

О ДВУХ МОДЕЛЯХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В НЕФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Е. С. Селиверстова

В данной статье, которая носит методический характер, рассмотрены две простые модели: модель Вилсона–Коуэна для описания взаимодействия возбуждающих и тормозных нейронов и модель колебаний на рынке Forex.

Ключевые слова: Автоколебания, предельный цикл, синхронизация.

Введение

В последние годы активно развивается когнитология с акцентом на понимание и объяснение динамических процессов, происходящих в мозге (см., например, [1]). Все это происходит в период смены парадигмы науки. Если еще вчера говорили о квартете *nano bio info cognito*, то сегодня речь идет о *socio cognito bio info nano*. Появление *socio* рядом с *cognito* не случайно, поскольку между математической интерпретацией социальных и когнитивных процессов много общего. В данной статье, которая носит методический характер, рассмотрены две простые модели: модель Вилсона–Коуэна для описания взаимодействия возбуждающих и тормозных нейронов и модель колебаний на рынке Forex.

1. Модель Вилсона–Коуэна

В рамках данной модели взаимодействие крупных отделов мозга описывается системой связанных нелинейных дифференциальных уравнений [2]. Предполагается, что внутри каждого из таких отделов мозга существуют участки однородных нервных клеток (нейронные популяции). Допустим, что существуют две нейронные популяции: возбуждающая и тормозная. Состояние каждой из этих популяций характеризует величина, равная отношению числа активных нейронов к их общему числу. Обозначим эти величины, следуя [3], соответственно ρ_B и ρ_T . В данной модели также введены характерные времена τ_B и τ_T , которые отражают реакцию

соответственно возбуждательных и тормозных нейронов на единичное надпороговое воздействие. Уравнения модели записываются следующим образом [3]:

$$\begin{cases} \tau_B \frac{d\rho_B}{d\tau} + \rho_B = F_B(\rho_B, \rho_T), \\ \tau_T \frac{d\rho_T}{d\tau} + \rho_T = F_T(\rho_B, \rho_T), \end{cases}$$

где функции F_B, F_T – функции реагирования. Функции реагирования возьмем в виде

$$F_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\beta_{ee}\rho_B - \beta_{ei}\rho_T - Q_B),$$

$$F_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\beta_{ie}\rho_B - \beta_{ii}\rho_T - Q_T).$$

В итоге система исходных уравнений примет вид

$$\begin{cases} \frac{d\rho_B}{d\tau} + \rho_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\beta_{ee}\rho_B - \beta_{ei}\rho_T - Q_B), \\ \frac{d\rho_T}{d\tau} + \varepsilon\rho_T = \varepsilon \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\beta_{ie}\rho_B - \beta_{ii}\rho_T - Q_T) \right]. \end{cases} \quad (1)$$

Продифференцируем систему (1) по τ и положим $\beta_{ii} = 0$. В итоге получим

$$\begin{cases} \frac{d^2\rho_B}{d\tau^2} + \frac{d\rho_B}{d\tau} = \frac{\beta_{ee} \frac{d\rho_B}{d\tau} - \beta_{ei} \frac{d\rho_T}{d\tau}}{\pi(1 + (\theta_B + \beta_{ee}\rho_B - \beta_{ei}\rho_T)^2)}, \\ \frac{d^2\rho_T}{d\tau^2} + \varepsilon \frac{d\rho_T}{d\tau} = \varepsilon \frac{\beta_{ie} \frac{d\rho_B}{d\tau}}{\pi(1 + (\theta_T + \beta_{ie}\rho_B)^2)}. \end{cases} \quad (2)$$

Используя метод синхронных решений [4], найдем собственную частоту системы (2). Она дается формулой

$$\omega^2 = \frac{\varepsilon\beta_{ie}\beta_{ei}}{\pi^2(1 + \theta_B^2)(1 + \theta_T^2)} + \varepsilon(\gamma - \varepsilon), \quad (3)$$

где $\gamma = 1 - \beta_{ee}/(\pi(1 + \theta_B^2)) + \varepsilon$.

Если коэффициент $\gamma < 0$, то состояние равновесия становится неустойчивым, что соответствует незатухающим колебаниям, амплитуда которых ограничивается нелинейностью системы, то есть на фазовой плоскости появляется предельный цикл.

