Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 2, 2013 УДК 537.86/87:530.182

БИФУРКАЦИИ В ГЕНЕРАТОРЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ С ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ В ПРИСУТСТВИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ШУМА: КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Т. Е. Вадивасова, В. С. Маляев

В работе рассматривается поведение генератора ван дер Поля с жестким возбуждением у порога генерации при действии на него параметрического (мультипликативного) гауссова белого шума, а также при наличии двух независимых источников шума – параметрического и аддитивного. Исследуется эволюция вероятностного распределения при изменении управляющего параметра и интенсивности шума. Проводится сравнение теоретических результатов, полученных в рамках квазигармонического приближения с результатами численных исследований стохастических уравнений генератора.

Ключевые слова: Шум, флуктуации, автоколебательная система, стохастические бифуркации, субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа.

Введение

Реальная система любой природы неизбежно находится под воздействием внутренних и внешних случайных сил. Хотя чаще всего такие воздействия являются очень слабыми, они могут играть существенную роль в поведении системы и должны учитываться при ее математическом моделировании. Фундаментальные основы теории динамических систем в присутствии случайных воздействий (то есть шума) изложены в известных монографиях [1–7]. Особое место занимает вопрос о влиянии шума на динамические системы вблизи точек бифуркаций, где система является особенно чувствительной к малым возмущениям. Бифуркации в системах с шумом называют стохастическими. Среди работ в данном направлении можно назвать известную монографию В. Хорстнемке и Р. Лефевра [8], а также книгу Л. Арнольда [9], одна из глав которой посвящена стохастическим бифуркациям. В [9] выделяются два типа стохастических бифуркаций: феноменологические бифуркации (P-бифуркации), состоящие в качественном изменении формы стационарного вероятностного распределения, и динамические бифуркации (D-бифуркации), связанные с изменением устойчивости траекторий по отношению к малым возмущениям. В настоящее время имеется ряд теоретических и экспериментальных работ, посвященных изучению влияния шума на бифуркационные переходы [10–18].

Однако достаточно полная общая теория до настоящего времени отсутствует. Это во многом связано с тем фактом, что стохастические бифуркации не обладают универсальностью локальных бифуркаций динамических систем, которые не зависят от конкретного вида уравнений, описывающих систему, и функций, задающих нелинейности. Влияние шума на одну и ту же бифуркацию в различных системах может быть существенно различно. Кроме того, важную роль играют характеристики шума, которые также могут быть разными.

Одной из широко распространенных и важнейших бифуркаций динамических систем является бифуркация рождения предельного цикла (бифуркация Андронова–Хопфа). С этой бифуркацией связано возникновение режима автоколебаний в генераторах. Она может носить мягкий (суперкритический) и жесткий (субкритический) характер. В субкритическом случае автогенерация предшествует бифуркации и в системе наблюдается бистабильность. Исследование влияния шума на переход к автоколебательному режиму представляет собой классическую задачу статистической радиофизики. Эффекты, связанные с влиянием аддитивного и мультипликативного (параметрического) шума на бифуркацию Андронова–Хопфа, изучались в ряде работ (например, в [12–15, 19–24]). При этом использовались как приближенные аналитические методы [12, 14, 19–22], так и компьютерное моделирование [15, 23], а также натурный эксперимент [13]. В большинстве отмеченных работ исследуются системы с суперкритической бифуркацией Андронова–Хопфа. Показаны различия в бифуркационных сценариях при аддитивном и мультипликативном гауссовом шуме [15,20]. Установлено, что шум вызывает запаздывание бифуркации по сравнению с детерминированным случаем и может приводить к возникновению бифуркационного интервала, то есть вместо точки бифуркации наблюдается интервал значений управляющего параметра, соответствующий постепенной эволюции стационарного вероятностного распределения [12, 13, 15, 19, 21]. Для этого случая исследовано влияние корреляционных свойств цветного шума на границы бифуркационного интервала [19, 21]. В связи с вопросом о влиянии параметрического шума на автогенератор можно также указать теоретическую работу [25], в которой получены выражения для стационарного распределения амплитуды колебаний в генераторе с суперкритической бифуркацией Андронова–Хопфа при шумовой модуляции различных параметров генератора. Авторы используют квазигармоническое приближение, но метод получения амплитудного распределения отличается от применяемого нами в настоящей статье. В меньшей степени исследовано влияние шума на системы с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа. В [22] рассматривается генератор ван дер Поля с субкритической бифуркацией, находящийся под воздействием аддитивного белого шума, а в [23] исследуется влияние на аналогичный генератор двух источников – аддитивного и параметрического цветного гауссова шума. Таким образом, из рассмотрения выпал генератор ван дер Поля с жестким возбуждением в присутствии белого параметрического шума. Кроме того, в обеих указанных работах применен квазигармонический анализ, основанный на методе усреднения. Известно, что метод усреднения не показывает всех деталей бифуркационного перехода [12,21], а при значительном шуме может сильно исказить истинную картину режимов системы. Таких проблем не возникает в случае гармонического осциллятора Хопфа, который допускает точное описание в терминах мгновенной амплитуды и фазы. В [24] строгими теоретическими методами анализируется влияние аддитивного и параметрического белого шума на осциллятор Хопфа с суперкритической бифуркацией Андронова–Хопфа, а в [26] аналогичное исследование проведено для осциллятора Хопфа с субкритической бифуркацией. В обоих случаях установлен запаздывающий характер бифуркаций, при этом бифуркационный интервал отсутствует. Однако, в силу специфического характера осциллятора Хопфа, эффекты шумового воздействия в этой системе могут не отражать эффектов, характерных для других автогенераторов. Кроме того, в отличие от осциллятора ван дер Поля, осциллятор Хопфа не является моделью реальных автоколебательных систем.

В предлагаемой работе проведен детальный анализ влияния белого гауссова шума на генератор ван дер Поля с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа. Рассмотрено совместное воздействие аддитивного и параметрического шума, а также случай чисто параметрического шумового воздействия. Проведены аналитические исследования в рамках квазигармонического приближения с использованием укороченных (усредненных) уравнений для амплитуды и фазы генератора. Теоретические результаты сопоставляются с результатами численного интегрирования полных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) генератора. В работе подробно изложен вывод укороченных уравнений, приведены математические выкладки для получения и анализа стационарной плотности вероятности, изложен алгоритм численного интегрирования СДУ. Эти, может быть излишние, подробности позволяют использовать данную работу в учебно-методических целях для ознакомления студентов и аспирантов с методами анализа стохастических систем.

1. Модели генератора с шумом и вывод укороченных стохастических уравнений

Будем рассматривать генератор ван дер Поля с жестким возбуждением в присутствии шумовой модуляции одного из параметров, а также источника аддитивного шума. Рассмотрим отдельно случаи, когда шум модулирует частоту генератора (точнее, ее квадрат) и параметр возбуждения ε. Соответственно мы имеем две математические модели, задаваемые следующими СДУ Стратоновича:

$$\ddot{x} + [\omega_0^2 + \sqrt{2D_1}n_1(t)]x = (\varepsilon + x^2 - x^4)\dot{x} + \sqrt{2D_2}n_2(t), \tag{1}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = [\varepsilon + \sqrt{2D_1}n_1(t) + x^2 - x^4]\dot{x} + \sqrt{2D_2}n_2(t). \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) записаны для безразмерной переменной x и безразмерного времени t. Случайные процессы $n_1(t)$ и $n_2(t)$ представляют собой независимые источники нормированного гауссова белого шума: $\langle n_{1,2}(t)\rangle \equiv 0$, $\langle n_i(t)n_j(t+\tau)\rangle = \delta_{ij}\delta(\tau)$, $i, j = 1, 2$, где δ_{ij} – символ Кронеккера, $\delta(\tau)$ – функция Дирака. Константы D_1 и D_2 задают интенсивность параметрического и аддитивного шума, соответственно. Параметр возбуждения ε управляет режимом генерации, а параметр ω_0 определяет собственную частоту, которая в квазигармоническом режиме достаточно точно совпадает со значением ω_0. Уравнения всегда можно нормировать таким образом, что $\omega_0 = 1$. В дальнейшем всюду полагаем выполнение этого равенства.

Будем описывать поведение генератора динамическими переменными x, $y=\dot{x}$. В отсутствие шума в генераторе имеют место следующие режимы и бифуркации. При $\varepsilon > 0$ наблюдается режим генерации, которому соответствует устойчивый предельный цикл. В начале координат имеется неустойчивая точка равновесия (фокус).

При $\varepsilon = 0$ происходит субкритическая бифуркации Андронова–Хопфа, в результате которой при переходе в область отрицательных значений ε из неустойчивого фокуса рождается неустойчивый предельный цикл. При этом фокус становится устойчивым. При $-1/8 < \varepsilon < 0$ имеет место режим бистабильности, соответствующий сосуществованию двух аттракторов – устойчивого предельного цикла и устойчивого фокуса в начале координат. Бассейны их притяжения разделены неустойчивым предельным циклом. При $\varepsilon = -1/8$ происходит касательная бифуркация устойчивого и неустойчивого циклов, в результате которой они сливаются и исчезают. При $\varepsilon < -1/8$ единственным аттрактором системы является точка равновесия.

