



**КОЛЬЦЕВАЯ СИСТЕМА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ,  
ОПИСЫВАЕМЫМИ МОДЕЛЬЮ ДВУХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ,  
В КОТОРОЙ РЕАЛИЗУЮТСЯ ФЕНОМЕНЫ КОМПЛЕКСНОЙ  
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ**

*М. А. Обычев*

В работе предлагается способ конструирования кольцевой системы, в которой реализуются в некотором приближении феномены комплексной аналитической динамики, такие как множества Мандельброта и Жюлиа. Система является неавтономной, содержит частотные фильтры и нелинейные элементы, описываемые моделью резонансного взаимодействия волн в квадратично-нелинейной среде с дисперсией.

*Ключевые слова:* Параметрическое возбуждение волн, трёхволновое взаимодействие, кольцевые системы, множество Мандельброта.

**Введение**

При изучении динамики простого квадратичного отображения

$$z_{n+1} = c + z_n^2, \quad z, c \in \mathbb{C} \quad (1)$$

с комплексной переменной  $z$  и с комплексным параметром  $c$  обнаруживается ряд интересных феноменов [1–3]. Комплексная фазовая плоскость переменной  $z$  оказывается разделённой на два бассейна притяжения. Траектории, стартующие из точек одного из них, убегают на бесконечность. Стартующие из второго бассейна траектории остаются бесконечно долго в ограниченной области фазового пространства. Граница между этими двумя бассейнами называется множеством Жюлиа. В тривиальном случае  $c = 0$  множество Жюлиа представляет собой единичную окружность. При ненулевых значениях параметра  $c$  оно имеет негладкую самоподобную фрактальную структуру.

Ограниченная в фазовом пространстве устойчивая динамика отображения (1) возможна не при всех значениях параметра  $c$ . Более того, в зависимости от значения  $c$  динамика может быть как периодической, так и хаотической. Область значений

параметра, при которых возможна ограниченная динамика отображения, называется множеством Мандельброта.

На рис. 1 представлена диаграмма плоскости параметра и две диаграммы фазовой плоскости отображения (1) для значений параметра внутри и снаружи множества Мандельброта. Белым цветом закрашены области, отвечающие существованию ограниченной в фазовом пространстве динамики. Оттенками серого окрашена область убегания траекторий на бесконечность, причем более темный цвет соответствует большему времени убегания. Фигура на рис. *a* представляет собой множество Мандельброта. Оно содержит совокупность областей с периодической динамикой (периоды циклов указаны цифрами), напоминающую кактус. Граница «кактуса» – фрактальная «грива», которой соответствует хаотическая динамика. Множество Жюлиа на рис. *б* является так называемым наполненным множеством (имеет бассейн притяжения внутри себя), а на рис. *в* – несвязным, обобщенным канторовым множеством.

Как видно из рис. 1, *a*, на плоскости комплексного параметра возможен переход от регулярной к хаотической динамике не только через классический фейгенбаумовский каскад удвоений периода, но и через последовательности иных усложнений периодических устойчивых траекторий – утроения, учетверения и др.

Исследованию свойств множеств Мандельброта и Жюлиа посвящено огромное количество литературы в области математики и теории динамических систем (см., например, [1–3]). Важная задача для физика – построение физической системы, в которой могут быть реализованы феномены комплексной аналитической динамики. Упоминание о таких системах можно найти в статьях [4–9]. В настоящей

