



УДК 517.9, 535.8

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-361-382>

Нормализованные краевые задачи в модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием

Е. В. Григорьева¹, С. А. Кащенко²

¹Белорусский государственный экономический университет
Республика Беларусь, 220070 Минск, Партизанский пр., 26

²Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова
Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
E-mail: grigorieva@tut.by, kasch@uniyar.ac.ru

Автор для переписки Кащенко Сергей Александрович, kasch@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 20.03.2020,

принята к публикации 09.06.2020, опубликована 31.08.2020

Целью настоящей работы является разработка принципа сведения дифференциально-разностной модели оптико-электронного осциллятора к наиболее простым объектам – нормализованным краевым задачам. Исследуется динамика оптико-электронного осциллятора с запаздывающей обратной связью в окрестности нулевого состояния равновесия. Дифференциально-разностная модель содержит малый параметр при старшей производной. Показано, что в определенной окрестности точки бифуркации число корней характеристического уравнения с близкой к нулю действительной частью неограниченно возрастает при уменьшении малого параметра. Получены краевые задачи в частных производных, которые играют роль нормальных форм для исходной системы и которые имеют стационарные решения в виде симметричных или асимметричных прямоугольных структур. Показана мультистабильность прямоугольных структур с различным числом и формой ступенек. Обосновано пространственно-временное представление решений исходного уравнения с запаздыванием. Определены частоты и амплитуды осциллирующих решений уравнения с запаздыванием. **Методы исследования.** Используются как стандартные методы изучения локальной динамики, основанные на построении нормальных форм на центральных многообразиях, так и специальные методы бесконечномерной нормализации. Предложен алгоритм сведения исходной краевой задачи к уравнениям для медленно меняющихся амплитуд. **Полученные результаты.** Построены конечномерные и специальные бесконечномерные уравнения, которые играют роль нормальных форм. Их нелокальная динамика определяет поведение решений из малой окрестности исходной краевой задачи. Приведены асимптотические на промежутке $[t_0, \infty)$ формулы для решений.

Ключевые слова: бифуркационный анализ, волновые структуры, запаздывание, динамика лазеров.

Образец цитирования: Григорьева Е.В., Кащенко С.А. Нормализованные краевые задачи в модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 4. С. 361–382.
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-361-382>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Дополнительное соглашение № 075-02-2020-1514/1 к Соглашению о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2020-1514).

Normalized boundary value problems in the model of optoelectronic oscillator delayed

E. V. Grigorieva¹, S. A. Kashchenko²

¹Belarus State Economical University
26, Partizansky Ave., Minsk 220070, Republic of Belarus

² Yaroslavl State University
14, Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia
E-mail: grigorieva@tut.by, kasch@uniyar.ac.ru

Correspondence should be addressed to Kashchenko Sergey A., kasch@uniyar.ac.ru

Received 20.03.2020, accepted 09.06.2020, published 31.08.2020

Purpose of this work is reduction of differential-difference-model of optic-electronic oscillator to more simple normalized boundary value problems. We study the dynamics of an optoelectronic oscillator with delayed feedback in the vicinity of the zero equilibrium state. The differential-difference-model contains a small parameter with the derivative. It is shown that in a certain neighborhood of the bifurcation point, the number of roots of the characteristic equation that have a real part close to zero increases unlimitedly with decreasing small parameter. Partial boundary value problems are obtained that play the role of normal forms for the original system and which have stationary solutions in the form of symmetric or asymmetric rectangular structures. The multistability of rectangular structures with a different number and shape of steps is shown. The spatio-temporal representation of solutions of the initial equation with delay is substantiated. The frequencies and amplitudes of oscillating solutions of the delay equation are determined. **Research methods.** We apply standard methods of normal forms on central manifolds, as well as special methods for infinite-dimensional normalization. An algorithm is proposed for reducing the initial delayed equation to the boundary-value problem for slowly varying amplitudes. **Results.** Finite-dimensional and special infinite-dimensional equations – boundary value problem are constructed that play the role of normal forms. Their nonlocal dynamics determines the behavior of solutions to the original equation with delay from a small neighborhood of the equilibrium. Asymptotic formulas for solutions on the interval $[t_0, \infty)$ are given.

Key words: bifurcation analysis, wave structures, delayed feedback, laser dynamics.

Reference: Grigorieva E.V., Kashchenko S.A. Normalized boundary value problems in the model of optoelectronic oscillator delayed. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 4, pp. 361–382.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-361-382>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of a development programme for the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of the Yaroslavl State University with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2020-1514/1 additional to the agreement on provision of subsidies from the federal budget No. 075-02-2020-1514).

Введение

В последнее время активно обсуждаются принципы пространственно-временного представления динамики систем с запаздывающими обратными связями (ОС) [1]. Таким способом удается показать соответствие между колебаниями в системах с запаздыванием и процессами образования волн и структур в пространственно-временных системах [2]. Имеются многочисленные примеры пространственно-временного представления в лазерных и оптических системах. Так, режим динамического хаоса в CO₂-лазере с оптоэлектронной ОС был представлен как проявление пространственно-временной турбулентности [3]. В полупроводниковом лазере с насыщающимся поглотителем периодические короткие импульсы с периодом, близким ко времени запаздывания, были интерпретированы как локализованные структуры в псевдопространстве [4]. Поляризационная динамика VECSEL-лазеров обсуждалась в [5] с точки зрения образования диссипативных солитонов. Неустойчивость Бенджамин–Фейра показана в динамике лазеров с запаздыванием [6]. Режимы слабого и сильного хаоса в одномодовом полупроводниковом лазере

с оптической ОС исследовались в работе [7] на основе модели Ланга–Кобаяши. Таким образом, метод пространственно-временного представления имеет значение как для фундаментальных, так и для прикладных исследований динамики нелинейных распределенных систем.

В работах [8–11] было показано, что изучение динамики уравнений с большим запаздыванием в критических случаях может быть сведено к исследованию специальных нелинейных пространственно-распределенных краевых задач параболического типа. В основе соответствующего алгоритма лежит применение формализма метода нормальных форм и асимптотического представления тех корней характеристического уравнения, которые стремятся к мнимой оси при стремлении к нулю малого параметра – величины, обратной к большому запаздыванию. На этом пути удалось разработать эффективный алгоритм построения нормализованных краевых задач – квазинормальных форм и получить строгое обоснование соответствия динамических свойств этих краевых задач динамическим свойствам рассматриваемых уравнений с запаздыванием. В частности, в работе [12] были изучены быстро осциллирующие решения в модели оптико-электронного осциллятора.

Для пространственно-временного представления динамики систем с запаздыванием предлагается следующий формальный способ [1]. Текущее время (в единицах времени запаздывания) определяют как $t = y + \tau$, где $y \in [0, 1)$ и $\tau = 0, 1, 2, \dots$. Тогда последовательность данных о временной динамике наблюдаемой величины $x(t)$ можно переопределить для функции $x(y, \tau)$ двух независимых аргументов: y – псевдопространственная переменная (определяет фрагмент функции $x(t)$ на интервале запаздывания) и τ – медленная временная переменная (число интервалов запаздывания определяет эволюцию фрагментов). Такой численный способ удобно использовать как для экспериментальных данных, так и при модельных расчетах. В настоящий момент, однако, остается открытым вопрос о доказательной связи между исходными дифференциальными уравнениями с запаздыванием и краевыми задачами в частных производных для описания пространственно-временного представления.

Другой подход – метод введения переменных с различными временными масштабами (multiple timescale analysis) предложен в [13].

В системах двух и более уравнений возможны различные типы бесконечномерных бифуркаций и, соответственно, квазинормальных форм. Так, для модели лазера с большим запаздыванием в цепи оптоэлектронной ОС была получена квазинормальная форма в виде одномерного пространственно-временного параболического уравнения Гинзбурга–Ландау [14]. Показано возникновение неустойчивости Экхауса для структур, что соответствует мультистабильности быстро осциллирующих колебаний в исходной системе [15]. Уравнение Гинзбурга–Ландау играет роль нормальной формы также и для динамики структур в интерферометре с пространственной маской в цепи ОС, обеспечивающей малый поворот структур [16]. Квазинормальные формы в виде систем уравнений в частных производных получены для модели лазера с чисто оптической ОС в случае большого коэффициента управления [17]. Двумерное уравнение Гинзбурга–Ландау как квазинормальная форма получено в модели двухкомпонентной системы с малой диффузией [18].

В этой работе мы исследуем дифференциально-разностную модель оптико-электронного осциллятора (ОЭО), которая является модификацией известного в оптике уравнения с запаздыванием Икеды [19]. Модель содержит члены со вторыми производными и используется для описания режимов работы акусто-оптических и электро-оптических устройств. В таких системах экспериментально и численно наблюдались прямоугольные колебания [20, 21]. Возможна мультистабильность периодических состояний с несколькими прямоугольными колебаниями на интервале задержки (или удвоенном интервале) [22]. Обнаружены различные сценарии перехода к хаосу, в том числе возникновение быстрых осцилляций на фоне медленных колебаний [23–25] и хаотические структурные образования, именуемые химерами, которые ассоциируются

с кластерами в ансамбле связанных осцилляторов [26]. Указанные нелинейные явления изучались с привлечением теории релаксационных колебаний в системах с быстрыми и медленными переменными [22, 24]. Теоретически рассматривались конечномерные бифуркации, приводящие к быстрым и медленным колебаниям [25].

Целью настоящей работы является разработка принципа сведения дифференциально-разностной модели ОЭО к наиболее простым объектам – нормализованным краевым задачам. Такие квазинормальные формы описывают волновые структуры с прямоугольным профилем. В исходной системе с запаздыванием структурам соответствуют прямоугольные колебания малой амплитуды. Тем самым получено последовательное обоснование пространственно-временного представления динамики ОЭО с запаздыванием.

