c(N) = CN^{-\beta}, \quad (33)$$

где $C \approx 3.628$, $\beta = -1$.

4. Исследование устойчивости других нелинейных нормальных мод

Приведенный выше анализ устойчивости π -моды (11) базировался на том факте, что вариационную систему можно расщепить на независимые скалярные уравнения (20). Исследование устойчивости других нелинейных нормальных мод (12–15) представляет собой значительно более сложную задачу, поскольку в результате расщепления с помощью теоретико-группового метода N -мерной вариационной системы мы получим уже системы второго или третьего порядка связанных дифференциальных уравнений с периодически зависящими от времени коэффициентами. Поскольку нам не известны какие-либо аналитические результаты, касающиеся устойчивости таких систем, наш дальнейший анализ сводится к применению к ним метода Флоке.

Исследование устойчивости ННМ ϕ_2 (12) сводится к анализу устойчивости нулевого решения следующей системы двух дифференциальных уравнений при раз-

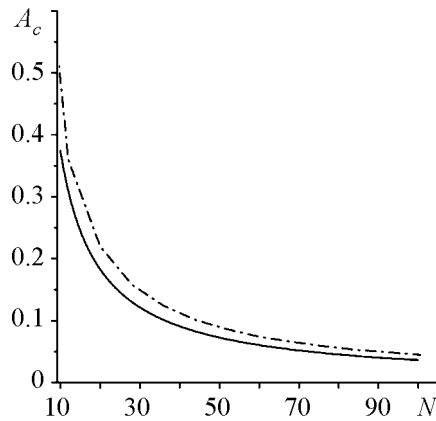


Рис. 4. Устойчивость π -моды для электрических цепочек разной длины (N): показана максимальная амплитуда (A_c) π -моды, при которой она является устойчивой. Пунктирная линия соответствует результатам вычислительного эксперимента, а сплошная – результатам приближенного анализа на основе уравнения Матъе

Анализ устойчивости ННМ Φ_4 и Φ_5 сводится к исследованию устойчивости нулевого решения одной и той же трехмерной системы уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_1 = g(t)c(t)\dot{\delta}_1 + p(t)c(t)\delta_1 + c(t)\delta_2 + c(t)e^{ik}\delta_3, \\ \ddot{\delta}_2 = \delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3, \\ \ddot{\delta}_3 = g(t)c(t)\dot{\delta}_3 + c(t)e^{-ik}\delta_1 + c(t)\delta_2 + p(t)c(t)\delta_3, \end{cases} \quad (37)$$

где функции $p(t)$ и $g(t)$ также определяются уравнениями (35).

Графики зависимости критической амплитуды $A_c(N)$ для всех ННМ (11–15) приведены на рис. 3. Любопытно, что эти графики для мод Φ_4 и Φ_5 оказываются *идентичными*, несмотря на различие входящих в (37) функций $V(t)$, которые определяются ведущим уравнением (16) с различными значениями μ .

При $N \rightarrow \infty$ критические амплитуды $A_c(N)$ стремятся к нулю для всех ННМ (11–15). Выше был найден закон этого убывания (33) для π -моды Φ_1 . Представляется естественным поиск аналогичных асимптотических формул и для других ННМ на основе данных вычислительных экспериментов. С этой целью на рис. 6 для больших значений N ($N > 100$) нами построены в логарифмическом масштабе функции $A_c(N)$ для всех, определенных уравнениями (11–15), нелинейных нормальных мод.

Из рис. 6 хорошо видно, что $A_c(N)$ для всех ННМ являются степенными функциями вида (33), в силу чего графики зависимости $\ln A_c(N)$ от $\ln N$ представляют собой *прямые линии*. При этом коэффициент β определяется углом наклона соответствующей прямой к оси абсцисс.