Для проведения приближенного теоретического анализа генератора с шумом будем предполагать квазигармонический характер колебаний. Тогда можно воспользоваться следующим представлением колебаний:

$$x(t) = a(t)\cos\Phi(t),$$

$$y(t) = -a(t)\sin\Phi(t), \quad \Phi(t) = t + \varphi(t), \tag{3}$$

где $a(t)$ – мгновенная амплитуда колебаний, а $\varphi(t)$ – флуктуация фазы. С помощью метода усреднения получим стохастические укороченные уравнения для $a(t)$ и $\varphi(t)$. Новые переменные $a(t)$ и $\varphi(t)$ не являются независимыми, что учитывается дополнительным условием

$$\dot{a}\cos\Phi - a\dot{\varphi}\sin\Phi = 0 \tag{4}$$

Вывод укороченных СДУ из уравнения (1) осуществим, используя замену переменных (3) и условие (4):

$$\dot{a} = (\varepsilon + a^2\cos^2\Phi - a^4\cos^4\Phi)a\sin^2\Phi + \sqrt{2D_1}an_1(t)\sin\Phi\cos\Phi -$$
$$- \sqrt{2D_2}n_2(t)\sin\Phi,$$

$$\dot{\varphi} = (\varepsilon + a^2\cos^2\Phi - a^4\cos^4\Phi)\sin\Phi\cos\Phi + \sqrt{2D_1}n_1(t)\cos^2\Phi - \tag{5}$$
$$- (\sqrt{2D_2}/a)\,n_2(t)\cos\Phi.$$

Далее производим преобразование тригонометрических функций и усредняем выражения (5) почленно за период $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$. При этом учитывается «медленность» функций $a(t)$, $\varphi(t)$ по сравнению с периодом колебаний. При усреднении уравнения для фазы пренебрегаем возникающим после тригонометрических преобразований слагаемым

$$\frac{\sqrt{2D_1}}{4\pi}\int_t^{t+2\pi} n_1(\theta)d\theta,$$

средний квадрат которого равен $D_1/4\pi$. Таким образом, при $D_1 \ll 4\pi$ это слагаемое можно считать несущественным. В результате усреднения приходим к следующим уравнениям:

$$\dot{a} = \frac{a}{2}(\varepsilon + \frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{8}) + \frac{a}{2}\sqrt{2D_1}\xi_1(t,\varphi) - \sqrt{2D_2}\kappa_1(t,\varphi),$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{2D_1}}{2}\xi_2(t,\varphi) - \frac{\sqrt{2D_2}}{a}\kappa_2(t,\varphi). \tag{6}$$

Здесь новые источники шума определяются следующими выражениями:

$$\xi_1(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_t^{t+2\pi} n_1(\theta)\sin 2\Phi(\theta)d\theta,$$

$$\xi_2(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_t^{t+2\pi} n_1(\theta)\cos 2\Phi(\theta)d\theta,$$

$$\kappa_1(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_t^{t+2\pi} n_2(\theta)\sin \Phi(\theta)d\theta, \tag{7}$$

$$\kappa_2(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_t^{t+2\pi} n_2(\theta)\cos \Phi(\theta)d\theta.$$

Они характеризуются наличием двух масштабов времени – «быстрого» и «медленного». «Быстрый масштаб» задается присутствием сомножителей $n_{1,2}(\theta)$, описывающих некоррелированные случайные толчки, которые испытывает система. «Медленный масштаб» определяется сомножителями $\sin 2\Phi(\theta)$, $\cos 2\Phi(\theta)$, $\sin\Phi(\theta)$ и $\cos\Phi(\theta)$, представляющими собой квазигармонический шум в силу того, что случайная компонента фазы $\varphi(t)$ является «медленным» случайным процессом.

Преобразование источников шума осуществим в соответствии с методами, изложенными в $[1, 27]$. Выражения (7) можно представить в виде

$$\xi_1(t,\varphi) = N_{11}(t)\sin 2\varphi(t) + N_{21}(t)\cos 2\varphi(t),$$

$$\xi_2(t,\varphi) = N_{11}(t)\cos 2\varphi(t) - N_{21}(t)\sin 2\varphi(t),$$

$$\kappa_1(t,\varphi) = N_{12}(t)\sin \varphi(t) + N_{22}(t)\cos \varphi(t), \tag{8}$$

$$\kappa_2(t,\varphi) = N_{12}(t)\cos \varphi(t) - N_{22}(t)\sin \varphi(t),$$

где введены следующие случайные функции:

$$N_{11}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_t^{t+2\pi} n_1(\theta)\cos 2\theta d\theta, \quad N_{21}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_t^{t+2\pi} n_1(\theta)\sin 2\theta d\theta,$$

$$N_{12}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_t^{t+2\pi} n_2(\theta)\cos \theta d\theta, \quad N_{22}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_t^{t+2\pi} n_2(\theta)\sin \theta d\theta.$$

Из определения следует, что $N_{11}(t)$, $N_{21}(t)$, $N_{12}(t)$ и $N_{22}(t)$ представляют собой совместно гауссовые процессы с нулевыми средними значениями. Здесь $N_{i1}(t)$ и $N_{j2}(t)$

$(i, j = 1, 2)$, статистически независимы. Несложно найти следующие корреляционные функции:

$$\begin{aligned}
\Psi_{N_{11}}(t, t+\tau) &= \langle N_{11}(t) N_{11}(t+\tau)\rangle = \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2(4\pi)^2}(8\pi + 4\tau - \sin 4t + \sin(4t + 4\tau)) \text{ при } -2\pi \le \tau \le 0, \\ \dfrac{1}{2(4\pi)^2}(8\pi - 4\tau + \sin 4t - \sin(4t + 4\tau)) \text{ при } 0 < \tau \le 2\pi, \\ 0 \text{ при } |\tau| > 2\pi, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{N_{21}}(t, t+\tau) &= \langle N_{21}(t) N_{21}(t+\tau)\rangle = \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2(4\pi)^2}(8\pi + 4\tau + \sin 4t - \sin(4t + 4\tau)) \text{ при } -2\pi \le \tau \le 0, \\ \dfrac{1}{2(4\pi)^2}(8\pi - 4\tau - \sin 4t + \sin(4t + 4\tau)) \text{ при } 0 < \tau \le 2\pi, \\ 0 \text{ при } |\tau| > 2\pi, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{N_{12}}(t, t+\tau) &= \langle N_{12}(t) N_{12}(t+\tau)\rangle = \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2(4\pi)^2}(4\pi + 2\tau - \sin 2t + \sin(2t + 2\tau)) \text{ при } -2\pi \le \tau \le 0, \\ \dfrac{1}{2(4\pi)^2}(4\pi - 2\tau + \sin 2t - \sin(2t + 2\tau)) \text{ при } 0 < \tau \le 2\pi, \\ 0 \text{ при } |\tau| > 2\pi, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{N_{22}}(t, t+\tau) &= \langle N_{22}(t) N_{22}(t+\tau)\rangle = \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2(4\pi)^2}(4\pi + 2\tau + \sin 2t - \sin(2t + 2\tau)) \text{ при } -2\pi \le \tau \le 0, \\ \dfrac{1}{2(4\pi)^2}(4\pi - 2\tau - \sin 2t + \sin(2t + 2\tau)) \text{ при } 0 < \tau \le 2\pi, \\ 0 \text{ при } |\tau| > 2\pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

А также следующие взаимные корреляционные функции

$$\begin{aligned}
\Psi_{N_{11}N_{21}}(t, t+\tau) &= \langle N_{11}(t) N_{21}(t+\tau)\rangle = \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2(4\pi)^2}(\cos(4t + 4\tau) - \cos 4t) \text{ при } -2\pi \le \tau \le 0, \\ \dfrac{1}{2(4\pi)^2}(\cos 4t - \cos(4t + 4\tau)) \text{ при } 0 < \tau \le 2\pi, \\ 0 \text{ при } |\tau| > 2\pi, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Psi_{N_{12}N_{22}}(t,t+\tau) = \langle N_{12}(t)N_{22}(t+\tau)\rangle =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi)^2}(\cos(2t+2\tau)-\cos 2t) \text{ при } -2\pi \le \tau \le 0, \\ \dfrac{1}{(4\pi)^2}(\cos 2t-\cos(2t+2\tau)) \text{ при } 0 < \tau \le 2\pi, \\ 0 \text{ при } |\tau| > 2\pi. \end{cases}$$

Интегралы от корреляционных функций по всем возможным значениям τ в любой момент времени t имеют одни и те же значения