Рассмотрим условия появления предельного цикла. Линеаризуем систему (2) и найдем корни ее характеристического уравнения. Они запишутся в виде

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\left(1 + \varepsilon - \frac{\beta_{ee}}{\pi(1 + \theta_B^2)}\right) \pm \sqrt{D} \right],$$

где

$$D = \left(1 + \varepsilon - \frac{\beta_{ee}}{\pi(1 + \theta_B^2)}\right)^2 - 4\left(\frac{\varepsilon\beta_{ie}\beta_{ei}}{\pi^2(1 + \theta_B^2)(1 + \theta_T^2)} - \frac{\varepsilon\beta_{ee}}{\pi(1 + \theta_B^2)}\right).$$

Рассмотрим случаи.

1. Если $1 + \varepsilon - \frac{\beta_{ee}}{\pi(1 + \theta_B^2)} < 2\sqrt{\frac{\varepsilon\beta_{ie}\beta_{ei}}{\pi^2(1 + \theta_B^2)(1 + \theta_T^2)} - \frac{\varepsilon\beta_{ee}}{\pi(1 + \theta_B^2)}}$, то особая точка – фокус (рис. 1), а если $1 + \varepsilon - \frac{\beta_{ee}}{\pi(1 + \theta_B^2)} > 2\sqrt{\frac{\varepsilon\beta_{ie}\beta_{ei}}{\pi^2(1 + \theta_B^2)(1 + \theta_T^2)} - \frac{\varepsilon\beta_{ee}}{\pi(1 + \theta_B^2)}}$, то особая точка – узел.

2. Если $1 + \varepsilon - \frac{\beta_{ee}}{\pi(1 + \theta_B^2)} > 0$, то особая точка устойчива, а если это выражение меньше нуля, то неустойчива. В случае неустойчивой точки в системе будет существовать предельный цикл (рис. 2).

Временная реализация $\rho_B(t)$ имеет характер, аналогичный реализации $\rho_T(t)$, изображенной на рис. 2, б, вследствие этого ее график не приводится.

При $1 + \varepsilon - \frac{\beta_{ee}}{\pi(1 + \theta_B^2)} = 0$ и $1 + \varepsilon - \frac{\beta_{ee}}{\pi(1 + \theta_B^2)} < 2\sqrt{\frac{\varepsilon\beta_{ie}\beta_{ei}}{\pi^2(1 + \theta_B^2)(1 + \theta_T^2)} - \frac{\varepsilon\beta_{ee}}{\pi(1 + \theta_B^2)}}$ происходит качественное изменение фазового портрета системы, или бифуркация, имеющая название бифуркации Андронова–Хопфа.

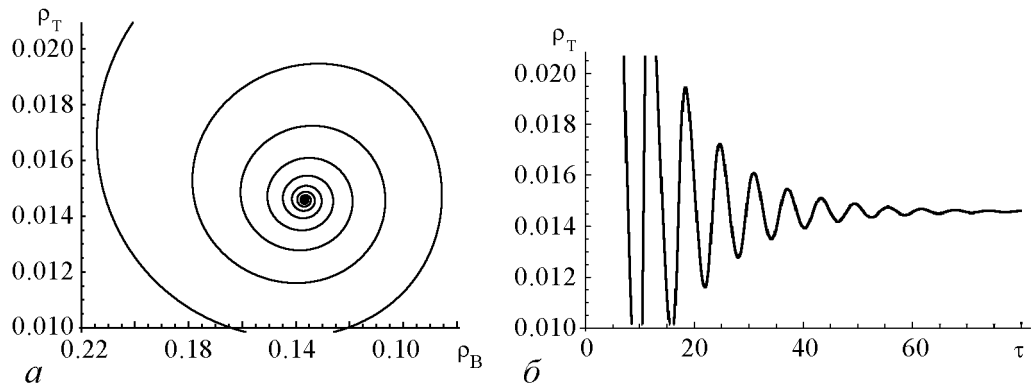


Рис. 1. а – фазовый портрет системы (1), соответствующий особой точке типа устойчивый фокус. Параметры: $\beta_{ee} = 5$, $\beta_{ei} = 60$, $\beta_{ie} = 20$, $\beta_{ii} = 0$, $\theta_B = 1$, $\theta_T = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$. Начальные условия: $\rho_B(0) = 0$, $\rho_T(0) = 0.1$. б – временная реализация $\rho_T(\tau)$ для фазового портрета