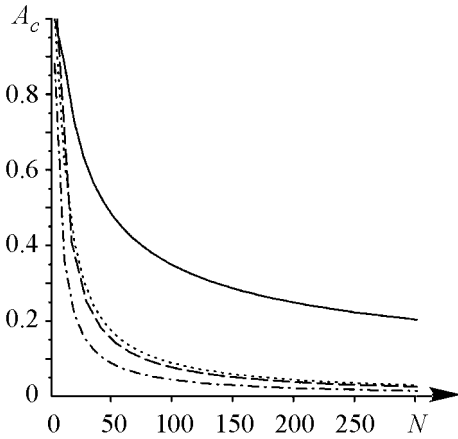


Рис. 5. Устойчивость нелинейных нормальных мод (11–15) для электрических цепочек разной длины (N): показана максимальная амплитуда (A_c) каждой из этих мод, при которой она еще является устойчивой. Сплошная линия соответствует моде Φ_2 (12), пунктирная – моде Φ_3 (13), штрих-пунктирная – π -моду Φ_1 (11), штриховая – модам Φ_4 (14) и Φ_5 (15)

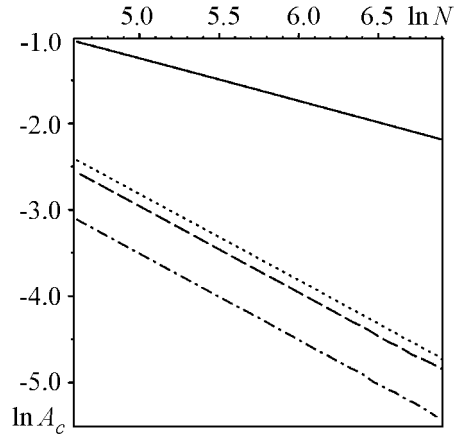


Рис. 6. Зависимость критической амплитуды A_c от длины цепочки N для нелинейных нормальных мод (11–15) в логарифмическом масштабе. Сплошная линия соответствует моде Φ_2 (12), пунктирная – моде Φ_3 (13), штрих-пунктирная – π -моду Φ_1 (11), штриховая – модам Φ_4 (14) и Φ_5 (15)

Нами были получены следующие приближенные значения постоянных C и β , входящих в формулу (33):

$\Phi_1 [a^2, iu]$ – π -мода (уравнение (11)): $\beta = 0.99, C = 4.28$;

$\Phi_2 [a^4, iu]$ (уравнение (12)): $\beta = 0.49, C = 3.41$;

$\Phi_3 [a^4, ai]$ (уравнение (13)): $\beta = 0.99, C = 8.57$;

$\Phi_4 [a^3, iu]$ и $\Phi_5 [a^3u, aiu]$ (уравнения (14) и (15)): $\beta = 0.99, C = 7.54$.

Исходя из приведенных результатов, можно с достаточной степенью достоверности утверждать, что для всех ННМ, кроме моды Φ_2 , коэффициент β , характеризующий убывание критической амплитуды A_c с ростом N , равен 1. Отклонение $\beta = 0.99$ от значения $\beta = 1$ можно объяснить погрешностью вычислений. Действительно, для π -моды (Φ_1) коэффициент β , найденный на основе данных вычислительного эксперимента, также оказался равным 0.99, в то время как теоретический анализ, проведенный в разделе 3, дает значение $\beta = 1$. Аналогично, с большой степенью уверенности можно предположить, что для моды Φ_2 точное значение коэффициента β равно не 0.49, а 0.5. Можно надеяться, что уточнение наших численных результатов даст именно такое значение β .

Заключение

В настоящей работе проведено исследование проблем существования и устойчивости всех делокализованных симметрично-обусловленных нелинейных нормальных мод в электрической цепочке, описываемой уравнением (3). Получены зависимости критической амплитуды A_c , определяющей верхнюю границу области устойчивости каждой из этих мод как функции числа ячеек цепочки N , и установлено асимптотическое поведение функции $A_c(N)$ при $N \rightarrow \infty$.