Результаты представлены следующим образом. В части 1 данной статьи приводится дифференциально-разностная модель ОЭО и обсуждаются параметры модели. Величина запаздывания находится в определенном соотношении с временами релаксаций других переменных системы, так что система оказывается сингулярно-возмущенной. В части 2 получены выражения для корней характеристического уравнения в малой окрестности бифуркационных значений уровня ОС. Показано, что число корней с близкой к нулю действительной частью стремится к бесконечности при стремлении к нулю малого параметра системы. Выделено три типа асимптотически бесконечномерных бифуркаций. В части 3 представлен вывод нормализованной краевой задачи в первом критическом случае. Показано, что при периодических граничных условиях стационарными решениями нормализованной задачи являются пространственные структуры с прямоугольным профилем. Квазинормальная форма допускает как симметричные относительно нулевого уровня, так и асимметричные ступенчатые структуры. Объясняется мультистабильность структур с различным числом и формой ступенек. Проведено сравнение между пространственными стационарными структурами и прямоугольными колебаниями в исходной системе, целое число которых укладывается на интервале запаздывания. В части 4 приводится нормализованная краевая задача во втором критическом случае. Стационарным структурам этой квазинормальной формы соответствуют быстрые прямоугольные колебания, описанные выше, или медленные колебания, или прямоугольные колебания на фоне медленных колебаний. Возможна мультистабильность таких решений. В части 5 приводится нормализованная краевая задача с антипериодическими граничными условиями в третьем критическом случае. Представлены соответствующие численные решения исходной системы в виде прямоугольных колебаний, целое число которых укладывается на удвоенном интервале запаздывания.

1. Модель

Рассматривается модель оптико-электронного осциллятора из работы [24],

$$\begin{aligned} \mu \frac{dx}{d\zeta} &= y - x + \beta [\cos^2(x(\zeta - \eta) + \varphi) - \cos^2 \varphi], \\ \frac{dy}{d\zeta} &= -x, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(\zeta)$ – безразмерная переменная, описывающая напряжение на входе модулятора Маха–Зендера, β – коэффициент обратной связи, φ – фаза, определяющая рабочую точку модулятора, η – время запаздывания в цепи обратной связи, μ – коэффициент отсечки частоты. Если исключить из рассмотрения (медленную) переменную y , то система сводится к известному в оптике уравнению Икеды с запаздыванием [19].

В работе [24] приводятся типичные значения запаздывания и коэффициента отсечки частоты $\mu = 4 \cdot 10^{-4}$, $\eta = 2 \times 10^{-2}$, а также значения, соответствующие экспериментальным наблю-

дениям, $\mu = 6.47 \times 10^{-6}$, $\eta = 3.82 \times 10^{-4}$. Отсюда следует, что в системе действуют процессы с существенно различными характерными временами. В соответствии с приведенными данными, мы будем рассматривать в этой статье случай, когда указанные параметры различаются по порядку малости. Для этого введем малый параметр ε и в дальнейшем полагаем

$$\mu = \varepsilon^2, \quad \eta = c\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (2)$$

где фиксировано значение $c > 0$. Отметим, что в работе [27] были приведены результаты локального анализа при условии, что только один из параметров системы – μ – является малым.

Изучим решения системы (1) в некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия. Тогда, от системы (1), производя очевидные перенормировки, удобно перейти к уравнению второго порядка для $x(t)$ с единичным запаздыванием

$$\varepsilon c^{-1} \ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon c x = b_1 \dot{x}(t-1) + 2b_2 x(t-1) \dot{x}(t-1) + 3b_3 x^2(t-1) \dot{x}(t-1) + \dots, \quad (3)$$

где новая переменная времени $t = \zeta/\eta$ измеряется в единицах запаздывания и коэффициенты имеют вид

$$b_1 = -\beta \sin(2\varphi), \quad b_2 = -\beta \cos(2\varphi), \quad b_3 = \frac{2}{3} \beta \sin(2\varphi).$$

В качестве фазового пространства уравнения (3) фиксируем пространство $C_{[-1,0]}^1$ и для задания начальных условий фиксируем функцию $x(s)$ и $\dot{x}(s)$ на отрезке запаздывания $s \in [-1, 0]$.

Замечания.

- (i) Уравнение (3) является сингулярно возмущенным, так как имеет малый множитель ε при старшей производной. Это означает, что решения уравнения при $\varepsilon \rightarrow 0$, вообще говоря, не стремятся к решениям при $\varepsilon = 0$.
- (ii) Для исследования последовательности бифуркаций в системе (1) обычно изменяют коэффициент β – уровень ОС. Тогда меняются все коэффициенты в уравнении (3), так как они связаны: $b_1 = -\beta \sin(2\varphi)$, $b_2 = b_1 \operatorname{ctg}(2\varphi)$, $b_3 = -(2/3)b_1$. При фиксированном b_1 параметр b_2 можно изменить с помощью вариации φ .
- (iii) Далее полагаем, что значения параметра фазы φ достаточно близки к $\pm\pi/4$, что соответствует типичным значениям в экспериментальных условиях.

2. Анализ устойчивости состояния равновесия

Локальная динамика уравнения (3) во многом определяется решениями линеаризованного в нуле уравнения, которому соответствует характеристический квазиполином:

$$\varepsilon c^{-1} \lambda^2 + \lambda + \varepsilon c = b_1 \lambda e^{-\lambda}. \quad (4)$$

Предположим сначала, что $|b_1| < 1$ и $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда характеристический квазиполином (4) имеет один корень $\bar{\lambda}(\varepsilon) = -c(1 - b_1)^{-1}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, а вещественные части всех остальных корней являются отрицательными и отделены от нуля. В этом случае существует локальное одномерное инвариантное устойчивое интегральное многообразие, на котором решения уравнения (3) из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Если выполнено условие $|b_1| > 1$, то существует корень уравнения (4) с положительной и отделенной от нуля вещественной частью при $\varepsilon \rightarrow 0$. В последнем случае задача о динамике уравнения (3) становится нелокальной. Таким образом, интерес представляет изучение динамики уравнения (3) при значениях $b_1 = +/ - 1$, близких к бифуркационным.

Исследуем поведение решений линеаризованного уравнения (2) при малом отклонении параметра b_1 от точки бифуркации. При этом «малость» отклонения будем выбирать сравнимой с малым параметром ε . В окрестности бифуркационных значений параметра можно получить следующие асимптотические представления для корней уравнения (4).

Утверждение 1. Пусть выполнено равенство

$$b_1 = 1 + \varepsilon b_{10}. \quad (5)$$

Для всех тех корней $\lambda_{\pm}(\varepsilon)$ и $\lambda_k(\varepsilon)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, действительные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_{\pm}(\varepsilon) = \pm i\sqrt{\varepsilon c} + \frac{1}{2}\varepsilon \left(b_{10} - \frac{1}{2}c \right) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (6)$$

$$\lambda_k(\varepsilon) = 2\pi i k + \varepsilon \lambda_{k1} + \varepsilon^2 \lambda_{k2} + O(\varepsilon^3), \quad (7)$$

где

$$\lambda_{k1} = - \left(c^{-1} 2\pi i k + c (2\pi i k)^{-1} \right) + b_{10},$$

$$\lambda_{k2} = - (2\pi i k)^{-1} \lambda_{k1}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{k1}^2 - \frac{2}{c} \lambda_{k1} + \lambda_{k1} b_{10} \left((2\pi i k)^{-1} - 1 \right).$$

Расположение корней (6), (7) на комплексной плоскости показано на рис. 1, а в случае $0 < b_{10} < c/2$. Видно, что характеристические корни $\lambda_k(\varepsilon)$ с номерами $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ могут иметь положительную действительную часть, а в левой комплексной полуплоскости остаются корни с высокими номерами порядка $k > \varepsilon^{-1/2}$. Чем меньше значение ε , тем больше корней имеют близкую к нулю действительную часть. Заключаем, что будут расти амплитуды «быстрых» мод с частотами $\omega_k \sim 2\pi k$, но моды с высокими номерами и нулевая мода не возбуждаются.

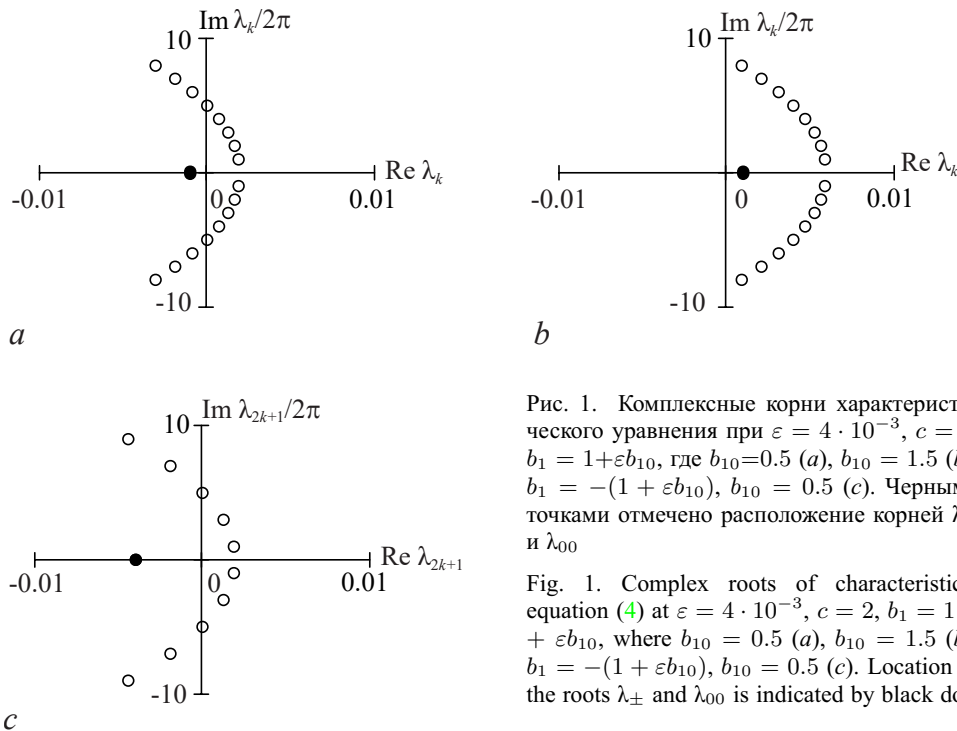


Рис. 1. Комплексные корни характеристического уравнения при $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$, $c = 2$, $b_1 = 1 + \varepsilon b_{10}$, где $b_{10} = 0.5$ (a), $b_{10} = 1.5$ (b); $b_1 = -(1 + \varepsilon b_{10})$, $b_{10} = 0.5$ (c). Черными точками отмечено расположение корней λ_{\pm} и λ_{00}

