



Волновые процессы в кольце мемристивно связанных автогенераторов

И. А. Корнеев¹, А. В. Слепнев¹, В. В. Семенов², Т. Е. Вадивасова¹

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

²Институт FEMTO-ST, CNRS и Университет Бургундии Франш-Конте
Франция, 25030, Безансон, проспект Монбукон, 15В

E-mail: ivankorneew@yandex.ru, a.v.slepnev@gmail.com, semenov_v_v@list.ru, vadivasovate@yandex.ru

Автор для переписки Иван Александрович Корнеев, ivankorneew@yandex.ru

Поступила в редакцию 1.02.2020, принята к публикации 3.03.2020, опубликована 30.06.2020

Цель. Выявление особенностей динамики и формирования структур в ансамбле генераторов ван дер Поля, вызванных мемристивным характером взаимодействия между его элементами, для двух моделей мемристивных проводимостей: с «идеальной памятью» и реалистичной, предусматривающей «забывание» начального состояния мемристивного элемента через большой промежуток времени. **Методы.** Методом Рунге–Кутты четвертого порядка проводится численное интегрирование системы уравнений, описывающей исследуемый ансамбль. По результатам интегрирования строятся пространственно-временные диаграммы и мгновенные пространственные профили динамических режимов, полученных при вариации начальных условий и параметров мемристивного элемента. Проводится их анализ. **Результаты.** Показано, что вид мгновенного пространственного профиля в исследуемом ансамбле в случае мемристоров с «идеальной памятью» непосредственно зависит от выбора начального распределения мемристивных переменных. Причем таким выбором можно добиться сосуществования в системе кластеров с различным поведением. Например, бегущих волн и режима полной синхронизации. Данная особенность пропадает при переходе к «реальному» мемристору. **Заключение.** Введение мемристивной связи в ансамбль автоколебательных элементов оказывает существенное влияние на его динамику. Система с «идеальными» мемристорами демонстрирует чувствительность к их начальным состояниям, что позволяет управлять динамическим режимом системы и в достаточно широких пределах изменять форму волнового профиля, меняя начальное распределение мемристивных элементов.

Ключевые слова: ансамбль, генератор ван дер Поля, мемристор, мемристивная связь, пространственные структуры.

Образец цитирования: Корнеев И.А., Слепнев А.В., Семенов В.В., Вадивасова Т.Е. Волновые процессы в кольце мемристивно связанных автогенераторов // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 3. С. 324–340.
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-3-324-340>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта № 20-52-12004. Численные эксперименты выполнены при поддержке РФФИ, проект № 19-32-90030.

Wave processes in a ring of memristively coupled self-excited oscillators

I. A. Korneev¹, A. V. Slepnev¹, V. V. Semenov², T. E. Vadivasova¹

¹Saratov State University

83, Astrakhanskaya str., Saratov 410012, Russia

²FEMTO-ST Institute, CNRS & University Bourgogne Franche-Comté

15B avenue des Montboucons Besançon Cedex, 25030, France

E-mail: ivankorneew@yandex.ru, a.v.slepnev@gmail.com, semenov_v_v@list.ru, vadivasovate@yandex.ru

Correspondence should be addressed to Ivan A. Korneev, ivankorneew@yandex.ru

Received 1.02.2020, accepted 3.03.2020, published 30.06.2020

The **purpose** of this work is to reveal intrinsic peculiarities of the dynamics and spatial structure formation in an ensemble of the coupled van der Pol self-oscillators in a case of memristive coupling. Two models of memristive coupling are considered: an idealised memristive model and a real one exhibiting the effect of «forgetting» of an initial state after a long time. **Methods.** Numerical simulation of the equations describing the system under study by means of the fourth-order Runge–Kutta method is carried out. Further exploration consists in plotting and analysis of space-time diagrams and instantaneous spatial profiles of dynamical regimes obtained by means of varying the initial conditions and parameter values. **Results.** It is shown that the shape of an instantaneous spatial profile fully depends on initial conditions in a case of ideal memristive coupling. Choosing the initial conditions, one can realize coexistence of different clusters with qualitatively different kinds of the dynamics (for instance, coexisting travelling waves and regimes of full synchronization). Such a phenomenon disappears in a system with the «forgetting» effect. **Conclusion.** The properties of memristive coupling strongly impact the behaviour of interacting self-oscillators. The system with ideal memristive coupling is very sensitive to initial conditions. It allows to control the dynamics in a broad range and to change the spatial profile form varying the initial conditions.

Key words: ensemble, van der Pol oscillator, memristor, memristive coupling, spatial structures.

Reference: Korneev I.A., Slepnev A.V., Semenov V.V., Vadivasova T.E. Wave processes in a ring of memristively coupled self-excited oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 3, pp. 324–340. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-3-324-340>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR and DFG according to the research project № 20-52-12004. Numerical experiments were supported by RFBR, project № 19-32-90030.

Введение

В последние годы не ослабеваает интерес к исследованию мемристивных устройств и систем. Концепция мемристора, предложенная Л. Чуа в [1], была в дальнейшем обобщена и распространена на случай любого устройства, характеристики которого зависят от предыстории функционирования. Такие устройства были названы мемристивными [2]. В настоящее время известно большое количество экспериментальных образцов двухполюсников и радиотехнических устройств, обладающих свойствами мемристора [3–12]. Ожидается, что мемристивные устройства могут найти практическое применение в электронике и компьютерной технике, в частности, для создания элементов памяти [13–19]. Мемристивные элементы используются в искусственных нейронных сетях, предназначенных для обработки информации [20–26]. Таким образом, изучение поведения систем, содержащих мемристоры и мемристивные устройства, является актуальным и важным с точки зрения возможных практических приложений.

Динамические системы, содержащие мемристивные элементы, обычно называют мемристивными системами. При определенных свойствах мемристивного элемента (в частности, при наличии «идеальной памяти», предполагающей зависимость от всех предыдущих состояний на

протяжении функционирования устройства) такие системы могут демонстрировать ряд особенностей в своем поведении. Математические модели мемристивных систем могут иметь в фазовом пространстве инвариантные многообразия точек равновесия [27–33] или, напротив, совсем не иметь точек равновесия [34, 35]. Простым примером мемристивной системы с осью равновесий может служить радиотехнический генератор, описанный в [27–29, 32, 33]. Динамика систем с линией равновесия отличается рядом особенностей. В фазовом пространстве могут существовать притягивающие предельные множества, состоящие из неизолированных точек равновесия и замкнутых орбит. Бифуркации в таких системах могут происходить при фиксированных значениях параметров и изменении начальных условий [28, 30, 33, 36, 37].

Важной задачей в исследовании мемристивных систем является анализ эффектов взаимодействия нелинейных осцилляторов и автогенераторов, соединенных мемристивными связями. Интерес к данной задаче, в частности, вызван гипотезой о мемристивном характере синаптических связей реальных нейронов [38, 39]. Электрическая активность в тканях сердца, подверженных воздействию электромагнитного излучения, также может быть описана с использованием моделей мемристоров [40]. Понимание динамики ансамбля мемристивно связанных систем предполагает понимание особенностей взаимодействия и синхронизации автоколебательных систем, соединенных через мемристивный элемент. Мемристивно связанные периодические или хаотические автогенераторы были рассмотрены в работах [39, 41–44, 46, 51], в которых были установлены эффекты полной и частотно-фазовой взаимной синхронизации. Мемристивный характер связи приводит к сильному влиянию начальных состояний на динамику взаимодействующих систем. Так, в случае мемристора с «идеальной памятью», мемристивный характер взаимодействия периодических автогенераторов с частотной расстройкой приводит к непрерывной зависимости границ области частотного захвата от начальных значений переменных [46]. Данный эффект исчезает, если мемристивные свойства элемента связи оказываются неидеальными.

Исследование динамики ансамблей мемристивно связанных нелинейных элементов, в основном, связано с задачами моделирования в нейродинамике. На сегодняшний день имеется уже достаточно много работ, посвященных эффектам синхронизации пространственно-временной динамики, распространению волн и образованию пространственных структур в нейронных ансамблях и сетях с мемристивными связями (например, [47–51]). Однако особенности поведения распределенных систем с мемристивным характером связей до сих пор не вполне ясны. Нет четкого ответа на вопрос, приводит ли мемристивная связь к качественно новым явлениям коллективной динамики ансамблей, и в чем суть этих явлений.

