Изв. вузов «ПНД», т. 21, № 3, 2013 УДК 534

# ЕЩЕ РАЗ ОБ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ И ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ. ОСНОВАНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

*П. С. Ланда*

Рассматривается удивительное явление: поведение всех колебательных и волновых систем в значительной степени является очень похожим, несмотря на существенные различия в физической природе этих систем и в масштабе происходящих в них процессов. Это явление наблюдалось многими исследователями, однако детально в литературе оно не излагалось, по-видимому, потому что его причины были не вполне ясны. Наиболее детально этот факт описан в замечательной книге С.Э. Шноля где он описал результаты своих многолетних экспериментов. На основе этих экспериментов Шноль вычислял распределения вероятностей для скоростей процессов, происходящих в исследуемых им системах, и показал, что с точностью до масштабного множителя эти скорости совпадают. Правда, объяснения причин этого явления, которые приводит автор, представляются сомнительными. Автор называет эти причины «флуктуациями пространства и времени». Согласно общей теории относительности такие флуктуации могут существовать, но только на очень больших расстояниях и (или) при очень больших скоростях. В работах Шноля расстояния не превосходят радиуса орбиты Земли, а скорости не больше, чем скорость альфа-распада (обычно эта скорость составляет несколько процентов от скорости света в вакууме). И самое главное – это то, что наблюдаемые им явления вполне могут быть объяснены, исходя из классической физики. На универсальность колебательных процессов обращали внимание Л.И. Мандельштам, С.П. Стрелков и автор этой работы.

*Ключевые слова:* Универсальность колебательных и волновых процессов, стохастический резонанс, математические модели, нерешаемые задачи.

## Введение

Специалисты по теории колебаний (и нелинейной динамике) давно замечали, что поведение всех колебательных систем имеет много общего. В книге С.Э. Шноля «Герои, злодеи, конформисты отечественной науки» (М.: Изд-во ЛИБРОКОМ, 2010. 720 с.), посвященной развитию биологии и биофизики в Советском Союзе и вышедшей уже в трех изданиях, кроме рассказов о биологии, автор кратко описал результаты своих многолетних экспериментов по измерению скоростей протекания различных случайных процессов, в частности альфа-распада, в зависимости от ряда факторов, например, времени суток. Хотя многие физики и биологи не согласны с его выводами, предполагая, что его данные ошибочны, мне показалось, что его результаты вполне правдоподобны. Поэтому они вызвали у меня желание получить их математически на относительно простых моделях. Познакомившись с автором, я узнала о том, что эти результаты более детально описаны в другой его книге, более специальной, текст которой имеется в интернете. Эта книга издана шведским издательством на русском языке и называется «Космофизические факторы в случайных процессах» [1]. В указанной книге автор показал, что скорости всех исследованных им процессов зависят от времени суток и времени года, причем эти зависимости являются приблизительно периодическими и не зависящими от физической природы рассматриваемых процессов. Отсюда автор сделал правильные выводы, что все эти процессы являются универсальными, а периодичность связана с вращением Земли вокруг Солнца.

Свою работу, написанную в 1997 году еще до того, как я прочитала указанную книгу Шноля, я назвала «Универсальность законов теории колебаний. Типы и роль математических моделей», хотя дать четкое объяснение причин этой универсальности я не могла. Даже в классических лекциях Л.И. Мандельштама [2] по теории колебаний в качестве объяснения этой универсальности приводится только сравнение теории колебаний с другими науками. Там написано: «В отличие от других наук, которые интересуются главным образом тем, что происходит с телом в данный момент времени, теория колебаний интересуется общим характером процесса, взятого как целое на большом интервале времени». По существу, в этой работе констатируется факт универсальности без объяснения причин. В своей работе, указанной выше, я написала: «Имеется много спекуляций по поводу общности законов теории колебаний. Некоторые утверждали, что эта общность основана на подобии уравнений, описывающих колебательные процессы в различных системах. Часто это, действительно, так. Однако указанные законы не зависят от конкретной формы уравнений. Достаточно только, чтобы эти уравнения принадлежали к определенному классу, который сравнительно широк».

