



УДК 537.525.5, 536.244

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-2-140-157>

Нелинейная задача о распределении температуры внутри Земли

М. В. Давидович

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

ООО НПП «Этна Плюс»

Россия, 410040 Саратов, Вишневая, 11

E-mail: davidovichMV@info.sgu.ru

*Поступила в редакцию 17.03.2019, принята к публикации 13.01.2020,
опубликована online 30.04.2020*

Цель работы – получение нелинейного уравнения теплопроводности на основе закона Стефана–Больцмана и баланса энергии для исследования распределения температуры внутри Земли с учетом обычной и лучистой теплопроводностей. Полученное уравнение с нелинейностью четвертой степени позволяет рассматривать теплообмен слоя вещества с окружающей средой. **Методы** получения уравнения основаны на законе сохранения энергии с учетом закона Кирхгофа и введения коэффициента вариации черноты. Вариация коэффициента черноты двух соприкасающихся при одинаковой температуре тел означает поток тепла от более черного тела к менее черному, при этом поток пропорционален указанной вариации, четвертой степени температуры и коэффициенту Стефана–Больцмана. **Результаты** представлены как решение стационарной задачи о распределении тепла вдоль радиуса Земли, для чего применено полученное уравнение. Для этого рассмотрен тепловой баланс Земли, на основе уравнения получены стационарные функционалы для распределения температуры, из которых оценена температура в центре Земли. Такая оценка основана на исследовании прозрачности приповерхностного слоя и атмосферы для излучения ИК и оптического диапазонов. Показано, что на температуру влияет прозрачность небольшого приповерхностного слоя и значение его вариации коэффициента черноты. Показано также, что температура в центре находится в хорошем соответствии с недавними данными косвенных экспериментов – порядка 6000...6500 К. Получено распределение температуры вдоль радиуса. В большой области центральных значений она изменяется очень незначительно. Основное изменение температуры приходится на слой порядка 600 км от поверхности. **Обсуждение результатов.** Оценки без учета лучистого переноса приводят к более высокой температуре в центре. Следует отметить, что рассмотренная модель приближенная. В ней использована сферическая симметричность и не рассмотрен перенос тепла за счет конвекции в жидкой внутренней области, которая приводит к более сильному выравниванию температуры. Более точная модель требует уточнения пространственных распределений входящих в уравнения коэффициентов.

Ключевые слова: лучистая теплопроводность, тепловой баланс Земли, закон Стефана–Больцмана, коэффициент черноты, температура ядра Земли.

Образец цитирования: Давидович М.В. Нелинейная задача о распределении температуры внутри Земли // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 2. С. 140–157. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-2-140-157>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект № 16-19-10033.

Nonlinear problem of temperature distribution inside the Earth

M. V. Davidovich

Saratov State University
83, Astrakhanskaya, Saratov 410012, Russia
Research and production company «Etna Plus»
11, Vishnevaya, Saratov 410040, Russia
E-mail: Davidovichmv@info.sgu.ru
*Received 17.03.2019, accepted 13.01.2020,
published online 30.04.2020*

The **purpose** of this research is to obtain a nonlinear heat conduction equation based on the Stefan–Boltzmann law and energy balance to study the temperature distribution inside the Earth, taking into account usual conductivity and radiant heat conductivity. Resulting equation with a fourth-degree nonlinearity allows to consider the heat transfer between a layer of matter and the environment. **Methods** to obtain the equation are based on the energy conservation law, taking into account the Kirchhoff's law and introducing the variation of the blackness coefficient. **Results** are presented as a solution to the stationary problem of heat distributed along the Earth's radius, wherefore the obtained equation has been applied. Therefore, thermal balance of the Earth has been considered, stationary functionals for temperature distribution have been obtained, whereof the temperature in the center of the Earth has been estimated. This estimate is based on the study of the transparency of the surface layer and the atmosphere for IR and optical range radiation. It is shown that the temperature is affected by transparency of a small surface layer and the value of variation of the blackness coefficient. It is also shown that the temperature in the center correlates well with the recent data from indirect experiments which is about 6000...6500 K. Temperature distribution along the radius is obtained. In a large area of central values, the temperature changes very slightly. Main temperature variation occurs at a layer of about 600 km above the surface. **Discussion.** Estimates without taking into account radiative transfer lead to a higher temperature in the center. It should be noted that the considered model is approximate. It uses spherical symmetry and does not consider heat transfer due to convection in the liquid internal region, which leads to a stronger temperature equalizing. A more accurate model requires specifying the spatial distributions of the coefficients included in the equation.

Key words: radiant thermal conductivity, Earth heat balance, Stefan–Boltzmann law, blackness coefficient, Earth's core temperature.

Reference: Davidovich M.V. Nonlinear problem of temperature distribution inside the Earth. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 2, pp. 140–157. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-2-140-157>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. The work was supported by Russian Science Foundation, project no. 16-19-10033.

Введение

Известно, что центр Земли остывает приблизительно со скоростью 100 градусов на каждый миллиард лет [1], при этом средняя температура на ее поверхности за последний миллиард лет хаотически колеблется относительно настоящего значения (с учетом ледниковых и обычных эпох и периодов) с амплитудой не более 10 K и достаточно большими средними периодами. В качестве сильного шума выступает солнечная активность, а связанные с движением Земли слабые колебания индуцируют эффект стохастического резонанса. Но процесс распределения температуры вдоль радиуса Земли вполне можно считать стационарным и почти не зависящим от угловых (геодезических) координат и определяемым средней температурой на поверхности. Распределение температуры внутри Земли является не решенной до сих пор проблемой. Линейное уравнение теплопроводности (ЛТУ) применялось для моделирования распределения температуры вдоль радиуса Земли, но не дало приемлемых результатов [2,3]. При этом для объяснения весьма медленного остывания необходим учет внутренних источников тепла [2,3]. С их учетом

использование ЛУТ при интегрировании от поверхности дает завышенную относительно имеющихся почти на порядок температуру в центре, чем имеющиеся оценки (см. ниже). Недавно найдена косвенная оценка температуры 6230 ± 500 К [4] на поверхности твердого ядра (при радиусе $r = 1.3 \cdot 10^6$ м), полученная косвенными методами как температура перехода железа из жидкого состояния в твердое состояние при давлении 330 ГПа. Она примерно на 1000 К выше, чем имевшая место ранее. Учитывая, что теплопроводность твердого железо-никелевого ядра Земли весьма большая, а также, что в нем почти отсутствуют источники тепла (кроме U^{238}), эту температуру можно принять за температуру в центре. Несоответствие моделирования на основе ЛУТ этим данным можно объяснить тем, что температура перераспределяется за счет лучистого переноса тепла из сильно нагретых областей к поверхности, а также за счет конвекционного переноса тепла. Высокое давление обуславливает большую динамическую вязкость в жидких областях мантии (от $3 \cdot 10^{21}$ до $6 \cdot 10^{22}$ Па·с) и весьма малую скорость тепловой конвекции (порядка 10 см/год). Оценки в приближении Буссинеска показывают ее слабое влияние на распределение температуры.

Цель работы – моделирование распределения температуры внутри Земли. Методом исследования является нелинейное уравнение теплопроводности (НУТ) и моделирование на его основе путем оценки нелинейных функционалов. Целью работы также является вывод указанного НУТ и связанных с ним функционалов. Ниже показано, что распределение температуры имеет очень малый градиент почти во всей внутренней области, и только на глубинах не более 10% от радиуса возникает сильный градиент. В силу этого и высокой вязкости можно не учитывать конвективный теплоперенос, что и является одним из упрощений работы. Мы также придерживаемся сферической модели с азимутальной и меридиональной независимостью.

Обычно рассматривают уравнения теплопроводности, считая, что теплопередача осуществляется взаимодействием (контактом) атомов посредством обмена тепловыми фонами. Это требует введения коэффициента теплопроводности k , плотности вещества ρ и коэффициента теплоемкости c_0 при постоянном давлении. Если указанные величины не зависят от температуры T , то ЛУТ является линейным дифференциальным уравнением (ДУ) параболического типа [2, 3, 5–9]. В случае введения зависимости от температуры уравнение теплопроводности становится нелинейным [2, 9]. Обычно перенос тепла за счет теплопроводности и радиационный (лучистый) перенос тепла за счет излучения рассматриваются отдельно на основе уравнений разных типов [10–22]. Последний описывается уравнениями переноса лучистой энергии [12–21]. Он характерен для сильно нагретых тел (например, плазмы звезд): хотя теплопроводность их плазмы весьма высока, перенос за счет излучения может существенно преобладать. Обычно плотность лучистой энергии при этом также весьма высока и должна быть учтена. Лучистый перенос характерен для нагретой и достаточно разреженной (то есть достаточно прозрачной) плазмы, где взаимодействие частиц за счет столкновений не столь существенно, а плотность тепловой энергии вещества может быть существенно меньше плотности лучистой энергии. Характерный пример – солнечная корона. Перенос излучения рассматривается как совокупность актов испускания, движения и поглощения фотонов атомами, ионами и другими частицами.