В настоящей работе исследуется поведение одномерной цепочки идентичных автогенераторов ван дер Поля с периодическими граничными условиями, связанных через идентичные мемристивные проводимости. Анализируется влияние распределения начальных состояний генераторов и мемристивных элементов на установившийся режим бегущих волн. Цель работы заключается в выявлении специфических эффектов, связанных с мемристивным характером взаимодействия генераторов ансамбля. Рассматриваются две модели мемристивных проводимостей: модель с «идеальной памятью», соответствующая идеям Л. Чуа [1], и более реалистичная модель, предусматривающая «забывание» начального состояния мемристивного элемента через большой промежуток времени.

1. Исследуемая система

Исследуемая радиотехническая модель ансамбля представлена на рис. 1. Она представляет собой кольцо из P связанных автогенераторов ван дер Поля, соединенных мемристивными проводимостями. Каждый парциальный автогенератор состоит из параллельного колебательного контура, включающего ёмкость C_i , индуктивность L_i , проводимость g_i и нелинейный элемент

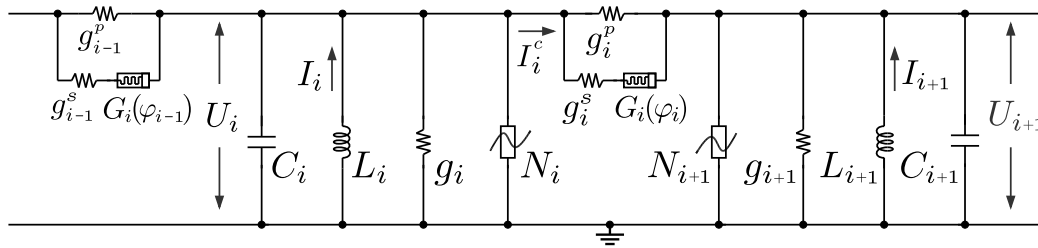


Рис. 1. Эквивалентная схема i -го и $(i+1)$ -го автогенераторов

Fig. 1. Schematic circuit diagram of the i -th and $(i+1)$ -th self-oscillators

N_i с вольт-амперной характеристикой N -типа: $I_i(U_i) = -\alpha_i U_i + \beta_i U_i^3$. Функция $G_i(\varphi_i)$ задает мемристивную проводимость, связывающую автогенераторы с номерами i и $i+1$. Дополнительные резисторы с проводимостями g_i^p и g_i^s обеспечивают регулировку суммарной проводимости, которая отвечает за силу связи $k_i G_i(\varphi_i)$, где k_i представляет собой коэффициент связи. Мемристоры, обеспечивающие связь автогенераторов, управляются некоторыми переменными φ_i . Согласно [2] мемристивный характер рассматриваемого элемента заключается в инерционной зависимости проводимости или сопротивления мемристора от предыдущих состояний. Это обеспечивается инерционным поведением управляющей переменной φ_i , которая в общем случае может быть задана уравнением вида:

$$\frac{d\varphi_i}{dt_\phi} = F_i(\varphi_i, U_i, U_{i+1}).$$

Функция $F(\dots)$ может быть как линейной, так и нелинейной функцией своих аргументов.

Используя правила Кирхгофа, получаем следующую систему уравнений в физических переменных U_i, I_i, φ_i :

$$\begin{cases} \frac{dU_i}{dt_*} + \frac{1}{C_i} I_i + \frac{g_i}{C_i} U_i - \frac{\alpha_i}{C_i} U_i + \frac{\beta_i}{C_i} U_i^3 + \frac{k_i G_i(\varphi_i)}{C_i} (U_i - U_{i+1}) - \\ - \frac{k_{i-1} G_{i-1}(\varphi_{i-1})}{C_i} (U_{i-1} - U_i) = 0, \\ \frac{1}{C_i} \frac{dI_i}{dt_*} = \frac{1}{C_i L_i} U_i, \\ \frac{d\varphi_i}{dt_*} = F_i(\varphi_i, U_i, U_{i+1}), \quad i = 1, \dots, P. \end{cases}$$

Здесь t_* – физическое время. Граничные условия имеют вид: $U_{i\pm P} = U_i, I_{i\pm P} = I_i, \varphi_{i\pm P} = \varphi_i$. Будем считать все автогенераторы и элементы связи полностью идентичными. В этом случае: $\alpha_i = \alpha, \beta_i = \beta, g_i = g, C_i = C, L_i = L, k_i = k, G_i(\dots) = G(\dots), F_i(\dots) = F(\dots)$. Обозначим $\omega^2 = 1/LC$, введем безразмерные переменные

$$t = \omega t_*, \quad x_i = \sqrt{\frac{\beta}{C\omega}} U_i, \quad y_i = \frac{1}{C\omega} \sqrt{\frac{\beta}{C\omega}} I_i, \quad z_i = \omega \sqrt{\frac{\beta}{C\omega}} \varphi_i$$

и обозначим

$$\varepsilon = \frac{\alpha - g}{C\omega}, \quad M_i(z_i) = \frac{G_i(\varphi_i)}{C\omega} = a + bz_i^2, \quad f(z_i, x_i, x_{i+1}) = \sqrt{\frac{C\omega}{\beta}} F(\varphi_i, U_i, U_{i+1}).$$

Получаем систему уравнений в безразмерных переменных, описывающую кольцо идентичных мемристивно связанных генераторов ван дер Поля:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = (\varepsilon - x_i^2)x_i - y_i + k[M_i(z_i)(x_{i+1} - x_i) + M_{i-1}(z_{i-1})(x_{i-1} - x_i)], \\ \dot{y}_i = x_i, \\ \dot{z}_i = f(z_i, x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, P. \end{cases} \quad (1)$$

где x_i, y_i, z_i – безразмерные динамические переменные; t – безразмерное время; ε – параметр, управляющий режимом автогенераторов; k – коэффициент связи.

В соответствии с [1] управляющая мемристивной проводимостью переменная φ понимается как магнитный поток. Тогда динамика нормированной переменной $z(t)$ описывается уравнением

$$\frac{dz}{dt} = \Delta x. \quad (2)$$

где Δx – безразмерная разность потенциалов на мемристоре. Уравнение (2) соответствует идеальному мемристору (мемристору с «идеальной памятью»), поскольку в этом случае:

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t \Delta x(\theta) d\theta.$$

Таким образом, идеальный мемристор бесконечно долго «помнит» начальное значение управляющей переменной $z(t_0)$ и все значения входной переменной Δx в предыдущие моменты времени $\theta \in [t_0, t]$.

В реальных мемристорах управляющая переменная z , как правило, не связана с магнитным потоком и имеет другой физический смысл. Так, в реальных мемристивных устройствах она может представлять собой толщину области с высокой концентрацией миграционных примесей в полупроводниковых мемристорах [3] или площадь проводящей области в ионных устройствах [5–7]. В этом случае уравнение (2) для управляющей переменной может видоизмениться. Так, в ряде работ [6, 52, 53] связь переменной z , управляющей характеристикой мемристивного элемента, с входной переменной w (в нашем случае $w = \Delta x$) описывается уравнением вида:

$$\frac{dz}{dt} = -\gamma z + w. \quad (3)$$

В [6, 52, 53] показано, что для полупроводниковых мемристоров слагаемое вида γz возникает в связи с диффузией в активном слое. Коэффициент γ может быть очень мал. В этом случае мемристор будет близок к идеальному. Однако в пределе $t \rightarrow \infty$ он все равно будет забывать начальное состояние, в связи с чем модель (3) получила название «мемристор с эффектом забывания». Будем задавать функцию $f(z_i, x_i, x_{i+1})$ в последнем уравнении системы (1) в виде:

$$f(z_i, x_i, x_{i+1}) = -\gamma z_i + x_i - x_{i+1}. \quad (4)$$

Тогда, положив $\gamma = 0$, мы получаем связь автогенераторов ансамбля через идеальные мемристоры. При $\gamma \neq 0$ учитывается более реалистичное описание мемристивности.