Об универсальности законов теории колебаний написано и в замечательном учебнике С.П. Стрелкова, последнее издание которого вышло в 2005 году [3]. Автор написал: «Физическая сущность тех процессов, в которых имеют место колебания, различна: например, колебания железнодорожного моста и колебания тока в электрическом контуре – совершенно различные явления. Но даже беглое знакомство с законами колебаний в том и другом случае показывает много общего между этими колебательными процессами, как мы их называем. Детальный анализ колебательных процессов, встречающихся в физике и технике, показывает, что основные законы колебаний во всех случаях одинаковы. Такая, в известном смысле, универсальность законов колебательных процессов заставляет выделить их в отдельную дисциплину, которая и носит название теории колебаний».[1]

Универсальность, в частности, проявляется в том, что одни и те же явления наблюдаются в системах самой разной физической природы, хотя, казалось бы, что они должны сильно зависеть от вида системы. Можно, конечно, рассматривать уни-

[1] С.П. Стрелков преуменьшил роль универсальности теории колебаний. Работы последних десятилетий показали, что подобная универсальность колебательных процессов наблюдается и в химии, биологии, экономике и других областях науки. Кроме того следует заметить, что в последние десятилетия вместо названия «теория колебаний» чаще используется название «нелинейная динамика». С одной стороны это хорошо, потому что подчеркивается роль нелинейности, а с другой стороны – плохо, потому что при этом забывается о том, что наука «теория колебаний» была создана в России в тридцатых годах XX века Л.И. Мандельштамом.

версальность как экспериментальный факт и объявить ее законом теории колебаний. Тогда объяснения причин не требуется. Мы же не объясняем причины того, что ускорение материальной точки пропорционально действующей силе. Но тогда надо сформулировать это именно как закон в явном виде со ссылками на эксперименты. По моему мнению, это пока не сделано (так же, как до сих пор не сформулированы и другие законы теории колебаний). Этим теория колебаний отличается от других точных наук, для которых в первую очередь формулируются их законы.

В качестве очень интересного примера универсальности теории колебаний мы рассмотрим ниже явление, ставшее известным относительно недавно и вызвавшее различные толкования. Это явление получило название «стохастический резонанс». Сразу же отметим, что никакого резонанса в классическом понимании этого слова в исследованных системах не существует, а наблюдается лишь очень общее явление, известное в теории колебаний. Это универсальное явление заключается в изменении параметров системы при внешнем воздействии, регулярном или случайном. Влияние регулярного высокочастотного воздействия детально описано в книге [4], а случайного – в статье [5]. Важно, что характер влияния существенно зависит от частоты воздействия, что и приводит к явлению, названному стохастическим резонансом [6, 7].

## 1. Стохастический резонанс как универсальное явление в колебательных системах

Понятие стохастического резонанса впервые было введено в 1981 году, как было указано выше, в работах [6, 7], главным образом, с целью объяснения наблюдаемой близкой к периодической (с периодом $T$, равным приблизительно 100000 лет) смены эпох оледенения. В качестве одной из причин такой смены можно предположить известное периодическое изменение эксцентриситета Земной орбиты с тем же периодом (правда, непонятно, как могли измерить этот период). Но это изменение очень мало и, как показывают расчеты, не может вызвать существенных изменений климата. Однако, добавив в исходные уравнения небольшой шум, авторы упомянутых работ обнаружили, что такое изменение в принципе возможно. Так было открыто явление, названное позднее стохастическим резонансом. И, хотя вопрос о соответствии между приведенным объяснением и реальными причинами смены эпох оледенения до сих пор не решен, явление стохастического резонанса стало широко известным.