При высокой температуре вещество обычно находится в состоянии газовой плазмы, где также существенны явления массопереноса (конвекции), связанные с теплопереносом. Так, для внешних областей Солнца в переносе тепла преобладает конвекция, поскольку пробег излучения мал. Однако часто, особенно для сильно нагретых твердых тел, конвекцией можно пренебречь и рассматривать только теплоперенос. При этом возможны условия, когда следует его учитывать как за счет теплопроводности, так и за счет излучения единым образом в одном уравнении. Важным здесь является введение усредненного поглощения, разработанное С. Росселандом с учетом температурного градиента спектральной плотности энергии поля. Это позволяет сформулировать уравнение лучистой теплопроводности (УЛТ), в котором радиационный поток от более нагретой

области к менее нагретой пропорционален антиградиенту температуры $-\kappa_R \nabla T$, а коэффициент теплопроводности κ_R пропорционален T^3 .

В монографии [22] рассмотрено такое УЛТ в форме закона сохранения энергии $\partial Q/\partial t = F - \nabla \cdot \mathbf{S}$ с введением коэффициента лучистой теплопроводности $\kappa_r = 16l_R\sigma T^3/3$. В нем Q – плотность тепловой энергии (с учетом плотности энергии поля E_p и вещества $c_0\rho T$), $\mathbf{S} = \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_k$. $\mathbf{S}_p = -l_R c \nabla E_p/3$ – поверхностная плотность его потока, связанная с равновесной плотностью энергии теплового излучения $E_p = 4\sigma T^4/c$, $\mathbf{S}_k = -k \nabla T$, F – плотность тепловых источников, T – абсолютная температура, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана–Больцмана, l_R – росселандов (усредненный по Росселанду) пробег излучения [22]. Последний зависит от поглощающей способности вещества, спектрального состава излучения, температуры и скорости переноса излучения. Обычно эту скорость считают не зависящей от вещества и равной скорости света в вакууме c , что справедливо для квантов очень больших энергий. УЛТ получено в диффузионном приближении и в предположении квазиравновесности. Оно имеет нелинейность по T четвертого порядка. Основная проблема при моделировании – получение величины l_R . Это уравнение удобно для расчета температуры, поскольку уравнения лучистого переноса работают с интенсивностями излучения. Однако условие, что радиационный поток идет от более нагретого тела к менее нагретому телу не всегда выполняется. Примером могут служить Солнце с температурой поверхности 5770 К и солнечная корона с температурой $1 \cdot 10^6 \dots 2 \cdot 10^6$ К. Причина ясна: Солнце является практически абсолютно черным телом, а корона хорошо прозрачна в оптическом и ИК диапазонах. Поэтому необходим учет коэффициента черноты. Тепловые потоки с учетом такого коэффициента рассмотрены ниже. Предложено новое НУТ, в основе которого лежит введение вариации коэффициента черноты и усредненный по Планку (планковский) пробег излучения.

1. Нелинейное уравнение теплопроводности

Рассмотрим сначала баланс энергии в неравномерно нагретом плоском слое ($-d < x < d$), слева и справа от которого вакуум при 0 К. Слой находится в квазистационарном состоянии: почти вся генерируемая в нем источниками мощность излучается через две его поверхности. Это означает, что производная температуры по времени мала. Считаем также, что градиент температуры мал, и слой находится в квазиравновесном состоянии, поэтому можно использовать распределение Планка и понятие температуры. Предположим сначала, что градиент температуры направлен справа налево. Обозначая температуру $u(x, t) \equiv T(x, t)$, имеем $u'(x, t) = \partial u(x, t)/\partial x' < 0$, а тепловой поток (по крайней мере, за счет теплопроводности) идет слева направо. Обозначая вектор плотности потока $\mathbf{S}(x, t) = \mathbf{x}_0 S(x, t)$, запишем НУТ в виде закона сохранения:

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(x, t) = \partial_x S(x, t) = F(x, t) - \partial_t w(x, t), \quad (1)$$

где $F(x, t)$ – плотность мощности источников, $w(x, t)$ – плотность тепловой энергии поля и вещества. Далее производную ∂_t будем обозначать точкой, а производную по координате – штрихом. Интегрируя дивергенцию потока по всему слою, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma(t) &= \int_{-d}^d \nabla \cdot \mathbf{S}(x, t) dx = \int_{-d}^d dS(x, t) = S(d, t) - S(-d, t) = \\ &= \sigma \varepsilon(d) u^4(d, t) + \sigma \varepsilon(-d) u^4(-d, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Это частный вид теоремы Гаусса. В этом равенстве $\varepsilon(d)$ – коэффициент черноты (КЧ) поверхности тела при облучении его справа, $\varepsilon(-d)$ – КЧ при облучении слева, а (2) в соответствии с

законом Кирхгофа дает полную излученную слоем плотность мощности. В силу слабой зависимости от времени в этих коэффициентах время опущено. Для однородного слоя $\varepsilon(d) = \varepsilon(-d)$. По определению эти величины равны единице, только если вся энергия с фотонами всех частот поглощается на длине $2d$, поэтому для всех реальных тел $0 < \varepsilon < 1$. Пришедший в слой толщин $\Delta = d - x$ поток слева поглощается слоем как $\exp(-\Delta/l)$, поэтому для среды справа $\varepsilon^- = 1 - \exp(-(d-x)/l)$. Здесь l – длина пробега излучения, усредненная по спектру с функцией Планка, соответствующей средней температуре слоя. Ее зависимость от температуры определяет зависимость от нее КЧ. Это КЧ слоя справа, который излучает справа налево. Более строго следует записать $\varepsilon^- = \varepsilon_\infty [1 - \exp(-\Delta/l)]$, где ε_∞ – КЧ однородного полупространства за счет отражения (альбедо). В нашем случае контактируют одинаковые по составу (во всяком случае, в плоскости контакта) слои, поэтому отражение учитывать не следует. При поглощении движущегося влево луча он может пройти путь $d + x$, поэтому $\varepsilon^+ = 1 - \exp(-(d+x)/l)$. Здесь мы используем приближение, что стратификация слоев слабая, излучение имеет малый коэффициент отражения от них, не учитываем сильно поглощенную и затем отраженную от границы слоя $x + \Delta = d$ волну, а также фазовые соотношения, поскольку используем частотное усреднение. При $l \ll \Delta$ границу можно не учитывать. Малым отражениям соответствуют малые неоднородности сред. Соотношение (2) показывает, что поток и градиент должны поменять знак, то есть поток у левой границы идет влево в сторону вакуума в силу того, что нагретое тело должно излучать в обе стороны. Если плотность источников $F(x, t)$ симметрична по x , то знак потока определяется знаком x . Несимметричность источников дает сдвиг точки смены знака. Если удельный поток (2) равен удельной мощности выделяемого тепла

$$Q(t) = \int_{-d}^d F(r, t) dx, \quad (3)$$

то процесс стационарный: $\dot{w}(r, t) = 0$. Определяя $\dot{W}(t)$ как интеграл от $\dot{w}(r, t)$, получаем условие квазистационарности $|Q(t) - \Sigma(t)|/Q(t) \ll 1$. Тепловой поток определяем как сумму потока за счет теплопроводности $-ku'$ и излучения, определение которого и является нашей задачей. Рассмотрим слой $x_1 < x < x_2$ толщиной $\Delta x = x_2 - x_1$, в котором тепловой поток идет слева направо. Считая применимость распределения Планка, найдем втекающий в слой радиационный тепловой поток на единицу поверхности: $\Delta \tilde{S} = \sigma(\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^-)u_1^4 - \sigma(\varepsilon_2^+ - \varepsilon_2^-)u_2^4$. Здесь знак плюс определяет КЧ при потоке слева направо, а минус – КЧ при потоке справа налево. Если, например, градиента нет, то приведенная формула говорит о том, что поток через плоскость x_1 есть и идет от более черного тела (слоя) к менее черному ($\varepsilon_1^+ > \varepsilon_1^-$). Более того, при условии $\sigma(\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^-)u_1^4 > ku'_1$ этот поток даже может быть противоположен потоку за счет теплопроводности, если градиент изменит знак. Имеем $\varepsilon_i^- = 1 - \exp(-(d-x_i)/l_i)$, $\varepsilon_i^+ = 1 - \exp(-(d+x_i)/l_i)$. Видим, что радиационного потока нет, если совпадают произведения КЧ на температуры в четвертой степени для обоих направлений передачи. При совпадении температур это возможно только при совпадении КЧ. При одинаковой температуре в месте контакта двух слоев из одинаковых материалов поток будет идти от более толстого слоя к менее толстому. На правой границе слоя справа другого слоя нет (нулевая толщина), поэтому весь поток от слоя идет вправо через его поверхность. Имеем $\varepsilon_i^+ - \varepsilon_i^- = 2 \exp(-d/l_i) \sinh(x_i/l_i)$. Полагая $x_1 = x$, $x_2 = x + \Delta x$, $l_1 = l(x)$, $l_2 = l(x) + l'(x)\Delta x$, $u_2^4 = u^4(x) + 4u^3(x)u'(x)\Delta x$ и обозначая $\delta\varepsilon(x) = \varepsilon^+(x) - \varepsilon^-(x)$, имеем $\delta\varepsilon(x) = 2 \exp(-d/l(x)) \sinh(x/l(x))$. Эту величину назовем вариацией коэффициента черноты (ВКЧ). Имеем также

$$\varepsilon_2^+ - \varepsilon_2^- \approx \delta\varepsilon(x) [1 - \Delta x(l'(x)d/l^2(x) + \coth(x/l(x))[1 - xl'(x)]/l(x))].$$