Мемристивные проводимости $M(z_i)$ будем задавать как

$$M(z_i) = a + bz_i^2, \quad (5)$$

где a и b – некоторые параметры, одинаковые для всех мемристоров.

2. Волновые режимы в кольце автогенераторов (1), связанных через идеальные мемристоры. Влияние начальных условий

Исследуем ансамбль из $P = 100$ автогенераторов (1), связанных через идеальные мемристоривные проводимости ($\gamma = 0$). Зафиксируем следующие параметры модели: $\varepsilon = 0.1$, $k = 0.25$, $a = 0.02$, $b = 0.8$. Как было показано в [29, 30, 32, 33, 37, 46], особенность систем, содержащих мемристоры с «идеальной памятью», заключается в непрерывной зависимости характеристик установившегося режима от выбора начального состояния, в частности, от начальных значений переменных, управляющих мемристоривными элементами. Такая чувствительность к начальному состоянию, особенно к начальному значению переменной, управляющей мемристором, связана с существованием в мемристоривных системах многообразий, состоящих из точек равновесия. В системе (1) при $\gamma = 0$ и характеристике мемристоров, задаваемой выражением (5), также существует такое инвариантное многообразие: все точки подпространства Q , для которого $x_i = 0$, $y_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, P$, являются состояниями равновесия.

Рассмотрим влияние на волновой процесс в кольце мемристоривно связанных автогенераторов (1) начальных распределений $z_i(0)$. Будем задавать различные начальные условия для динамических переменных, определяющих состояния автогенераторов ансамбля $x_i(0)$, $y_i(0)$ и управляющих переменных мемристоров связи $z_i(0)$. Рассмотрим начальное распределение $x_i(0)$, $y_i(0)$ вдоль дискретной пространственной координаты i , задаваемое гармоническими функциями (рис. 2, a): $x_i(0) = A \sin(2\pi i/P)$, $y_i(0) = A \cos(2\pi i/P)$, положив $A = 1$. Для мемристоривных переменных z_i исследуем три варианта регулярного начального распределения $z_i(0)$, показанных на рис. 2, b (кривые IC-1, IC-2, IC-3). Кроме того, рассмотрим случайное начальное распределение $x_i(0)$, $y_i(0)$ в интервале $[-0.5, 0.5]$, полученное с помощью генератора случайных чисел с равномерным распределением (рис. 2, c, d), при тех же начальных распределениях $z_i(0)$: IC-1; IC-2; IC-3.

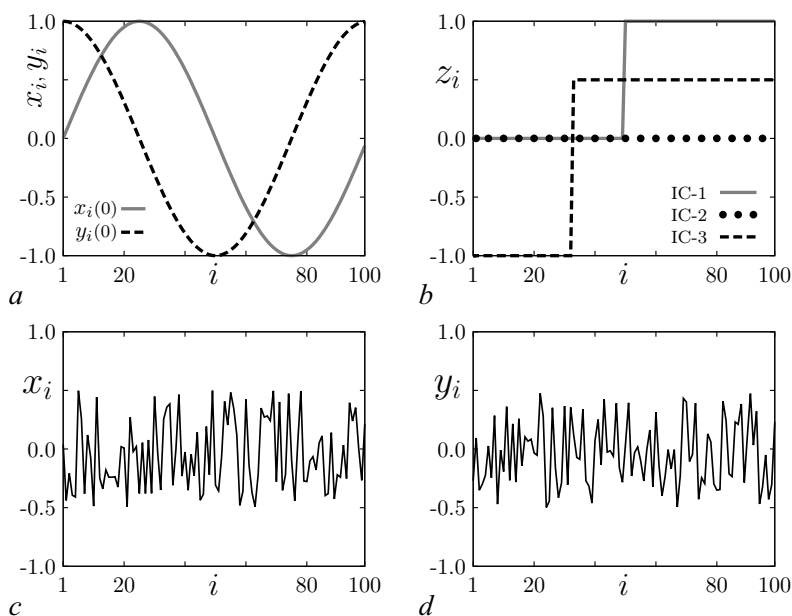


Рис. 2. a – Начальное распределение переменных x_i (сплошная линия) и y_i (пунктирная линия) в виде тригонометрических функций; b – начальные распределения переменной z_i (IC-1, IC-2, IC-3); c, d – случайное начальное распределение переменных x_i и y_i

Fig. 2. a – Initial conditions of variables x_i (solid line) and y_i (dashed line) in the form of trigonometric functions; b – initial conditions of variable z_i (IC-1, IC-2, IC-3); c, d – initial conditions of variables x_i and y_i created by random number generator

В численных экспериментах уравнения (1) интегрировались методом Рунге–Кутты 4-го порядка на времени, достаточном для установления стационарного профиля волны. Проверка того, является ли режим установившимся, производилась с помощью диагностики повторяемости формы мгновенного профиля в моменты времени, в которые для первого элемента ансамбля выполняются условия: $x_1(t) > 0$, $|y_1(t)| \leq 0.001$.

Использование мемристивного элемента в качестве элемента связи приводит к длительному переходному процессу в системе. Так, в случае идеальных мемристоров ($\gamma = 0$) профиль волны в кольце (1) при указанных выше условиях устанавливается на времени $t = 80000$ безразмерных единиц, что составляет почти 13 тысяч периодов колебаний.

На рис. 3 показаны мгновенные профили бегущей волны в различные периоды времени ($t_1 = 500$, $t_2 = 20000$, $t_3 = 80000$). Для времени установления $t \geq t_3 = 80000$ единиц безразмерного времени форма профиля остается практически неизменной. Аналогичным образом ведут себя мгновенные профили и при других начальных условиях.

На рис. 4 приведены пространственно-временные диаграммы и соответствующие им мгновенные профили, полученные при начальных распределениях $x_i(0)$, $y_i(0)$ (см. рис. 2, а) и $z_i(0)$ (см. рис. 2, б). На пространственно-временных диаграммах различными тонами показаны мгновенные значения x_i автогенераторов ансамбля в различные моменты времени. Можно видеть определенные отличия формы бегущих волн, которые лучше различимы на мгновенных профилях волн. Для всех исследованных начальных распределений $z_i(0)$ в кольце сохраняется одноволновый режим (то есть на длине системы укладывается одно пространственное колебание), но форма профиля бегущей волны существенно меняется. Угол наклона светлых и темных полос на пространственно-временной диаграмме изменяется в различных интервалах пространственной координаты, что свидетельствует о различной скорости распространения волны на этих участках кольца. Причем возможен даже случай, когда часть ансамбля демонстрирует режим бегущих волн, а другая часть – пространственно однородный режим (рис. 4, а). Формирование участков с различными скоростями определяется начальным распределением мемристивных переменных z_i , что позволяет управлять пространственным режимом системы в достаточно широких пределах.

Рассмотрим влияние случайного начального распределения (см. рис. 2, с, d) на волновой процесс. Начальные распределения $z_i(0)$ будем выбирать те же, что и раньше (см. рис. 2, б). На рис. 5 приведены пространственно-временные диаграммы и мгновенные профили волн в кольце при фиксированном случайном начальном распределении $x_i(0)$ и $y_i(0)$ и трех различных

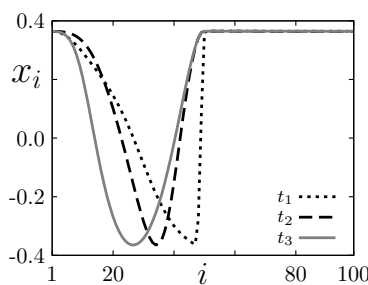


Рис. 3. Установление пространственного профиля в системе (1) при начальном распределении IC-1 (см. рис. 2, б). Мгновенные профили получены в следующие периоды времени: $t_1 = 500$ (линия из точек); $t_2 = 20000$ (пунктирная линия); $t_3 = 80000$ (сплошная линия). Начальное распределение переменных x_i и y_i (см. рис. 2, а). Параметры системы: $\varepsilon = 0.1$, $k = 0.25$, $a = 0.02$, $b = 0.8$, $\gamma = 0$