Fig. 1. Complex roots of characteristic equation (4) at $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$, $c = 2$, $b_1 = 1 + \varepsilon b_{10}$, where $b_{10} = 0.5$ (a), $b_{10} = 1.5$ (b); $b_1 = -(1 + \varepsilon b_{10})$, $b_{10} = 0.5$ (c). Location of the roots λ_{\pm} and λ_{00} is indicated by black dots

Из выражения (6) следует также, что корни $\lambda_{\pm}(\varepsilon)$ переходят в правую комплексную полуплоскость при $b_{10} > c/2$, как показано на рис. 1, б, где λ_{\pm} выделены черными точками. Эти корни имеют малую мнимую часть. заключаем, что вместе с амплитудами «быстрых» мод растут и амплитуда «медленной» моды с частотой $\sim \sqrt{\varepsilon c}$.

В окрестности второго бифуркационного значения параметра можно получить следующие асимптотические представления для корней уравнения (4).

Утверждение 2. Пусть выполнено равенство

$$b_1 = -(1 + \varepsilon b_{10}). \quad (8)$$

Для всех тех корней $\lambda_{00}(\varepsilon)$ и $\lambda_{2k+1}(\varepsilon)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, действительные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_{00}(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\varepsilon c + \varepsilon^2 \frac{1}{4}c \left(\frac{1}{2}c + b_{10} \right) + O(\varepsilon^3), \quad (9)$$

$$\lambda_{2k+1}(\varepsilon) = i\pi(2k+1) + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^2\lambda_{k2} + O(\varepsilon^3), \quad (10)$$

где

$$\lambda_{k1} = -\left(c^{-1}i\pi(2k+1) + c(i\pi(2k+1))^{-1} \right) + b_{10},$$

$$\lambda_{k2} = -(i\pi(2k+1))^{-1}\lambda_{k1}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{k1}^2 - \frac{2}{c}\lambda_{k1} + \lambda_{k1}b_{10} \left((i\pi(2k+1))^{-1} - 1 \right).$$

На рис. 1, с показано расположение характеристических корней (9), (10) на комплексной плоскости. Видно, что при $b_{10} > 0$ корни $\lambda_{2k+1}(\varepsilon)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ имеют положительную действительную часть. Поэтому растут амплитуды только нечетных мод с частотами $\omega_{2k+1} \sim (2k+1)\pi$, моды с высокими номерами и нулевая мода не возбуждаются.

Из полученных выражений для спектра корней характеристического уравнения следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ число корней с близкой к нулю действительной частью стремится к бесконечности. Таким образом, можно говорить о критических случаях (асимптотически) бесконечной размерности, если рассматривать решения линеаризованного уравнения при отклонении значения параметра от бифуркационного на величину порядка ε^1 .

Суммируя, перечислим критические случаи бесконечной размерности в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия системы (3).

Критический случай I. Реализуется при $b_1 = 1 + \varepsilon b_{10}$, где $0 < b_{10} < c/2$, тогда будут расти амплитуды «быстрых» мод с частотами $\omega_k \sim 2\pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, моды с асимптотически высокими номерами и нулевая мода не возбуждаются.

Критический случай II. Реализуется при $b_1 = 1 + \varepsilon b_{10}$, где $b_{10} > c/2$, тогда будут неустойчивыми «быстрые» моды с частотами $\omega_k \sim 2\pi k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ и «медленная» мода с частотой $\omega_0 \sim \sqrt{\varepsilon c}$.

Критический случай III. Реализуется при $b_1 = -(1 + \varepsilon b_{10})$, где $b_{10} > 0$, тогда будут неустойчивыми «нечетные» моды с частотами $\omega_{2k+1} \sim (2k+1)\pi$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Методика исследования таких критических случаев описана, например, в [18]. Ниже применим ее для уравнения (3).

¹ Величина отклонения параметра от критической точки является существенной. В других задачах об устойчивости состояния равновесия удается выявить критические случаи в ε^α -окрестности точки бифуркации при разных $\alpha > 0$ [12, 27]. Отметим, что в стандартной схеме бифуркационного анализа отклонение параметра от критической точки выбирается независимо от других параметров и предполагается настолько малым, что только один или несколько корней характеристического уравнения имеют положительную действительную часть.

3. Квазинормальная форма в критическом случае I

В этой части полагаем

$$b_1 = 1 + \varepsilon b_{10}, \quad 0 < b_{10} < \frac{1}{2}c$$

в уравнении (3) и будем искать его решение в виде суммы тех гармоник, которые становятся неустойчивыми согласно представлению корней характеристического уравнения (7). При $\varepsilon \rightarrow 0$ количество таких гармоник стремится к бесконечности. Представим решение в виде формального ряда

$$x(t) = \varepsilon^{1/2} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k(\varepsilon t) e^{i2\pi kt} + \varepsilon \dots, \quad (11)$$

в котором амплитуды гармоник $\xi_k(\varepsilon t)$ меняются медленно со временем. Подставляя ряд (11) в уравнение (3), приходим к бесконечной системе связанных уравнений для медленных амплитуд. Укороченная система, в которой удержаны только слагаемые порядка не более $\varepsilon^{3/2}$, оказывается эквивалентной системе для амплитуд гармоник некоторой величины $\xi(y, \tau)$, зависящей от двух переменных. Последняя удовлетворяет уравнению в частных производных с периодическими граничными условиями. Полученная краевая задача играет роль квазинормальной формы для исходной системы в окрестности рассматриваемой бифуркации.

3.1. Построение нормализованной краевой задачи. К конечному результату можно прийти следующим способом. Бесконечную сумму в (11) заменим функцией

$$\xi(t, \tau) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{i2\pi kt},$$

где $\tau = \varepsilon t$ – «медленное» время, а по «быстрой» переменной t выполняется условие периодичности

$$\xi(t + 1, \tau) = \xi(t, \tau). \quad (12)$$

Тогда производные в левой части уравнения (3) принимают вид

$$\dot{x}(t) = \varepsilon^{1/2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon^{3/2} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \dots, \quad \ddot{x}(t) = \varepsilon^{1/2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2\varepsilon^{3/2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial t} + \varepsilon^{5/2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \dots \quad (13)$$

В правой части уравнения (3) члены с запаздыванием с учетом периодичности по переменной t раскладываются в ряды по степеням малого параметра

$$\begin{aligned} x(t-1) &= \varepsilon^{1/2} \xi(t, \tau) - \varepsilon^{3/2} \frac{\partial \xi}{\partial \tau}(t, \tau) + \varepsilon^{5/2} \dots, \\ \dot{x}(t-1) &= \varepsilon^{1/2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon^{3/2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial t} \right) + \varepsilon^{5/2} \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Примем во внимание значения параметров $b_1 = 1 + \varepsilon b_{10}$, $b_3 = (-2/3)(1 + \varepsilon b_{10})$ и $b_2 = (1 + \varepsilon b_{10}) \operatorname{ctg}(2\varphi)$, где мы положим $\operatorname{ctg}(2\varphi) = \varepsilon^{1/2} b_{20}$, чтобы учесть значения φ близкие к $\pm\pi/4$. Тогда получаем разложение для нелинейной функции в правой части уравнения (3)

$$\varepsilon^{1/2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon^{3/2} \left[b_{10} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial t} \right) \right] + 2\varepsilon^{3/2} b_{20} \xi \frac{\partial \xi}{\partial t} - 2\varepsilon^{3/2} \xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} + O(\varepsilon^2, \xi^2). \quad (15)$$

Подставим ряды (13), (14), (15) в уравнение (3) и соберем слагаемые одинакового порядка малости по степеням ε . Из условия разрешимости уравнения для слагаемых при $\varepsilon^{3/2}$, приходим к уравнению для функции $\xi(t, \tau)$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial t} + c\xi = (b_{10} + 2b_{20}\xi - 2\xi^2) \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

которое перепишем следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + cJ(\xi) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[b_{10}\xi + b_{20}\xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3 \right],$$

или после интегрирования по переменной t получаем, что

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + cJ(\xi) = b_{10}\xi + b_{20}\xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3 + F(\tau), \quad (16)$$

где

$$J(\xi) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau) \frac{e^{i2\pi kt}}{i2\pi k}$$

обозначает оператор типа «интегрирования», а $F(\tau)$ – функция, которая будет определена ниже.

Далее введем вместо аргумента t бегущую переменную $y = t - (1/c)\tau$, тогда уравнение (16) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + cJ(\xi) = b_{10}\xi + b_{20}\xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3 + F(\tau), \quad (17)$$

причем сохраняется условие периодичности $\xi(y, \tau) = \xi(y + 1, \tau)$. Это дает основание рассматривать аргумент y как «пространственную» координату на интервале $[0, 1]$.