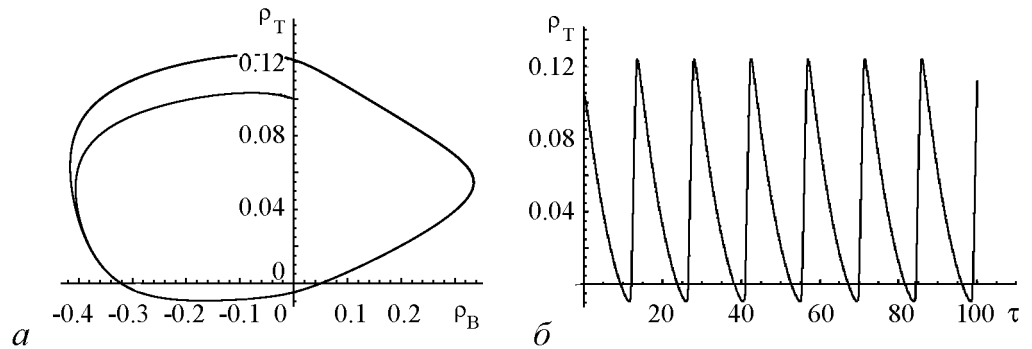


Рис. 2. а – фазовый портрет системы (1), соответствующий предельному циклу. Параметры: $\beta_{ee} = 9$, $\beta_{ei} = 60$, $\beta_{ie} = 20$, $\beta_{ii} = 0$, $\theta_B = 1$, $\theta_T = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$. Начальные условия: $\rho_B(0) = 0$, $\rho_T(0) = 0.1$. б – временная реализация $\rho_T(\tau)$ для фазового портрета

Рассмотрим далее поведение колебательного контура коры под воздействием автогенераторов таламуса и явление синхронизации. Исходные уравнения в этом случае примут вид [3]

$$\begin{cases} \frac{d\rho_B}{d\tau} + \rho_B + E \cos \nu\tau + \bar{E} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\beta_{ee}\rho_B - \beta_{ei}\rho_T - Q_B), \\ \frac{d\rho_T}{d\tau} + \varepsilon\rho_T + I \cos(\nu\tau + \varphi) + \bar{T} = \varepsilon \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\beta_{ie}\rho_B - \beta_{ii}\rho_T - Q_T) \right], \end{cases} \quad (4)$$

где E и I – безразмерные величины, характеризующие амплитуду периодического воздействия (возбуждающего и тормозящего, соответственно), идущего от таламуса к коре; φ – сдвиг фаз между тормозящим и возбуждающим воздействием; \bar{E} и \bar{T} – некоторые постоянные действия таламуса на кору. При малых E и I решение содержит две составляющих – собственные затухающие колебания с частотой ω и вынужденные незатухающие с частотой ν (рис. 3).

При увеличении параметра β_{ee} , что в случае автоколебательной системы без периодического внешнего воздействия сопровождается рождением предельного цикла, происходит модуляция колебаний внешней гармонической силой (см. рис. 4).

При дальнейшем увеличении амплитуды внешнего воздействия происходит полная синхронизация автогенератора внешним сигналом. Этот факт подтверждает рис. 5. Для наглядности на одном графике с временной реализацией показана функция $1.5 \cos(1.1\tau - 2.5)$, имеющая ту же частоту, что и функция внешнего воздействия в системе (4).

При такой синхронизации происходит захват частоты, то есть частота автоколебаний системы становится равна частоте внешнего воздействия. Захват ча-

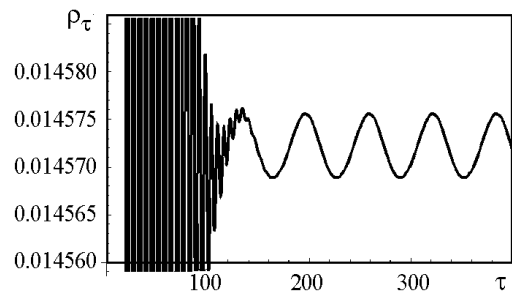


Рис. 3. Временная реализация $\rho_T(\tau)$ системы уравнений (4). Параметры: $\beta_{ee} = 5$, $\beta_{ei} = 60$, $\beta_{ie} = 20$, $\beta_{ii} = 0$, $\theta_B = 1$, $\theta_T = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $E = I = 10^{-4}$, $\nu = 0.1$, $\varphi = 2$; начальные условия: $\rho_B(0) = 0$, $\rho_T(0) = 0.1$