Fig. 3. Setting snapshot in system (1) at initial conditions IC-1 (Fig. 2, b). Snapshot at $t_1 = 500$ (dotted line); $t_2 = 20000$ (dashed line); $t_3 = 80000$ (solid line). Initial conditions of variables x_i and y_i is shown in Fig. 2, a. System parameters: $\varepsilon = 0.1$, $k = 0.25$, $a = 0.02$, $b = 0.8$, $\gamma = 0$

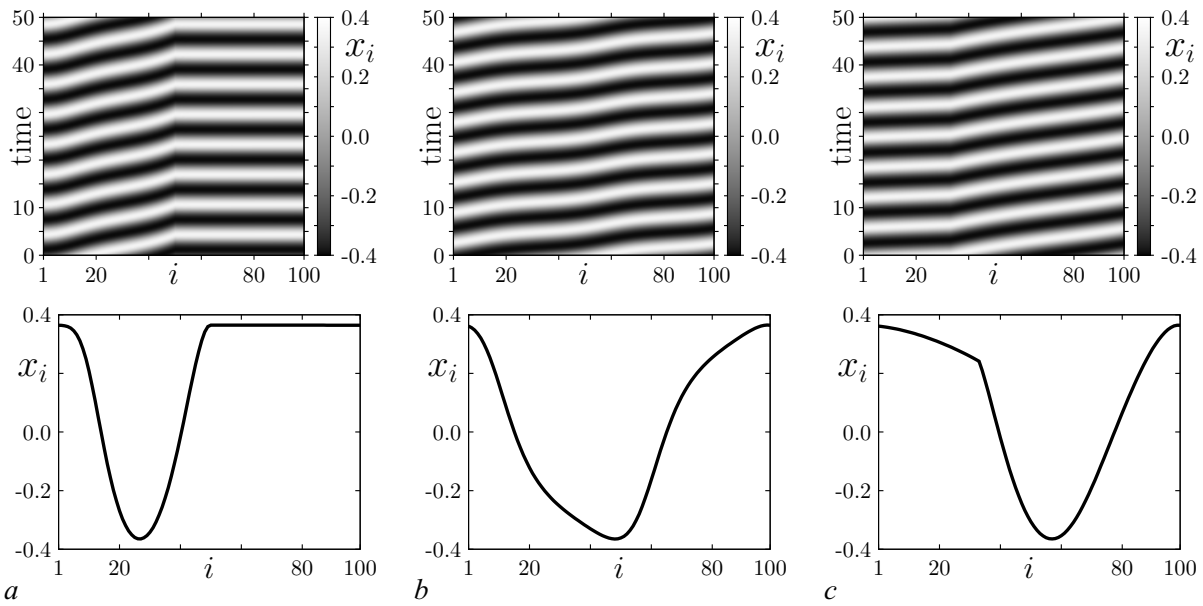


Рис. 4. Волновые режимы в системе (1) для случая «идеальной» мемристивной связи: пространственно-временные диаграммы и мгновенные профили при различных начальных распределениях переменной z_i : a – IC-1, b – IC-2, c – IC-3. Начальное распределение переменных x_i, y_i показано на рис. 2, a . Параметры системы: $\varepsilon = 0.1, k = 0.25, a = 0.02, b = 0.8, \gamma = 0$. Время установления режимов $t = 80000$

Fig. 4. Wave regimes in system (1) for «ideal» memristive coupling: space-time diagrams and snapshots at different initial conditions of variable z_i : a – IC-1, b – IC-2, c – IC-3. Initial conditions of variables x_i and y_i is shown in Fig. 2, a . System parameters: $\varepsilon = 0.1, k = 0.25, a = 0.02, b = 0.8, \gamma = 0$. The transient time is 80000

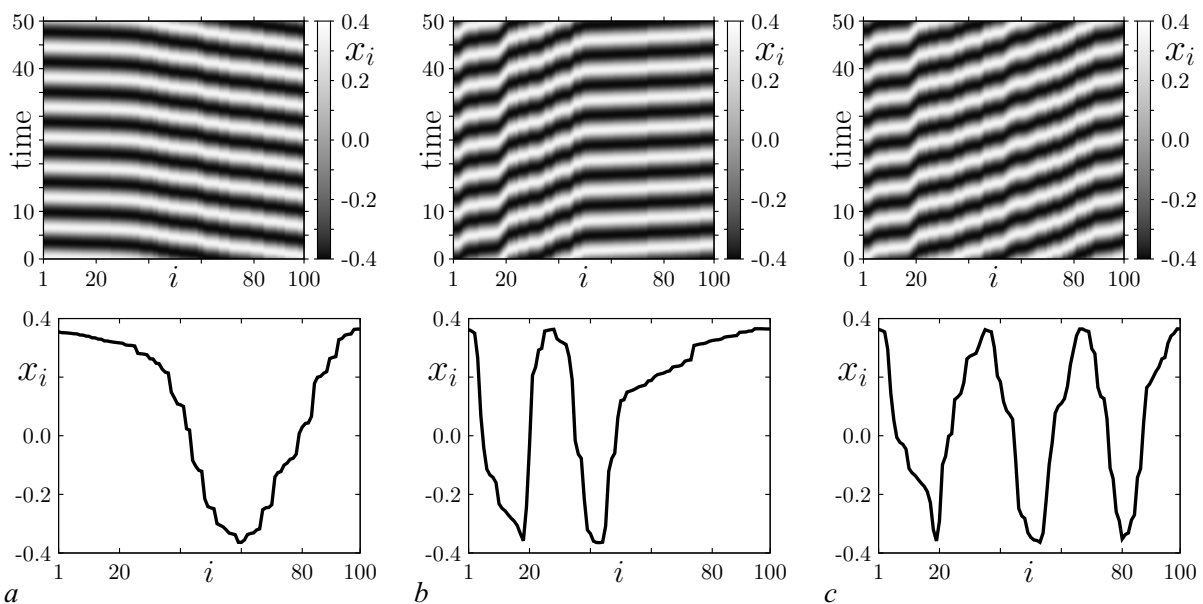


Рис. 5. Волновые режимы в системе (1) для «идеальной» мемристивной связи: пространственно-временные диаграммы и мгновенные профили волны при случайном начальном распределении переменных x_i, y_i (см. рис. 2, c, d) и различных начальных распределениях переменной z_i (см. рис. 2, b): a – IC-3; b – IC-1; c – IC-2. Параметры системы: $\varepsilon = 0.1, k = 0.25, a = 0.02, b = 0.8, \gamma = 0$. Время установления $t = 80000$

Fig. 5. Wave regimes in system (1) for «ideal» memristive coupling: space-time diagrams and snapshots at initial conditions of variables x_i and y_i is shown in Fig. 2, c, d and different initial conditions of variable z_i (Fig. 2, b): a – IC-3; b – IC-1; c – IC-2. System parameters: $\varepsilon = 0.1, k = 0.25, a = 0.02, b = 0.8, \gamma = 0$. The transient time is 80000

распределениях $z_i(0)$. В данном случае, в зависимости от распределения $z_i(0)$, в установившемся режиме реализуются разные волновые моды: одноволновая (рис. 5, *a*), двухволновая (рис. 5, *b*) и трехволновая (рис. 5, *c*). Характер волновой моды здесь определяется числом пространственных колебаний, укладывающихся на длине системы. Для гармонической волны – это число длин волн. В рассматриваемом случае форма колебаний является более сложной, не повторяющейся в пространстве, так что о «длине волны» можно говорить лишь условно. Можно также отметить наличие мелкомасштабных искривлений установившегося волнового профиля, что связано с «памятью» системы о начальном случайном распределении переменных x_i, y_i .

3. Волновые режимы в кольце (1) в случае модифицированного уравнения для переменных z_i

Рассмотрим влияние параметра γ на волновые режимы исследуемой системы (1). В уравнении (4), задающем динамику мемристивных переменных z_i , положим $\gamma = 0.1$. Таким образом мы учитываем «неидеальный» характер мемристивных проводимостей, связывающих автогенераторы. В этом случае инвариантное многообразие равновесий Q перестает существовать, и в системе остается только одна точка равновесия: $x_i = 0, y_i = 0, z_i = 0$.