Для определения функции $F(\tau)$ учтем отсутствие нулевой гармоники в разложении (11), поэтому среднее по периоду для функции $\xi(y, \tau)$ должно равняться нулю

$$\int_0^1 \xi(s, \tau) ds = 0. \quad (18)$$

Далее будем обозначать $M(\phi)$ среднее на отрезке $[0, 1]$ функции $\phi(s)$: $M(\phi) = \int_0^1 \phi(s) ds$, тогда $M(\xi) = 0$.

В силу условия (18) интеграл по периоду от левой части уравнения (17) равен нулю, $\int_0^1 (\partial \xi / \partial \tau + cJ(\xi)) dy = 0$. Поэтому и интеграл по периоду от правой части уравнения (17) также должен быть равен нулю, $\int_0^1 (b_{10}\xi + b_{20}\xi^2 - 2\xi^3/3 + F(\tau)) dy = 0$. Отсюда находим

$$F(\tau) = - \int_0^1 \left(b_{20}\xi^2 - \frac{2}{3}\xi^3 \right) dy = -b_{20}M(\xi^2) + \frac{2}{3}M(\xi^3).$$

Окончательно, для функции $\xi(y, \tau)$ получаем краевую задачу с периодическими граничными условиями

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + cJ(\xi) = b_{10}\xi + b_{20} [\xi^2 - M(\xi^2)] - \frac{2}{3} [\xi^3 - M(\xi^3)], \quad (19)$$

$$M(\xi) = 0, \quad \xi(y + 1, \tau) = \xi(y, \tau). \quad (20)$$

Краевая задача (19), (20) играет роль нормальной формы: ее нелокальная динамика определяет при достаточно малых ε поведение всех решений нелинейного уравнения (3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия. По самому построению краевой задачи (19), (20) следует связь между ее решениями и решениями уравнения (3), что устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть выполнено условие $b_1 = 1 + \varepsilon b_{10}$, $0 < b_{10} < (1/2)c$ и пусть краевая задача (19), (20) имеет решение $\xi_0(y, \tau)$, ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$ и $y \in [0, 1]$. Тогда уравнение (3) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^1)$ решение

$$x_0(t) = \varepsilon^{1/2} \xi_0((1 - c^{-1}\varepsilon)t, \varepsilon t). \quad (21)$$

3.2. Стационарные решения краевой задачи (19), (20). Численное моделирование краевой задачи (19) (20) показывает, что о ее решениях можно судить по решениям укороченной задачи при $cJ(\xi) = 0$, поскольку учет этого слагаемого в уравнении приводит лишь к сглаживанию фронтов прямоугольных структур.

Укороченная краевая задача для $\xi(y, \tau)$ принимает вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = b_{10}\xi + b_{20} [\xi^2 - M(\xi^2)] - \frac{2}{3} [\xi^3 - M(\xi^3)], \quad (22)$$

$$M(\xi) = 0, \quad \xi(y + 1, \tau) = \xi(y, \tau). \quad (23)$$

Краевая задача (22), (23) имеет нулевое однородное решение $\xi(y, \tau) = 0$, которое неустойчиво при $b_{10} > 0$. Других однородных решений нет в силу нулевого среднего по пространственной переменной.

Покажем далее, что задача (22), (23) может иметь стационарное неоднородное решение в виде прямоугольной ступенчатой структуры на интервале $y \in (0, 1)$:

$$\xi(y, \tau) = \xi_{st}(y) = \begin{cases} p, & y \in (0, \sigma), \\ -q, & y \in (\sigma, 1), \end{cases} \quad (24)$$

где p, q – положительные постоянные, определяющие высоту и глубину ступеньки относительно нулевого уровня, $\sigma \in (0, 1)$ определяет ширину ступеньки. Из условия нулевого среднего $M(\xi) = 0$ следует, что величины p, q и σ связаны: $p\sigma = q(1 - \sigma)$.

Величины p, q (при заданном σ) однозначно определяются из условия стационарности $\partial \xi / \partial \tau = 0$. Для этого подставим (24) в уравнение (22) и учтем, что $M(\xi) = 0$, $M(\xi^2) = pq$, $M(\xi^3) = pq(p - q)$. Получаем уравнения для определения p, q :

$$\frac{1 - 3\sigma + 3\sigma^2}{(1 - \sigma)^2} p^2 - \frac{3}{2} b_{20} \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma} p - \frac{3}{2} b_{10} = 0, \quad q = \frac{1 - \sigma}{\sigma} p. \quad (25)$$

Значения высоты p и глубины q прямоугольной структуры относительно нулевого уровня при разных значениях ширины ступеньки σ представлены на рис. 2 для $b_{20} = 0$ (случай кубической нелинейности) и $b_{20} = -1.4$ (случай кубической и малой квадратичной нелинейности). Отметим, что при $\sigma = 1/2$ ступеньки имеют симметричную форму и имеют равные высоту и глубину $p_{1/2} = q_{1/2} = \sqrt{3b_{10}/2}$ относительно нулевого уровня. При других σ ступеньки имеют асимметричную форму. Таким образом, существует семейство стационарных решений в форме ступеньки с двумя полочками на интервале $y \in [0, 1]$.

Получим условия устойчивости такого решения относительно малых возмущений стационарных высоты p_σ и глубины q_σ ступеньки, удовлетворяющих уравнениям (25) при фиксированной ширине ступеньки σ . Положим

$$p = p_\sigma + x_1(y, \tau), \quad q = q_\sigma + x_2(y, \tau). \quad (26)$$

Для малых возмущений находим линеаризованные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(b_{10} + 2p_\sigma b_{20} - 2p_\sigma^2) - 2(p_\sigma b_{20} - p_\sigma^2) \int_0^\sigma x_1(s, \tau) ds - 2(q_\sigma b_{20} + q_\sigma^2) \int_\sigma^1 x_2(s, \tau) ds, \\ \dot{x}_2 &= x_2(b_{10} - 2q_\sigma b_{20} - 2q_\sigma^2) + 2(p_\sigma b_{20} - p_\sigma^2) \int_0^\sigma x_1(s, \tau) ds + 2(q_\sigma b_{20} + q_\sigma^2) \int_\sigma^1 x_2(s, \tau) ds, \end{aligned}$$

и в силу нулевого среднего справедливо равенство $\int_0^\sigma x_1(s, \tau) ds = \int_0^1 x_2(s, \tau) ds$. Далее выделим компоненты возмущений, зависящие только от τ , то есть представим возмущения в виде

$$x_1(y, \tau) = x_{11}(\tau) + x_{12}(y, \tau), \quad x_2(y, \tau) = x_{21}(\tau) + x_{22}(y, \tau), \quad (27)$$

где $x_{12}(y, \tau) = x_1(y, \tau) - x_{11}(\tau)$, $x_{22}(y, \tau) = x_2(y, \tau) - x_{21}(\tau)$, причем $\int_0^\sigma x_{12}(s, \tau) ds = 0$ и $\int_0^1 x_{22}(s, \tau) ds = 0$. Тогда приходим к линейной системе для малых возмущений

$$\dot{x}_{ij} = a_{ij}x_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{10} + 2p_\sigma b_{20} - 2p_\sigma^2 - 2\sigma b_{20}(p_\sigma + q_\sigma) + 2\sigma(p_\sigma^2 - q_\sigma^2), \\ a_{21} &= b_{10} - 2q_\sigma b_{20} - 2q_\sigma^2 + 2b_{20}(1 - \sigma)(p_\sigma + q_\sigma) - 2(1 - \sigma)(p_\sigma^2 - q_\sigma^2), \\ a_{12} &= b_{10} + 2p_\sigma b_{20} - 2p_\sigma^2, \quad a_{22} = b_{10} - 2q_\sigma b_{20} - 2q_\sigma^2. \end{aligned}$$

Возмущения не растут со временем для тех значений σ , p_σ и q_σ , для которых все коэффициенты отрицательны,

$$a_{ij} < 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2. \quad (29)$$

Следовательно, стационарная ступенчатая структура (24) может быть устойчивой при выполнении условий (29). На рис. 2 на оси абсцисс отмечены интервалы значений σ , соответствующие устойчивым ступенькам, в двух случаях. При $b_{20} = 0$ (кубическая нелинейность) это интервал с центром в точке $\sigma = 1/2$, поэтому ожидаем устойчивые симметричные структуры. При $b_{20} < 0$ (кубическая и квадратичная нелинейности) интервал устойчивости смещается к правому концу $\sigma \sim 1$, поэтому ожидаем появление устойчивых ступенчатых структур с асимметричным профилем. Отметим, что при отсутствии кубического слагаемого в (22) устойчивых стационарных решений нет.

Для подтверждения существования устойчивых стационарных неоднородных структур приведем ниже результаты численного решения краевой задачи (22). Для расчетов использовался метод Галеркина с учетом динамики пятидесяти компонент ряда Фурье.