Заметим, что рассматриваемая математическая модель допускает существование не только делокализованных нелинейных нормальных мод, но и дискретных бризеров, представляющих собой периодические во времени и локализованные в пространстве динамические объекты, а также различного типа бушей ННМ. Этим вопросам будет посвящена отдельная публикация.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 12-02-31507, № 12-02-31229) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт № П1467).

Библиографический список

1. *Trias E., Mazo J.J., Orlando T.P.* Discrete breathers in nonlinear lattices: Experimental detection in a Josephson array // *Physical Review Letters*. 2000. Vol. 84. P.741.
2. *Binder P., Abraimov D., Ustinov A.V., Flach S., Zolotaryuk Y.* Observation of breathers in Josephson ladders//*Physical Review Letters*. 2000. Vol. 84. P. 745.
3. *Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Czaplewski D.A., Craighead H.G.* Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array//*Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90. P. 1.

4. *Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.T.* Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays//Reviews of Modern Physics. 2006. Vol. 78. P. 137.
5. *Boechler N., Theocharis G., Job S., Kevrekidis P.G., Porter M.A., Daraio C.* Discrete breathers in one-dimensional diatomic granular crystals//Physical Review Letters. 2010. Vol. 104. P. 244302-4.
6. *Afshari E., Hajimiri A.* Nonlinear transmission lines for pulse shaping in silicon // Journal of Solid-state Circuits. 2005. Vol. 40. P. 744.
7. *Afshari E., Bhat H.S., Hajimiri A., Marsden J.E.* Extremely wideband signal shaping using one- and two-dimensional nonuniform nonlinear transmission lines//Journal of Applied Physics. 2006. Vol. 99. P. 054901.
8. *Bhat H.S., Afshari E.* Nonlinear constructive interference in electrical lattices // Physical Review E. 2008. Vol. 77. P. 066602.
9. *Bhat H. S., Osting B.* The zone boundary mode in periodic nonlinear electrical lattices//Physica D. 2009. Vol. 238. P. 1228.
10. *Budinsky N., Bountis T.* Stability of nonlinear models and chaotic properties of 1D Fermi-Pasta-Ulam lattices//Physica D. 1983. Vol. 8. P. 445.
11. *Sandusky K.W., Page J.B.* Interrelation between stability of extended normal modes and the existence of intrinsic localized modes in nonlinear lattices with realistic potentials//Physical Review B. 1994. Vol. 50. P. 866.
12. *Poggi P., Ruffo S.* Exact solution in the FPU oscillator chain//Physica D. 1997. Vol. 103. P. 251.
13. *Chechin G.M., Ryabov D.S.* Stability of nonlinear normal modes in the FPU- β chain in the thermodynamic Limit//Physical Review E. 2012. Vol. 85. P. 056601.
14. *Yoshimura K.* Modulational instability of zone boundary mode in non-linear lattices: rigorous result//Physical Review E. 2004. Vol. 70. P. 1661.
15. *Chechin G.M., Zhukov K.G.* Stability analysis of dynamical regimes in nonlinear systems with discrete symmetries//Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 36216.
16. *Жуков К. Г., Чечин Г.М.* Теоретико-групповые методы при анализе устойчивости динамических режимов в нелинейных системах с дискретной симметрией//Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. С. 147.
17. *Chechin G.M., Novikova N.V., and Abramenko A.A.* Bushes of vibrational modes for Fermi–Pasta–Ulam chains//Physica D. 2002. Vol. 166. P. 208.
18. *Chechin G.M., Ryabov D.S., and Zhukov K.G.* Stability of low dimensional bushes of vibrational modes in the Fermi–Pasta–Ulam chains//Physica D. 2005. Vol. 203. P. 121.
19. *Безуглова Г.С., Гончаров П.П., Гуров Ю.В., Чечин Г.М.* Дискретные бризеры в скалярных динамических моделях на плоской квадратной решетке//Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 3. С. 89.
20. *Bezuglova G.S., Chechin G.M., Goncharov P.P.* Discrete breathers on symmetry-determined invariant manifolds for scalar models on the plane square lattice//Physical Review E. 2011. Vol. 84. P. 036606.