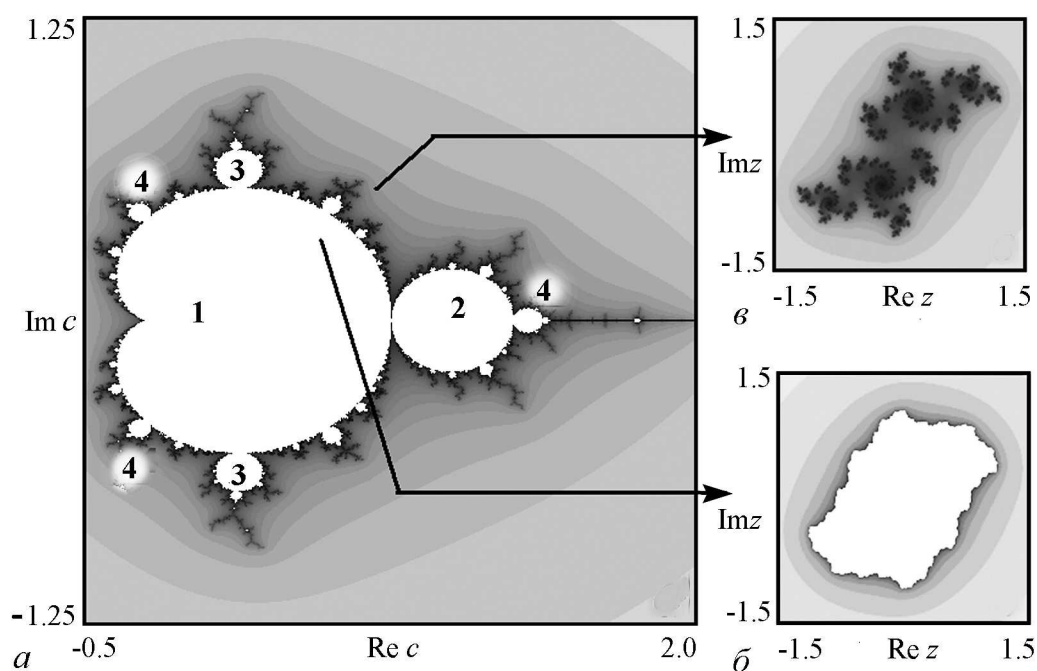


Рис. 1. Множество Мандельброта (*a*) и множества Жюлиа (*б*, *в*) для отображения (1) на комплексной плоскости параметра и плоскости фазовой переменной, соответственно. Области белого цвета соответствуют периодической динамике, чёрного – хаотической. Градации серого цвета отвечают убеганию траекторий на бесконечность (более темный оттенок соответствует большему числу итераций, необходимому для убегания из круга достаточно большого радиуса)

работе предлагается ещё один новый пример такой системы. Он может быть реализован на основе модифицированного специальным образом оптического резонатора Икеды [10], или как кольцевая система с ферромагнитными структурами в качестве нелинейных элементов [11].

### 1. Модельная кольцевая система

Рассмотрим неавтономную кольцевую систему с нелинейными элементами и фильтрами, схема которой приведена на рис. 2. Сигнал передаётся между узлами 1–2–3–4. (В оптической системе их роль выполняют зеркала, повернутые друг относительно друга таким образом, что луч, отражаясь от них, проходит по кругу.) В узлах 2 и 3 (полупрозрачных) в систему вводятся опорные сигналы, выполняющие роль накачки. Эти сигналы имеют комплексные медленные амплитуды  $C$  и  $D$  и высокочастотное заполнение с частотой  $\omega$ .

Допустим, что при  $n$ -ом прохождении кольца (на  $n$ -м стробоскопическом сечении) сигнал около узла 1 имеет некоторую комплексную амплитуду  $Z_n$  и частоту  $\omega$ . Проследим его передачу по кругу (направление указано на рис. 2 стрелкой). Вначале сигнал проходит через отрезок слабо нелинейной среды. При учете квадратичного порядка нелинейности можно ожидать возникновения у него резонансной составляющей на удвоенной частоте  $2\omega$ . Возбуждение этой второй гармоники определяется уравнениями

$$\begin{cases} i \frac{\partial a}{\partial x} = \alpha a^* b, \\ i \frac{\partial b}{\partial x} = \beta a^2, \end{cases} \quad (2)$$

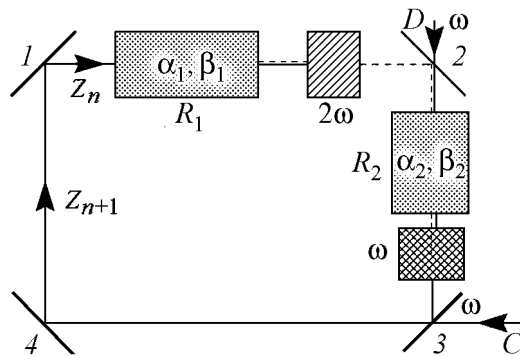


Рис. 2. Схема кольцевой системы с двумя отрезками нелинейной среды (прямоугольники серого цвета) длиной  $R_1$  и  $R_2$ , двумя фильтрами, пропускающими сигнал на частоте  $2\omega$  и  $\omega$  (прямоугольники со штриховкой и скрещенной штриховкой, соответственно).  $C$  и  $D$  – внешние сигналы накачки на частоте  $\omega$ . Составляющая проходящего по кольцу сигнала на частоте  $\omega$  обозначена сплошной линией, на частоте  $2\omega$  – пунктирной.  $Z_n$  – комплексная амплитуда сигнала в резонаторе на частоте  $\omega$ , проходящего через узел 1 в  $n$ -й раз