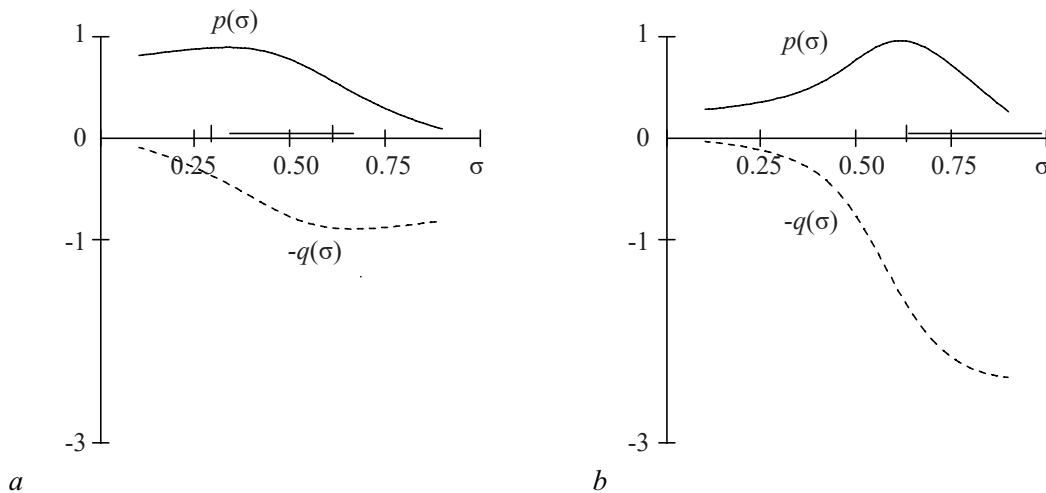


Рис. 2. Значения p , q для разных σ , определенные по формулам (25) при $b_{10} = 0.4$ и $b_{20} = 0$ (а), -1.4 (б). На оси абсцисс отмечен интервал значений σ , при которых стационарная структура (24) может быть устойчивой

Fig. 2. Values p , q for different σ , determined from equations (25) with $b_{10} = 0.4$ and $b_{20} = 0$ (a), -1.4 (b). An interval of σ values is marked at which the stationary step structure (24) can be stable

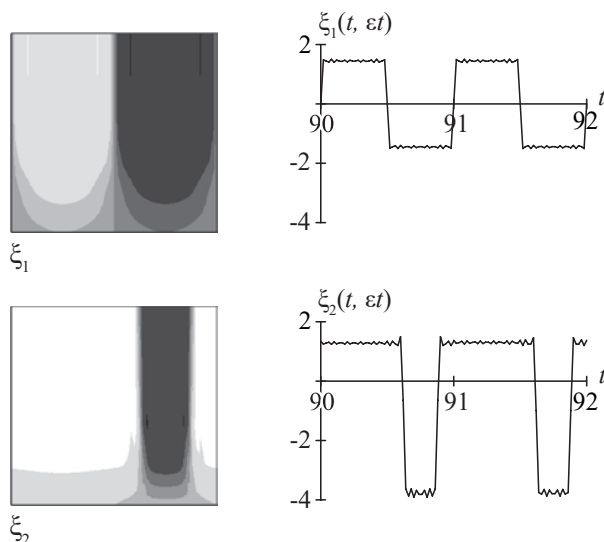


Рис. 3. Пространственно-временные решения уравнения (22) $\xi_1(y, \tau)$ при $b_{10} = 0.4$, $b_{20} = 0$ и $\xi_2(y, \tau)$ при $b_{10} = 0.4$, $b_{20} = -2.4$ и $c = 2$. Начальные условия: $\xi(y, 0) = 0.5 \cos(2\pi y)$. Справа: развертка решений во времени

Fig. 3. Space-time solutions to the equation (22) $\xi_1(y, \tau)$ at $b_{10} = 0.4$, $b_{20} = 0$ and $\xi_2(y, \tau)$ at $b_{10} = 0.4$, $b_{20} = -2.4$ and $c = 2$. The initial conditions are $\xi(y, 0) = 0.5 \cos(2\pi y)$. Right panel: time-sweeps of the solutions

На рис. 3 показаны контурные графики двух пространственно-временных решений $\xi(y, \tau)$ уравнения (22), где по горизонтали отложены значения пространственной переменной $y \in [0, 1]$, а по вертикали отложены значения временной переменной $\tau \in [0, 100]$:

- 1) решение $\xi_1(y, \tau)$ получено при $b_{20} = 0$ с начальными условиями $\xi_1(y, 0) = 0.5 \cos(2\pi y)$, после переходного процесса решение представляет собой стационарную симметричную прямоугольную ступеньку с шириной $\sigma = 1/2$ и равными высотой и глубиной $p = q = \sqrt{3b_{10}/2}$;
- 2) решение $\xi_2(y, \tau)$ получено при $b_{20} = -2.4$ с такими же начальными условиями, после переходного процесса представляет собой стационарную асимметричную прямоугольную ступеньку с шириной $\sigma = 0.75$ и высотой и глубиной $p = 1.3$, $q = 3.9$ в соответствии с (25).

В правой колонке на рис. 3 приведены развертки функций $\xi_1(t, \epsilon t)$ и $\xi_2(t, \epsilon t)$, полученные с учетом граничных условий. Согласно Теореме 1, эти функции определяют решения уравнения (3) с запаздыванием в виде симметричных и асимметричных прямоугольных колебаний. Период колебаний приближается к единице, то есть близок ко времени запаздывания. Отметим, что колебания асимметричной формы возможны и при чисто кубической нелинейности, но их проще получить в системе при квадратичной нелинейности, когда $b_{20} \neq 0$.

Замечания.

- (i) Мелкие колебания на вершинах прямоугольных структур на рис. 3 объясняются особенностями метода Галеркина при ограниченном числе гармоник ряда Фурье.
- (ii) Численные расчеты полной квазинормальной формы (19), (20) показывают, что учет слагаемого $cJ(\xi)$, которое мы опустили в укороченной нормальной форме (22), приводит к сглаживанию резких фронтов прямоугольных структур. Такую же сглаженную форму имеют колебания в уравнении с запаздыванием (3).

Краевая задача (22) при специальных начальных условиях допускает и другие стационарные неоднородные решения в виде нескольких прямоугольных волн на интервале $y \in [0, 1]$. Покажем, например, что возможны решения с антисимметричным относительно точки $y = 1/2$ профилем. Фиксируем произвольно целое значение k и значения σ_i , $i = 0, 1, \dots, k$, причем

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k < 1.$$

Пусть на каждом интервале $y \in (\sigma_i, \sigma_{i+1})$, $i = 1, \dots, k$ функция $\xi(y, \tau)$ принимает поочередно значения ξ_0 и $-\xi_0$, где $\xi_0 = \sqrt{3b_{10}}/2$. На промежутке $(0, 1/2)$ определим значения σ_i^0 , так что

$$\sigma_i^0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sigma_i,$$

и пусть на каждом интервале $y \in (\sigma_i^0, \sigma_{i+1}^0)$ функция $\xi(y, \tau)$ принимает поочередно значения $-\xi_0$ и ξ_0 . Тем самым построенная функция антисимметрична относительно точки $y = 1/2$, поэтому

$$M(\xi) = M(\xi^3) = \xi^2 - M(\xi^2) = 0.$$

Построенная функция принадлежит многопараметрическому множеству стационарных ступенчатых решений.

Замечание. Симметрия относительно $y = 1/2$ необязательна. Пусть $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < 1$. Тогда необходимо лишь, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{i=0} (\sigma_{2i+1} - \sigma_{2i}) = \sum_{i=1} (\sigma_{2i} - \sigma_{2i-1}).$$

На рис. 4 показаны некоторые из описанных стационарных решений задачи (22):

- 3) решение $\xi_3(y, \tau)$ имеет вид структуры с двумя полосками $y \in [0, 1]$ с асимметричными высотой и глубиной относительно нулевого уровня;
- 4) решение $\xi_4(y, \tau)$ имеет вид структуры с двумя полосками разной ширины на отрезке $y \in [0, 1]$ с симметричными высотой и глубиной относительно нулевого уровня.

Развертки этих функций с учетом граничных условий, показанные на рис. 4 в правой колонке, определяют решения уравнения с запаздыванием (3) в виде прямоугольных колебаний, причем на интервале запаздывания целиком укладываются две волны. С помощью подбора начальных условий при решении задачи (22) можно получить также структуры с тремя и более полосками на отрезке $y \in [0, 1]$.

Таким образом, краевая задача (22) с фиксированными параметрами допускает мультистабильность, поскольку при разных начальных условиях возможны различные стационарные решения: с симметричным и асимметричным профилем ступенек, с несколькими ступеньками на отрезке $y \in [0, 1]$, с различной шириной ступенек.

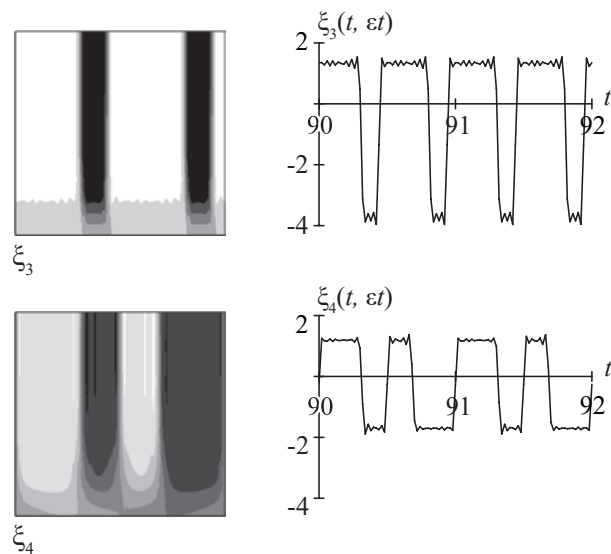


Рис. 4. Пространственно-временные решения уравнения (22) $\xi_1(y, \tau)$ при $b_{10}=0.4$, $b_{20} = 0$ и $\xi_2(y, \tau)$ при $b_{10} = 0.4$, $b_{20} = -2.4$ и $c = 2$. Начальные условия: $\xi(y, 0) = 0.5 \cos(4\pi y)$. Справа: развертка решений уравнения во времени

Fig. 4. Space-time solutions to the equation (22) $\xi_1(y, \tau)$ at $b_{10}=0.4$, $b_{20} = 0$ and $\xi_2(y, \tau)$ at $b_{10} = 0.4$, $b_{20} = -2.4$ and $c = 2$. The initial conditions are $\xi(y, 0) = 0.5 \cos(4\pi y)$. Right panel: time-sweeps of the solutions

3.3. Пространственно-временное представление решений уравнения с запаздыванием (3). Теорема 1 устанавливает соответствие между решениями квазинормальной формы (19), (20) и решениями исходного нелинейного уравнения с запаздыванием (3). Вопрос о том, какие именно из множества решений краевой задачи будут соответствовать аттракторам – устойчивым колебаниям в уравнении с запаздыванием, может быть решен в дальнейшем при исследовании квазинормальной формы с учетом следующих по порядку малости членов разложения. Здесь отметим, что выполненные численные расчеты динамики ОЭО в других работах, например, в [22], подтверждают мультистабильность периодических решений с несколькими колебаниями прямоугольной формы на интервале запаздывания. Ниже приведем два примера.