Мы учли первый порядок по Δx , поскольку эту величину можно взять бесконечно малой. Дивергенцию полной вытекающей плотности потока представим в виде

$$S' = [k(x)u'(x)]' - \sigma\delta\varepsilon(x)[4u^3(x)u'(x) + u^4(x)\coth(x/l(x))[1 - xl'(x)/l(x)]/l(x)]. \quad (4)$$

В ней учтена теплопроводность. Вдали от границ ВКЧ $\delta\varepsilon(x) \approx -\exp(-(d-x)/l(x))$, то есть эта величина мала, если не слишком велика длина $l(x)$ (то есть тело непрозрачное). Вблизи центра $\delta\varepsilon(x) = x\exp(-(d-x)/l(x))/l(x)$, то есть ВКЧ близка к нулю и имеет место, в основном, перенос тепла за счет теплопроводности. Это можно объяснить тем, что тепловой поток к центру есть разности потоков от левой и правой частей пластины. Тепловой же поток с каждой из поверхностей $x = \pm d$ есть только поток слева или справа, поэтому $\delta\varepsilon(\pm d) \approx \pm 1$. Для толстого хорошо поглощающего слоя можно использовать знак равенства. Если $xl' \ll l(x)$ и $l(x) \ll x$, то $\Delta\dot{S} \approx \Delta x\delta\varepsilon(x)\sigma[4u^3(x)u'(x) + u^4(x)/l(x)]$. Взяв $\Delta x = l$, имеем усредненный поток $\delta\varepsilon(x)\sigma[4u^3u'(x)l(x) + u^4(x)]$. Подытоживая, НУТ запишем в виде

$$\dot{w}(x, t) = [k(x)u'(x, t) - \sigma\delta\varepsilon(x)u^4(x, t)]' + F(x, t). \quad (5)$$

Интегрируя (5) по всему слою и учитывая, что $\delta\varepsilon(\pm d) \approx \pm 1$, получаем закон сохранения

$$\Sigma = \sigma u^4(d, t) + u^4(-d, t) = Q(t) - \partial_t W(t), \quad (6)$$

показывающий, что поток мощности из слоя есть разность генерируемой и накопленной мощности. Поток за счет градиента в вакуум быть не может, поэтому для выполнения (6) должно выполняться условие $u'(\pm d, t) = 0$, то есть градиент у поверхностей должен отсутствовать. Это собственно и означает, что поверхность и приповерхностный слой излучают с одной температурой. Повышение температуры на небольшой глубине от поверхности приведет к ее выравниванию за счет высвечивания, поскольку тонкий слой прозрачен. Градиент возникает только на некоторой глубине и для нагретого тела направлен всегда к излучающей поверхности. В НУТ мы учли только внутренние источники. Для слоя слева и справа от него возможны внешние источники, создающие внешние потоки слева и справа. Пример учета внешнего источника для тела в виде шара будет дан далее. Выше мы рассмотрели случай почти однородного тела, когда длина $l(x)$ изменяется слабо. Если это не так, то поглощение в слое (x, d) следует оценить интегралом от $l^{-1}(x)$, при этом

$$\delta\varepsilon(x) = \exp\left(-\int_0^{d-x} \frac{d\chi}{l(x+\chi)}\right) - \exp\left(-\int_0^{d+x} \frac{d\chi}{l(x+\chi)}\right).$$

При постоянной длине пробега получаем приведенный выше результат.

2. Модель для сферического слоя

Баланс энергии в сферической оболочке $(r, r + \Delta r)$ рассмотрим аналогично. Также считаем, что система квазиравновесная и хорошо поглощающая. Это означает, что на длине оболочки температура изменяется слабо, то есть градиент температуры мал: $u'(r, t)\Delta r/u(r, t) \ll 1$, оболочка находится в термодинамическом равновесии, то есть можно использовать планковское распределение, а все излучение, входящее в оболочку с толщиной существенно больше l , поглощается в ней. Из внутренней области во внешнюю в единицу времени идет радиационный поток $\sigma\varepsilon^+(r)u^4(r)S(r)$, а из внешней области во внутреннюю – поток $\sigma\varepsilon^-(r + \Delta r)u^4(r + \Delta r)S(r + \Delta r)$. Кроме того, есть еще два потока: внутрь – поток $-\sigma\varepsilon^-(r)u^4(r)S(r)$ и наружу – поток

$-\sigma\varepsilon^+(r+\Delta r)u^4(r+\Delta r)S(r+\Delta r)$. Имеют место также соответствующие потоки за счет теплопроводности: $-k(r)u'(r)S(r)$ и $k(r+\Delta r)u'(r+\Delta r)S(r+\Delta r)$. В силу закона сохранения энергии разность потоков должна быть поглощена слоем.

Изменение энергии поля и вещества в слое есть $S(r)\Delta r(\dot{E}_p + c_0(r)\rho(r)\dot{u}(r,t))$. Пусть $F(r,t)$ – плотность мощности тепловых источников. Учитывая формулу для площади сферической поверхности $S(r) = 4\pi r^2$, разлагая все величины в ряд Тейлора в окрестности точки r по Δr , деля на элемент объема $\Delta V = S(r)\Delta r$ и переходя к пределу $\Delta r \rightarrow 0$, получаем НУТ:

$$\dot{w}(r,t) = r^{-2} [r^2 (k(r)u'(r,t) - \sigma\delta\varepsilon(r)u^4(r,t))] + F(r,t). \quad (7)$$

В нем $w(r,t) = 4\sigma u^4(r,t)/c + c_0(r)\rho(r)u(r,t)$, $\delta\varepsilon(r) = 2 \exp(-R/l) \sinh(r/l)$, и для его получения достаточно удерживать только линейные по Δr члены. Пусть $T = 6 \cdot 10^3$ К, $c_0 = 800$ Дж/(кг·град), $\rho = 12000$ кг/м³, что характерно для ядра Земли. Имеем $E_p = 0.98 \cdot 10^{-16}$, что более чем в 10^{-16} раз меньше плотности энергии вещества. Учет E_p важен в сильно разогретой и разреженной плазме типа солнечной короны, а здесь мы E_p пренебрежем: $w(r,t) = c_0(r)\rho(r)u(r,t)$. Тело малого радиуса прозрачно для излучения, и его нельзя считать абсолютно черным. С хорошей степенью точности для потока наружу можно положить $\varepsilon^+(r) = 1 - \exp(-(R-r)/l)^\lambda$, где $\lambda \approx 1$, а для потока внутрь $\varepsilon^-(r) = 1 - \exp(-(R+r)/l)^\lambda$. Далее используем значение $\lambda = 1$, что соответствует затуханию плоской волны. При $R \gg l$ волны вполне можно рассматривать как плоские. Тогда имеем приведенное выше значение

$$\delta\varepsilon(r) = 2 \exp(-R/l) \sinh(r/l). \quad (8)$$

Здесь R – радиус тела, $\delta\varepsilon(R) = 1$, $\delta\varepsilon(0) = 0$, величина l постоянная. Это означает, что со своей поверхности тело излучает с равным единице КЧ (отличие от единицы есть экспоненциально малая величина $\exp(-2R/l)$), а излучения из центра нет. Последнее следует из условия сферической симметрии. Исследуем ДУ (7) при условии $\partial w(r,t)/\partial t = 0$. Интегрируя в пределах слоя (r, R) и вводя описывающую выделяемую в слое мощность функцию

$$f(r,t) = \int_r^R r'^2 F(r',t) dr', \quad (9)$$

имеем ДУ

$$u'(r,t) = \frac{R^2 [k(R)u'(R,t) + \sigma u^4(R,t)] + f(r,t) + r^2 \sigma \delta\varepsilon(r)u^4(r,t) - C}{r^2 k(r)}. \quad (10)$$