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \psi_{N_{11}}(t,t+\tau)d\tau \equiv \int_{-2\pi}^{2\pi} \psi_{N_{21}}(t,t+\tau)d\tau \equiv \int_{-2\pi}^{2\pi} \psi_{N_{12}}(t,t+\tau)d\tau \equiv$$
$$\equiv \int_{-2\pi}^{2\pi} \psi_{N_{22}}(t,t+\tau)d\tau \equiv \frac{1}{2}, \quad (9)$$

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \psi_{N_{11}N_{21}}(t,t+\tau)d\tau \equiv \int_{-2\pi}^{2\pi} \psi_{N_{12}N_{22}}(t,t+\tau)d\tau \equiv 0.$$

При рассмотрении медленно меняющихся процессов $\varphi(t)$ и $a(t)$, для которых изменения существенны только на интервалах времени, значительно превосходящих период T_0, можно заменить, источники $N_{ij}(t)$, $i,j=1,2$ на эквивалентные гауссовы источники белого шума с тем же значением интеграла от корреляционной функции: $N_{ij}(t) \to N_{ij}^{э}(t)$, где

$$\langle N_{ij}^{э}(t)\rangle \equiv 0, \quad \langle N_{ik}^{э}(t)N_{jk}^{э}(t+\tau)\rangle = \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta(\tau), \quad \langle N_{i1}^{э}(t)N_{j2}^{э}(t+\tau)\rangle \equiv 0 \quad i,j,k=1,2. \quad (10)$$

Тогда вместо (8) можно записать

$$\begin{aligned} \xi_1(t,\varphi) &= N_{11}^{э}(t)\sin 2\varphi(t) + N_{21}^{э}(t)\cos 2\varphi(t), \\ \xi_2(t,\varphi) &= N_{11}^{э}(t)\cos 2\varphi(t) - N_{21}^{э}(t)\sin 2\varphi(t), \\ \kappa_1(t,\varphi) &= N_{12}^{э}(t)\sin \varphi(t) + N_{22}^{э}(t)\cos \varphi(t), \quad (11) \\ \kappa_2(t,\varphi) &= N_{12}^{э}(t)\cos \varphi(t) - N_{22}^{э}(t)\sin \varphi(t). \end{aligned}$$

Разделим «медленные» и «быстрые» компоненты случайных источников $\xi_{1,2}(t,\varphi)$ и $\kappa_{1,2}(t,\varphi)$

$$\begin{aligned} \xi_i(t,\varphi) &= \langle \xi_i(t,\varphi)/a,\varphi\rangle + \tilde{\xi}_i(t), \\ \kappa_i(t,\varphi) &= \langle \kappa_i(t,\varphi)/a,\varphi\rangle + \tilde{\kappa}_i(t), \quad i=1,2, \quad (12) \end{aligned}$$

где $\langle \xi_i(t,\varphi)/a,\varphi\rangle$, $\langle \kappa_i(t,\varphi)/a,\varphi\rangle$ – условные средние, полученные при усреднении значений ξ_i и κ_i по ансамблю случайных воздействий $N_{ij}^{э}(t)$ при выбранных реализациях $a(t)$ и $\varphi(t)$, а $\tilde{\xi}_i(t)$ и $\tilde{\kappa}_i(t)$ – отклонения от условных средних. Условные средние являются медленно меняющимися случайными функциями, так как их зависимость от времени определяется через медленные функции $a(t)$ и $\varphi(t)$. Флуктуации $\tilde{\xi}_i(t)$ и $\tilde{\kappa}_i(t)$ отражают действие «случайных толчков», отклоняющих фазовую траекторию от заданного направления и представляют собой быстро меняющиеся компоненты случайных воздействий.

Найдем условные средние $\langle \xi_i(t,\varphi)/a,\varphi\rangle$ и $\langle \kappa_i(t,\varphi)/a,\varphi\rangle$, $i=1,2$. Для этого представим $\varphi(t)$ в виде: $\varphi(t)=\varphi(t')+\Delta\varphi$, где $t'=t-\Delta t$. Интервал времени Δt предполагается малым по сравнению с характерным временем медленных процессов $a(t)$ и $\varphi(t)$, так, что $\Delta\varphi$ – малое приращение фазы (при этом на интервале Δt могут укладываться много периодов T_0). Тогда для $\xi_1(t,\varphi)$, например, имеем

$$\xi_1(t,\varphi)=N^{э}_{11}(t)\sin 2(\varphi(t')+\Delta\varphi)+N^{э}_{21}(t)\cos 2(\varphi(t')+\Delta\varphi)\approx$$

$$\approx N^{э}_{11}(t)\sin 2\varphi(t')+2N^{э}_{11}(t)\Delta\varphi\cos 2\varphi(t')+N^{э}_{21}(t)\cos 2\varphi(t')-2N^{э}_{21}(t)\Delta\varphi\sin 2\varphi(t').$$

Учитывая, что $\varphi(t')$ не зависит от $N^{э}_{11}(t)$ и $N^{э}_{21}(t)$, так как предшествует им по времени, получаем

$$\langle \xi_1(t,\varphi)/a,\varphi\rangle\approx 2\left\langle N^{э}_{11}(t)\Delta\varphi/a,\varphi\right\rangle\cos 2\varphi(t')-2\left\langle N^{э}_{21}(t)\Delta\varphi/a,\varphi\right\rangle\sin 2\varphi(t'). \quad (13)$$

Из второго уравнения системы (6) находим выражение для приращения фазы

$$\Delta\varphi=\frac{\sqrt{2D_1}}{2}\int_{t'}^{t}\left[N^{э}_{11}(\theta)\cos 2\varphi(\theta)-N^{э}_{21}(\theta)\sin 2\varphi(\theta)\right]d\theta-$$

$$-\sqrt{2D_2}\int_{t'}^{t}\frac{\left[N^{э}_{12}(\theta)\cos\varphi(\theta)-N^{э}_{22}(\theta)\sin\varphi(\theta)\right]}{a(\theta)}d\theta. \quad (14)$$

Из (13), (14) и (10) с учетом свойств функции Дирака имеем

$$\langle \xi_1(t,\varphi)/a,\varphi\rangle\approx\frac{\sqrt{2D_1}}{4}\sin^2 2\varphi(t)+\frac{\sqrt{2D_1}}{4}\cos^2 2\varphi(t)=\frac{\sqrt{2D_1}}{4}.$$

Аналогично можно получить

$$\langle \xi_2(t,\varphi)/a,\varphi\rangle\approx 0,$$

$$\langle \kappa_1(t,\varphi)/a,\varphi\rangle\approx-\frac{\sqrt{2D_2}}{4a}\sin^2\varphi(t)-\frac{\sqrt{2D_2}}{4a}\cos^2\varphi(t)=-\frac{\sqrt{2D_2}}{4a}, \quad (15)$$

$$\langle \kappa_2(t,\varphi)/a,\varphi\rangle\approx 0.$$

Подставляя найденные условные средние в выражения (12) и вводя нормированные источники

$$n_{11}(t)=\sqrt{2}\tilde{\xi}_1(t),\quad n_{21}(t)=\sqrt{2}\tilde{\xi}_2(t),\quad n_{12}(t)=-\sqrt{2}\tilde{\kappa}_1(t),\quad n_{22}(t)=-\sqrt{2}\tilde{\kappa}_2(t),$$

приходим к представлению

$$\xi_1(t,\varphi)=\frac{\sqrt{2D_1}}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}n_{11}(t),\quad \xi_2(t,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}n_{21}(t),$$

$$\kappa_1(t,\varphi)=-\frac{\sqrt{2D_2}}{4a}-\frac{1}{\sqrt{2}}n_{12}(t),\quad \kappa_2(t,\varphi)=-\frac{1}{\sqrt{2}}n_{22}(t). \quad (16)$$

Из (6) и (16) окончательно получаем следующие укороченные СДУ генератора:

$$\dot{a} = \frac{a}{2}\left(\varepsilon + \frac{D_1}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{8}\right) + \frac{D_2}{2a} + \frac{a}{2}\sqrt{D_1}n_{11}(t) + \sqrt{D_2}n_{12}(t),$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{D_1}}{2}n_{21}(t) + \frac{\sqrt{D_2}}{a}n_{22}(t). \tag{17}$$

В первом приближении можно считать, что $n_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$ – независимые источники нормированного гауссова белого шума.

Проведя аналогичные выкладки для (2), приходим к той же самой системе укороченных стохастических уравнений (17). Отметим, что в данном случае при усреднении мы пренебрегли слагаемым

$$\frac{\sqrt{2D_1}}{4\pi}a\int_t^{t+2\pi} n_1(\theta)d\theta$$

в уравнении для амплитуды. Для модели (1) подобное слагаемое (только без множителя a) возникало в уравнении для фазы. Возможно, пренебрежение этими слагаемыми как раз и приводит к тому, что две изначально различные модели генератора описываются одними и теми же укороченными уравнениями. Вторая причина – нормировка времени, в результате которой собственная частота ω_0 в обеих моделях равна единице. При переходе к размерному времени параметр ω_0 по-разному войдет в укороченные уравнения для двух моделей. Таким образом, в квазигармоническом приближении для безразмерной модели генератора модуляция гауссовым белым шумом как параметра возбуждения, так и квадрата собственной частоты приводит к одним и тем же результатам. Различия в поведении двух моделей будут существенны в области значений параметра ε и интенсивностей источников шума D_1 и D_2, для которых будет сильно сказываться ангармоничность сигнала.

Отметим, что уравнение для амплитуды не зависит от переменной φ и может рассматриваться независимо от уравнения для фазы. Кроме того, нужно отметить, что уравнение для амплитуды включает мультипликативный шум, модулирующий параметр ε. Будем понимать это уравнение, как СДУ Стратоновича, так же как и исходное уравнение генератора.

2. Теоретический анализ стохастических бифуркаций в рамках квазигармонического приближения

Теоретический анализ генератора с шумом основан на рассмотрении системы укороченных уравнений (17) и является приближенным. Однако, в некоторых пределах, он может обладать хорошей точностью с точки зрения количественных характеристик, а в смысле качественного описания явлений границы его применимости могут быть достаточно широки. Кроме того, только теоретический анализ может дать полную картину бифуркационных явлений, связанных с качественными перестройками закона распределения, поскольку при численных исследованиях эти перестройки не всегда легко диагностировать.

2.1. Аналитическое выражение для стационарной плотности вероятности $p(x, y)$. Для анализа феноменологических бифуркаций, состоящих в качественном изменении формы вероятностного распределения, найдем аналитическое выражение для плотности вероятности $p(x, y)$, используя усредненные уравнения (17).

Стохастическое уравнение Стратоновича для амплитуды колебаний описывает диффузионный процесс $a(t)$, характеризующийся коэффициентом сноса $A_a(a) = (a/2)(\varepsilon + 3D_1/4 + a^2/4 - a^4/8) + D_2/(2a)$ и коэффициентом диффузии $B_a(a) = (D_1a^2 + 4D_2)/8$. Используя известное выражение для стационарной плотности вероятности однокомпонентного диффузионного процесса, получаем

$$p(a) = \frac{C_0}{B_a}\exp\left\{\int_{a_1}^{a}\frac{A_a(a)}{B_a(a)}da\right\} =$$

$$= Ca(D_1a^2 + 4D_2)^{\nu}\exp\left\{-\frac{a^2}{8D_1}\left(a^2 - 4 - \frac{8D_2}{D_1}\right)\right\}, \qquad (18)$$

где $\nu = 2\varepsilon/D_1 - 2D_2/D_1 - 4D_2^2/D_1^3$, C_0 и C – нормировочные константы, зависящие от некоторого фиксированного значения амплитуды a_1, причем константа C зависит также от параметра ε и интенсивностей шума D_1 и D_2.

Можно представить $p(x, y) = (1/a)p(a, \varphi)$, где $1/a$ – якобиан преобразования переменных. В случае отсутствия аддитивного шума ($D_2 = 0$) первое и второе уравнения системы (17) независимы. Соответственно имеем $p(a, \varphi) = p(a)p(\varphi)$. Уравнение для фазы при $D_2 = 0$ описывает винеровский процесс. В этом случае можно перейти к ограниченной фазе $\phi(t) = \varphi(t) \pm 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad \phi(t) \in [0,\ 2\pi]$, которая имеет равномерное стационарное распределение в интервале $[0,\ 2\pi]$ [27,28]. С учетом этого получаем

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi a}p(a). \qquad (19)$$

Если учесть слабый аддитивный шум, то в уравнение для фазы войдет зависимость от амплитуды. Фаза $\varphi(t)$ уже не будет, строго говоря, винеровским процессом. Однако при условии медленности процесса $a(t)$ на больших интервалах времени можно полагать значение амплитуды неизменным. В этом случае имеет место локальный линейный рост дисперсии фазы φ, и выражение (19) будет достаточно хорошо выполняться. Действительно, численные исследования системы (17) показывают, что распределение приведенной фазы $\phi(t)$ практически равномерное. С учетом (18) и (19) имеем

$$p(x, y) = N[D_1(x^2 + y^2) + 4D_2]^{\nu}\exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{8D_1}\left(x^2 + y^2 - 4 - \frac{8D_2}{D_1}\right)\right\}, \qquad (20)$$

где $N = C/2\pi$ – нормировочная константа.

Положив $D_2 = 0$ легко получить распределение в системе, содержащей только параметрический шум. Однако прямой предельный переход от (20) к распределению, соответствующему только аддитивному шуму ($D_1 = 0$), осуществить затруднительно из-за возникающей неопределенности типа $\infty : \infty$. Получить выражение для $p(x, y)$ в этом случае легче, исходя непосредственно из СДУ (17) при $D_1 = 0$ (см., например, [22]).

2.2. Стохастические бифуркации в генераторе в присутствии только параметрического шума. Если аддитивный шум отсутствует, то в системе помимо феноменологических бифуркаций наблюдается также динамическая бифуркация. Действительно, при $D_2 = 0$ начало координат $x = 0,\ y = 0$ является неподвижной точкой СДУ (1) и (2). Для анализа ее устойчивости достаточно рассмотреть уравнение для амплитуды и проанализировать устойчивость решения $a = 0$, которая определяется ляпуновским показателем

$$\lambda(a=0) = \left\langle \left.\frac{\partial \dot{a}}{\partial a}\right|_{a=0} \right\rangle,$$

где угловые скобки означают статистическое усреднение. С учетом (17), получаем

$$\lambda(a=0) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{D_1}{2}\right).$$

Соответственно условие бифуркации есть

$$D_1 = -2\varepsilon. \tag{21}$$

При $D_1 < -2\varepsilon$ точка равновесия в начале координат является устойчивой, при $D_1 > -2\varepsilon$ она неустойчива и наблюдаются стохастические колебания. Аналогичные результаты получены и в случае генератора с мягким возбуждением [9, 20]. Эта бифуркация точки равновесия связана с потерей устойчивости и относится к D-бифуркациям [9]. Она наблюдается в линейных и нелинейных осцилляторах с шумовой модуляцией параметров (см., например, [16,29,30]). Следует отметить, что линейный анализ устойчивости, основанный на расчете ляпуновских показателей, даже в детерминированных системах не всегда является надежным критерием устойчивости траекторий [31]. В рассматриваемом нами случае поведение фазовых траекторий в системах (1) и (2) при численном интегрировании в целом подтверждает сделанный вывод. Однако на конечном времени интегрирования поведение траектории сильно зависит от начальной точки и реализации случайной силы. При сравнительно большом шуме уже в области $D_1 < -2\varepsilon$ траектория может уйти из окрестности точки равновесия и не вернуться обратно даже на очень большом интервале наблюдения.

Чтобы исследовать P-бифуркации, обратимся к вероятностному распределению $p(x,y)$. При $D_2 = 0$ оно описывается следующим выражением:

$$p(x,y) = N'(x^2+y^2)^{\nu} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{8D_1}\left(x^2+y^2-4\right)\right\}, \quad N' = ND_1^{\nu}. \tag{22}$$

Частные производные функции $p(x,y)$ имеют вид

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} = -\frac{N'}{2D_1} x(x^2+y^2)^{\nu-1}\left[(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) - 8\varepsilon\right] e^{q(x,y)},$$

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = -\frac{N'}{2D_1} y(x^2+y^2)^{\nu-1}\left[(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) - 8\varepsilon\right] e^{q(x,y)}, \tag{23}$$

$$q(x,y) = \left\{-\frac{x^2+y^2}{8D_1}\left(x^2+y^2-4\right)\right\}.$$

Из анализа выражений (22) и (23) получаем следующую картину перестроек стационарной плотности вероятности $p(x,y)$ в области существования стохастических колебаний ($D_1 > -2\varepsilon$).

1. При выполнении условий $\varepsilon > -1/8$ независимо от интенсивности шума существует максимум плотности вероятности в точках устойчивого предельного цикла невозмущенной системы $x^2 + y^2 = a_0^2 = 1 + \sqrt{1 + 8\varepsilon}$.

2. В области $-1/8 < \varepsilon < 0$ существует минимум плотности вероятности в точках неустойчивого предельного цикла $x^2 + y^2 = a_1^2 = 1 - \sqrt{1 + 8\varepsilon}$. Значение $\varepsilon = -1/8$ соответствует стохастической касательной бифуркации циклов, состоящей в возникновении минимума и максимума плотности вероятности в точках $x^2 + y^2 = a_{0,1}^2$.

3. При $\varepsilon < 0$ в начале координат $x = 0,\ y = 0$ плотность вероятности обращается в бесконечность. Значение $\varepsilon = 0$ является бифуркационным. В этой точке амплитуда неустойчивого цикла a_1 обращается в ноль, минимум при $x^2 + y^2 = a_1^2$ исчезает, а поведение функции $p(x, y)$ в начале координат качественно меняется, что соответствует первой Р-бифуркации. Её можно считать стохастической субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа.Отметим, что бифуркационные значения параметра ε, соответствующие касательной бифуркации и бифуркации Андронова–Хопфа, не зависят от интенсивности шума D_1 и совпадают с бифуркационными точками детерминированной системы.

4. При $0 < \varepsilon < D_1/4$ в начале координат значение $p(x, y)$ обращается в ноль, но производные терпят разрыв и гладкий минимум отсутствует. При $\varepsilon = D_1/4$ на-

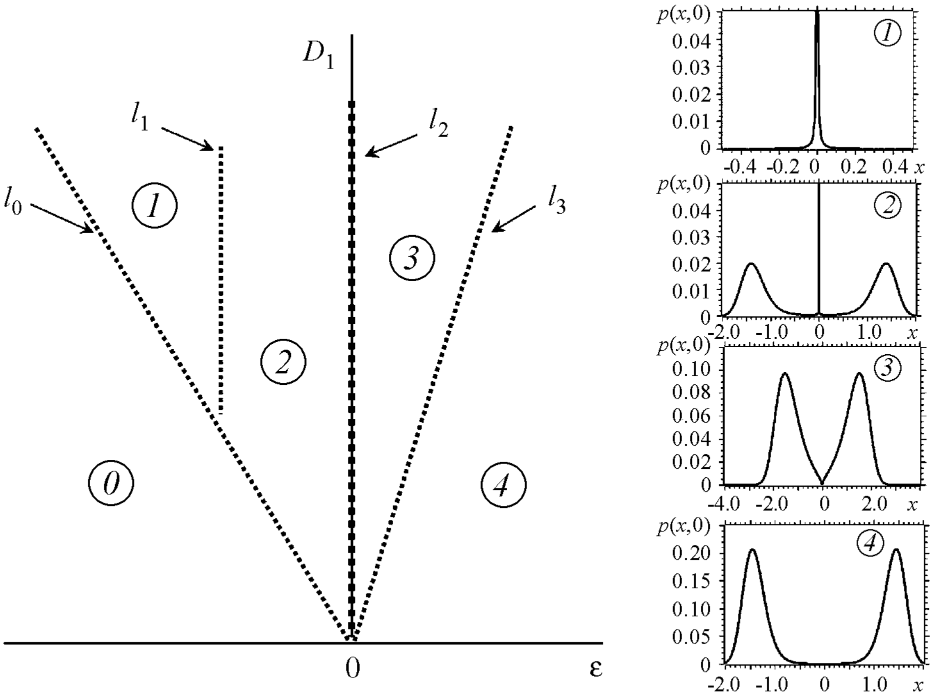

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма генератора с жестким возбуждением при наличии мультипликативного гауссова белого шума. Диаграмма получена аналитически в рамках квазигармонического приближения. На линии l_0 ($D_1 = -2\varepsilon$) точка равновесия в начале координат теряет устойчивость и возникают стохастические колебания. Линия l_1 ($\varepsilon = -1/8$) соответствует стохастической касательной бифуркации, а линия l_2 ($\varepsilon = 0$) – стохастической субкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Линия l_3 ($D_1 = 4\varepsilon$) связана с качественным изменением поведения функции $p(x, y)$ в начале координат. В области *0* система имеет устойчивую точку равновесия в начале координат и стохастические колебания затухают. Области *1–4* соответствуют стохастическим колебаниям с различным характером вероятностного распределения. Типичный вид функции $p(x, y = 0)$ в различных областях представлен на диаграммах справа

блюдается вторая P-бифуркация, приводящая к возникновению гладкого минимума плотности вероятности в нуле координат. В результате этой бифуркации $p(x, y)$ окончательно приобретает вид распределения, соответствующего режиму зашумленной генерации.

Бифуркационная диаграмма генератора, соответствующая квазигармоническому приближению, представлена на рис. 1. На ней изображены линии рассмотренных выше бифуркаций и отмечены области с различным характером стационарной плотности вероятности. В области *0* система имеет устойчивую точку равновесия в начале координат и стохастические колебания затухают. Стационарная плотность вероятности есть функция Дирака $\delta(x, y)$. В областях *1–4* существуют стационарные стохастические колебания, которым соответствует качественно различный вид функции $p(x, y)$. На диаграмме представлены срезы двумерной плотности вероятности в плоскости $y = 0$, рассчитанные по формуле (22) и дающие представление о форме распределения, соответствующей различным отмеченным областям. Нормировка (вычисление коэффициента N') проводилась численно.

2.3. Совместное влияние аддитивного и параметрического шума на стохастические бифуркации. Рассмотрим поведение генератора в квазигармоническом приближении, учитывая наличие не только параметрического, но также и аддитивного шума (то есть $D_1 \neq 0$ и $D_2 \neq 0$). В этом случае у системы отсутствует неподвижная точка в начале координат и при любых значениях параметра ε существует единственная стационарная плотность вероятности во всем фазовом пространстве. Таким образом, добавление сколь угодно малого аддитивного шума приводит к исчезновению D-бифуркации.

Для анализа P-бифуркаций обратимся к выражению (20). Частные производные от распределения в этом случае будут

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} &= -\frac{N}{2}x(D_1x^2+y^2)^{\nu-1}\left[(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)-8\varepsilon\right]e^{q(x,y)}, \\
\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} &= -\frac{N}{2}y(D_1x^2+y^2)^{\nu-1}\left[(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)-8\varepsilon\right]e^{q(x,y)}, \qquad (24) \\
q(x,y) &= \left\{-\frac{x^2+y^2}{8D_1}\left(x^2+y^2-4-\frac{8D_2}{D_1}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Как следует из (20) и (24), в точке $x = 0,\ y = 0$ всегда имеет место гладкий экстремум, который будет максимумом при $\varepsilon < 0$ и минимумом при $\varepsilon > 0$. Другие экстремумы распределения имеют место в точках устойчивого и неустойчивого циклов детерминированной системы, аналогично вышерассмотренному случаю $D_2 = 0$. В системе наблюдаются стохастические P-бифуркации, соответствующие касательной бифуркации и бифуркации Андронова–Хопфа, причем бифуркационные значения параметра ε не зависят от интенсивностей источников шума D_1 и D_2. Бифуркация, связанная с изменением характера минимума в начале координат, отсутствует.

Бифуркационная диаграмма в присутствии аддитивного шума упрощается и приобретает вид, представленный на рис. 2. Бифуркационным параметром в системе в присутствии аддитивного шума является только ε, при этом шумовая модуляция параметра не влияет на характер бифуркаций.

Полученные результаты свидетельствуют, что при наличии в системе как параметрического, так и аддитивного шума стохастические бифуркации в генераторе будут полностью аналогичны бифуркациям в присутствии только аддитивного шума. Присутствие параметрического шума влияет на форму распределения $p(x,y)$, не приводя к её качественному изменению. Так, с ростом интенсивности параметрического шума в области бистабильности наблюдается только перераспределение высоты максимумов: максимум в начале координат увеличивается по отношению к максимуму в точках устойчивого цикла (рис. 3, *а*), чего не происходит при увеличении интенсивности аддитивного шума (рис. 3, *б*).

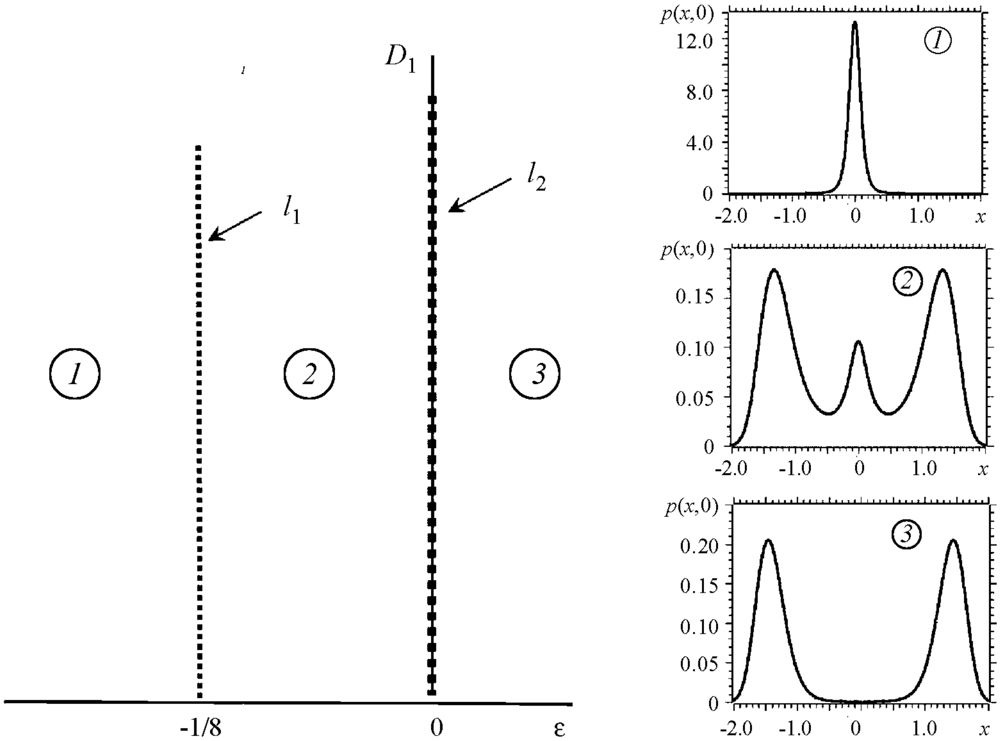

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма генератора с жестким возбуждением на плоскости параметров ε, D_1 в присутствии аддитивного гауссова белого шума с интенсивностью $D_2 = 0.001$. Диаграмма получена аналитически в рамках квазигармонического приближения. Обозначения соответствуют рис.1. Типичный вид функции $p(x, y = 0)$ в различных областях представлен на диаграммах справа