На рис. 5 справа показано решение уравнения с запаздыванием (3), осциллирующее с периодом близким к единице (к запаздыванию), и слева его пространственно-временное представление в виде одной ступеньки на отрезке $y \in [0, 1]$.

При построении пространственно-временного представления решений уравнения (3) мы использовали преобразование одномерного массива данных $x(t)$ при возрастающем t к двумерному массиву $U(y, \tau) = x(y + \tau)$, где $y \in [0, 1]$ (откладывается по горизонтали графика), $\tau = 0, 1, 2, \dots$ (откладывается по вертикали, в единицах запаздывания). Пространственно-временное представление можно сравнить со стационарным решением $\xi_2(y, \tau)$ краевой задачи (22) на рис. 3.

На рис. 6 показано решение уравнения с запаздыванием (3) с теми же параметрами и другими начальными условиями. Имеем решение осциллирующее с периодом $\approx 1/2$, и его пространственно-временное представление в виде двух полосок на отрезке $y \in [0, 1]$. Пространственно-временное представление можно сравнить со стационарным решением $\xi_3(y, \tau)$ краевой задачи (22) на рис. 4.

Замечания.

- (i) Асимметричную форму колебания приобретают при отклонении параметра φ в исходной системе (3) от значения $\pm\pi/4$, что соответствует увеличению вклада квадратичной нелинейности в нормальной форме.

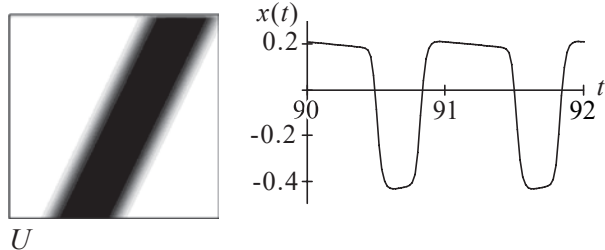


Рис. 5. Решение уравнения (3) с параметрами $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$, $c = 2$, $b_1 = 1 + 0.4\varepsilon$, $\varphi = (1 + 0.1)\pi/4$ с начальными условиями $x(s) = 0.5 \sin(2\pi s)$, $s \in [-1, 0]$. Слева: пространственно-временное представление решения $U(y, \tau)$

Fig. 5. Solution to the equation (3) with the parameters $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$, $c = 2$, $b_1 = 1 + 0.4\varepsilon$, $\varphi = (1 + 0.1)\pi/4$, the initial conditions are $x(s) = 0.5 \sin(2\pi s)$, $s \in [-1, 0]$. Left panel: space-time representation of the solution $U(y, \tau)$

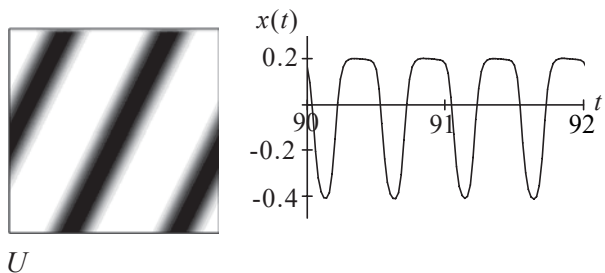


Рис. 6. Решение уравнения (3) с параметрами $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$, $c = 2$, $b_1 = 1 + 0.4\varepsilon$, $\varphi = (1 + 0.1)\pi/4$ с начальными условиями $x(s) = 0.5 \sin(4\pi s)$, $s \in [-1, 0]$. Слева: пространственно-временное представление решения $U(y, \tau)$

Fig. 6. Solution to the equation (3) with the parameters $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$, $c = 2$, $b_1 = 1 + 0.4\varepsilon$, $\varphi = (1 + 0.1)\pi/4$, the initial conditions are $x(s) = 0.5 \sin(4\pi s)$, $s \in [-1, 0]$. Left panel: space-time representation of the solution $U(y, \tau)$

(ii) Полосатые структуры в пространственно-временном представлении решений уравнения с запаздыванием (3) демонстрируют медленный дрейф во времени (наклон полос при двумерном изображении). Чтобы получить стационарные структуры (вертикальное расположение полос), нужно определить квазипространственную переменную на отрезке, немного превышающем запаздывание, $y \in [0.1 + (1/c)\varepsilon]$, что соответствует бегущей переменной в уравнении (22).

Таким образом, стационарные решения квазинормальной формы (19), (20) определяют осциллирующие решения уравнения с запаздыванием (3). Для экспериментальных наблюдений разных режимов ОЭО при фиксированных параметрах, выбор начальных условий можно осуществить с помощью инъекции разных периодических сигналов в цепи ОС, как это было проделано в работе [22]. Кроме того, в эксперименте мультистабильность режимов может проявиться в гистерезисных эффектах при прямом и обратном изменении параметра [28].

4. Квазинормальная форма в критическом случае II

Пусть

$$b_1 = 1 + \varepsilon b_{10}, \quad b_{10} > \frac{1}{2}c.$$

Тогда, следуя представлению характеристических корней (6) и (7) и полагая амплитуды быстрых и медленных колебаний одного порядка, запишем решение уравнения (3) в виде формального ряда

$$x(t) = \varepsilon^{1/2} \xi(t, \tau) + \varepsilon^{1/2} \left[r(\tau) e^{i\sqrt{\varepsilon}ct} + c.c. \right] + \varepsilon \dots, \quad (30)$$

где

$$\xi(t, \tau) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{i2\pi kt}, \quad \tau = \varepsilon t.$$

Подставляя ряд (30) в уравнение (3), приходим к бесконечной системе связанных уравнений для медленных амплитуд $r(\tau)$ и $\xi_k(\tau)$. Укороченная система, в которой удержаны только слагаемые порядка не более $\varepsilon^{3/2}$, оказывается эквивалентной системе для амплитуд гармоник некоторой величины $\xi(y, \tau)$, зависящей от двух переменных, и для $r(\tau)$.

В результате преобразований, аналогичных выполненным в части 3.1, приходим к квазинормальной форме – системе уравнений для для $r(\tau)$ и функции $\xi(y, \tau)$ с периодическими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left(b_{10} - \frac{1}{2}c \right) r - r|r|^2 - rM(\xi^2), \\ \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= -cJ(\xi) + b_{10}\xi + b_{20} [\xi^2 - M(\xi^2)] - \frac{2}{3} [\xi^3 - M(\xi^3)] - 4\xi|r|^2, \end{aligned} \quad (31)$$

$$M(\xi) = 0, \quad \xi(y+1, \tau) = \xi(y, \tau). \quad (32)$$

Эта краевая задача играет роль нормальной формы: ее нелокальная динамика определяет, при достаточно малых ε , поведение всех решений нелинейного уравнения (3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия. По самому построению краевой задачи (31), (32) следует связь между ее решениями и решениями уравнения (3), что устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть выполнено условие $b_1 = 1 + \varepsilon b_{10}$ и $b_{10} > (1/2)c$ и краевая задача (31), (32) имеет решение $r_0(\tau)$, $\xi_0(y, \tau)$, ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$ и $y \in [0, 1]$. Тогда уравнение (3) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^1)$ решение

$$x_0(t) = \varepsilon^{1/2} \left[r_0(\tau) \cos(\sqrt{\varepsilon}ct) + \xi_0((1 - c^{-1}\varepsilon)t, \varepsilon t) \right]. \quad (33)$$

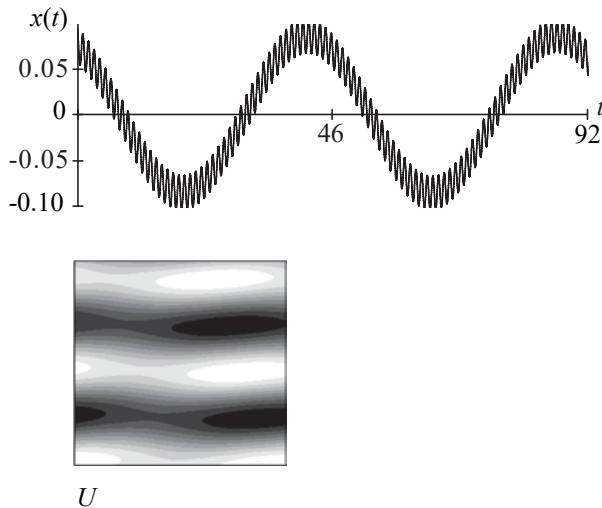


Рис. 7. Решение уравнения (3) с параметрами $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$, $c = 1$, $b_1 = 1 + 0.7\varepsilon$, $\varphi = \pi/4$, начальные условия $x(s) = 0.05 + 0.03 \sin(2\pi s)$, $s \in [-1, 0]$. Снизу: пространственно-временное представление решения $U(y, \tau)$, $y \in [0, 1]$

Fig. 7. Solution to the equation (3) with the parameters $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$, $c = 1$, $b_1 = 1 + 0.7\varepsilon$, $\varphi = \pi/4$, the initial conditions are $x(s) = 0.05 + 0.03 \sin(2\pi s)$, $s \in [-1, 0]$. Bottom panel: space-time representation of the solution $U(y, \tau)$, $y \in [0, 1]$

Квазинормальная форма (31), (32) может иметь следующие стационарные решения

- 1) $\xi(y, \tau) = 0$, $|r(\tau)| = r_0$, где

$$r_0 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(b_{10} - \frac{1}{2}c \right)}, \quad (34)$$

тогда в исходной системе наблюдаются медленные колебания с малой частотой порядка $\sim (\varepsilon c)^{1/2}$.