Здесь R – радиус Земли, C – «константа интегрирования». Ее нельзя положить равной нулю, поскольку баланс выполняться не будет, а следует взять $C = R^2 \sigma u^4(R,t)$. Это есть деленный на 4π поток внешнего излучения внутрь, который численно равен излучению Земли, если интегрировать (7) по всему земному шару с учетом условия $u'(R) = 0$. Фактически задание внешнего поглощенного потока есть некое граничное условие, обеспечивающее баланс мощности. Этот поток уничтожает градиент температуры на поверхности и фактически обеспечивает для уравнения первого порядка (11) граничное условие термостата $u(R) = \text{const}$. При решении уравнения второго порядка (7) условия $u(R)$ и $u'(R)$ надо задавать. Поскольку из центра потока нет, $u(r,t) = 0$, и должно выполняться условие $-R^2 k(R)u'(R,t) = f(0,t)$. Слева в этом равенстве стоит деленный на телесный угол 4π поток на поверхности за счет теплопроводности, а справа – деленная на 4π полная мощность источников тепла. Фактически всю генерируемую внутреннюю

мощность на поверхность выводит теплопроводность, а излучение только перераспределяет температуру и обнуляет ее градиент на поверхности. ДУ приобретает вид

$$u'(r, t) = -(r^2 k(r))^{-1} [f(0, t) - f(r, t)] - r^2 \sigma \delta \varepsilon(r) u^4(r, t). \quad (11)$$

ДУ (11) есть следствие теплового баланса Земли, который будет рассмотрен ниже. Если плотность источников постоянна $F = \text{const}$, ДУ упрощается, поскольку $W = 4\pi R^3 F/3 = 4\pi f(0, t)$ – полная мощность источников, а квадратных скобках в (11) стоит мощность источников в слое, отнесенная к единичному телесному углу. ДУ (11) следует интегрировать от значения $u(R) = T_R$ до малых значений радиуса. Однако это полностью стационарное уравнение. Реально Земля медленно остывает, поэтому следует учесть источники за счет запасенного тепла. Остывание приближенно можно описать законом $T(r, t) = T(r) \exp(-\alpha(r)t)$, где функция $\alpha(r)$ максимальна при $r = 0$ и равна нулю при $r = R$. Это значит, что более глубокие слои Земли остывают сильнее, а на поверхности температура постоянна: $T(R, t) = T_R$. Возьмем $\alpha(r) = \alpha_0(1 - (r/R)^\delta)$. Для простоты будем использовать значение $\delta = 1$. Остывание на 100 градусов за миллиард лет дает оценку $\alpha_0 = 5.3 \cdot 10^{-19} \text{ с}^{-1}$. На самом деле это остывание связано со всеми источниками тепла. Если бы их не было, остывание шло бы значительно быстрее. В левой части (7) возникает производная $-c_0(r)\rho(r)u(r, t)\alpha(r)$, которую с измененным знаком можно добавить к плотности источников F . Соответственно изменится функция (9), которую теперь обозначим $\tilde{f}(r, t)$.

3. Тепловой баланс Земли и постановка задачи

Известно, что средняя по поверхности температура Земли почти постоянна за год и равна $T(R) = T_R = 287.9 \text{ К}$. На протяжении миллиарда лет она хаотически менялась около этого значения с размахом не более десятка градусов: ледниковые эры и периоды сменялись периодами потепления. Ей соответствует среднее излучение единицы поверхности Земли 396 Вт/м^2 . От Солнца в среднем по поверхности и времени 1 м^2 поверхности Земли получает около 341 Вт/м^2 . Примерно столько же Земля вместе с атмосферой излучает в Космос. Этой величине соответствует температура 249 К . Разницу обуславливает парниковый эффект. Считая Землю и атмосферу с учетом солнечной радиации находящимися в термодинамическом равновесии, считаем, что такой же поток 396 Вт/м^2 поступает внутрь Земли, что учтено константой C . Внутренние источники тепла по сравнению с этой цифрой незначительны (около 0.087 Вт/м^2) [23, 24].

Итак, опишем вкратце тепловой баланс (см. [23–30]). Из 341 Вт/м^2 солнечного излучения примерно 30% (102 Вт/м^2) сразу же отражается в Космос от поверхности Земли (23 Вт/м^2) и облаков (79 Вт/м^2), а 239 Вт/м^2 в сумме поглощается атмосферой (78 Вт/м^2) и поверхностью Земли (161 Вт/м^2). Атмосферное поглощение обусловлено облаками (аэрозолями) и водяными парами. Из мощности 161 Вт/м^2 , непосредственно поглощаемой поверхностью, 40 Вт/м^2 возвращается в космическое пространство в виде теплового излучения диапазона $3...45 \text{ мкм}$, еще 97 Вт/м^2 передаются атмосфере за счёт различных тепловых процессов (80 Вт/м^2 – испарение воды, 17 Вт/м^2 – конвективный теплообмен). Большая часть удельной мощности излучения Земли (около 356 Вт/м^2) поглощается атмосферой, из которой 332 Вт/м^2 возвращается в виде обратного излучения атмосферы. Имеет место такой баланс: $161 - 40 - 97 - 356 + 332 = 0$. Таким образом, полное тепловое излучение поверхности Земли составляет 396 Вт/м^2 и может быть представлено как сумма излучения в атмосферу и непосредственно в Космос: $356 + 40$, что соответствует средней тепловой температуре 287.9 К (чуть более 14°C) [23]. Атмосфера излучает в космическое пространство 199 Вт/м^2 , включая 78 Вт/м^2 , полученные от излучения Солнца, 97 Вт/м^2 , полученные от поверхности Земли, и разность между поглощаемым атмосферой излучением поверхности и обратным излучением атмосферы 23 Вт/м^2 [23]. Все приведенные величины следует соотносить с радиусом Земли.

Упрощая, следует констатировать, что имеется как поток из Земли, так и примерно такой же поток в Землю. Реально Земля все же остывает, поэтому внешний поток на 0.087 Вт/м^2 больше. На эту же величину излученный в Космос поток чуть больше получаемого от Солнца. Поток 0.087 Вт/м^2 соответствует полной мощности всей Земли $44.6 \cdot 10^{13} \text{ Вт}$ (поток от Солнца почти в 5000 раз больше). Поток генерируемой Землей мощности соответствует среднему отрицательный градиент температуры $u'(R) = -0.03 \text{ К/м}$. Однако из-за обратного потока тепла вблизи поверхности он почти не проявляется, а стойкий градиент появляется на глубине 100 и более метров. Конечно, можно положить $u'(R) = 0$ и ввести поток как разность внешнего и внутреннего потоков, увеличив температуру $u(R)$ на доли градуса.

Рассматривая уравнение (11) с учетом $f(R) = 0$, имеем $u'(R) = -k^{-1}(R)f(0)/R^2$. Здесь и далее весьма слабую зависимость от времени во всех соотношениях опускаем. Линейная аппроксимация с таким градиентом дает более чем на порядок завышенную температуру в центре: $192 \cdot 10^3 \text{ К}$. Реально градиент спадает к центру до нуля по некоторому закону. Для интегрирования (3) нужно определить зависимости $k(r)$ и $f(r)$, усредненные по всем угловым (географическим) координатам Земли, что является сложной задачей и определяет основную погрешность моделирования температуры.

Рассмотрим сначала источники тепла. Они делятся на три составляющие: за счет уменьшения запасенной энергии, за счет радиоактивного распада и за счет уменьшения угловой скорости вращения Земли, обусловленной движением ее жидких фракций. Плотность мощности от распада изотопов K^{40} , U^{238} , U^{235} и Th^{232} у поверхности известна и равна $F = 5.44 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^3$. Это дает завышенную оценку полной мощности $W_R = 6 \cdot 10^{15} \text{ Вт}$, если принять равномерное ее распределение. По современным оценкам суммарная радиоактивная мощность Земли, полученная детектированием нейтрино в шахтах, равна $24 \cdot 10^{12} \text{ Вт}$. Общая мощность всех тепловых источников Земли W равна $44 \cdot 10^{12} \text{ Вт}$. Она обусловлена радиоактивным распадом с мощностью $W_R = 24 \cdot 10^{12} \text{ Вт}$, остыванием с мощностью W_Q и выделением тепла за счет движения жидких фракций ядра W_Ω , связанным с энергией вращения Земли. Последняя оценивается как $3.5 \cdot 10^{12} \text{ Вт}$. Энергия вращения тратится в основном на нагрев океана за счет приливов и отливов, но нагреваются и движущиеся жидкие области внутри Земли (эти процессы ответственны за ее магнитное поле), за счет чего угловая скорость падает. Так, 530 млн. лет назад скорость вращения Земли была намного больше, и сутки содержали чуть менее 21 часа. Среднее замедление вращения порядка 2 мс/сутки/век. Учитывая момент инерции Земли $J = 8.34 \cdot 10^{37} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ и потерянную ей за это время энергию $E = J\omega_2^2(\omega_1^2/\omega_2^2 - 1)/2 = 7.1 \cdot 10^{28} \text{ Дж}$, получаем мощность $W = 4.3 \cdot 10^{18} \text{ Вт}$. Это на пять порядков больше приведенных выше оценок. Однако большая часть этой мощности идет на разогрев океана и атмосферы. Известно, что разные слои Земли движутся с разной угловой скоростью. Так, ядро смещается относительно коры примерно на градус в год, что также приводит к тепловыделению. Имеет место опускание тяжелых фракций на ядро, что дает выделение энергии. Восходящие тепловые потоки переносят горячее вещество к поверхности и увеличивают тепловой поток. Остывание увеличивает радиус твердого ядра. Мощность за счет остывания оценивается величиной $16.5 \cdot 10^{12} \text{ Вт}$ и может быть оценена интегралом

$$W_Q = 4\pi \int_0^R c_0(r)\rho(r)u(r)\alpha(r)r^2 dr = 4\pi \int_0^R F_Q(r)r^2 dr. \quad (12)$$