где  $a(x)$  – комплексная амплитуда составляющей на частоте  $\omega$ ,  $b(x)$  – составляющей на частоте  $2\omega$ ,  $x$  – координата вдоль отрезка среды,  $\alpha$  и  $\beta$  – характеризующие свойства среды параметры [12,13]. (Будем использовать модель в виде конечномерной динамической системы, полагая, что характеристики нелинейного элемента обеспечивают реализацию в нём пространственно однородной волны.) Если на вход нелинейного элемента подаётся одночастотный сигнал с частотой  $\omega$  и амплитудой  $Z_n$ , то на выходе получим двухчастотный сигнал, комплексную амплитуду компоненты  $b$  на частоте  $2\omega$  которого можно оценить как  $b(R_1) \sim Z_n^2$ . Далее сигнал проходит через фильтр, пропускающий только эту компоненту на частоте  $2\omega$ .

На узле 2 к сигналу в кольце подмешивается внешнее воздействие  $D$  на частоте  $\omega$ . Между узлами 2 и 3 расположен нелинейный элемент длины  $R_2$ , обладающий той же физической природой, что и первый нелинейный элемент. Взаимодействие в нем двух разночастотных составляющих в случае выполнения условия синхронизма также может быть описано математической моделью (2) но, возможно, с другими значениями параметров. Согласно этой модели, при прохождении через среду между компонентой на частоте  $2\omega$  (прошедшей через фильтр) и компонентой на частоте  $\omega$  (добавленной извне) осуществляется перекачка энергии. В результате этого составляющая с частотой  $\omega$  сигнала на выходе в некотором приближении может иметь комплексную амплитуду  $a(R_2) \sim D^* Z_n^2$ . Далее сигнал проходит через еще один фильтр, который пропускает лишь только эту составляющую на частоте  $\omega$ .

На узле 3 к сигналу в кольце добавляется внешнее воздействие  $C$  на той же частоте  $\omega$ . Комплексные амплитуды внешнего сигнала и сигнала в кольце складываются  $C + D^* Z_n^2$ . В таком виде сигнал завершает круг по кольцу и через узел 4 возвращается к начальной точке 1. При этом он имеет ту же, что и в начале, частоту  $\omega$ . Составляющая на удвоенной частоте отсутствует.

Динамика комплексной амплитуды сигнала при прохождении его через узел 1, то есть в стробоскопическом сечении, приближённо описывается отображением вида

$$Z_{n+1} = F(Z_n) \cong C + D^* Z_n^2, \quad (3)$$

которое с помощью замены переменной может быть сведено к классическому комплексному отображению Мандельброта (1).

## 2. Численное моделирование системы

Описанное в предыдущем разделе отображение лишь приближенно описывает динамику предлагаемой кольцевой системы и это приближение, очевидно, может быть удовлетворительным не при любых значениях параметров. Действительно, в уравнениях (2) имеется член с комплексным сопряжением, который может приводить к нарушению комплексной аналитичности системы и как следствие, к искажению свойственных ей феноменов. Проведем численное моделирование системы и попытаемся оценить значения параметров, при которых в ней может реализоваться множество Мандельброта.

Заметим, что исследуемая модель по сути является негладкой разрывной, стадийной динамической системой. Моделирование ее эволюции за один период стробоскопического сечения состоит из следующих этапов.

- Интегрирование системы (2) с параметрами  $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$  вдоль отрезка  $[0, R_1]$  с начальными условиями  $a(0) = Z_n, b(0) = 0$ . В результате на выходе из первого нелинейного элемента получаем значения амплитуд двух составляющих сигнала  $a' = a(R_1), b' = b(R_1)$ .
- Интегрирование системы (2) с параметрами  $\alpha = \alpha_2, \beta = \beta_2$  вдоль отрезка  $[0, R_2]$  с начальными условиями  $a(0) = D, b(0) = b'$ . В результате на выходе из второго нелинейного элемента имеем компоненты волны с амплитудами  $a'' = a(R_2), b'' = b(R_2)$ .
- Значение амплитуды  $a''$  складываем с амплитудой  $C$ , в результате получая значение амплитуды сигнала на следующей итерации отображения в стробоскопическом сечении  $Z_{n+1}$ .