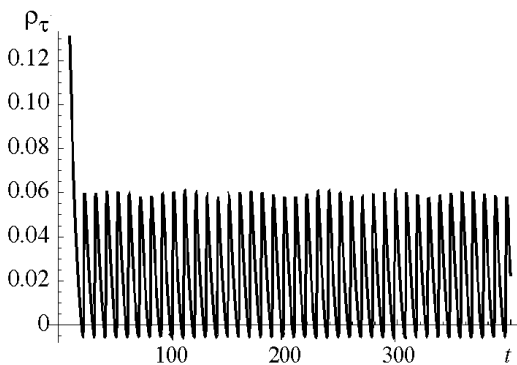


Рис. 4. Временная реализация $\rho_T(\tau)$ системы уравнений (4). Параметры: $\beta_{ee} = 8$, $\beta_{ei} = 60$, $\beta_{ie} = 20$, $\beta_{ii} = 0$, $\theta_B = 1$, $\theta_T = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $E = I = 10^{-4}$, $\nu = 0.1$, $\varphi = 2$; начальные условия: $\rho_B(0) = 0$, $\rho_T(0) = 0.1$

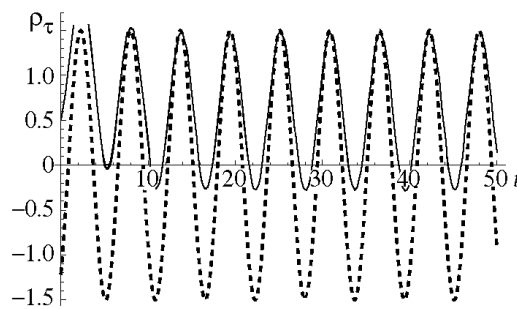


Рис. 5. Временная реализация $\rho_T(\tau)$ системы уравнений (4). Параметры: $\beta_{ee} = 8$, $\beta_{ei} = 60$, $\beta_{ie} = 20$, $\beta_{ii} = 0$, $\theta_B = 1$, $\theta_T = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $E = I = 1$, $\nu = 1.1$, $\varphi = 2$; начальные условия: $\rho_B(0) = 0$, $\rho_T(0) = 0.1$. Пунктиром показана функция $1,5 \cos(1.1\tau - 2.5)$

стоты наступает тогда, когда частота внешнего воздействия близка к частоте автоколебаний (или к частоте, в целое число раз меньшей), если амплитуда внешней силы достаточно велика (см., например, [5]). В нашем случае, согласно формуле (3), частота внешнего воздействия оказывается в 2 раза меньше собственной частоты автоколебаний.

Таким образом, взаимодействие крупных отделов мозга описывается автоколебательной моделью.

2. Колебания валют на бирже Forex

По мнению английского писателя и физика Ч. Сноу, в XIX веке между гуманитарной и естественнонаучной культурами образовалась огромная пропасть, которая продолжает расти и сейчас, тем самым снижая эффективность совокупного научного знания. Поэтому построение моста между двумя культурами стало важнейшей задачей современности. Для демонстрации общности двух, казалось бы, далеких процессов рассмотрим колебания валюты на рынке Forex. Экономисты считают, что подобные изменения связаны со случайными актами обмена. Однако колебания не затухают со временем, и, как следствие, точка равновесия не является устойчивой. В то же время движение происходит вокруг неустойчивой точки равновесия и носит устойчивый характер.

Для объяснения процессов, происходящих на валютной бирже, рассмотрим уравнение гармонического осциллятора с затуханием под действием внешней силы, величина и направление которой зависят от состояния самой динамической системы. Оно имеет вид

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (\delta - ax^2)\dot{x}, \quad (5)$$

где x – безразмерная цена валюты, коэффициент γ характеризует комиссию брокера¹, а внешняя сила определяется «жадностью» трейдеров² δ и их способностью к оценке финансовых рисков каждой сделки a . Если система отклонилась от равновесия (одна валюта становится дороже другой), то возникает «рыночная сила» $f = \omega_0^2 x$. Под действием этой силы изменяется скорость роста/падения валюты, то есть появляется \ddot{x} – ускорение динамической системы. Частота колебаний цены валюты определяется формулой $\omega_0^2 = k/m$, где k – коэффициент возвращающей силы, m – мера инертности рынка [6]. Наличие коэффициента k обуславливается существованием «рыночной силы», возвращающей систему в положение равновесия, а m – это, по сути, «масса» валютной биржи. Чем больше мера инертности той или иной биржи, тем медленнее изменяется скорость роста/падения валюты на ней.

Для того, чтобы разобраться, каким образом брокерские комиссии влияют на рыночную активность, в уравнении (5) перенесем внешнюю силу влево и объединим слагаемые, содержащие \dot{x} ,

$$\ddot{x} + (\gamma - \delta + ax^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6)$$

¹Брокер – посредник при заключении различных сделок [5].

²Трейдер – член биржи, участник биржевой торговли, осуществляющий биржевые сделки за собственный счет или по поручению клиентов [7].