Первые исследователи стохастического резонанса моделировали явление смены эпох оледенения, используя уравнение для температуры поверхности Земли в форме уравнения движения легкой частицы в бистабильном потенциальном поле, возмущенном малым периодическим сигналом и аддитивным белым шумом [8]. Это уравнение имеет вид

$$\dot{x} + f(x) = A\cos\omega t + \xi(t), \tag{1}$$

где $x$ – смещение частицы; $A\cos\omega t$ – слабый периодический сигнал частоты $\omega$; $\xi(t)$ белый шум интенсивности $K$; $f(x) = dU(x)/dx$, $U(x)$ – симметричный двухъямный потенциал. Мы рассматриваем простейший случай такого потенциала, а именно $U(x) = x^4/4 - x^2/2$ (в этом случае $f(x) = x^3 - x$). Бистабильность потенциального поля означает, что в системе есть два состояния равновесия. Параметры потенциального поля можно выбрать так, чтобы одно из положений равновесия соответствовало оледенению, а второе – его отсутствию. Эти состояния равновесия разделены потенциальным барьером.

Решение уравнения Фоккера–Планка, соответствующего уравнению (1), позволило найти зависимости коэффициента усиления слабого периодического сигнала от интенсивности шума при фиксированном значении частоты сигнала. Оказалось, что эти зависимости имеют максимум при некотором значении интенсивности шума и напоминают по форме резонансные зависимости амплитуды колебаний от частоты для линейного осциллятора. Последнее привело многих исследователей к предположению, что максимум имеет место тогда, когда период сигнала равен удвоенному среднему времени перехода через потенциальный барьер. Более детальное решение уравнения (1) показало, что это предположение неверно, потому что, если бы оно было верным, коэффициент усиления должен был бы достигать максимума не только при изменении интенсивности шума, но и при изменении частоты периодического сигнала. Однако известно, что коэффициент усиления монотонно уменьшается с ростом частоты сигнала.

В работах [8, 9] нами показано, что причины резонансно-подобной зависимости коэффициента усиления от интенсивности шума лежат в изменении параметров системы при наличии шума.

## 2. Необходимые свойства математических моделей и их типы

Свойство универсальности является исключительно важным для анализа конкретных систем и построения математических моделей. Поскольку теория колебаний изучает не конкретные системы, а их модели, то можно предположить, что для каждой системы надо строить свою модель, что практически невозможно. Однако благодаря свойству универсальности мы можем для заданной конкретной системы выбрать наиболее простую модель и получить удовлетворительные результаты.

Все используемые модели можно условно разделить на четыре типа:

1) модели–портреты исследуемой системы;
2) модели типа «черный ящик»;
3) модели класса систем, состоящих из множества подобных элементов (aggregating models);
4) модели классов явлений, которые могут происходить в реальных системах.

*Модели первого типа* строятся на основе описания, как можно более детального, всех элементов изучаемой системы. Такие модели, в том или ином приближении, изучаются в физике. Это – известные в физике уравнения: уравнения Ньютона, Максвелла, Навье–Стокса и др. В качестве другого примера можно указать некоторые модели сердечной активности и дыхания, пытающиеся охватить как можно более детально рассматриваемые процессы (см., например, [10]). Эти модели, как правило, очень сложные и громоздкие для анализа и выявления главных свойств поведения рассматриваемой системы.

Для конструирования *моделей второго типа*, исследуемая система рассматривается как некоторый «черный ящик» с заданными входом и выходом, которые могут быть измерены. Дальше задается наиболее простая модель с тем же входом. Свободные параметры этой модели определяются из условий минимума, согласно заданному критерию, разницы между выходами модели и исследуемой системы. Ряд примеров таких моделей для химических реакций приведен в работе [11].

*Модели третьего типа* строятся на основе анализа совместного поведения отдельных элементов исследуемой системы. Классическим примером моделей этого типа является модель «хищник–жертва» Лотки–Вольтерры [12, 13]. Другие интересные примеры – это модель иммунной реакции, иллюстрирующей колебательный характер некоторых хронических болезней [14], модель экономического развития человеческого общества [15, 16], модель засоления Каспийского моря [17] и многие другие.

Наконец, *модели четвертого типа* строятся на основе анализа определенных явлений независимо от того, в какой системе они происходят. Очень важный пример моделей этого типа, рассмотренный в последние годы, – это модель срыва вихрей и связанного с этим срывного флаттера.