Уравнения (2) частично допускают аналитическое интегрирование, в результате которого можно получить зависимости

$$N(x) = N_a + (N_b - N_c) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{N_c - N_a}x; \sqrt{(N_b - N_a)/(N_c - N_a)}\right), \quad (4)$$

$$M(x) = I - N(x) \quad (5)$$

для перенормированных интенсивностей компонент сигнала

$$M(x) = \alpha\beta|a(x)|^2, \quad N(x) = \alpha^2|b(x)|^2, \quad (6)$$

где  $\operatorname{sn}$  – эллиптическая функция Якоби;  $N_a, N_b, N_c$  – выстроенные в порядке возрастания корни кубического уравнения  $(I - N(x))^2 N(x) - G^2 = 0$ ;  $I$  и  $G$  – постоянные, которые можно вычислить из начальных условий

$$I = \alpha\beta|a(0)|^2 + \alpha^2|b(0)|^2, \quad (7)$$

$$G = \alpha^2\beta|a(0)|^2 |b(0)| \cos(\arg[b(0)] - 2\arg[a(0)]). \quad (8)$$

Фазы компонент сигнала  $\varphi(x) = \arg[a(x)]$  и  $\psi(x) = \arg[b(x)]$  можно найти, исходя из соотношений

$$\psi(x) = -G \int_0^x [N(s)]^{-1} ds, \quad (9)$$

$$\Phi(x) = \psi(x) - 2\varphi(x) = \arccos \frac{G}{M(x)\sqrt{N(x)}}. \quad (10)$$

На рис. 3 показана плоскость комплексного параметра  $C$  при различных значениях параметров  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  характеризующих нелинейные элементы. Области

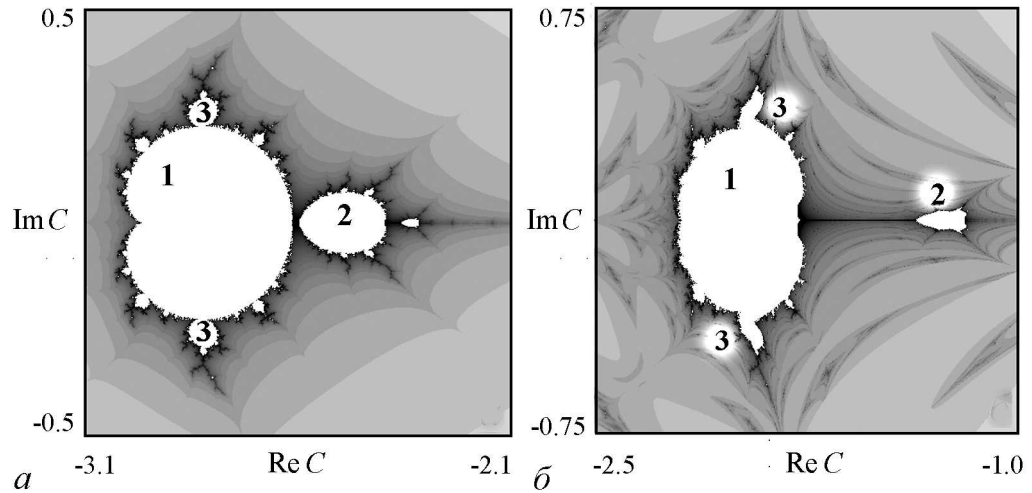


Рис. 3. Подобное множеству Мандельброта множество на плоскости значений комплексной медленной амплитуды  $C$  сигнала накачки. Значения параметров: комплексная амплитуда вводимого на узле 2 внешнего сигнала  $D = 3$ ; длина нелинейных элементов  $R_1 = R_2 = 1.0$ ; параметры, характеризующие нелинейные элементы  $\alpha_1 = 0.01, \beta_1 = 1.0, \alpha_2 = 1.0, \beta_2 = 0.01$  (а),  $\alpha_1 = 0.05, \beta_1 = 1.0, \alpha_2 = 1.0, \beta_2 = 0.1$  (б)