Зададим начальное распределение $x_i(0), y_i(0)$ гармоническими функциями в соответствии с рис. 2, *a* и рассмотрим различные начальные распределения $z_i(0)$, приведенные на рис. 2, *b*. Для всех начальных распределений мемристивной переменной в ансамбле устанавливается один и тот же волновой режим, пространственно-временная диаграмма и мгновенный профиль которого приведены на рис. 6. Введение отличного от нуля параметра γ уменьшает длительность процессов установления в системе. Так, мгновенный профиль, представленный на рис. 6, *b*, для всех рассмотренных распределений $z_i(0)$ устанавливается уже на времени $t = 10000$ (примерно 1600 периодов колебаний). При очень малых значениях γ в системе наблюдаются длительные переходные процессы. С ростом γ установление стационарных режимов происходит значительно быстрее.

Волновые режимы, устанавливающиеся при одинаковом случайном распределении $x_i(0)$ и $y_i(0)$ (см. рис. 2, *c, d*) и различных $z_i(0)$ (см. рис. 2, *b*), приведены на рис. 7. Начальное распределение $z_i(0)$, обозначенное как IC-1, приводит к установлению четырехволновой моды

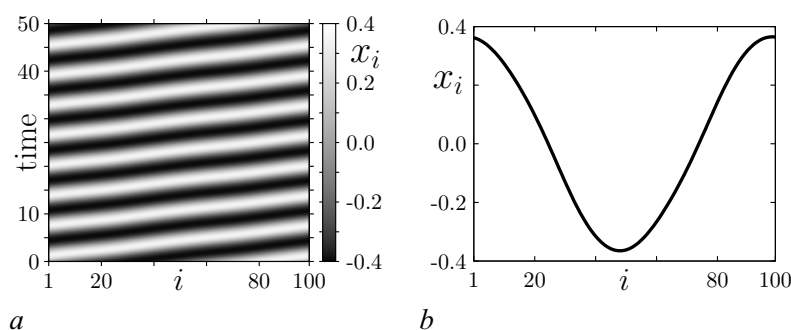


Рис. 6. Волновой режим в системе (1) для «реальной» мемристивной связи: *a* – пространственно-временная диаграмма и *b* – мгновенный профиль при начальном распределении переменных x_i, y_i (см. рис. 2, *a*), для всех начальных распределений переменной z_i (см. рис. 2, *b*). Параметры системы: $\varepsilon = 0.1, k = 0.25, a = 0.02, b = 0.8, \gamma = 0.1$. Время установления $t = 10000$

Fig. 6. Wave regime in system (1) for «real» memristive coupling: *a* – space-time diagram and *b* – snapshot at initial conditions of variables x_i and y_i is shown in Fig. 2, *a* for all initial conditions of variable z_i (Fig. 2, *b*). System parameters: $\varepsilon = 0.1, k = 0.25, a = 0.02, b = 0.8, \gamma = 0.1$. The transient time is 10000

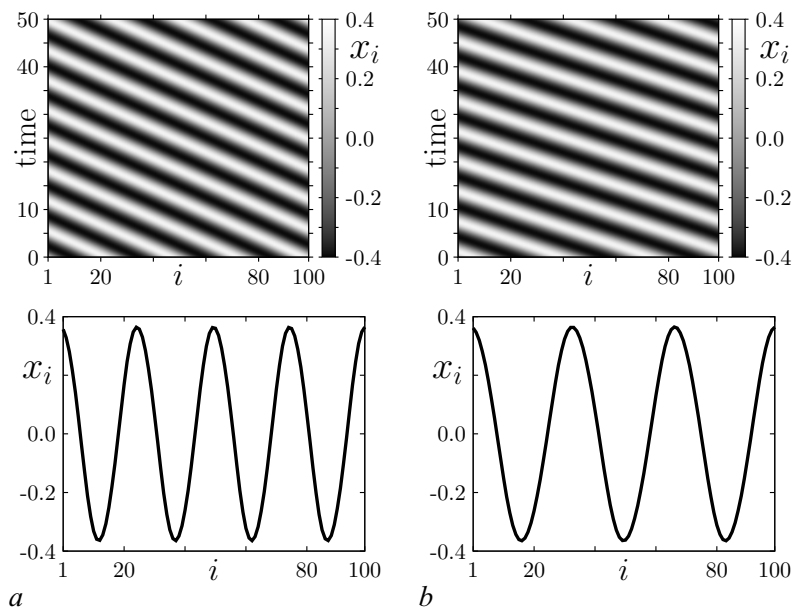


Рис. 7. Волновые режимы в системе (1) для «неидеальной» мемристивной связи: пространственно-временные диаграммы и мгновенные профили при различных начальных распределениях переменной z_i : a – IC-1; b – IC-2 и IC-3. Начальное распределение переменных x_i и y_i показаны на рис. 2, c , d . Параметры системы: $\varepsilon = 0.1$, $k = 0.25$, $a = 0.02$, $b = 0.8$, $\gamma = 0.1$. Время установления режимов $t = 80000$

Fig. 7. Wave regimes in system (1) for «real» memristive coupling: space-time diagrams and snapshots at different initial conditions of variable z_i : a – IC-1; b – IC-2 and IC-3. Initial conditions of variables x_i and y_i is shown in Fig. 2, c , d . System parameters: $\varepsilon = 0.1$, $k = 0.25$, $a = 0.02$, $b = 0.8$, $\gamma = 0.1$. The transient time is 80000

(рис. 7, a), в то время как распределения IC-2 и IC-3 порождают трехволновую моду (рис. 7, b). Таким образом, определенная зависимость установившегося режима от начальных состояний мемристивных связей сохраняется, хотя форма волны уже не меняется всякий раз при изменении $z_i(0)$. Можно также отметить, что для случайных начальных распределений переменных x_i , y_i время установления стационарного профиля волны существенно возрастает и при $\gamma = 0.1$ становится таким же длительным, как и в случае $\gamma = 0$.

4. Обсуждение и заключение

Проведенные исследования показывают, что система с мемристивными связями между элементами демонстрирует те же особенности, что и маломерная мемристивная система. В случае «идеального» характера мемристивных элементов особенность поведения мемристивных систем проявляется в чувствительности к начальному состоянию системы, главным образом к начальным значениям переменных, управляющих характеристиками мемристора. Так, форма установившегося профиля бегущих волн в распределенной системе с мемристивными связями меняется при изменении начального распределения мемристивных переменных z_i . Можно предположить, что это изменение носит непрерывный характер, то есть малое изменение профиля $z_i(0)$ сразу же приводит к изменению профиля волны по аналогии с изменением границы области синхронизации в двух мемристивно связанных генераторах с частотной расстройкой (см. [46]). В этом случае, меняя начальное распределение $z_i(0)$, можно в достаточно широких пределах изменять форму волнового профиля, оставаясь в режиме заданной моды (то есть заданного числа пространственных колебаний на длине системы). При этом для малых значений параметра

γ время установления стационарного режима очень велико. В этом случае в установившемся режиме непрерывная зависимость профиля волны от начальных условий наблюдаться не будет. Действительно, начальные значения z_i влияют на силу связи между элементами, от которой зависит фазовая скорость волны. Однако не только распределение z_i определяет форму стационарного профиля волны. Начальные распределения других переменных также важны. Данная особенность поведения системы с мемристивными связями является следствием существования в фазовом пространстве многообразия равновесий.

При «неидеальном» характере мемристивной связи, например, когда уравнение для управляющей мемристором переменной имеет вид (3), многообразие равновесий исчезает, а вместе с ним исчезает и непрерывная зависимость формы волны от начального распределения мемристивных переменных $z_i(0)$. Таким образом, при малых γ влияние мемристивной связи проявляется в длительном времени установления. О том же самом свидетельствуют расчеты, проведенные для системы двух осцилляторов ван дер Поля, взаимодействующих через мемристор [54]. С ростом γ мемристивные свойства быстро теряются. Форма волны уже не будет непрерывно меняться с изменением распределения $z_i(0)$. В то же время, как показали проведенные численные эксперименты, выбор $z_i(0)$ при фиксированном распределении переменных, задающих начальные состояния элементов, может существенно влиять на установившийся режим и даже приводить к переключению на другую волновую моду.