Следует отметить, что модель явления может быть достаточно простой, потому что для ее построения мы можем отбросить все другие явления, кроме того, которое нас интересует. Например, если нас интересует переход к турбулентности, мы можем использовать наиболее простую модель, генерирующую случайные колебания. В качестве такой модели в работе [18] мы использовали маятник со случайно вибрирующей осью подвеса. Наши численные расчеты показали, что поведение такого маятника при увеличении интенсивности флуктуаций оси подвеса удивительным образом похоже на развитие турбулентности в струях при удалении от сопла. Это лишний раз подтверждает наше предположение об универсальности колебательных и волновых процессов.

В своих работах по математическим моделям Ю.И. Неймарк налагал на уравнения модели требование изоморфности уравнениям моделируемой системы. Но сам Юрий Исаакович использовал для моделирования очень часто неизоморфные уравнения. Например, для модели экономического развития человеческого общества или для модели засоления водоемов написать изоморфные уравнения просто невозможно, потому что мы не знаем, каким уравнениям подчиняются указанные процессы.

Подобных примеров можно привести много. Некоторые явления в принципе нельзя описать математическими уравнениями. Такие системы мы назвали «нерешаемыми» [19]. К ним можно отнести большое количество биологических и гидродинамических систем, где случайность играет решающую роль, но ее характеристики нам не известны.

## 3. «Нерешаемые» задачи и использование моделей для анализа их решения

Так называемые «нерешаемые» задачи играют большую роль в современной нелинейной динамике, теории колебаний и биофизике. Этот термин впервые был введен Л.А. Блюменфельдом в его книге по биофизике [20]. Под этим термином автор понимал задачи, которые не могут быть решены с использованием только известных законов физики. Это определение относилось, главным образом, к явлениям живой природы. В работе [19] под этим термином понимались задачи, при решении которых флуктуации, существующие в любой системе, оказывают значительное влияние на поведение системы и трудно формализуемы. Наибольшие трудности возникают тогда, когда эти флуктуации являются нестационарными, например, в гидродинамике при возникновении случайных потоков. Такие потоки всегда существуют при обтекании так называемых плохо обтекаемых тел, когда поверхность тела является негладкой. Эти потоки вызваны, главным образом, обратной струей позади обтекаемого тела, которая возникает при плохом обтекании. Эта обратная струя всегда случайна и непредсказуема. Очевидно, что в биофизических задачах случайность обязательно должна учитываться, потому что она является основной причиной биологической эволюции.

Очевидно, что все проблемы такого рода не могут быть решены ни аналитически ни численно. Именно в этом смысле подобные задачи были названы нами нерешаемыми, хотя, насколько нам известно, никаких отклонений от известных физических законов до сих пор в биофизике обнаружено не было.

По-видимому, единственным способом как-то «решить» нерешаемые задачи является построение моделей, основанных на экспериментальных данных. В этом нам очень сильно помогает универсальность колебательных явлений. Например, в работе [21], касающейся срыва вихрей и срывного флаттера, мы использовали модель, основанную на классическом уравнении ван дер Поля, и получили результаты, близкие к известным. Хотя очевидно, что рассматриваемые явления не описываются таким простым уравнением и, более того, строго говоря, не являются автоколебаниями.

Основное внимание в работе [21] уделяется именно срывному флаттеру, потому что это явление широко распространено и является причиной многих технических катастроф. Как правило, срывной флаттер связан с известным в теории колебаний явлением затягивания, рассмотренным в классических работах А.А. Андронова и А.А. Витта «К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы» [22], К.Ф. Теодорчика «Автоколебательные системы» [23] и А.П. Скибарко, С.П. Стрелкова «Качественное исследование процессов в генераторе по сложной схеме. К теории затягивания по ван дер Полю» [24] на примерах генераторов с двумя степенями свободы. В работе [22] показано, что в таких генераторах устойчивым является одночастотный (синхронный) режим генерации, когда различные частоты синхронизуются.