- 2) $r(\tau) = 0$, $\xi(y, \tau) = \xi_0(y)$, где функция $\xi_0(y)$ принадлежит семейству ступенчатых функций, описанных в пункте 3.2, тогда в исходной системе могут наблюдаться быстрые прямоугольные колебания, целое число которых укладывается на интервале запаздывания.
- 3) $|r(\tau)| = r_s$, $\xi(y, \tau) = \xi_s(y)$. Тогда уравнение (3) может иметь решения в виде медленных колебаний, на которые накладываются быстрые колебания с периодом порядка запаздывания. Устойчивость таких решений может быть установлена исходя из устойчивости соответствующих волновых структур в квазинормальной форме с учетом слагаемых следующего порядка малости.

Указанные стационарные решения квазинормальной формы (31)–(32) могут реализоваться при различных начальных условиях. Таким образом, в уравнении с запаздыванием (3) при $b_{10} > (1/2)c$ возможна мультистабильность медленных и быстрых колебаний, что подтверждается численными расчетами исходной системы с подходящими начальными условиями. Пример решения уравнения (3) с наложением быстрых колебаний на медленные показан на рис. 7. На этом рисунке снизу дается также пространственно-временное представление решения, для которого одномерный массив данных $x(t)$ при возрастающем t преобразуется к двумерному массиву $U(y, \tau) = x(y + \tau)$, где $y \in [0, 1]$ (откладывается по горизонтали графика), $\tau = 0, 1, 2, \dots$ (откладывается по вертикали, в единицах запаздывания).

5. Квазинормальная форма в критическом случае III

Согласно результатам линейного анализа, формула (9) при $b_1 = -(1 + \varepsilon b_{10})$, корни характеристического уравнения, которые имеют близкую к нулю действительную часть, имеют мнимую часть близкую к $i(2k + 1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ количество таких корней стремится к бесконечности. Поэтому решение уравнения (3) ищем в виде формального ряда

$$x(t) = \varepsilon^{1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{2k+1}(\varepsilon t) e^{i(2k+1)\pi t} + \varepsilon \dots \quad (35)$$

Подставляя ряд (35) в уравнение (3) при $b_1 = -(1 + \varepsilon b_{10})$, приходим к бесконечной системе связанных уравнений для медленных амплитуд с нечетными номерами ξ_{2k+1} . Укороченная система, в которой удержаны только слагаемые порядка не более $\varepsilon^{3/2}$, оказывается эквивалентной системе для амплитуд гармоник некоторой величины $\xi(y, \tau)$, зависящей от двух переменных, $y \in [0, 1]$ и $\tau = \varepsilon t$. Эта функция удовлетворяет уравнению в частных производных с антипериодическими граничными условиями по пространственной переменной y , поскольку ее разложение включает только нечетные гармоники в ряду Фурье.

В результате преобразований, аналогичных выполненным в пункте 3.1, приходим к краевой задаче для функции $\xi(y, \tau)$ с антипериодическими граничными условиями

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -cJ(\xi) + b_{10}\xi - \frac{2}{3}\xi^3, \quad \xi(y+1, \tau) = -\xi(y, \tau). \quad (36)$$

Нелокальная динамика краевой задачи (36) определяет в главном локальное поведение решений исходного уравнения с запаздыванием (3). Из самого построения квазинормальной формы следует связь между решениями (3) и решениями краевой задачи (36), что устанавливает Теорема 3.

Теорема 3. Пусть выполнено условие $b_1 = -(1 + \varepsilon b_{10})$ и пусть краевая задача (36) имеет решение $\xi_0(y, \tau)$, ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$ и $y \in [0, 1]$. Тогда уравнение (3) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^1)$ решение

$$x_0(t) = \varepsilon^{1/2} \xi_0((1 - c^{-1}\varepsilon)t, \varepsilon t). \quad (37)$$

Квазинормальная форма (36) может иметь не зависящее от τ решение в виде ступенчатой структуры на интервале $y \in (0, 2)$ с симметричными относительно нулевого уровня высотой и глубиной:

$$\xi(y, \tau) = \xi_{st}(y) = \begin{cases} \xi_0, & y \in (0, 1), \\ -\xi_0, & y \in (1, 2), \end{cases} \quad (38)$$

где $\xi_0 = \sqrt{3b_{10}/2}$. Этому решению квазинормальной формы отвечает решение исходного уравнения с запаздыванием (3) в виде прямоугольных колебаний с периодом, приближенно равным удвоенному запаздыванию.

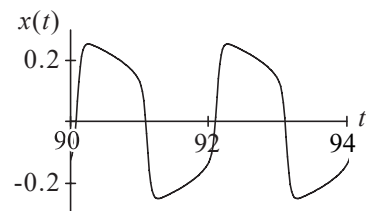
Пример осциллирующего решения $x(t)$ уравнения с запаздыванием (3) в виде прямоугольных колебаний с периодом близким к 2 (в единицах запаздывания) показан на рис. 8. Для решения выполняются условия $x(t) = -x(t+1)$ и $x(t) = x(t+2)$. На этом рисунке слева дается также пространственно-временное представление решения. Для этого одномерной массив данных $x(t)$

Рис. 8. Решение уравнения (3) с параметрами $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$, $c = 2$, $b_1 = -(1 + 1.7\varepsilon)$, $\varphi = \pi/4$, начальные условия $x(s) = 0.3 \sin(2\pi s)$, $s \in [-1, 0]$. Слева: пространственно-временное представление решения $U(y, \tau)$, $y \in [0, 2]$

Fig. 8. Solution to the equation (3) with the parameters $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$, $c = 2$, $b_1 = -(1 + 1.7\varepsilon)$, $\varphi = \pi/4$, the initial conditions are $x(s) = 0.3 \sin(2\pi s)$, $s \in [-1, 0]$. Left panel: space-time representation of the solution $U(y, \tau)$, $y \in [0, 2]$



U



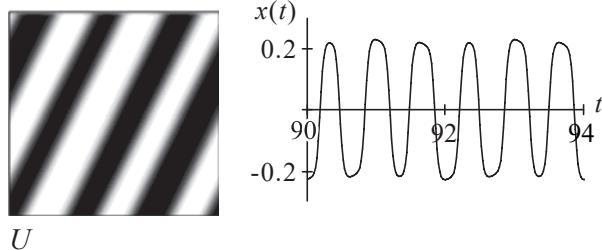


Рис. 9. Решение уравнения (3) с параметрами $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$, $c = 2$, $b_1 = -(1 + 1.7\varepsilon)$, $\varphi = \pi/4$, начальные условия $x(s) = 0.3 \sin(3\pi s)$, $s \in [-1, 0]$. Слева: пространственно-временное представление решения $U(y, \tau)$, $y \in [0, 2]$

Fig. 9. Solution to the equation (3) with the parameters $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$, $c = 2$, $b_1 = -(1 + 1.7\varepsilon)$, $\varphi = \pi/4$, the initial conditions are $x(s) = 0.3 \sin(3\pi s)$, $s \in [-1, 0]$. Left panel: space-time representation of the solution $U(y, \tau)$, $y \in [0, 2]$

при возрастающем t преобразуется к двумерному массиву $U(y, \tau) = x(y + \tau)$, где пространственная переменная $y \in [0, 2]$ откладывается по горизонтали контурного графика и временная переменная $\tau = 0, 2, 4, \dots$ откладывается по вертикали, в единицах запаздывания.

Краевая задача (36) при специальных начальных условиях допускает и другие стационарные неоднородные решения в виде нескольких прямоугольных волн на интервале $y \in [0, 2]$, для которых выполняется условие $\xi(y, \tau) = -\xi(y + 1, \tau)$.

Пример быстро осциллирующего решения $x(t)$ с периодом близким к $2/3$ (в единицах запаздывания), которое реализуется при тех же параметрах и других начальных условиях, показан на рис. 9. На этом рисунке дается также пространственно-временное представление решения $U(y, \tau)$ в виде трех прямоугольных структур (полос) на отрезке $y \in [0, 2]$ (откладывается по горизонтали графика).

Заключение

В работе выполнен локальный анализ динамики ОЭО с запаздыванием на основе построения нормализованных краевых задач. Их нелокальная динамика определяет динамику решений исходной системы с запаздыванием в малой окрестности состояния равновесия.

Получена асимптотика корней характеристического уравнения в малой окрестности бифуркационных значений уровня обратной связи и показано, что число корней с близкой к нулю действительной частью стремится к бесконечности при стремлении к нулю малого параметра системы. Выделено три типа асимптотически бесконечномерных бифуркаций.

В первом критическом случае нормальной формой является краевая задача с периодическими граничными условиями. Ее стационарными неоднородными решениями являются пространственные структуры с прямоугольным профилем. Возможны ступенчатые структуры как симметричного, так и асимметричного профиля. Найдены значения высоты и глубины ступенчатой структуры в зависимости от ширины ступеньки. Показано, что квазинормальная форма допускает семейство таких решений. Демонстрируется также мультистабильность структур с различным числом ступенек. Пространственным структурам соответствуют прямоугольные колебания в исходной системе. На интервале запаздывания укладывается целое число колебаний.

Во втором критическом случае построена система нормальных уравнений для пространственно-временной компоненты с периодическими граничными условиями и медленно осциллирующей компоненты. Стационарным решениям такой квазинормальной формы соответствуют прямоугольные колебания, целое число которых укладывается на интервале запаздывания, или медленные колебания, или их суперпозиция.

В третьем критическом случае, когда неустойчивыми становятся только нечетные моды, получена нормализованная краевая задача с антипериодическими граничными условиями.

Решениям этой квазинормальной формы в исходной системе соответствуют прямоугольные колебания, целое число которых укладывается на удвоенном интервале запаздывания.