В данной работе затронут только один аспект поведения мемристивных распределенных систем и сред, причем выбраны наиболее простые модели как активных элементов (автогенераторов), так и мемристивных проводимостей. Динамика ансамбля автогенераторов с более сложным поведением (например, релаксационных или хаотических), очевидно будет гораздо сложнее, и влияние мемристивного характера связей может привести к иным, еще не установленным эффектам. Кроме того, важное значение может иметь характеристика самих мемристивных элементов. Например, форма ее нелинейности. Особенно существенна форма уравнения, задающего динамику переменной, управляющей мемристором. Это уравнение также может быть нелинейным. Таким образом, рассмотрение более сложных моделей распределенных мемристивных систем открывает много направлений для дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Chua L.O. Memristor–The missing circuit element // IEEE Transactions on circuit theory. 1971. Vol. 1. P. 507–519.
2. Chua L.O., Kang S.M. Memristive devices and systems // Proceedings of the IEEE. 1976. Vol. 64, no. 2. P. 209–223.
3. Strukov D.B., Snider G.S., Stewart D.R., and Williams R.S. The missing memristor found // Nature. 2008. Vol. 453. P. 80–83.
4. Berzina T., Smerieri A., Bernabó M., Pucci A., Ruggeri G., Erokhin V., Fontana M. Optimization of an organic memristor as an adaptive memory element // Journal of Applied Physics. 2009. Vol. 105, № 12. 124515.
5. Jeong H.Y. et al. Graphene oxide thin films for flexible nonvolatile memory applications // Nano letters. 2010. Vol. 10, no. 11. P. 4381–4386.
6. Chang T., Jo S.-H., Kim K.-H., Sheridan P., Gaba S., Lu W. Synaptic behaviors and modeling of a metal oxide memristive device // Applied physics A. 2011. Vol. 102. P. 857–863.
7. Yang Y., Sheridan P., Lu W. Complementary resistive switching in tantalum oxide-based resistive memory devices // Applied Physics Letters. 2012. Vol. 100, no. 20. P. 203–112.

8. *Strachan J., Torrezan A., Miao F., Pickett M., Yang J., Yi W., Medeiros-Ribeiro G., Williams R.* State dynamics and modeling of tantalum oxide memristors // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2013. Vol. 60, no. 7. P. 2194–2202.
9. *Kim S., Choi S., Lu W.* Comprehensive physical model of dynamic resistive switching in an oxide memristor // *ACS Nano*. 2014. Vol. 8, no. 3. P. 2369–2376.
10. *Liu G., Chen Y., Wang C., Zhang W., Li R.-W., and Wang L.* Polymer memristor for information storage and neuromorphic applications // *Materials Horizons*. 2014. Vol. 1, no. 5. P. 489–506.
11. *Demin V., Erokhin V., Emelyanov A., Battistoni S., Baldi G., Iannotta S., Kashkarov P., and Kovalchuk M.* Hardware elementary perceptron based on polyaniline memristive devices // *Organic Electronics*. 2015. Vol. 25. P. 16–20.
12. *Erokhina S., Sorokin V., Erokhin V.* Polyaniline-based organic memristive device fabricated by layered-by-layered deposition technique // *Electronic Materials Letters*. 2015. Vol. 11, no. 5. P. 801–805.
13. *Pershin Y.V., Di Ventra M.* Practical approach to programmable analog circuits with memristors // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*. 2010. Vol. 57. P. 1857–1864.
14. *Pershin Y.V., Di Ventra M.* Memory effects in complex materials and nanoscale systems // *Advances in Physics*. 2011. Vol. 60. P. 145–227.
15. *Chew Z., Li L.* Printed circuit board based memristor in adaptive lowpass filter // *Electronics Letters*. 2012. Vol. 48, no. 25. P. 1610–1611.
16. *Di Ventra M., Pershin Y.* The parallel approach // *Nature Physics*. 2013. Vol. 9, no. 4. P. 200–202.
17. *Yang J., Strukov D., Stewart D.* Memristive devices for computing // *Nature Nanotechnology*. 2013. Vol. 8, no. 1. P. 13–24.
18. *Tetzlaff R.* *Memristor and Memristive Systems*. New York: Springer Science & Business Media, 2014.
19. *Vourkas I., Sirakoulis G.C.* *Memristor-Based Nanoelectronic Computing Circuits and Architectures*. Cham: Springer International Publishing, 2016. Vol. 19.
20. *Pershin V., Di Ventra M.* Experimental demonstration of associative memory with memristive neural networks // *Neural networks*. 2010. Vol. 23, no. 7. P. 881–886.
21. *Jo S.H., Chang T., Ebong I., Bhadviya B.B., Mazumder P., Lu W.* Nanoscale memristor device as synapse in neuromorphic systems // *Nano letters*. 2010. Vol. 10, no. 4. P. 1297–1301.
22. *Wu A. and Zeng Z.* Dynamic behaviors of memristor-based recurrent neural networks with time-varying delays // *Neural networks*. 2012. Vol. 36. P. 1–10.
23. *Guo Z., Wang J., Yan Z.* Global exponential dissipativity and stabilization of memristor-based recurrent neural networks with time-varying delays // *Neural Netw.* 2013. Vol. 48. P. 158–172.
24. *Guo Z., Wang J., Yan Z.* Attractivity analysis of memristor-based cellular neural networks with time-varying delays // *IEEE transactions on neural networks and learning systems*. 2014. Vol. 25, no. 4. P. 704–717.
25. *Zhao H., Li L., Peng H., Kurths J., Xiao J., Yang Y.* Anti-synchronization for stochastic memristor-based neural networks with non-modeled dynamics via adaptive control approach // *EPJ B*. 2015. Vol. 88, no. 5. P. 1–10.
26. *Li R., Cao J., Tu Z.* Passivity analysis of memristive neural networks with probabilistic time-varying delays // *Neurocomputing*. 2016. Vol. 191. P. 249–262.
27. *Itoh M., Chua L.O.* Memristor oscillators // *International journal of bifurcation and chaos*. 2008. Vol. 18. P. 3183–3206.
28. *Messias M., Néspoli C., Botta V.A.* Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters

- in memristor oscillators // International journal of bifurcation and chaos. 2010. Vol. 20, no. 2. P. 437–450.
29. *Botta V.A., Néspoli C., Messias M.* Mathematical analysis of a third-order memristor-based Chua's oscillator // Trends in Applied and Computational Mathematics. 2011. Vol. 12, no. 2. P. 91–99.
 30. *Riaza R.* Manifolds of equilibria and bifurcations without parameters in memristive circuits // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2012. Vol. 72, no. 3. P. 877–896.
 31. *Li Q., Hu S., Tang S., Zeng G.* Hyperchaos and horseshoe in a 4D memristive system with a line of equilibria and its implementation // International Journal of Circuit Theory and Applications. 2014. Vol. 42. P. 1172–1188.
 32. *Semenov V.V., Korneev I.A., Arinushkin P.A., Strelkova G.I., Vadivasova T.E., Anishchenko V.S.* Numerical and experimental studies of attractors in memristor-based Chua's oscillator with a line of equilibria. Noise-induced effects // EPJ Special Topics. 2015. Vol. 224, no. 8. P. 1553–1561.
 33. *Korneev I.A., Vadivasova T.E., Semenov V.V.* Hard and soft excitation of oscillations in memristor-based oscillators with a line of equilibria // Nonlinear dynamics. 2017. Vol. 89, no. 4. P. 2829–2843.
 34. *Pham V.T., Volos C.K., Vaidyanathan S., Le T.P., Vu V.Y.* A memristor-based hyperchaotic system with hidden attractors: Dynamics, synchronization and circuitual emulating // Journal of Engineering Science and Technology Review. 2015. Vol. 8. P. 205–214.
 35. *Kengne J., Tabekoung Z.N., Namba V.K., Negou A.N.* Periodicity, chaos and multiple attractors in a memristor-based Shinriki's circuit // Chaos. 2015. Vol. 25. 103126.
 36. *Fiedler B., Liebscher S., Alexander J.* Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: I. theory // Journal of Differential Equations. 2000. Vol. 167, no. 1. P. 16–35.
 37. *Korneev I.A., Semenov V.V.* Andronov-Hopf bifurcation with and without parameter in a cubic memristor oscillator with a line of equilibria // Chaos. 2017. Vol. 27, no. 8. 081104.
 38. *Lu M., Wang C.N., Ren G.D., et al.* Model of electrical activity in a neuron under magnetic flow effect // Nonlinear dynamics. 2016. Vol. 85. P. 1479–1490.
 39. *Ma J., Zhang G., Hayat T., Ren G.* Model electrical activity of neuron under electric field // Nonlinear dynamics. 2018. Vol. 92, no. 3. P. 1395–1402.
 40. *Wu F.Q., Wang C.N., Xu Y., et al.* Model of electrical activity in cardiac tissue under electromagnetic induction // Scientific reports. 2016. Vol. 6, P. 28.
 41. *Frasca M., Gambuzza L., Buscarino A., Fortuna L.* Implementation of adaptive coupling through memristor // Physica Status Solidi. 2014. Vol. 12, no. 1–2. P. 206–210.
 42. *Gambuzza L., Buscarino A., Fortuna L., and Frasca M.* Memristor-based adaptive coupling for consensus and synchronization // IEEE Transactions on Circuits and Systems I. 2015. Vol. 62, no. 4. P. 1175–1184.
 43. *Volos Ch.K., Pham V.T., Vaidyanathan S., Kyprianidis I.M., Stouboulos I.N.* The case of bidirectionally coupled nonlinear circuits via a memristor. Cham: Springer, 2016. Vol. 635. P. 317–350.
 44. *Ignatov M., Hansen M., Ziegler M., Kohlstedt H.* Synchronization of two memristively coupled van der Pol oscillators // Applied Physics Letters. 2016. Vol. 108, no. 8. P. 84–105.
 45. *Xu F., Zhang J., Fang T., Huang Sh., Wang M.* Synchronous dynamics in neural system coupled with memristive synapse // Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 92, no. 3. P. 1395–1402.
 46. *Корнеев И.А., Шабалина О.Г., Семенов В.В., Вадивасова Т.Е.* Синхронизация автогенераторов, взаимодействующих через мемристор // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 2. С. 24–40.

47. Pham V.T., Buscarino A., Fortuna L., Frasca M. Autowaves in memristive cellular neural networks // *International journal of bifurcation and chaos*. 2012. Vol. 22, no. 8. P. 1230027.
48. Buscarino A., Corradino C., Fortuna L., Frasca M., Chua L. Turing patterns in memristive cellular nonlinear networks // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*. 2016. Vol. 99. P. 1–9.
49. Ma J., Wu F.Q., Hayat T., et al. Electromagnetic induction and radiation-induced abnormality of wave propagation in excitable media // *Physica A*. 2017. Vol. 486. P. 508–516.
50. Wang C., Lv M., Alsaedi A., Ma J. Synchronization stability and pattern selection in a memristive neuronal network // *Chaos*. 2017. Vol. 27. P. 113108(1-8).
51. Xu F., Zhang J., Jin M., Huang Sh., Fang T. Chimera states and synchronization behavior in multilayer memristive neural networks // *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 94, no. 2. P. 775–783.
52. Chen L., Li Ch., Huang T., Chen Y., Wen Sh., Qi J. A synapse memristor model with forgetting effect // *Physics Letters A*. 2013. Vol. 377. P. 3260–3265.
53. Zhou E., Fang L., Yang B. A general method to describe forgetting effect of memristor // *Physics Letters A*. 2019. Vol. 383, no. 10, P. 942–948.
54. Korneev I.A., Semenov V.V., Vadivasova T.E. Synchronization of periodic self-oscillators interacting via memristor-based coupling // *International journal of bifurcation and chaos*. 2020. P. 1–8. <https://doi.org/S0218127420500935>

References

1. Chua L.O. Memristor—The missing circuit element. *IEEE Transactions on circuit theory*, 1971, vol. 1, pp. 507–519.
2. Chua L.O., Kang S.M. Memristive devices and systems. *Proceedings of the IEEE*, 1976, vol. 64, no. 2, pp. 209–223.
3. Strukov D.B., Snider G.S., Stewart D.R., and Williams R.S. The missing memristor found. *Nature*, 2008, vol. 453, pp. 80–83.
4. Berzina T., Smerieri A., Bernabó M., Pucci A., Ruggeri G., Erokhin V., Fontana M. Optimization of an organic memristor as an adaptive memory element. *Journal of Applied Physics*, 2009, vol. 105, no. 12, 124515.
5. Jeong H.Y. et al. Graphene oxide thin films for flexible nonvolatile memory applications. *Nano letters*, 2010, vol. 10, no. 11, pp. 4381–4386.
6. Chang T., Jo S.-H., Kim K.-H., Sheridan P., Gaba S., Lu W. Synaptic behaviors and modeling of a metal oxide memristive device. *Applied physics A*, 2011, vol. 102, pp. 857–863.
7. Yang Y., Sheridan P., Lu W. Complementary resistive switching in tantalum oxide-based resistive memory devices. *Applied Physics Letters*, 2012, vol. 100, no. 20, pp. 203–112.
8. Strachan J., Torrezan A., Miao F., Pickett M., Yang J., Yi W., Medeiros-Ribeiro G., Williams R. State dynamics and modeling of tantalum oxide memristors. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2013, vol. 60, no. 7, pp. 2194–2202.
9. Kim S., Choi S., Lu W. Comprehensive physical model of dynamic resistive switching in an oxide memristor. *ACS Nano*, 2014, vol. 8, no. 3, pp. 2369–2376.
10. Liu G., Chen Y., Wang C., Zhang W., Li R.-W., and Wang L. Polymer memristor for information storage and neuromorphic applications. *Materials Horizons*, 2014, vol. 1, no. 5, pp. 489–506.
11. Demin V., Erokhin V., Emelyanov A., Battistoni S., Baldi G., Iannotta S., Kashkarov P., and Kovalchuk M. Hardware elementary perceptron based on polyaniline memristive devices. *Organic Electronics*, 2015, vol. 25, pp. 16–20.

12. Erokhina S., Sorokin V., Erokhin V. Polyaniline-based organic memristive device fabricated by layered-by-layered deposition technique. *Electronic Materials Letters*, 2015, vol. 11, no. 5, pp. 801–805.
13. Pershin Y.V., Di Ventra M. Practical approach to programmable analog circuits with memristors. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2010, vol. 57, pp. 1857–1864.
14. Pershin Y.V., Di Ventra M. Memory effects in complex materials and nanoscale systems. *Advances in Physics*, 2011, vol. 60, pp. 145–227.
15. Chew Z., Li L. Printed circuit board based memristor in adaptive lowpass filter. *Electronics Letters*, 2012, vol. 48, no. 25, pp. 1610–1611.
16. Di Ventra M., Pershin Y. The parallel approach. *Nature Physics*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 200–202.
17. Yang J., Strukov D., Stewart D. Memristive devices for computing. *Nature Nanotechnology*, 2013, vol. 8, no. 1, pp. 13–24.
18. Tetzlaff R. Memristor and Memristive Systems. New York, Springer Science & Business Media, 2014.
19. Vourkas I., Sirakoulis G.C. Memristor-Based Nanoelectronic Computing Circuits and Architectures. Cham, Springer International Publishing, 2016, vol. 19.
20. Pershin V., Di Ventra M. Experimental demonstration of associative memory with memristive neural networks. *Neural networks*, 2010, vol. 23, no. 7, pp. 881–886.
21. Jo S.H., Chang T., Ebong I., Bhadviya B.B., Mazumder P., Lu W. Nanoscale memristor device as synapse in neuromorphic systems. *Nano letters*, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 1297–1301.
22. Wu A. and Zeng Z. Dynamic behaviors of memristor-based recurrent neural networks with time-varying delays. *Neural networks*, 2012, vol. 36, pp. 1–10.
23. Guo Z., Wang J., Yan Z. Global exponential dissipativity and stabilization of memristor-based recurrent neural networks with time-varying delays. *Neural networks*, 2013, vol. 48, pp. 158–172.
24. Guo Z., Wang J., Yan Z. Attractivity analysis of memristor-based cellular neural networks with time-varying delays. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 2014, vol. 25, no. 4, pp. 704–717.
25. Zhao H., Li L., Peng H., Kurths J., Xiao J., Yang Y. Anti-synchronization for stochastic memristor-based neural networks with non-modeled dynamics via adaptive control approach. *EPJ B*, 2015, vol. 88, no. 5, pp. 1–10.
26. Li R., Cao J., Tu Z. Passivity analysis of memristive neural networks with probabilistic time-varying delays. *Neurocomputing*, 2016, vol. 191, pp. 249–262.
27. Itoh M., Chua L.O. Memristor oscillators *International journal of bifurcation and chaos*, 2008, vol. 18, pp. 3183–3206.
28. Messias M., Néspoli C., Botta V.A. Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters in memristor oscillators. *International journal of bifurcation and chaos*, 2010, vol. 20, no. 2, pp. 437–450.
29. Botta V.A., Néspoli C., Messias M. Mathematical analysis of a third-order memristor-based Chua's oscillator. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, 2011, vol. 12, no. 2, pp. 91–99.
30. Riaza R. Manifolds of equilibria and bifurcations without parameters in memristive circuits. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2012, vol. 72, no. 3, pp. 877–896.
31. Li Q., Hu S., Tang S., Zeng G. Hyperchaos and horseshoe in a 4D memristive system with a line of equilibria and its implementation. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2014, vol. 42, pp. 1172–1188.
32. Semenov V.V., Korneev I.A., Arinushkin P.A., Strelkova G.I., Vadivasova T.E., Anishchenko V.S.