белого цвета отвечают периодическому поведению комплексной амплитуды составляющей на частоте  $\omega$  в стробоскопическом сечении, то есть переменной  $Z_n$ , и её устойчивой динамике в ограниченной области фазового пространства. Градациями серого цвета размечена область неустойчивости в системе. Более темные оттенки отвечают большему времени убегания траекторий на бесконечность. На рисунках наблюдаются структуры, сходные с множеством Мандельброта (см. рис. 1). Это сходство становится все более явным при  $\alpha_1 \ll \beta_1$ ,  $\alpha_2 \gg \beta_2$ . Объяснить данный факт можно тем, что именно в таком приближении наиболее хорошо работает обсужденный в разделе 1 механизм: квадрат комплексной амплитуды  $Z_n$  лучшим образом передаётся составляющей волны  $b$  при прохождении первого нелинейного элемента и возвращается в составляющую  $a$  при прохождении второго нелинейного элемента.

### Заключение

В настоящей работе разработана кольцевая неавтономная система, в которой могут реализоваться феномены комплексной аналитической динамики, такие как множество Мандельброта. Система содержит квадратично нелинейные элементы, которым отвечает математическая модель двухволнового взаимодействия. Данная модель описывает перекачку энергии между двумя компонентами волны, частоты которых удовлетворяют условиям синхронизма. Комбинация из двух нелинейных элементов в кольцевой системе и наличие внешнего сигнала накачки позволяет «манипулировать» комплексными медленными амплитудами компонент волны таким образом, что в стробоскопическом сечении динамика одной из амплитуд может соответствовать комплексному квадратичному отображению Мандельброта.

Автор выражает благодарность научному руководителю доценту О.Б. Исаевой за обсуждение и помощь при выполнении работы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-02-31342).*

### Библиографический список

1. *Peitgen H.-O. and Richter P.H.* The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems. New-York: Springer-Verlag, 1986.
2. *Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D.* Chaos and fractals: new frontiers of science. New-York: Springer-Verlag, 1992.
3. *Devaney R.L.* An Introduction to chaotic dynamical systems. New York: Addison-Wesley, 1989.
4. *Beck C.* Physical meaning for Mandelbrot and Julia set // *Physica D.* 1999. Vol. 125. P. 171.
5. *Исаева О.Б.* О возможности реализации феноменов комплексной аналитической динамики в физических системах, построенных из связанных элементов, демонстрирующих удвоения периода // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2001. Т. 9, № 6. С. 129.
6. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P.* On possibility of realization of the phenomena of complex analytic dynamics in physical systems. Novel mechanism of the synchronization loss in coupled period-doubling systems // Preprint <http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0509012>.

7. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P.* On possibility of realization of the Mandelbrot set in coupled continuous systems // Preprint <http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0509013>.
8. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Ponomarenko V.I.* Mandelbrot set in coupled logistic maps and in an electronic experiment // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. P. 055201(R).
9. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Osbaldestin A.H.* A system of alternately excited coupled non-autonomous oscillators manifesting phenomena intrinsic to complex analytical maps // *Physica D.* 2008. Vol. 237. P. 873.
10. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 709.
11. *Hagerstrom A.M., Tong W., Wu M., Kalinikos B.A., Eykholt R.* Excitation of chaotic spin waves in magnetic film feedback rings through three-wave nonlinear interactions // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102. P. 207202.
12. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука-Физматлит, 1984. 432 с.
13. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Наука-Физматлит. 2000. 272 с.

*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 1.03.2013*

**THE RING SYSTEM WITH NONLINEAR ELEMENTS,  
DESCRIBED BY THE TWO WAVES INTERACTION MODEL,  
MANIFESTING THE PHENOMENA OF COMPLEX ANALYTICAL DYNAMICS**

*M. A. Obichev*

This paper proposes a method of constructing of the ring system, in which the phenomena of complex analytical dynamics such as the Mandelbrot and Julia sets, are implemented in some approximation. The system is non-autonomous, includes frequency filters and nonlinear elements, described by the model of the resonant interaction of waves in quadratic nonlinear dispersive medium.

*Keywords:* Parametric wave excitation, three-wave interaction, ring systems, Mandelbrot set.



*Обычев Максим Андреевич* – родился в Саратове (1990). Окончил гимназию № 87 (2008). В настоящее время является студентом 4-го курса факультета нелинейных процессов Саратовского госуниверситета. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория динамического хаоса и ее физические приложения. Имеет несколько публикаций в сборниках трудов конференций.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail:obycheff.maxim@yandex.ru