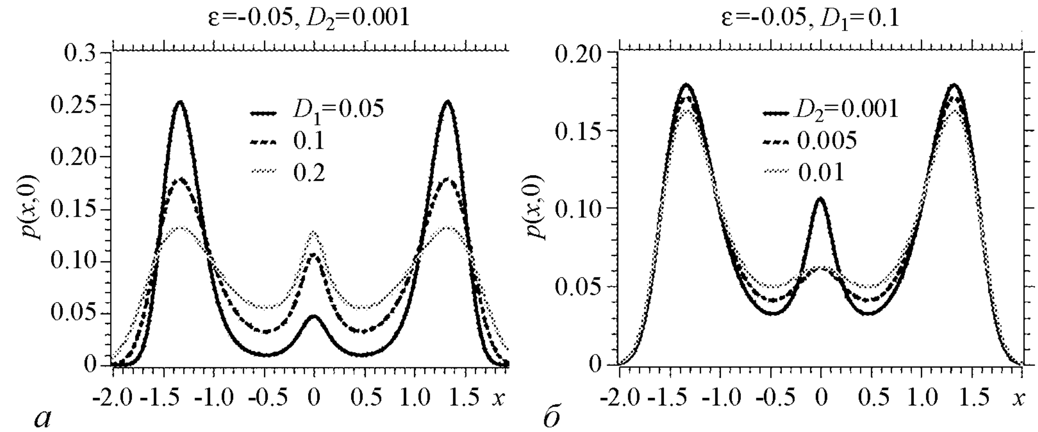

Рис. 3. Эволюция распределения в области бистабильности: *а* – с ростом интенсивности параметрического шума; *б* – с ростом интенсивности аддитивного шума

3. Численное исследование генератора и сравнение результатов

В силу ограничений квазигармонического анализа и приближенного характера найденных теоретических выражений для плотности вероятности, полученная картина стохастических бифуркаций может не вполне соответствовать реальности. Для установления степени соответствия и уточнения истинной картины бифуркаций требуется провести численное исследование генератора с жестким возбуждением в присутствии источников шума.

Модель (1) может быть представлена в виде следующей системы СДУ Стратоновича:

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = (\varepsilon + x^2 - x^4)y - [\omega_0^2 + \sqrt{2D_1}n_1(t)]x + \sqrt{2D_2}n_2(t). \tag{25}$$

Соответственно модель (2) можно переписать в виде

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = (\varepsilon + \sqrt{2D_1}n_1(t) + x^2 - x^4)y - \omega_0^2 x + \sqrt{2D_2}n_2(t). \tag{26}$$

Для интегрирования стохастических уравнений использовался модифицированный метод Эйлера [32]. Поясним разностную схему на примере следующего стохастического уравнения первого порядка:

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)\sqrt{2D_1}n_1(t) + \sqrt{2D_2}n_2(t),$$

где $f(x,t)$ и $g(x,t)$ – детерминированные непрерывные функции своих аргументов; $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – независимые нормированные источники гауссова белого шума; D_1 и D_2 – константы, задающие интенсивности шума. Если данное СДУ является уравнением Стратоновича, то разностная схема имеет вид:

$$x(t+h) = x + \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta x'),$$

$$\Delta x = f(x,t)h + g(x,t)\sqrt{2D_1 h}\,\eta_1 + \sqrt{2D_2 h}\,\eta_2, \tag{27}$$

$$\Delta x' = f(x+\Delta x, t+h)h + g(x+\Delta x, t+h)\sqrt{2D_1 h}\,\eta_1 + \sqrt{2D_2 h}\,\eta_2,$$

где x – значение переменной в момент времени t; h – шаг интегрирования; η_1 и η_2 – некоррелированные величины, создаваемые генератором некоррелированных случайных чисел со стандартным гауссовым распределением. В [32] доказана сходимость данной разностной схемы со скоростью h^2. При расчетах выбирался малый шаг интегрирования $h = 0.001$, что обеспечивало достаточную точность интегрирования.

Численно исследовалась устойчивость точки равновесия систем (25) и (26) в начале координат при $D_2 = 0$. Для этого рассчитывался старший ляпуновский показатель траектории $x = 0,\ y = 0$. Полученные результаты полностью соответствуют условию D-бифуркации, найденному при квазигармоническом анализе, что свидетельствует о корректности метода интегрирования.

Для дополнительной проверки надежности численной схемы исследовалось первое уравнение укороченной системы (17), описывающее мгновенную амплитуду стохастических колебаний. По данным интегрирования в установившемся режиме и с учетом соотношения (19) строилась стационарная плотность вероятности $p(x, y = 0)$. Результаты сравнения полученного таким образом распределения с расчетом по формуле (20) для двух областей бифуркационной диаграммы (области *2* и *3* на рис. 2) приведены на рис. 4. Можно видеть, что в области *2* наблюдаются лишь незначительные расхождения теории и численного расчета в окрестности нуля координат, а в области *3* соответствие является практически идеальным. Данные результаты свидетельствуют о двух важных вещах: вывод формулы (20) на основе СДУ (17) проведен корректно; метод численного интегрирования СДУ Стратоновича при выбранном шаге интегрирования ($h \leq 0.001$) является достаточно точным.

Теперь обратимся к исходным уравнениям генератора (1) и (2). По массиву данных, получаемому в результате численного интегрирования строилось распределение $p(x, y)$. Как и раньше для удобства представления используем сечение двумерной поверхности $p(x, y = 0)$. На рис. 5 представлены результаты, полученные для генератора с шумовой модуляцией квадрата частоты (система (1)) и параметра ε (система (2)) в двух режимах, которые сравниваются с расчетом по формуле (20). СДУ (1) дают результаты качественно соответствующие теоретическим (рис. 5, *а, б*). Заметные количественные расхождения наблюдаются только в области устойчивого предельного цикла. В то же время распределения, полученные для СДУ (2), выглядят совсем иначе. Они очень сильно отличаются от теоретических распределений и распределений, построенных численно для (1). Распределение, полученное для области *3* теоретической диаграммы (см. рис. 2), кроме максимума в точках устойчивого цикла (два боковых горба на графике функции $p(x, 0)$), имеет максимум в начале координат, и, таким образом, должно соответствовать области *2*.

Из укороченных уравнений (17) следует независимость амплитуды от фазы Ф и аксиальная симметрия распределения: любое сечение поверхности $p(x, y)$ вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат будет выглядеть одинаково. В исходных СДУ (1) и (2) такая симметрия нарушается: сечения вертикальными плоскостями, сделанные в разных направлениях могут сильно различаться, то есть поведение функции $p(x, y)$ будет зависеть от направления, задаваемого углом поворота секущей плоскости. Качественные различия в поведении функции $p(x, y)$ при

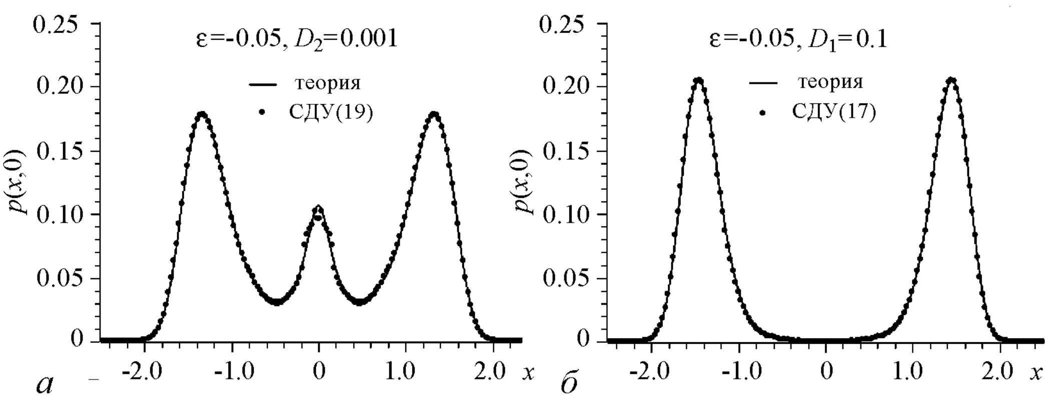

Рис. 4. Сравнение распределения $p(x, y)$, построенного с использованием первого уравнения системы (17), и теоретического распределения (20) при $D_1 = 0.1$, $D_2 = 0.001$ и двух значениях ε (соответствующих областям *2* и *3* на рис. 2): *а* – -0.05; *б* – 0.03