Для оценки из (12) закона $\alpha(r)$ необходимо знать распределение температуры, плотности и теплоемкости. Далее потребуется аппроксимация распределения температуры внутри Земли. Обозначая $x = r/R$, $y(x) = x^{\beta-(1-x)\gamma}$, удобно взять ее в виде

$$u(r) = T_0(1 - \beta \exp(-\gamma/x)). \quad (13)$$

Эта аппроксимация обеспечивает условия: $u'(0) = 0$, $u(0) = T_0$, $u(R) = T_R$, а также и экспериментально определяемое значение градиента $u'(R) = -0.03$ К/м. Коэффициенты в (13) просто определяются через указанные значения. На рис. 1 приведены кривые аппроксимации температуры при разных значениях градиента для $T_0 = 6.7 \cdot 10^3$ К. Кривая 1 получена, если положить $u'(R) = -0.03$ К/м. Как видно, в этом случае температура вглубь нарастает очень быстро, а затем практически не меняется. Кривые 2 и 3 показывают распределение температуры при меньших градиентах. Следует отметить, что измерения градиента произведены в основном на суше, которая занимает малую часть поверхности, имеют разброс и не отличаются точностью. Тем не менее, по-видимому, их точность достаточна, поскольку при отношении $r/R = 0.9992$,

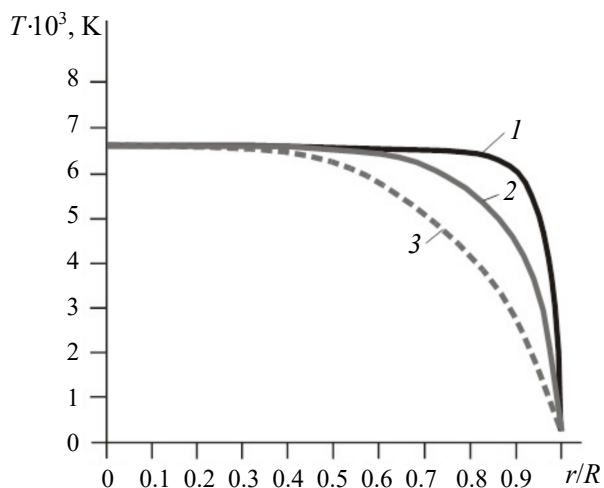


Рис. 1. Распределение температуры в Земле на основе аппроксимации (13) с вычисленной температурой в центре

Fig. 1. Distribution of temperature in the Earth based on approximation (13) with calculated temperature in the center

соответствующем границе мантии, кривая 1 (см. рис. 1) дает температуру 1200 К – температуру плавления базальтов. Задавая среднюю теплоемкость Земли 870 Дж/(кг·К), среднюю плотность 5.515 кг/м³, используя теорему о среднем, получаем из (4) оценку $\alpha_0 = 3.55 \cdot 10^{-13}$ с⁻¹. Если бы не было источников тепла, Земля остывала бы в два раза за 62 тысячи лет. Поскольку масса Земли $5.98 \cdot 10^{24}$ кг, среднюю теплоемкость Земли 870 Дж/(кг·К) получаем, взяв тепловой поток за счет остывания $1.65 \cdot 10^{13}$ Вт, что хорошо соответствует оценкам на основе распределения вещества. Далее мы примем $W = 4.4 \cdot 10^{13}$ Вт, или среднюю (равномерную) плотность мощности $F = 4 \cdot 10^{-8}$ Вт/м³, что и соответствует экспериментально определенному среднему потоку тепла из недр 0.087 Вт/м². В земной коре тепловыделение изотопов составляет: для U^{235} и U^{238} – 4.3 кал/(г·год), для Th^{232} – 0.2 кал/(г·год), для K^{40} – 0.21 кал/(г·год) [27,31]. Хотя тепловыделения урана на порядок больше, чем у тория и калия, распространённость калия примерно в 10^4 раз больше, чем урана и тория [27], поэтому главным генератором тепла является калий. В гранитах и базальтах содержание калия равно 4% [27], а распространённость радиоактивного изотопа K^{40} составляет 1% от полной распространённости калия. Это дает оценку плотности мощности в базальтовых породах коры $F = 2.7 \cdot 10^{-5}$ Вт/м³, что выше приведенных ранее. По-видимому, концентрация K^{40} существенно падает к центру [2,26] и неравномерна вблизи поверхности. Это и учтено в модели тепловыделения. Период полураспада K^{40} $t_K = 0.9 \cdot 10^9$ лет, поэтому зависимость от времени можно не учитывать и взять радиоактивную плотность мощности в виде $F_R(r) = F_1 r^2 / R^2$, где $F_1 = 3.7 \cdot 10^{-8}$ Вт/м³. Эта величина соответствует интегральной мощности $24 \cdot 10^{12}$. В центре плотность отсутствует. Однако незначительное тепловыделение может быть связано с U^{238} . Для тепловых источников имеем $F_Q(r) = c_0(r)\rho(r)u(r)\alpha(r)$, где использована аппроксимация (5). Для тепловыделения за счет вращения примем ее плотность пропорциональной угловой скорости: $F_\Omega(r) = F_2 r / R_1$, причем считаем, что она отлична от нуля только в области жидких фракций $R_1 < r < R_2$, где $R_1 = 1.22 \cdot 10^6$ м – радиус твердого внутреннего ядра, $R_2 = 6.32 \cdot 10^6$ – верхний радиус мантии. Интегрируя, находим $F_2 = 8.5 \cdot 10^{-10}$ Вт/м³. Неудобство приведенных соотношений в том, что в них неявно входит искомая температура T_0 . Интегрировать лучше ДУ (11), чем ДУ второго порядка (7), поскольку последнее жесткое, и на радиусе Земли можно получить большую ошибку. В связи с этим желательно получить оценки на основе функционалов и интегральных соотношений.

4. Оценка температуры и обсуждение результатов

Интегрируя ДУ (11), имеем

$$u(r) = u(R) + \int_r^R k^{-1}(r')([\tilde{f}(0) - \tilde{f}(r')]/r'^2 - \sigma\delta\varepsilon(r')u^4(r'))dr'. \quad (14)$$

Это нелинейное интегральное уравнение (ИУ). Температура также входит в функцию $\tilde{f}$. Оценка $k(r)$ наиболее сложна и сильнее всего влияет на расчет. Аппроксимируем коэффициент теплопроводности зависимостью $k(r) = k_0 \exp(-kr)$. Коэффициент $k_0 = 120 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-1}\text{К}^{-1}$ соответствует теплопроводности железа при давлении 330 ГПа и температуре 6000 К (он взят на 50% больше, чем в обычном состоянии). Теплопроводность на поверхности максимальна для гранитов и базальтов (до $3.5 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-1}\text{К}^{-1}$) и минимальна для грунта и воды ($0.6 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-1}\text{К}^{-1}$). Учитывая 71% занятой океанами поверхности и то, что их средняя глубина 3.8 км, что существенно меньше базальтового слоя, берем $k(R) = 2.8 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-1}\text{К}^{-1}$. Это значение близко к оценке на глубине залегания мантии и как раз дает поток $44 \cdot 10^{12} \text{ Вт}$. Имеем $k = 3.76/R$. Без учета излучения ($\sigma = 0$) имеем оценку для температуры в центре

$$u(0) = u(R) + \int_0^R k^{-1}(r)[(\tilde{f}(0) - \tilde{f}(r))/r^2]dr'. \quad (15)$$

Оценим ее для случая постоянства F . В этом случае $\tilde{f}(r) = F(R^3 - r^3)/3$. Интегрируя, получаем $u(0) = 3.8 \cdot 10^4 \text{ К}$. Очевидно, это сильно завышенная величина. Реально источников в центре почти нет, и более точное вычисление с учетом приведенных аппроксимаций дает $u(0) = 11.386 \cdot 10^3$. С учетом излучения получаем

$$u(0) = u(R) + \int_0^R k^{-1}(r)[(\tilde{f}(0) - \tilde{f}(r))/r^2 - \sigma\delta\varepsilon(r)u^4(r)]dr. \quad (16)$$

Возможен такой метод определения температуры. Взяв начальное приближение $u(0)$, вычисляем аппроксимацию (13), а затем на ее основе интеграл (16). Новое значение позволяет пересчитать коэффициенты в (13), функцию $\tilde{f}(r)$ и получить новое приближение (16). Две итерации дают значение $T_0 = u(0) = 6705 \text{ К}$. Третье приближение изменяется существенно менее 1%. Однако далее показано, что есть более простая оценка для (16). Именно для нее кривая 1 на рис. 1 дает распределение температуры. Если вместо квадратичного спада концентрации K^{40} взять экспоненциальное, это несколько снизит температуру. Однако следует учесть, что концентрация тяжелых элементов U^{235} , U^{238} и Th^{232} может возрастать к центру [32].

Рассмотрим применение УЛТ для оценки распределения температуры. Имеем

$$\dot{w}(r, t) = r^{-2}[r^2 u'(r, t)(k(r) + 16\sigma l_R(r)u^3(r, t)/3)]' + F(r, t).$$

Здесь зависимость l от температуры учтена как зависимость от радиуса. Теперь вместо (16) получаем

$$u(0) = u(R) + \int_0^R \frac{(\tilde{f}(0) - \tilde{f}(r) + R^2 u^3(R)[16\sigma l_R(R)u'(R)/3 - \sigma u(R)])dr}{(k(r) + 16\sigma l_R(r)u^3(r, t)/3)r^2}. \quad (17)$$

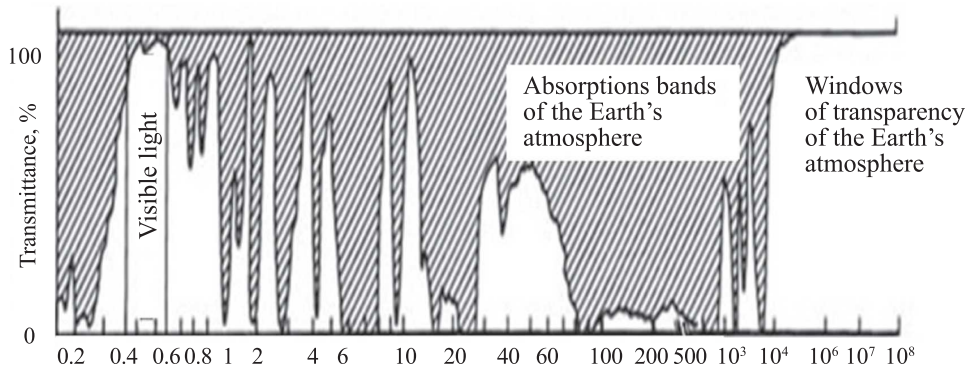


Рис. 2. Прозрачность атмосферы Земли для излучения

Fig. 2. Transparency of the Earth's atmosphere for radiation

В (17) учтен внешний поток, это возможно только если квадратная скобка равна нулю. Эта скобка есть разность излучения поверхности за счет лучистой теплопроводности и обратного излучения Стефана–Больцмана в Землю. Поэтому должно выполняться $l_R(R) = -3u(R)/(16u'(R))$. Это большое значение: $l_R(R) = 1875$ м, которое соответствует пробегу в атмосфере. Спектральное распределение прозрачности атмосферы дано на рис. 2. Кстати, отметим, что НУТ и ЛУТ совпадают, если $l_R(r) = -3\delta\epsilon(r)u(r)/(16u'(r))$, а ВКЧ не меняет знак и положительная. Основная задача состоит в оценке $l_R(r)$ и $l(r)$, а для этого надо знать распределение температуры. Для металлического железного ядра при 6000 К длина пробега $l(0)$ может быть примерно равна глубине проникновения δ , которая для оптических частот весьма мала (порядка сотни нанометров). Вплоть до УФ диапазона можно использовать модель диэлектрической проницаемости металла Друде–Лоренца $\epsilon_M = \epsilon_L - \omega_p^2/(\omega^2 - i\omega\omega_c)$ и удельной проводимости по Друде: $\gamma_0 = \omega_p^2\epsilon_0/\omega_c$. Учитывая увеличение концентрации за счет давления (при давлении свыше 13 ГПа возникает модификация ϵ -железа с гексагональной плотноупакованной решеткой), получаем оценки $\epsilon_L \approx 24$, $\gamma_0 = 1.5 \cdot 10^7$ См/м, $\omega_p = 1.8 \cdot 10^{16}$, $\omega_c = 1.9 \cdot 10^{14}$ Гц. Отсюда для спектральной длины пробега имеем $l_\omega(\omega) \approx \lambda \sqrt{\epsilon'_M}/(\pi\epsilon''_M)$, где $\epsilon'_M = \epsilon_L - \omega_p^2/(\omega^2 + \omega_c^2)$, $\epsilon''_M = \omega_p^2\omega_c/(\omega^3 + \omega\omega_c^2)$, и взято приближение $\epsilon''_M \ll \epsilon'_M$. При длине 500 нм имеем оценку $l_\omega(\omega) \approx 330$ нм. Рассматривая диапазон от жесткого ультрафиолета вплоть до ИК диапазона можно ожидать, что пробег не превышает сотен нанометров. Примем $l(R) = 3 \cdot 10^{-7}$ м. На поверхности при температуре порядка 300 К и длине волны максимума излучения $\lambda = 1 \cdot 10^{-5}$ м примем $l(R) = 3 \cdot 10^{-2}$ м. Эту величину мы взяли с учетом диэлектрической проницаемости морской воды и грунта. Рассмотрим следующие аппроксимации: $l(r) = l(0) + [l(R) - l(0)]$ и $l(r) = l(0) \exp(\eta r)$. На поверхности коэффициент лучистой теплопроводности меньше на порядок, а в центре – на три–четыре порядка по сравнению с k . Поэтому результат (17) чуть меньше (15), но почти от него не отличается (считаем, что баланс указанный баланс выполнен). Для НУТ следует учесть сильное изменение длины пробега, поэтому вместо (8) в (16) нужно взять интегральное значение

$$\delta\epsilon(r) = 2 \exp\left(-\int_0^R \frac{d\rho}{l(\rho)}\right) \sinh\left(\int_0^r \frac{d\rho}{l(\rho)}\right). \quad (18)$$

При вычислениях была использована экспоненциальная аппроксимация, для которой

$$\delta\epsilon(r) = 2 \exp\left(-\frac{1 - \exp(-\eta R)}{l(0)\eta}\right) \sinh\left(\frac{1 - \exp(-\eta r)}{l(0)\eta}\right). \quad (19)$$

Функция (19) близка к нулю практически во всей внутренней области и начинает приближаться к единице только на глубинах порядка нескольких длин пробега $l(R)$. Поэтому оценка $l(0)$

не важна, а важна оценка $l(R)$ вблизи поверхности. Получаем оценку поправки к температуре: $-\sigma u^4(R)l(R)/k(R) = -4681$ К. Ее можно получить, взяв оценку ВКЧ вблизи поверхности $\delta\varepsilon(r) = \exp(-(R-r)/l(R))$ и интеграл от нее, равный $l(R)$. Ясно, что точность оценки (16) зависит от оценки $l(R)$ и аппроксимации $k(r)$. Небольшое изменение $l(R)$ приведет к существенному изменению T_0 . Это соответствует тому, что градиента температуры на самой поверхности нет, и все тепло из Земли выводится путем излучения ее приповерхностного слоя. Рассмотрим оценку величины $l(R)$. Очевидно, при длине $l = l(R)$ имеем ослабление потока в e раз, откуда

$$\exp(-l/l(R)) = \int_0^\infty U_\omega(\omega, T) \exp(-l/l_\omega(\omega)) d\omega / E_p(T).$$

Поэтому получаем уравнение

$$1 = \ln(E_p(T)) - \ln\left(\int_0^\infty U_\omega(\omega, T) \exp(-l(R)/l_\omega) d\omega\right). \quad (20)$$

Здесь $l_\omega^{-1}(\omega) = 2\omega\sqrt{\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)} \sin(\varphi(\omega)/2)/c$; $\varepsilon'(\omega)$ и $\varepsilon''(\omega)$ – реальная и мнимая части диэлектрической проницаемости, $\varphi(\omega) = \arctan(\varepsilon''(\omega)/\varepsilon'(\omega))$, $U_\omega(\omega, T)$ – равновесная спектральная плотность излучения Планка, $E_p(T)$ – интегральная плотность излучения. Величина $l_\omega(\omega)$ для морской воды изменяется от сотни метров при длине волны $\lambda_0 = 400$ нм до 10 мкм при $\lambda_1 = 40$ мкм. Аппроксимируя эти экспериментальные значения в указанном диапазоне $l_\omega = l_1/[1 - (1 - l_1/l_0) \exp(-(\lambda - \lambda_0)/\lambda_0)]$, вычисляя интеграл и находя корень уравнения (20), получаем оценку $l(R)$. Она занижена, так как не учтены очень высокие частоты и очень низкие частоты, а также сильно сдвинута в область высокочастотных спектральных значений l_ω относительно значения на частоте максимума излучения, поскольку высокочастотные кванты вносят больший вклад в перенос излучения, и прозрачность для них выше. Для определения распределения температуры следует решать ИУ (14), что является сложной задачей. Однако, если T_0 и $u'(R)$ определены достаточно точно, следует ожидать, что аппроксимация (13) дает правильное распределение температуры.