Если $\gamma + ax^2 > \delta$, то трейдеру невыгодно заключать сделку, поскольку брокерская комиссия и финансовый риск³ превышают величину желаемой суммы. Вследствие этого колебания в системе не возникают, и рынок остается стабильным. Однако при $\gamma + ax^2 < \delta$ трейдер заключит сделку, поскольку возможность заработать в данном случае выше брокерской комиссии и финансовых рисков. В этом случае в системе возникнут автоколебания.

Введем $x = y - y_{eq}$, где y_{eq} – равновесная рыночная цена, около которой происходят колебания валюты. В таком случае уравнение (6) примет вид

$$\ddot{y} + [\gamma - \delta + a(y - y_{eq})^2] \dot{x} + \omega_0^2(y - y_{eq}) = 0. \quad (7)$$

Положим $u = y - y_{eq}$, $\alpha = \delta - \gamma$, $t = \omega_0 t$. Тогда уравнение (7) переписывается так

$$\omega_0^2 \ddot{u} - \omega_0(\alpha - au^2)\dot{u} + \omega_0^2 u = 0. \quad (8)$$

Разделим уравнение (8) на ω_0^2 , а α вынесем за скобку

$$\ddot{u} - \frac{\alpha}{\omega_0}(1 - \frac{a}{\alpha}u^2)\dot{u} + u = 0 \quad (9)$$

Обозначая $\beta = a/\alpha$, $\mu = \alpha/\omega_0$, получаем

$$\ddot{u} - \mu(1 - \beta u^2)\dot{u} + u = 0.$$

Положив $\rho = \sqrt{\beta}u$, получим уравнение ван дер Поля

$$\ddot{\rho} - \mu(1 - \rho^2)\dot{\rho} + \rho = 0 \quad (10)$$

анализ которого общеизвестен (см., например, [9]).

Заключение

Приведены результаты анализа двух моделей, описывающих когнитивные и социальные процессы. Подчеркнута их общность, а именно, наличие автоколебательных режимов. Описанные простые модели интерпретированы с физической точки зрения, что существенно упрощает предсказание динамики таких далеких друг от друга систем, как человеческий мозг и валютная биржа. Можно высказать предположение, что человеческий мозг «выстраивает» вокруг себя системы, работающие по тем же законам, что и он сам. Причины изменения парадигмы науки (появление *socio* рядом с *cognito*), возможно, состоит в том, что процессы в социуме и когнитивные процессы тесно связаны между собой и испытывают взаимное влияние.

Выражаю благодарность чл.-корр. РАН Д.И. Трубецкову за руководство данной работой.

³Финансовый риск – риск, связанный с вероятностью потерь финансовых ресурсов (денежных средств) [8].

Библиографический список

1. *Rabinovich M.I., Friston K.J., Varona P.* Principles of Brain Dynamics. Global State Interactions. London: MIT Press, 2012. P. 71.
2. *Wilson H.R., Cowan J.D.* Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons // *Biophys. J.* 1972. Vol. 12. P. 1.
3. *Осовец С.М., Гинзбург Д.А. и др.* Электрическая активность мозга: Механизмы и интерпретация// *УФН.* 1983. Т. 141, вып. 1. С. 103.
4. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. С. 161.
5. Большая советская энциклопедия: В 30 томах. М.: Советская энциклопедия, 1969–1978.
6. *Царев И.Г.* Физико-математические аналогии в экономике. М.: ФГУП ЦПП, 2005. С. 146.
7. Финансы. Толковый словарь. 2-е изд. М.: «ИНФРА-М», изд-во «Весь Мир», 2000.
8. *Литовских А.М.* Управление финансовыми рисками // Финансовый менеджмент: Конспект лекций. Таганрог: Изд-во Таганрогского государственного радиотехнического университета, 1999. 76 с.
9. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. 2-е изд. М., 1959. С. 82.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 29.04.2013

ON THE QUESTION OF TWO SELF-EXCITING OSCILLATION MODELS IN NON-PHYSICAL SYSTEMS

E. S. Seliverstova

In this article Wilson-Cowan model for interactions of excitatory and inhibitory neurons and model of currency oscillations on a Forex market were considered.

Keywords: Self-exciting oscillations, limit cycle, phase synchronization.



Селиверстова Екатерина Сергеевна – родилась в Энгельсе (1993). Окончила среднюю школу № 16 с золотой медалью (2010). Студентка 3 курса факультета нелинейных процессов СГУ имени Н.Г. Чернышевского. Область научных интересов – теория колебаний и волн.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: esseliverstova@yandex.ru