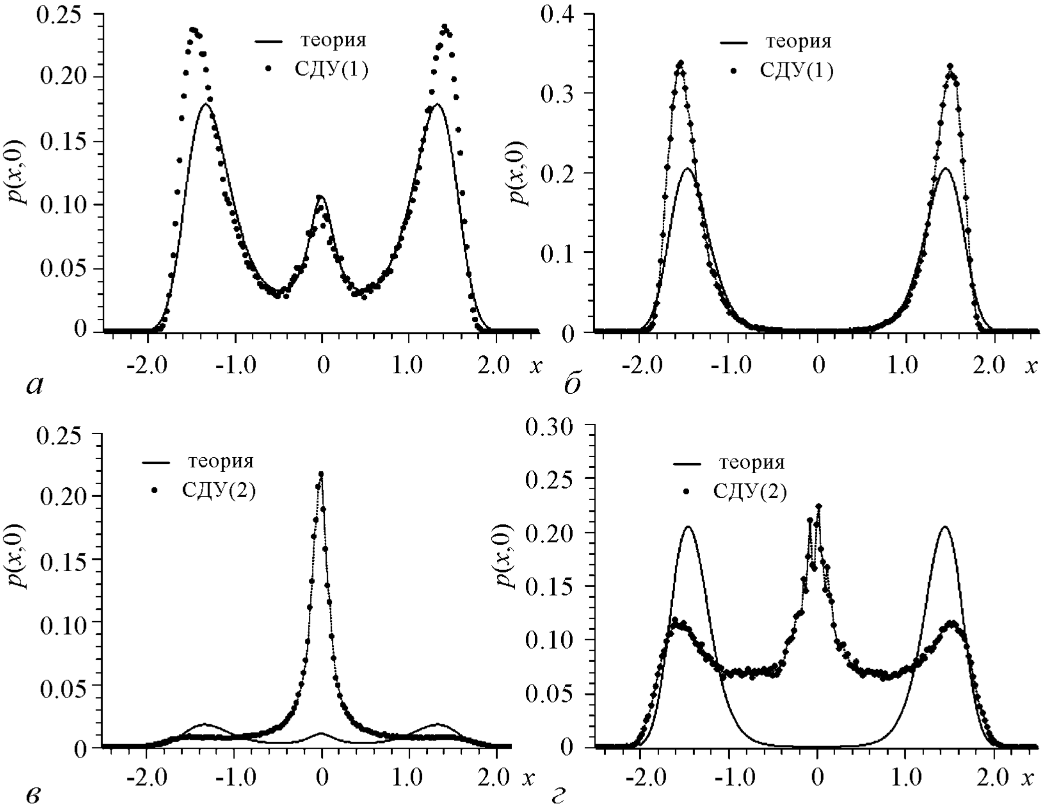

Рис. 5. Сравнение с теорией распределений в областях *2* и *3* (см. рис. 2), построенных численно для СДУ (1) и (2): *а* – СДУ (1), $\varepsilon = -0.05$; *б* – СДУ (1), $\varepsilon = 0.03$; *в* – СДУ (2), $\varepsilon = -0.05$; *г* – СДУ (2), $\varepsilon = 0.03$. Значения интенсивностей шума: $D_1 = 0.1$, $D_2 = 0.001$

различных углах поворота определяют существование бифуркационного интервала [12, 19, 21]. Грубо говоря, это означает, что Р-бифуркация не происходит одновременно по всем направлениям (углам поворота), а возникает сначала для некоторых направлений и постепенно распространяется на все. В качестве бифуркационного значения параметра в этом случае берется конечная точка бифуркационного интервала. Таким образом, чтобы получить полную картину перестройки распределения, необходимо рассмотреть двумерные поверхности $p(x, y)$. Соответствующие графики, построенные для (1) и (2) при одних и тех же значениях параметров $\varepsilon = 0.03$, $D_1 = 0.1$ и $D_2 = 0.001$, приведены на рис. 6. На рис. 6, *а*, иллюстрирующем вероятностное распределение в системе (1), виден замкнутый со всех сторон кратер с углублением в центре (в начале координат). Стенка кратера соответствует устойчивому предельному циклу детерминированной системы. В начале координат имеется минимум распределения, соответствующий неустойчивой точке равновесия. Плотность вероятности на цикле распределена неравномерно, однако, везде в точках цикла $p(x, y)$ имеет локальный максимум. Данная форма распределения соответствует области *3*. Поверхность $p(x, y)$, построенная для (2) и приведенная на рис. 6, *б*, существенно отличается от предыдущей. Кратер не является замкнутым. Следовательно, нельзя говорить о стохастическом устойчивом предельном цикле. В начале координат имеется локальный максимум, соответствующий устойчивому равновесию, однако, канавка на дне кратера, окружающая максимум, не замкнута со всех сторон. Эта канавка соответствует неустойчивому предельному циклу. Таким образом, распределение, полученное для системы (2), отвечает незавершенному бифур-

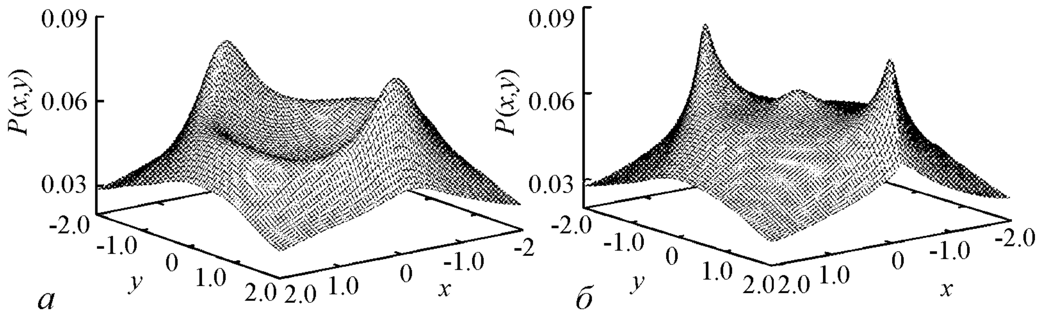

Рис. 6. Поверхности $p(x, y)$, построенные для (1) (*а*) и (2) (*б*) при $\varepsilon = 0.03$, $D_1 = 0.1$, $D_2 = 0.001$

кационному переходу, то есть точке в пределах бифуркационного интервала. Причем незавершенной является не только субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, приводящая к исчезновению канавки, но и стохастическая касательная бифуркация, в результате которой образуется кратер и канавка.

Таким образом, имеется значительное различие в бифуркационных явлениях в генераторе при случайной модуляции двух различных параметров: параметра возбуждения и квадрата частоты. Однако метод усреднения, приводящий в обоих случаях к одной и той же амплитудно-фазовой модели, не позволяет обнаружить этого различия. Эта модель демонстрирует качественное расхождение наблюдаемых явлений по сравнению с полными СДУ (2). Расхождения в поведении укороченной модели с системой (1) менее заметны. Представленные результаты расчетов плотности вероятности $p(x, y)$ относятся к случаю сравнительно сильного шумового воздействия. Однако, как показали численные эксперименты, существенные отличия от теории для модели (2) могут наблюдаться и при значительно более слабом параметрическом шуме.

Рассмотрим, как ведет себя во времени мгновенная амплитуда колебаний $a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ для моделей (1) и (2) в режимах, соответствующих рис. 6. Как видно из данных, приведенных на рис. 7, ни для модели (1), ни для модели (2) мгновенная амплитуда, строго говоря, не является медленно меняющейся функцией по сравнению с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$. При этом именно для модели (2) значения амплитуды имеют больший разброс и претерпевают более резкие изменения на малых интервалах времен (рис. 7, *б*).