Аналитические результаты подтверждаются численными решениями исходной системы с различными начальными условиями. Поскольку полученные квазинормальные формы являются уравнениями в частных производных, то они могут служить обоснованием для пространственно-временного представления динамики оптоэлектронного осциллятора с запаздыванием.

Библиографический список

1. *Yanchuk S., Giacomelli G.* Spatio-temporal phenomena in complex systems with time delays // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2017. Vol. 50. P. 103001.
2. *Cross M., Hohenberg P.* Pattern formation outside of equilibrium // *Rev. Mod. Phys.* 1993. Vol. 65. P. 851–1112.
3. *Arecchi F.T., Giacomelli G., Lapucci A., Meucci R.* Two-dimensional representation of a delayed dynamical system // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 45. P. R4225–4228.
4. *Vladimirov A.G., Turaev D.* Model for passive mode locking in semiconductor lasers // *Phys. Rev. A* 2005. Vol. 72. P. 033808.
5. *Marconi M., Javaloyes J., Barland S., Balle S. and Giudici M.* Vectorial dissipative solitons in vertical-cavity surface-emitting lasers with delays // *Nature Photonics.* 2015. doi:10.1038/NPHOTON.2015.92.
6. *Pimenov A., Slepneva S., Huyet G., Vladimirov A.* Dispersive time-delay dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 2017. Vol. 118. 193901.
7. *Heiligenthal S., Dahms T., Yanchuk S., Jungling T., Flunkert V., Kanter I., Scholl E. and Kinzel W.* Strong and weak chaos in nonlinear networks with time-delayed couplings // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107. P. 234.
8. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // *Дифференциальные уравнения.* 1989. Т. 25, № 8. С. 1448–1451.
9. *Кащенко С.А.* Уравнение Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1998. Т. 38, № 3. С. 457–465.
10. *Кащенко С.А.* Бифуркационные особенности сингулярно возмущенного уравнения с запаздыванием // *Сибирский математический журнал.* 1999. Т. 40, № 3. С. 567–572.
11. *Kashchenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering.* 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093–1109.
12. *Григорьева Е.В., Кащенко С.А.* Медленные и быстрые колебания в модели оптоэлектронного осциллятора с запаздыванием // *Доклады Академии наук.* 2019. Т. 484, № 1. С. 21–25.
13. *Giacomelli G., Politi A.* Relationship between delayed and spatially extended dynamical Systems // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 2686–2689.
14. *Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A.* Theory of quasi-periodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // *Optics Communications.* 1999. Vol. 165. P. 279–292.
15. *Bestehorn M., Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A.* Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback // *Physica D.* 2000. Vol. 145. P. 111–130.
16. *Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A., Pelster A.* Traveling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // *Physica D.* 1999. Vol. 125, no. 1–2. P. 123–141.

17. Grigorieva E.V., Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Dynamics of Lang-Kobayashi equations with large control coefficient // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2012. Vol. 12. P. 403–409.
18. Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Local Dynamics of the two-component singular perturbed systems of parabolic type // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2015. Vol. 25, no. 11. P. 1550142.
19. Ikeda K., Matsumoto K. High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback // *Physica D*. 1987. Vol. 29. P. 223–235.
20. Kouomou C.Y., Colet P., Larger L., Gastaud N. Chaotic breathers in delayed electro-optical systems // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 203903.
21. Weicker L., Erneux T., D’Huys O., Danckaert J., Jacquot M., Chembo Y. and Larger L. Strongly asymmetric square waves in time-delayed system // *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 86. 055201(R).
22. Weicker L., Erneux T., Rosin D.P., Gauthier D.J. Multirhythmicity in an optoelectronic oscillator with large delay // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 91. 012910.
23. Peil M., Jacquot M., Chembo Y.C., Larger L., Erneux T. Routes to chaos and multiple time scale dynamics in broadband bandpass nonlinear delay electro-optic oscillators // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 79. 026208.
24. Talla Mbe J.H., Talla A.F., Goune Chengui G.R., Coillet A., Larger L., Wofo P. Mixed-mode oscillations in slow-fast delay optoelectronic systems // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 91. 012902.
25. Marquez B.A. et al. Interaction between Lienard and Ikeda dynamics in a nonlinear electro-optical oscillator with delayed bandpass feedback // *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94. 062208.
26. Larger L., Penkovsky B. and Maistrenko Y. Virtual chimera states for delayed-feedback systems // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 111. P. 054103.
27. Grigorieva E.V., Kashchenko I.S., Glazkov D.V. Local dynamics of a model of an opto-electronic oscillator with delay // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2018. Vol. 52. P. 700–707.
28. Гиббс Х. Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света // М.: «Мир», 1988. 518 с.

References

1. Yanchuk S., Giacomelli G. Spatio-temporal phenomena in complex systems with time delays. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2017, vol. 50, p. 103001.
2. Cross M., Hohenberg P. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 1993, vol. 65, pp. 851–1112.
3. Arecchi F.T., Giacomelli G., Lapucci A., Meucci R. Two-dimensional representation of a delayed dynamical system. *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 45, pp. R4225–4228.
4. Vladimirov A.G., Turaev D. Model for passive mode locking in semiconductor lasers. *Phys. Rev. A*, 2005, vol. 72, p. 033808.
5. Marconi M., Javaloyes J., Barland S., Balle S. and Giudici M. Vectorial dissipative solitons in vertical-cavity surface-emitting lasers with delays. *Nature Photonics*, 2015. doi:10.1038/NPHOTON.2015.92.
6. Pimenov A., Slepneva S., Huyet G., Vladimirov A. Dispersive time-delay dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, vol. 118, 193901.
7. Heiligenthal S., Dahms T., Yanchuk S., Jungling T., Flunkert V., Kanter I., Scholl E. and Kinzel W. Strong and weak chaos in nonlinear networks with time-delayed couplings. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 107, p. 234.
8. Kashchenko S.A. Application of the normalization method to the study of the dynamics of a

- differential-difference equation with a small factor multiplying the derivative. *Differentsialnye Uravneniya*, 1989, vol. 25, no. 8, pp. 1448–1451.
9. Kashchenko S.A. The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1998, vol. 38, no. 3, pp. 443–451.
 10. Kashchenko S.A. Bifurcation singularities of a singularly perturbed equation with delay. *Siberian Mathematical Journal*, 1999, vol. 40, no. 3, pp. 483–487.
 11. Kashchenko S.A. Normalization in the systems with small diffusion. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 1996, vol. 6, no. 6, pp. 1093–1109.
 12. Grigorieva E.V., Kashchenko S.A. Slow and fast oscillations in a model of an optoelectronic oscillator with delay. *Doklady Mathematics*, 2019, vol. 99, no. 1, pp. 95–98.
 13. Giacomelli G., Politi A. Relationship between delayed and spatially extended dynamical Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, pp. 2686–2689.
 14. Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A. Theory of quasi-periodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback. *Optics Communications*, 1999, vol. 165, pp. 279–292.
 15. Bestehorn M., Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A. Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback. *Physica D*, 2000, vol. 145, p. 111–130.
 16. Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A., Pelster A. Traveling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback. *Physica D*, 1999, vol. 125, no. 1–2, p. 123–141.
 17. Grigorieva E.V., Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Dynamics of Lang–Kobayashi equations with large control coefficient. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2012, vol. 12, pp. 403–409.
 18. Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Local Dynamics of the two-component singular perturbed systems of parabolic type. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, vol. 25, no. 11, p. 1550142.
 19. Ikeda K., Matsumoto K. High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback. *Physica D*, 1987, vol. 29, p. 223–235.
 20. Kouomou C.Y., Colet P., Larger L., Gastaud N. Chaotic breathers in delayed electro-optical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, 203903.
 21. Weicker L., Erneux T., D’Huys O., Danckaert J., Jacquot M., Chembo Y. and Larger L. Strongly asymmetric square waves in time-delayed system. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 86, 055201(R).
 22. Weicker L., Erneux T., Rosin D.P., Gauthier D.J. Multirhythmicity in an optoelectronic oscillator with large delay. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, 012910.
 23. Peil M., Jacquot M., Chembo Y.C., Larger L., Erneux T. Routes to chaos and multiple time scale dynamics in broadband bandpass nonlinear delay electro-optic oscillators. *Phys. Rev. E*, 2009, vol. 79, 026208.
 24. Talla Mbe J.H., Talla A.F., Goune Chengui G.R., Coillet A., Larger L., Woafu P. Mixed-mode oscillations in slow-fast delay optoelectronic systems. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, 012902.
 25. Marquez B.A. et al. Interaction between Lienard and Ikeda dynamics in a nonlinear electro-optical oscillator with delayed bandpass feedback. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, 062208.
 26. Larger L., Penkovsky B. and Maistrenko Y. Virtual chimera states for delayed-feedback systems. *Phys. Rev. Lett.*, 2013, vol. 111, p. 054103.
 27. Grigorieva E.V., Kashchenko I.S., Glazkov D.V. Local dynamics of a model of an opto-electronic oscillator with delay. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2018, vol. 52, pp. 700–707.
 28. Gibbs H.M. *Optical Bistability: Controlling Light with Light*. Academic Press, Inc., 1985.



Григорьева Елена Викторовна – родилась в 1957 году, окончила Белорусский государственный университет (1979). Работала в институте физики АН БССР, БГУ, в настоящий момент работает в БГЭУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в БГУ (2004) в области нелинейной динамики лазерных систем. Опубликовала более 100 научных и научно-методических трудов.

Республика Беларусь, 220070 Минск, Партизанский пр., 26
Белорусский государственный экономический университет
E-mail: grigorieva@tut.by



Кащенко Сергей Александрович – родился в Ярославле (1953), окончил Ярославский государственный университет (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1976) и доктора физико-математических наук в МГУ (1989) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, первый проректор ЯрГУ. Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В.В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е.В. Григорьевой). Опубликовал более 250 научных работ и 8 монографий.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, д. 14
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru