



УДК 530.182

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-2-201-207>

Реконструкция корреляционной размерности зашумленной системы

М. С. Дюдин, Е. Н. Калайдин

Краснодарский филиал Финансового университета при Правительстве РФ
Россия, 350051 Краснодар, шоссе Нефтяников, 32 (ул. им. Федора Лузана, 34)

E-mail: diudin.m@yandex.ru, kalaidin@econ.kubsu.ru

Автор для переписки Михаил Сергеевич Дюдин, diudin.m@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.11.2019, принята к публикации 14.01.2020,
опубликована online 30.04.2020

Цель. В статье рассматривается измерение корреляционной размерности динамической системы с аддитивным случайным шумом. Для верного определения корреляционной размерности необходимо устранить сдвиг горизонтальной координаты графика корреляционного интеграла, вызванный увеличением расстояний между точками из-за добавления случайного шума. **Методы.** Для вычисления корреляционной размерности динамической системы предлагается использовать алгоритм Grassberger–Procaccia, затем изменяя результаты вычислений согласно свойствам случайной компоненты динамики. При добавлении аддитивного нормально распределенного случайного шума расстояния между точками аттрактора (вычисляемые по евклидовой норме) становятся случайными величинами, распределенными по нецентральному χ -распределению, имея матожидание, превышающее расстояние до добавления шума. **Результаты.** Устранение сдвига горизонтальной координаты позволяет получить плоский участок на графике локального наклона корреляционного интеграла, по вертикальной координате совпадающий с аналогичным участком для системы без шума. Значение локального наклона для данного участка близко к фрактальной размерности исследуемых систем. **Заключение.** Предложенный алгоритм позволяет точно измерять корреляционную размерность динамических систем с аддитивным (наблюдаемым) случайным шумом, уточнять оценку стандартного отклонения случайного шума, полученную другими методами.

Ключевые слова: корреляционная размерность, корреляционный интеграл, аддитивный шум.

Образец цитирования: Дюдин М.С., Калайдин Е.Н. Реконструкция корреляционной размерности зашумленной системы // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 2. С. 201–207. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-2-201-207>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Reconstruction of noisy system correlation dimension

M. S. Dyudin, R. N. Kalaidin

Financial University, Krasnodar Branch
32, Shosse Neftyanikov (34, Fedora Luzana str.), Krasnodar 350051, Russia
E-mail: diudin.m@yandex.ru, kalaidin@econ.kubsu.ru
Correspondence should be addressed to Mihail Dyudin, diudin.m@yandex.ru
Received 17.11.2019, accepted 14.01.2020, published online 30.04.2020

Purpose. Measurement of correlation dimension is considered in a dynamic system with additive random noise. To determine the correlation dimension correctly, it is necessary to eliminate the shift of horizontal coordinate in the graph of the correlation integral caused by the increase in distance between the points due to addition of random noise. **Methods.** To calculate the correlation dimension of a dynamic system, it is proposed to use the Grassberger–Procaccia algorithm and then change the calculation results according to the properties of the dynamics’ random component. When an additive normally distributed random noise is added, the distances between attractor points (calculated using the Euclidean norm) become random values distributed over a non-central χ -distribution that has a mathematical expectation greater than the distance before the noise was added. **Results.** Eliminating the shift of horizontal coordinate allows to get a flat section on the plot of the local slope of correlation integral, which coincides in vertical coordinate with the same section for a system without added noise. Local slope value for this section is close to fractal dimension of the systems under study. **Conclusion.** Proposed algorithm allows to accurately measure the correlation dimension of dynamic systems with additive (observable) random noise, to refine the estimate of the standard deviation of random noise obtained by other methods.

Key words: correlation dimension, correlation integral, additive noise.

Reference: Diudin M.S., Kalaidin E.N. Reconstruction of noisy system correlation dimension. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 2, pp. 201–207. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-2-201-207>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Фрактальная размерность является важной характеристикой динамической системы, широко используемой в прикладных задачах. Одним из наиболее распространенных способов её измерения является вычисление корреляционной размерности по алгоритму Grassberger–Procaccia [1]. Алгоритм может быть применен и для вычислений по временному ряду одной из переменных системы, работая с её реконструкцией в d -мерном пространстве.

Корреляционная размерность D определяется по наклону линейного участка на графике зависимости корреляционного интеграла C от расстояния ε в логарифмическом масштабе.

$$C(\varepsilon) \sim \varepsilon^D. \quad (1)$$

Корреляционный интеграл $C(\varepsilon)$ оценивает вероятность того, что 2 точки окажутся на расстоянии ε друг от друга.

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \theta(\varepsilon - \sqrt{(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + (x_i^d - x_j^d)^2}), \quad (2)$$

где θ – функция Хевисайда, d – размерность аттрактора или размерность реконструкции аттрактора, N – количество точек.

Эмпирически замечено [2], что добавление случайного шума в динамическую систему влияет на значения корреляционного интеграла, сдвигая линейный участок на графике пропорционально размаху случайного шума, позволяя оценить долю случайного шума в динамике. Тем не менее точное измерение вероятностных характеристик случайного шума затруднено из-за особенностей его влияния на корреляционный интеграл: линейный характер зависимости в логарифмическом масштабе изменяется добавленным шумом и точное измерение начала линейного участка невозможно. Случайный шум не только сдвигает начало линейного участка вправо, но и изменяет его наклон [3], осложняя измерение корреляционной размерности системы. Уровень шума также может быть определен по степени влияния на наклон графика корреляционного интеграла при разных размерностях реконструкции [4].

1. Методика

Пусть во временной ряд одной из переменных динамической системы добавляется нормально распределенный случайный шум с нулевым матожиданием. Тогда расстояния между точками i, j реконструированного аттрактора системы $r_{i,j} = \sqrt{(x_i^1 - x_j^1)^2 + \dots + (x_i^d - x_j^d)^2}$ (x_i^l – координата l точки i) станут случайными величинами с нецентральным χ -распределением

$$R_{i,j} = \sqrt{\mu_1^2 + \dots + \mu_d^2}, \quad (3)$$

где μ_l – нормально распределенные случайные величины со средним $M(\mu_l) = x_i^l - x_j^l$.

Если дисперсия μ_l равна σ^2 для всех l , матожидание $R_{i,j}$ имеет вид

$$M(R_{i,j}) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} L^{\frac{d}{2}-1} \left(-\frac{\lambda^2}{2} \right), \quad (4)$$

где L – обобщенный полином Лагерра; $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^d \mu_i^2 / \sigma^2} = r_{i,j} / \sigma$; d – размерность реконструкции или размерность фазового пространства.

Рассмотрим, во сколько раз в среднем случайный шум увеличивает расстояния между точками, разделив обе части уравнения на $r_{i,j}$

$$\frac{M(R_{i,j})}{r_{i,j}} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{2}} L^{\frac{d}{2}-1} \left(-\frac{\lambda^2}{2} \right). \quad (5)$$

Множитель $k = M(R_{i,j})/r_{i,j}$ зависит только от отношения расстояния $r_{i,j}$ к стандартному отклонению случайного шума σ и размерности реконструкции d ; k принимает очень большие значения при $\lambda < 1$ и стремится к единице при больших λ .

Рассмотрим изменение зависимости корреляционного интеграла C от масштаба ε при добавлении случайного шума. Доля точек, меньших ε при расстояниях между ними $r_{i,j}$, будет в среднем соответствовать доле точек, меньших ε' при расстояниях между ними $M(R_{i,j})$, после добавления случайного шума.

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \theta(\varepsilon - r_{i,j}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \theta(\varepsilon - M(R_{i,j})), \quad (6)$$

где θ – функция Хевисайда, N – количество точек.

Поскольку $M(R_{i,j})$ больше $r_{i,j}$ в $k(\lambda)$ раз, тому же значению $C(\varepsilon)$ соответствует значение ε' , превышающее старое значение ε в $k(\lambda)$ раз.

$$\sum_{i,j=1}^N \theta(\varepsilon - r_{i,j}) = \sum_{i,j=1}^N \theta(\varepsilon' - k(\lambda)r_{i,j}), \quad (7)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon k(\lambda), \quad \lambda = \frac{\varepsilon}{\sigma}, \quad (8)$$

где σ – стандартное отклонение случайного шума, множитель $k(\lambda)$ определяется уравнением (5).

Рассмотрим изменение наклона графика корреляционного интеграла в логарифмическом масштабе. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – близко лежащие точки, $k_i = k(\varepsilon_i/\sigma)$, D – наклон до добавления случайного шума. Тогда наклон после добавления случайного шума примет значение

$$D' = \frac{\ln C(\varepsilon_2)/C(\varepsilon_1)}{\ln \varepsilon'_2/\varepsilon'_1} = D \frac{\ln \varepsilon_2/\varepsilon_1}{\ln k_2/k_1 + \ln \varepsilon_2/\varepsilon_1}. \quad (9)$$

Так как $k(\lambda)$ – убывающая функция, то $D' > D$. Наклон графика корреляционного интеграла D заметно увеличивается даже при больших значениях $\lambda = \varepsilon/\sigma$, к примеру, при $d = 5$ и $\lambda = 10$ значение D увеличивается в 1.041 раза. Выбрать линейный участок по значениям ε , превышающим стандартное отклонения случайного шума в 10 раз или более, не всегда представляется возможным из-за ограниченных размеров аттрактора. Таким образом, даже при малых значениях стандартного отклонения случайного шума оценка корреляционной размерности смещается в большую сторону.

Для реконструкции корреляционной размерности системы по зашумленному ряду необходимо выбрать границы линейного участка ε'_1 и ε'_2 , определить его наклон D' и разделить полученное значение на множитель из уравнения (9)

$$D = D' \frac{\ln \varepsilon'_2/\varepsilon'_1}{\ln \varepsilon_2/\varepsilon_1}, \quad \varepsilon'_i = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} L_{\frac{d}{2}-1} \left(-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma^2} \right). \quad (10)$$

Значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ наиболее просто получить используя численные методы, подбирая значения ε , которые дают нужное значение ε' с заданным σ . Аналитическое решение требует вычисления полиномов Лагерра для дробных α и нахождения корней уравнения с дробными степенями для каждого отдельного случая. В пакете Matlab значения ε при заданном ε' для $d = 5$ ($\alpha = d/2 - 1 = 1.5$) можно найти следующим образом:

```
syms x
L(x) = laguerreL(0.5,1.5,x);
eps1 = eps1/(sigma*((pi/2)^0.5)
eps = solve(L(x) == eps1)
eps = sigma*(-2*eps)^0.5
```

где eps – ε , eps1 – ε' , sigma – стандартное отклонение случайного шума σ .

Рассмотрим алгоритм на примере системы Лоренца ($\sigma = 10, b = 2.6, r = 28$) и системы Рёсслера ($a = 0.2, b = 0.2, c = 5$). Корреляционный интеграл вычисляется для реконструкции фазового пространства при размерности $d = 15$, по временному ряду переменной x . На рис. 1 показывается локальный наклон графика корреляционного интеграла для системы Лоренца (слева) и системы Рёсслера (справа) с добавленным случайным шумом $X \sim N(0;1)$ (стандартное отклонение расстояний между точками $\sigma = \sqrt{2}$) и реконструированные по формуле (10) значения локального наклона.

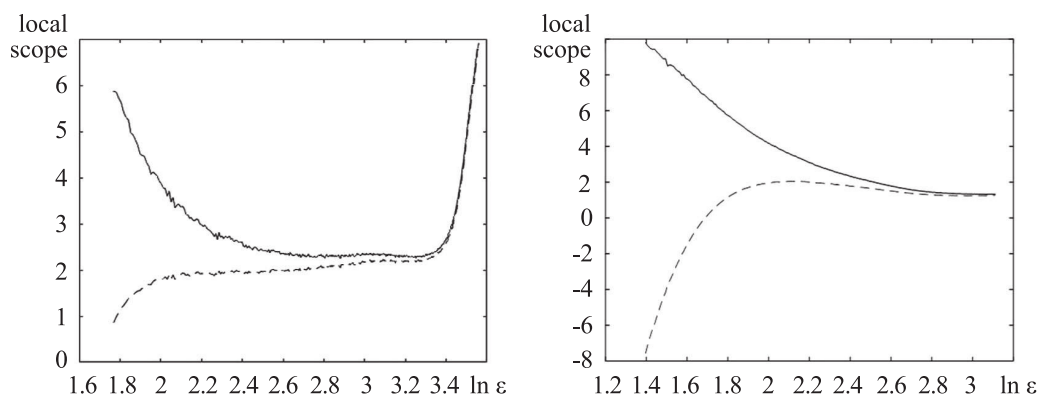


Рис. 1. Локальный наклон графика корреляционного интеграла ряда с добавленным случайным шумом (сплошная линия) и реконструкция (штриховая линия) с изменёнными по формуле (10) значениями наклона (размерность реконструкции $d = 15$) для системы Лоренца (слева) и системы Рёсслера (справа)

Fig. 1. Local slope of correlation integral dependence in presence of random noise (solid line) and its reconstruction (dashed line), with slope values modified according to the formula (10) using $d = 15$ for Lorenz system (left) and Rössler system (right)

На рис. 2 показаны графики локального наклона для ряда Лоренца без случайного шума и реконструкции по зашумленному ряду. Реконструкция возможна только для значений ε , превышающих σ случайного шума в несколько раз. Значения корреляционного интеграла в начале графика являются случайными величинами с очень близкими числовыми характеристиками (см. Таблицу), а для случайных данных наклон графика корреляционного интеграла ограничивается размерностью реконструкции. Для реконструкции начального участка графика потребовалось бы значительное уменьшение шага ε , выбор большой размерности реконструкции и большое количество точек, что не оправдано с точки зрения скорости вычислений.

Таблица/Table
Матожидание расстояний при малых λ ($d = 15$)
Mathematical expectation of distances for small values of λ ($d = 15$)

λ	0.05	0.1	0.5	0.95	1.5	2
$M(R_{i,j})$	3.8093σ	3.8103σ	3.8406σ	3.9317σ	4.0858σ	4.2898σ
$\sigma(R_{i,j})$	0.701σ	0.7012σ	0.7067σ	0.7208σ	0.7460σ	0.77291σ

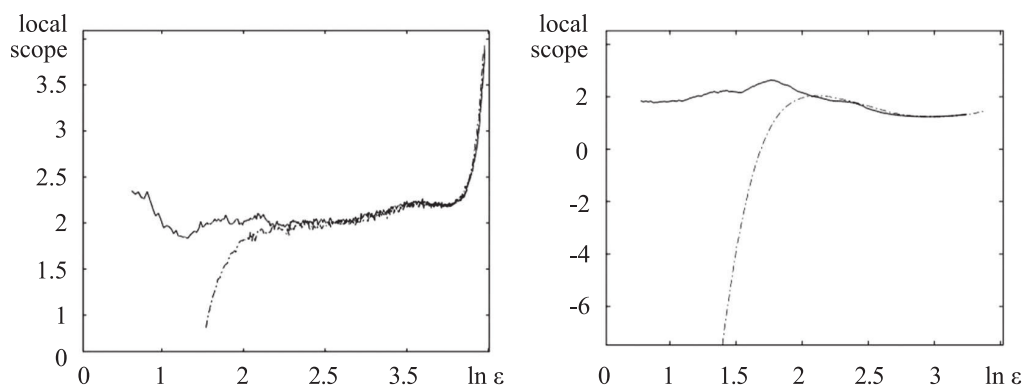


Рис. 2. Локальный наклон графика корреляционного интеграла для ряда без случайного шума (сплошная линия) и его реконструкция (штрих-пунктирная линия) по зашумленному ряду с $\sigma = 1$ (слева – для системы Лоренца, справа – для системы Рёсслера)

Fig. 2. Local slope of the correlation integral dependence for a noise free series (solid line) and its reconstruction (dot-and-dashed line) from a noisy series with $\sigma = 1$ (left – Lorenz system, right – Rössler system)

Точная реконструкция значений корреляционной размерности возможна для значений ε , больших $M(R_{i,j}) + 3\sigma(R_{i,j})$ для малых λ , что приблизительно соответствует 6σ для размерности реконструкции $d = 15$. (На рис. 2 видно, что точная реконструкция D начинается после $\ln \varepsilon = 2.14$, что соответствует $\ln(6\sqrt{2})$).

2. Результаты

На всех рассмотренных модельных данных реконструкция корреляционной размерности принимает значения, близкие к корреляционной размерности системы без шума. В тех случаях, когда реконструированное значение в определенной точке значительно отличается от фрактальной размерности системы, такое же отклонение наблюдается и для корреляционной размерности системы без шума.

Интересной особенностью предложенного метода является возможность уточнения σ случайного шума, что является актуальным по причине отсутствия четкого начала линейного участка на графике корреляционного интеграла зашумленной системы. При завышенной оценке σ график реконструированной корреляционной размерности для малых d выше, чем для больших d , при заниженной оценке σ график для малых d находится ниже, чем график для больших d (рис. 3). При верном выборе σ графики для больших и малых d сходятся на плоском участке, соответствующем корреляционной размерности системы без шума.

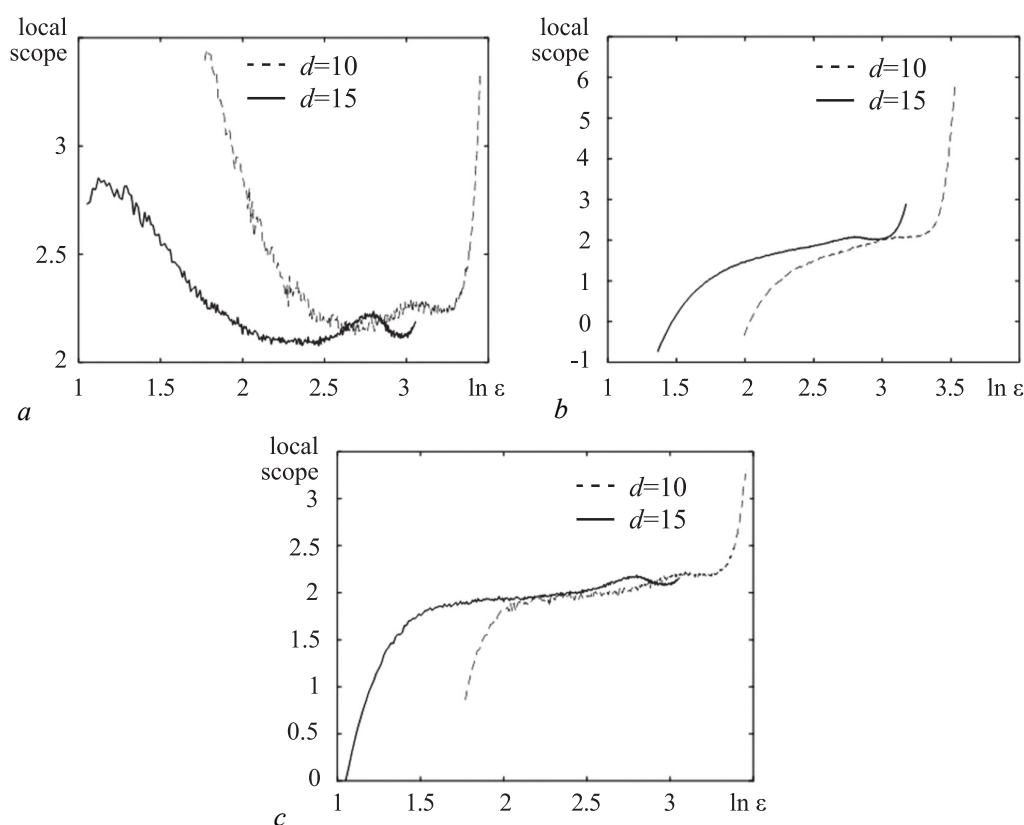


Рис. 3. Реконструкции корреляционной размерности при: a – заниженной оценке $\sigma = 1$, b – завышенной оценке $\sigma = 2$, c – верной оценке $\sigma = \sqrt{2}$ (система Лоренца)

Fig. 3. Correlation dimension reconstruction with: a – understated estimate of $\sigma = 1$, b – overstated estimate of $\sigma = 2$, c – actual value of $\sigma = \sqrt{2}$ (Lorenz system)

Предложенный алгоритм подходит для динамических систем с аддитивным случайным шумом, в случае динамического шума имеет место корреляция случайных отклонений и расстояния между точками имеют распределение, отличное от нецентрального χ -распределения.

References

1. Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.*, 1983, vol. 50, p. 346.
2. Ben-Mizrachi A., Procaccia I., Grassberger P. Characterization of experimental (noisy) strange attractors. *Phys. Rev. A Gen. Phys.*, 1984, vol. 29, no. 2, pp. 975–977.
3. Argyris J., Andreadis I., Pavlos G., and Athanasiou M. The influence of noise on the correlation dimension of chaotic attractors. *Chaos, Solitons, and Fractals*, 1998, vol. 9, no. 3, pp. 343–361.
4. Schreiber T. Determination of the noise level of chaotic time series. *Phys. Rev. E*, 1993, vol. 48, pp. 13–16.



Дюдин Михаил Сергеевич – родился в Сочи (1988). Окончил Кубанский государственный университет по специальности «Математика» (2009). Окончил аспирантуру КубГУ по специальности «Математические и инструментальные методы экономики» (2013). В настоящее время работает в должности старшего преподавателя Краснодарского филиала Финансового института. Область научных интересов – нелинейная динамика, фрактальная математика.

Россия, 350051 Краснодар, шоссе Нефтяников/ул. им. Федора Лузана, д. 32/34
Краснодарский филиал Финансового университета
E-mail: diudin.m@yandex.ru



Калайдин Евгений Николаевич – родился в Краснодаре (1962). Окончил физ.-мат. школу-интернат № 18 им. А.Н. Колмогорова при Московском университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (1986), аспирантуру по кафедре «Аэромеханика и газовая динамика». Защитил диссертации кандидата (1996) и доктора (2009) физико-математических наук по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы». Сфера научных интересов: теория устойчивости, нелинейные динамические системы, моделирование экономических процессов и систем, модели нелинейной динамики финансовых рынков, моделирование, анализ и управление финансовой устойчивостью.

Россия, 350051 Краснодар, шоссе Нефтяников/ул.им.Федора Лузана, д.32/34
Краснодарский филиал Финансового университета
E-mail: kalaidin@econ.kubsu.ru