21. *Rosenberg R.M.* The normal modes of nonlinear n -degree-of-freedom systems // *J. Appl. Mech.* 1962. Vol. 29. P. 7.
 22. *Rink B.* Symmetric invariant manifolds in the Fermi–Pasta–Ulam lattice//*Physica D.* 2003. Vol. 175. P. 31.
 23. *Chechin G.M., Ryabov D.S., Sakhnenko V.P.* Bushes of normal modes as exact excitations in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry//*Nonlinear phenomena research perspectives / Ed. by C. W. Wang.* NY.: Nova Science Publishers, 2007. P. 225.
 24. *Bountis T., Chechin C.M., Sakhnenko V.P.* Discrete symmetries and stability in Hamiltonian dynamics//*International J. of Bifurc. Chaos.* 2011. Vol. 21. P. 1539.
 25. *Chechin G.M., Sakhnenko V.P., Stokes H.T., Smith A.D., and Hatch D.M.* Non-linear normal modes for systems with discrete symmetry//*Int. J. Non-Linear Mech.* 2000. Vol. 35. P. 497.
 26. *Сахненко В.П., Чечин Г.М.* Симметричные правила отбора в нелинейной динамике автономных систем//*ДАН.* 1993. Т. 330. С. 308.
 27. *Сахненко В.П., Чечин Г.М.* Кусты мод и нормальные колебания для нелинейных динамических систем с дискретной симметрией//*ДАН.* 1994. Т. 338. С. 42.
 28. *Chechin G.M. and Sakhnenko V.P.* Interaction between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. Exact results//*Physica D.* 1998. Vol. 117. P. 43.
 29. *Петрашень М.И., Трифонов Е.Д.* Применение теории групп в квантовой механике. М.: Наука, 1967.
 30. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.
- Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону* *Поступила в редакцию 19.07.2012*

INVESTIGATION OF STABILITY OF NONLINEAR NORMAL MODES IN ELECTRICAL LATTICES

S. A. Shcherbinin, P. P. Goncharov, G. M. Chechin

The problems of existence and stability of the symmetry-induced nonlinear normal modes in the electric chain of non-linear capacitors, connected to each other with linear inductors (the model described in *Physica D* 238 (2009) 1228) are investigated. For all modes of this type, the upper limit of the stability region (in amplitude of voltage oscillations on capacitors) as a function of the chain cell number were found. Asymptotic formulas were determined at cell number tends to infinity.

Keywords: Nonlinear dynamics, lattice models, nonlinear normal modes, invariant manifolds, group-theoretical methods.



Щербинин Степан Александрович – родился в Ростове-на-Дону (1986). В настоящее время – аспирант физического факультета Южного федерального университета. Специализируется на кафедре теоретической и вычислительной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика и вычислительная физика.

344006 Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42
Южный федеральный университет
E-mail: step_scherbinin@list.ru



Гончаров Петр Петрович – родился в Донецке Ростовской области (1986). В настоящее время – аспирант физического факультета Южного федерального университета. Специализируется на кафедре теоретической и вычислительной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика и вычислительная физика. Автор четырех научных работ.

344006 Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42
Южный федеральный университет
E-mail: petro_zzz@rambler.ru



Ччин Георгий Михайлович – родился в Новочеркасске (1937), окончил РГУ (1960), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и вычислительной физики Южного федерального университета. Научный руководитель студенческой «Лаборатории нелинейной кристаллофизики» при НИИ физики ЮФУ, Соросовский доцент. Читает лекции по численным методам, вычислительной и нелинейной физике, теории групп. Область научных интересов – теоретико-групповые методы в физике, теория фазовых переходов, нелинейная динамика и вычислительная физика. Автор более 100 научных публикаций.

344006 Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42
Южный федеральный университет
E-mail: gchechin@gmail.com