- Numerical and experimental studies of attractors in memristor-based Chua's oscillator with a line of equilibria. Noise-induced effects. *EPJ Special Topics*, 2015, vol. 224, no. 8, pp. 1553–1561.
33. Korneev I.A., Vadivasova T.E., Semenov V.V. Hard and soft excitation of oscillations in memristor-based oscillators with a line of equilibria. *Nonlinear dynamics*, 2017, vol. 89, no. 4, pp. 2829–2843.
 34. Pham V.T., Volos C.K., Vaidyanathan S., Le T.P., Vu V.Y. A memristor-based hyperchaotic system with hidden attractors: dynamics, synchronization and circuitual emulating. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 2015, vol. 8, pp. 205–214.
 35. Kengne J., Tabekoung Z.N., Namba V.K., Negou A.N. Periodicity, chaos and multiple attractors in a memristor-based Shinriki's circuit. *Chaos*, 2015, vol. 25, pp. 103126.
 36. Fiedler B., Liescher S., Alexander J. Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: I. theory. *Journal of Differential Equations*, 2000, vol. 167, no. 1, pp. 16–35.
 37. Korneev I.A., Semenov V.V. Andronov-Hopf bifurcation with and without parameter in a cubic memristor oscillator with a line of equilibria. *Chaos*, 2017, vol. 27, no. 8, pp. 081104.
 38. Lu M., Wang C.N., Ren G.D., et al. Model of electrical activity in a neuron under magnetic flow effect. *Nonlinear dynamics*, 2016, vol. 85, pp. 1479–1490.
 39. Ma J., Zhang G., Hayat T., Ren G. Model electrical activity of neuron under electric field. *Nonlinear dynamics*, 2018, vol. 92, no. 3, pp. 1395–1402.
 40. Wu F.Q., Wang C.N., Xu Y., et al. Model of electrical activity in cardiac tissue under electromagnetic induction. *Scientific reports*, 2016, vol. 6, pp. 28.
 41. Frasca M., Gambuzza L., Buscarino A., Fortuna L. Implementation of adaptive coupling through memristor. *Physica Status Solidi*, 2014, vol. 12, no. 1–2, pp. 206–210.
 42. Gambuzza L., Buscarino A., Fortuna L., and Frasca M. Memristor-based adaptive coupling for consensus and synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2015, vol. 62, no. 4, pp. 1175–1184.
 43. Volos Ch.K., Pham V.T., Vaidyanathan S., Kyprianidis I.M., Stouboulos I.N. The case of bidirectionally coupled nonlinear circuits via a memristor. Cham, Springer, 2016, vol. 635, pp. 317–350.
 44. Ignatov M., Hansen M., Ziegler M., Kohlstedt H. Synchronization of two memristively coupled van der Pol oscillators. *Applied Physics Letters*, 2016, vol. 108, no. 8, pp. 84–105.
 45. Xu F., Zhang J., Fang T., Huang Sh., Wang M. Synchronous dynamics in neural system coupled with memristive synapse. *Nonlinear dynamics*, 2018, vol. 92, no. 3, pp. 1395–1402.
 46. Korneev I.A., Shabalina O.G., Semenov V.V., Vadivasova T.E. Synchronization self-sustained oscillators interacting through the memristor. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 2, pp. 24–40.
 47. Pham V.T., Buscarino A., Fortuna L., Frasca M. Autowaves in memristive cellular neural networks. *International journal of bifurcation and chaos*, 2012, vol. 22, no. 8, pp. 1230027.
 48. Buscarino A., Corradino C., Fortuna L., Frasca M., Chua L. Turing patterns in memristive cellular nonlinear networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2016, vol. 99, pp. 1–9.
 49. Ma J., Wu F.Q., Hayat T., et al. Electromagnetic induction and radiation-induced abnormality of wave propagation in excitable media. *Physica A*, 2017, vol. 486, pp. 508–516.
 50. C. Wang, M. Lv, A. Alsaedi, J. Ma. Synchronization stability and pattern selection in a memristive neuronal network. *Chaos*, 2017, vol. 27, pp. 113108(1-8).
 51. Xu F., Zhang J., Jin M., Huang Sh., Fang T. Chimera states and synchronization behavior in multilayer memristive neural networks. *Nonlinear dynamics*, 2018, vol. 94, no. 2, pp. 775–783.
 52. Chen L., Li Ch., Huang T., Chen Y., Wen Sh., Qi J. A synapse memristor model with forgetting effect. *Physics Letters A*, 2013, vol. 377, pp. 3260–3265.

53. Zhou E., Fang L., Yang B. A general method to describe forgetting effect of memristor. *Physics Letters A*, 2019, vol. 383, no. 10, pp. 942–948.
54. Korneev I.A., Semenov V.V., Vadivasova T.E. Synchronization of periodic self-oscillators interacting via memristor-based coupling. *International journal of bifurcation and chaos*, 2020, pp. 1–8. <https://doi.org/S0218127420500935>



Корнеев Иван Александрович – родился в селе Еруслан Саратовской области (1992), окончил Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (2017). Имеет диплом бакалавра по направлению «Радиофизика» и диплом магистра по направлению «Радиофизика». В настоящее время – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: математическое моделирование, численный и физический эксперимент, синхронизация, мемристивные системы.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: ivankorneew@yandex.ru



Слепнев Андрей Вячеславович – родился в Саратове (1987), окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника» (2009). Получил степень магистра физики по направлению «Физика» (СГУ, 2011). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2014). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики, ответственный за научную работу на физическом факультете. Научные интересы: динамика распределенных систем, закономерности формирования пространственных структур, влияние случайного воздействия на динамику нелинейных систем.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: a.v.slepnev@gmail.com



Семенов Владимир Викторович – родился в Саратове (1990). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности радиофизика (2012). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2016). С 2018 года является сотрудником исследовательского института FEMTO-ST (г. Безансон, Франция). Научные интересы: индуцированные шумом эффекты в нелинейных колебательных системах, мемристивные системы, пространственные структуры в динамике детерминированных и стохастических систем с запаздыванием. Автор 27 публикаций в реферируемых научных журналах.

Франция, 25030, Безансон, проспект Монбукон, 15В
Институт FEMTO-ST, CNRS и Университет Бургундии Франш-Конте
E-mail: semenov_v_v@list.ru



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в Саратове (1958). Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики и статистической радиофизики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических и стохастических осцилляторов, волновые структуры в активных средах, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, влияние шума и стохастические эффекты в нелинейных системах и др. Автор более 130 публикаций в рецензируемых отечественных и зарубежных изданиях.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: vadivasovate@yandex.ru