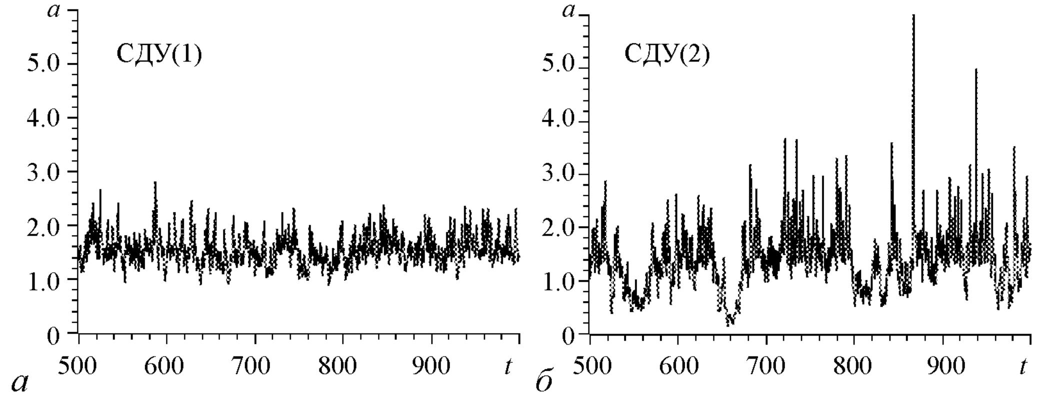

Рис. 7. Зависимость мгновенной амплитуды от времени для СДУ (1) (*а*) и (2) (*б*) при $\varepsilon = 0.03$, $D_1 = 0.1$, $D_2 = 0.001$

Выводы

В рамках квазигармонического приближения с использованием метода усреднения был осуществлен полный теоретический анализ стохастических бифуркаций в генераторе ван дер Поля с жестким возбуждением, содержащем источники параметрического и аддитивного шума. В отсутствии аддитивного шума он выявил наличие динамической бифуркации, связанной с потерей устойчивости точкой равновесия в нуле и возникновению стохастических колебаний, а также трех феноменологических бифуркаций, состоящих в перестройке вероятностного распределения $p(x, y)$. Бифуркация потери устойчивости точкой равновесия и две Р-бифуркации подобны аналогичным бифуркациям, наблюдаемым в укороченной модели генератора ван дер Поля с мягким возбуждением [20]. В обоих случаях гладкий минимум в начале координат возникает при $\varepsilon = D_1/4$, где D_1 – интенсивность параметрического шума. Различие состоит в том, что в случае суперкритической бифуркации при увеличении параметра ε в точке $\varepsilon = 0$ возникает максимум распределения в точках устойчивого предельного цикла, а при субкритической бифуркации – исчезает минимум в точках неустойчивого цикла. Установленные бифуркационные значения параметра ε, соответствующие стохастической касательной бифуркации и стохастической бифуркации Андронова–Хопфа, совпадают с бифуркационными значениями для детерминированной системы и не зависят от интенсивности шума, то есть шум в квазигармоническом приближении не смещает бифуркаций. Наиболее существенным следствием воздействия параметрического шума является отсутствие автоколебаний в области бистабильности при $\varepsilon < -D_1/2$. В этой области сохраняется устойчивая точка равновесия в начале координат и сколь угодно слабый параметрический шум, «выталкивая» траекторию с предельного цикла, рано или поздно приводит ее в точку равновесия. Однако на конечных интервалах времени могут наблюдаться метастабильные стохастические колебания с вероятностным распределением, характерным для зашумленного предельного цикла.

Добавление в систему аддитивного шума упрощает картину бифуркаций, приводя к исчезновению точки равновесия и устраняя негладкость плотности вероятности в начале координат. Остаются только две стохастические бифуркации, соответствующие касательной бифуркации и бифуркации Андронова–Хопфа детерминированной системы. Параметрический шум не приводит к каким-то качественным изменениям и, с точки зрения наблюдаемых бифуркаций, система ведет себя так же, как если бы на нее воздействовал только аддитивный шум. Полученные для рассматриваемой системы результаты отличаются от результатов, изложенных в [26]. В [26] для осциллятора Хопфа с субкритической бифуркацией рождения цикла было показано, что стохастическая бифуркация носит запаздывающий характер, то есть сдвигается в сторону увеличения управляющего параметра. Аналогичное поведение отмечалось в [13, 19, 21, 24]. Отсутствие зависимости бифуркационных перестроек от интенсивности шума при квазигармоническом анализе систем (1) и (2), также как совпадение результатов для двух моделей шума, связано с приближенным характером усредненных уравнений для амплитуды и фазы.

Важным результатом работы является установление определенного несоответствия квазигармонической теории с данными численных экспериментов. Если параметрический шум представляет собой случайную модуляцию параметра ω_0^2, то, несмотря на количественные расхождения, при исследованных значениях интенсивностей шума можно говорить о качественном соответствии результатов численного моделирования и квазигармонической теории. При шумовой модуляции управляющего параметра ε между теорией и численными расчетами не обнаруживается даже качественного соответствия. При этом установлено наличие бифуркационного интервала, для которого характерно отсутствие замкнутого кратера в вероятностном распределении $p(x, y)$ и наличие трех локальных максимумов плотности вероятности.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, гос. контракт № 14.740.11.0074.

Библиографический список

1. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
2. *Малахов А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
3. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
4. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
5. *Risken Z.* The Fokker-Planck Equation. Berlin: Springer, 1989.
6. *Ван Кампен Н.Г.* Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.
7. *Кляцкин В.И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
8. *Хорстнемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
9. *Arnold L.* Random dynamical systems. Berlin, Spriger, 2003.
10. *Kabashima S., Kawakubo T.* Observation of a noise induced phase transition in a parametric oscillator // Phys. Lett. A. 1979. Vol. 70. P. 375.
11. *Wiesenfeld K.* Noisy precursors of nonlinear instabilities // J. Stat. Phys. 1985. Vol. 58. P. 1071.
12. *Ebeling W., Herzel H., Richert W., Schimansky-Geier L.* Influence of noise on Duffing–van der Pol oscillator // Zeitschrift f. Angew. Math. U. Mechanik. 1986. Vol. 66. P. 141.
13. *Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // Phys. Rev. F. 1987. Vol. 36. P. 834.
14. *Namachshivaya N.S.* Stochastic bifurcation // Apl. Math. and Computation. 1990. Vol. 38. P. 101.
15. *Schenk-Yoppé K.R.* Bifurcation scenarious of the noisy Duffing–van der Pol oscillator // Nonlinear Dynamics. 1996. Vol. 11. P. 255.
16. *Landa P.S., Zaikin A.A.* Noise-induced phase transitions in a pendulum with a randomly vibrating suspension axis. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 4. P. 3535.
17. *Crauel H., Flandol F.* Additive noise destroys a pitchfork bifurcation // Journal of Dynamics and Differential Equations. 1998. Vol. 10. P. 259.
18. *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Стохастические бифуркации // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 5. С. 3.
19. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1631.
20. *Arnold L., Sri Namachshivaya N., Schenk-Yoppé K.R.* Toward an understanding of

stochastic Hopf bifurcation: A base study // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. P. 1947.
21. *Olarrea J., de la Rubia F.J.* Stochastic Hopf bifurcation: The effect of colored noise on the bifurcational interval // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 1. P. 268.
22. *Zakharova A., Vadivasova T.E., Anishchenko V., Koseska A., Kurths J.* Stochastic bifurcations and coherencelike resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81, № 1. P. 011106(1–6).
23. *Xu Y., Gu R., Zhang H., Xu W.. Duan J.* Stochastic bifurcations in a bistable Duffing–van der Pol Oscillator with colored noise // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 83. P. 056215(1–7).
24. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicativt random disturbances // Chaos, Solitons, and Fractals. 2009. Vol. 39. P. 7.
25. *Медведев С.Ю., Музычук О.В.* Статистические характеристики нелинейной резонансной системы, параметрически возбуждаемой случайной силой // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 1. С. 49.
26. *Башкирцева И.А., Перевалова Т.В., Ряшко Л.Б.* Анализ индуцированных шумом бифуркаций в системе Хопфа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 1. С. 37.
27. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
28. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1976.
29. *Стратонович Р.Л., Романовский Ю.М.* Одновременное параметрическое воздействие гармонической и случайной силы на колебательные системы // Научные доклады высшей школы. Физ.-мат. науки. 1958. Т. 4. С. 161.
30. *Музычук О.В.* О вероятностных характеристиках резонансной стохастической системы // Известия вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 6. С. 707.
31. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V.* Time-varing linearization and the Perron effects // Internat. Journal of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, № 4. P. 1079.
32. *Никитин Н.Н., Разевиг В.Д.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. Т. 18, № 1. С. 107.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 27.09.2012
После доработки 26.01.2013

BIFURCATIONS IN VAN DER POL OSCILLATOR WITH A HARD EXCITATION IN A PRESENCE OF PARAMETRICAL NOISE: QUASI-HARMONIC ANALYZES AND THE NUMERICAL SIMULATIONS

T. E. Vadivasova, V. S. Malyaev

In the work the behavior of a van der Pol oscillator with a hard excitation is considered near the excitation threshold under parametrical (multiplicative) Gaussian white noise disturbances, and in a case of the two noise sources presence: parametrical one and additive noise. The evolution of probability distribution is studied when a control

parameter and a noise intensity are changed. A comparison of the theoretical results, obtained in the quasi-harmonic approach with the results of numerical solutions of the oscillator stochastic equations is fulfilled.

Keywords: Noise, fluctuations, self-sustained oscillator, stochastic bifurcations, subcritical Andronov–Hopf bifurcation.

Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410026 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: VadivasovaTE@yandex.ru

Маляев Владимир Сергеевич – родился в ноябре 1980 года в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет по специальности радиофизика (2002) и аспирантуру. Является заведующим учебной лабораторией радиофизики (с 2003) физического факультета СГУ. Основные научные интересы – стохастические процессы. Автор нескольких научных публикаций.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: val@chaos.ssu.runnet.ru