Можно рассмотреть систему Земля плюс атмосфера. Она имеет резкую границу $r = R$, на которой сильно меняются все параметры, при этом внешний радиус $\tilde{R}$ увеличиться на толщину атмосферы. Ее принято считать 100 км до линии Кармана или даже 120 км. Коэффициент теплопроводности вдоль разреженной атмосферы спадает практически до нуля, а температура колеблется, достигая минимума в 183 К на высоте 90 км в мезопаузе. В атмосфере имеются две точки с температурой 249 К: на высоте 40 км в стратосфере перед стратосферой и на высоте 110 км в термосфере. Результат будет зависеть от того, какую из них принять. Выше 40 км атмосфера практически прозрачна для ИК диапазона, то есть длина $l(\tilde{R})$ весьма велика, а k весьма мал. Это приводит к тому, что уравнение (16) становится плохо обусловленным. Кроме того, необходимо определять источники тепла в атмосфере. Моделирование такой задачи нецелесообразно. Приведенное моделирование более адекватно, поскольку радиальная структура Земли не имеет резких скачков теплофизических параметров, а атмосфера хорошо прозрачна для ИУ и оптического диапазона для излучения Земли при температуре 288 К.

5. Некоторые модельные задачи для НУТ

Рассмотрим изолированное сферическое тело. Если теплопроводности нет или ей можно пренебречь, то имеем стационарное ДУ $d[r^2\delta\varepsilon(r)u^4(r)]/dr = r^2F(r)/\sigma$. Если источников нет, ему соответствует неограниченное решение $u(r) \sim 1/\sqrt[4]{r^2\delta\varepsilon(r)}$, поэтому такого стационарного

состояния быть не может. Это относится и к случаю теплопроводности. Если источники имеют постоянную плотность, то $u(r) = \sqrt[4]{rF/(3\sigma\delta\varepsilon(r))}$, при этом $u(0) = \exp(-R/4l)\sqrt[4]{Fl/(6\sigma)}$. Если, наоборот, пренебречь излучением, то получим

$$u(r) = u(0) - F \int_0^r \frac{r' dr'}{3k(r')}.$$

Пусть источники распределены по закону $F(r) = F_0 r^\alpha$. Тогда $u'(r) = [\sigma\delta\varepsilon(r)u^4(r) - r^{1+\alpha}F_0/(3+\alpha)]/k(r)$. Интегрируя это ДУ, получаем нелинейное ИУ. Его решение дает распределение температуры. Вблизи центра ВКЧ $\delta\varepsilon(r)$ экспоненциально мала, поэтому при $r \ll R$ решение имеет вид

$$u(r) = u(0) - F_0 \int_0^r \frac{\rho^{1+\alpha} d\rho}{(3+\alpha)k(\rho)}.$$

Задавая экспоненциальную аппроксимацию $F(r) = F_0 \exp(kr)$, также можно определить ход температуры вблизи ядра, где, в основном, имеет место механизм обычной теплопроводности.

Рассмотрим нелинейные температурные волны. Пусть для сферической задачи источники расположены в области $r > r_0$ и изменяются по некоторому временному закону. В области источников скорость движения гребней температуры зависит от их распределения. В области $r > r_0$ уравнение однородное, и можно рассмотреть нелинейные температурные волны. Очевидно, для скорости движения температуры имеем

$$v(r, t) = \dot{u}/u' = (ku''/u' - 4\sigma\delta\varepsilon u^3 - \sigma\delta\varepsilon' u^4/u' + 2(k - \sigma\delta\varepsilon u^4/u')/r)/(c_0\rho + 4\sigma u^3/c).$$

Она может сложно зависеть от радиуса, а нелинейность может приводить к укрупнению фронта температуры. ЛУТ не является релятивистски ковариантным, и скорость возмущений не ограничена, что явно следует из его функции Грина [2]. Однако скорость температурных волн за счет теплопроводности обычно очень низкая. В декартовых координатах в пренебрежении обычной теплопроводностью имеем $v = -(4\sigma\delta\varepsilon u^3 + \sigma\delta\varepsilon' u^4)/(c_0\rho + 4\sigma u^3/c)$. Поскольку $u' < 0$ и $\delta\varepsilon' = \delta\varepsilon/l$, то при $\delta\varepsilon u < u'l$ всегда $|v| < c$. Для прозрачного тела $\delta\varepsilon' = 0$, и это имеет место всегда, поскольку $\delta\varepsilon < 1$.

Заключение

Предложены новые нелинейные уравнения теплопроводности, полученные на основе закона сохранения энергии и учитывающие интегральный радиационный теплоперенос за счет излучения по закону Стефана–Больцмана от областей, образованных введенными референсными поверхностями. Уравнения естественным образом описывают теплопроводность в системе с вакуумными зазорами, то есть с областями, где коэффициент теплопроводности обращается в нуль, но имеется тепловое поле. При интегрировании уравнений по всему телу получаются правильные значения тепловых потоков в соответствии с законом Стефана–Больцмана. Уравнения описывают перенос тепла для хорошо прозрачных и частично прозрачных вдали от их границ тел. Для почти черных тел влияние радиационного переноса проявляется лишь в некотором слое вблизи границы, а на большом удалении от нее работает обычный механизм теплопроводности. Для сильно поглощающих тел длина пробега практически нулевая, и можно использовать ЛУТ, а излучение с поверхности учитывать по закону Стефана–Больцмана. Когда необходим учет длины пробега, нужно использовать НУТ. Если источники изменяются по какому-либо временному закону, или изменяется внешний поток, необходимо решение нестационарного уравнения. При этом возникают нелинейные температурные волны.

На основе введенного НУТ удалось оценить распределение температуры внутри Земли, используя простые аппроксимации. Модель построена только на основе задания аппроксимаций для коэффициента теплопроводности, плотности и плотности выделяемой мощности. Она работает для непрозрачной сферы ($R \gg l$), если оценен средний по частотному диапазону и радиусу планковский пробег излучения. Учет длины такого пробега оказывает слабое влияние и важен только для внешних областей. При этом учтен поток от Солнца и излучаемый в Космос поток от Земли. Хотя эти потоки примерно равны, Солнце в основном определяет температуру на поверхности и влияет на скорость остывания глубинных слоев. Так, небесное тело типа Земли, расположенное от Солнца в два раза дальше, чем Плутон, имело бы температуру поверхности порядка 40 К (с учетом температуры реликтового излучения 2.73 К) и остывало бы существенно быстрее. Учет нелинейности за счет радиационной теплопроводности на основе НУТ приводит к существенно меньшей температуре в центре, нежели без такого учета. Учет нелинейности за счет лучистой теплопроводности на основе УЛТ также приводит к снижению температуры, при этом он требует жесткого выполнения условия для пробега по Росселанду, а оцениваемая температура оказывается выше, чем определенная косвенным экспериментом.

Аппроксимация температуры Земли показывает, что она слабо изменяется на глубинах более 600 км, где она больше 6000 К. В этой области практически нет переноса тепла излучением и очень мал перенос за счет теплопроводности, что объясняет низкую скорость остывания Земли. Реально градиента на самой поверхности нет, поэтому остывание идет за счет радиационного переноса с тонкого приповерхностного слоя, что можно считать как излучение с поверхности. В работе [33] получено НУТ типа (7) в котором, однако, допущена неточность: вместо вариации КЧ введен КЧ.

Библиографический список

1. *Jacobs J.A.* The Earth's inner core // *Nature*. 1953. Vol. 172, no. 4372. P. 297.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
3. *Тихонов А.Н.* О влиянии радиоактивного распада на температуру земной коры // *Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук*. 1937. С. 431.
4. *Anzellini S.* // *Science*. AAAS. 2013. Vol. 340, no. 6136. P. 464.
5. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 512 с.
6. *Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.* Волновые явления теплопроводности. М.: УРСС, 2004. 298 с.
7. *Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В.* Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. М.: Высшая школа, 1990. 207 с.
8. *Кутателадзе С.С.* Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.
9. *Свешиников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
10. *Унзольд А.* Физика звездных атмосфер. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1949. 630 с.
11. *Амбарцумян В.А., Мустель Э.Р., Северный А.Б., Соболев В.В.* Теоретическая астрофизика. М.: Гостехиздат, 1952. 635 с.
12. *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии. М.: ИЛ, 1953. 433 с.
13. *Иванов В.В.* Перенос излучения и спектры небесных тел. М.: Наука, 1969. 472 с.
14. *Спэрроу Э.М., Сесс Р.Д.* Теплообмен излучением. Ленинград: Энергия, 1970. 295 с.
15. *Адрианов В.Н.* Основы радиационного и сложного теплообмена. М.: Энергия, 1972. 464 с.

16. Мучник Г.Ф., Рубашов И.Б. Методы теории теплообмена. Ч. 2. Тепловое излучение. М.: Высшая школа, 1974. 270 с.
17. Зигель Дж., Хауэлл Р. Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. 934 с.
18. Адзерихо К.С. Лекции по теории переноса лучистой энергии. Минск: Изд-во БГУ, 1975. 192 с.
19. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. 615 с.
20. Апресян Л.А., Кравцов Ю.А. Теория переноса излучения: Статистические и волновые аспекты. М.: Наука, 1983. 216 с.
21. Нагирнер Д.И. Лекции по теории переноса излучения. Санкт-Петербург: Изд-во СПб. ун-та, 2001. 284 с.
22. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 688 с.
23. Лактионов А.Г. Тепловой баланс Земли. Т. 5. Физическая энциклопедия / Под ред. А.М. Прохорова. М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. С. 75.
24. Trenberth K.E., Fasullo J.T., Kiehl J. // Bulletin of the American Meteorological Society. 2009. Vol. 90, no. 3. P. 311.
25. Pollack H.N., Hurter S.J., Johnson J.R. // Reviews of Geophysics. 1993. Vol. 31, no. 3. P. 267.
26. Любимова Е.А. Тепловые потоки из коры и мантии континентов / В сб. Тектоносфера Земли. М.: Наука, 1978. С. 327.
27. Справочник физических констант горных пород / Под ред. С. Кларка мл. М.: Мир, 1969. 544 с.
28. Магницкий В.А. Основы физики Земли. М.: Геодезиздат, 1953. 289 с.
29. Земная кора и верхняя мантия / Под ред. П. Харта. М.: Мир, 1972. 640 с.
30. Общая геофизика / Под ред. В.А. Магницкого. М.: Изд-во МГУ, 1995. 317 с.
31. Van Schmus W.R. Natural radioactivity of the crust and mantle / AGU Handbook of Physical Constants. Edited by T.J. Ahrens. Washington: Am. Geophys., Un., 1994. V.1. P. 283.
32. Carison R.W. // Nature. 2015. Vol. 520. P. 298.
33. Давидович М.В., Корнев И.А., Тимофеев А.И. Нелинейная динамика теплопереноса в цилиндрических и сферических структурах // Вопросы прикладной физики. Межвузовский научный сборник. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015. С. 93.

References

1. Jacobs J.A. The Earth's inner core. *Nature*, 1953, vol. 172, no. 4372, p. 297.
2. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1977. 736 p. (in Russian).
3. Tikhonov A.N. On the influence of radioactive decay on the temperature of the Earth crust. *Proc. of USSR Academy of Sciences, Mathematics and Nature Sciences*, 1937, p. 431 (in Russian).
4. Anzellini S. *Science. AAAS*, 2013, vol. 340, no. 6136, p. 464.
5. Patankar S. Numerical Methods for Solving Problems of Heat Transfer and Fluid Dynamics. Translation from English edited by V.D. Vilensky. Moscow: Energoatomizdat, 1984. 512 p. (Patankar, Suhas V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Washington: New York: Hemisphere; McGraw-Hill, cop. 1980.)
6. Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovsky S.Yu. Wave Phenomena of Thermal Conductivity. Moscow: URSS, 2004. 298 p. (in Russian).

7. Dulnev G.N., Parfenov V.G., Sigalov A.V. Application of Computers for Solving Heat Transfer Problems. Moscow: Higher school, 1990. 207 p. (in Russian).
8. Kutateladze S.S. Fundamentals of the Theory of Heat Transfer. M: Atomizdat, 1979, 416 p. (in Russian).
9. Sveshnikov A.G., Bogolyubov A.N., Kravtsov V.V. Lectures on Mathematical Physics: Studies. benefit. Moscow: Moscow State University, 1993. 352 p. (in Russian).
10. Unsold A. Physics of Stellar Atmosphere. 2ed. Berlin: Springer, 1955.
11. Ambartsumyan V.A., Mustel E.R., Severniy A.B., Sobolev V.V. Theoretical Astrophysics. Ed. V.A. Ambartsumyan. Moscow: Gostekhizdat, 1952. 635 p. (in Russian).
12. Chandrasekhar S. Radiative Transfer. 2ed. Dover Publications Inc. 1960.
13. Ivanov V.V. Radiation Transfer and Spectra of Celestial Bodies, Moscow: Nauka, 1969. 472 p. (in Russian).
14. Sparrow E.M., Sess R.D. Heat transfer by radiation. Leningrad: Trans. from English, 1970. 295 p. (Sparrow E.M. and Cess R.D., 1978, Radiative Heat Transfer, McGraw-Hill. Google Scholar. Tien, C.-L., 1988).
15. Adrianov V.N. Fundamentals of Radiation and Complex Heat Transfer. Moscow: Energia, 1972. (in Russian).
16. Muchnik G.F., Rubashov I.B. Methods of Heat Transfer Theory. Part 2. Thermal Radiation. Moscow: Higher School, 1974. 270 p. (in Russian).
17. Siegel R., Howell J. Thermal Radiation Heat Transfer. McGraw-Hill Book Company, New York Google Scholar, 1972. (Siegel, Robert; Howell, John R. Thermal radiation heat transfer New Jourk a. o., 1972).
18. Adzerikho K.S. Lectures on the Theory of Transfer of Radiant Energy. Ed. M.A. Elyashevich. Minsk: BSU publishing house, 1975. 192 p. (in Russian).
19. Ozisik M.N. Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection. C. John Wiley, 1973.
20. Apresyan L.A., Kravtsov Yu.A. Theory of Radiation Transfer: Statistical and Wave Aspects, Moscow: Nauka, 1983, 216 p. (in Russian).
21. Nagirner D.I. Lectures on the Theory of Radiation Transfer: Studies benefit. SPb.: Publishing house SPb. Univ., 2001. 284 p. (in Russian).
22. Zeldovich Ya.B., Raizer Yu.P. Physics of Shock Waves and High-temperature Hydrodynamics Phenomena. Moscow: Nauka, 1966. 688 p. (in Russian).
23. Laktionov A.G. Thermal Balance of the Earth. Vol. 5. Physical Encyclopedia / Under the editorship of A.M. Prokhorov. M.: Great Russian encyclopedia, 1998, p. 75 (in Russian).
24. Trenberth K.E., Fasullo J.T., Kiehl J. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 2009, vol. 90, no. 3, p. 311.
25. Pollack H.N., Hurter S.J., Johnson J.R. *Reviews of Geophysics*, 1993, vol. 31, no. 3, p. 267.
26. Lyubimova E.A. Heat Flows from the Crust and Mantle of Continents / In Tectonosphere of the Earth. M.: Nauka, 1978. p. 327 (in Russian).
27. Handbook of Physical Constants of Rocks. Ed. by S. Clarke, Jr. M.: Mir, 1969. 544 p. (in Russian).
28. Magnitsky V.A. Fundamentals of Earth physics. M.: Geodesizdat, 1953. 289 p.
29. Earth's crust and upper mantle. Edited By P. HART. M.: Mir, 1972. 640 p.
30. General Geophysics. Under the editorship of V.A. Magnitsky. M.: Publishing house of Moscow University, 1995. 317 p. (in Russian).

31. Van Schmus W.R. Natural radioactivity of the crust and mantle / AGU Handbook of Physical Constants. Edited by T.J. Ahrens. Washington: Am. Geophys., Un., 1994. V. 1. P. 283.
32. Carlson R.W. Planetary science: A new recipe for Earth formation. *Nature*, 2015, vol. 520, p. 298.
33. Davidovich M.V., Kornev I.A., Timofeev A.I. Nonlinear dynamics of heat transfer in cylindrical and spherical structures. In: Questions of applied physics. Intercollegiate scientific collection. Saratov, 2015, pp. 93–98. (in Russian).



Давидович Михаил Владимирович – родился в Саратове (1950). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности физика (специализация – теоретическая и ядерная физика, 1972). Около 20 лет проработал на предприятиях электронной промышленности Саратова. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики, включая квантовую радиофизику (1991) и доктора физико-математических наук в области применения вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях (2000). Профессор кафедры радиотехники и электродинамики СГУ, профессор (2002), член IEEE (1995), Senior Member, IEEE (2001). Область научных интересов: решение краевых задач методом интегральных и интегродифференциальных уравнений с использованием конечных элементов, вариационные методы, электродинамика и оптика структур, теория метаматериалов, решение обратных задач, микроволновое зондирование, нестационарная нелинейная электродинамика структур и диспергирующих сред, включая распространение импульсов. Автор более 250 работ по указанным направлениям, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 E-mail: Davidovichmv@info.sgu.ru