Рассмотрение с помощью даже такой относительно простой модели, как модель ван дер Поля, позволяет на качественном уровне определить причины указанных катастроф. Основная беда этих катастроф состоит в том, что их очень трудно предсказать. По-видимому, в этом была основная причина относительно недавней гибели на вертолете известнейшего глазного хирурга Федорова. В качестве одного из новейших примеров «нерешаемых» задач, тоже связанным со срывными колебаниями, мы можем привести задачу о «волнах–убийцах» [25].

## Заключение

На рассмотренных примерах мы продемонстрировали, что использование моделей, описываемых относительно простыми уравнениями (даже не изоморфными уравнениям моделируемой системы), в ряде случаев приводит к возможности описать поведение системы, по крайней мере, качественно.

## Библиографический список

1. *Шноль С.Э.* Космофизические факторы в случайных процессах / Ред. Д.Д. Рабунский. Stockholm: Svenska Fysikarkivat, 2009. 388 с.

2. *Мандельштам Л.И.* Лекции по колебаниям (1930–1932). Собр. соч. Т. 4. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 241.
3. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. Изд-во «Лань», 2005.
4. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994; *Блехман И.И.* Вибрационная механика и вибрационнная техника. М.-СПб: «Руда и металлы», 2013.
5. *Landa P.S., Neimark Yu.I., McClintock P.V.E.* Changes in the effective parameters of averaged motion in nonlinear systems subject to noise // Journal of Statistical Physics. 2006. Vol. 125. P. 593.
6. *Benzi R., Sutera A., Vulpiani A.* The mechanism of stochastic resonance // J. Phys. A: Math. Gen. 1981. Vol. 14. L453–L457.
7. *Nicolis G. and Nicolis C.* Stochastic aspects of climate transitions and additive fluctuations // Tellus. 1981. Vol. 33. P. 225.
8. *Ланда П.С.* Механизм стохастического резонанса // ДАН. 2004. Т. 399, № 4. С. 1.
9. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // Physics Reports. 2000. Vol. 323, № 1. P. 1.
10. Modelling the Dynamics of Biological Systems / Eds. Mosekilde E., Mouritsen O.G. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
11. *Gontar V.* A new theoretical approach to the description of physico-chemical reaction dynamics with chaotic behavior // Chaos in Chemistry and Biochemistry / Eds. R.J. Field and Gyorgyi. London: World Scientific, 1993. P. 225.
12. *Lotka A.J.* Undamped oscillations derived from the law of nass action // J. Amer. Chem. Soc. 1920. Vol. 42. P. 1595.
13. *Volterra V.* Lecons sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie. Paris: Cauthier-Villars, 1931.
14. *Landa P.S.* Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1996.
15. *Неймарк Ю.И.* Математическая модель взаимодействия между производителями, продуктом и потребителями // Динамика систем (динамика, стохастичность, бифуркации). Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1990. С. 84.
16. *Неймарк Ю.И.* Математическая модель сообщества «производители–продукт–управленцы» // Математическое моделировние как наука и искусство. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2010a. С. 83.
17. *Неймарк Ю.И.* Засоление водоема с заливом и загадки Каспийского моря // Математическое моделировние как наука и искусство. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2010b. С. 46.
18. *Landa P.S.* Universality of oscillation theory laws. Types and role of mathematical models // Discrete Dynamics in Nature and Society. 1997. Vol. 1. P. 99.
19. *Ланда П.С., Гиневский А.С.* Использование математических моделей для решения «нерешаемых» задач // Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления. Вибрационная механика / Под ред. В.В. Белецкого, Д.А. Индейцева и А.Л. Фрадкова. Ин-т проблем машиноведения РАН. СПб.: Наука, 2009. С. 349.
20. *Блюменфельд Л.А.* Решаемые и нерешаемые проблемы биологической физики. М.: УРСС, 2002.

21. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Some «non-solvable» problems and methods of their «solution». Vortex separation and a stochastic model of stall flutter (в печати).
22. *Андронов А.А., Витт А.А.* К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы // ЖТФ. 1934. Т. 4. С. 122.
23. *Теодорчик К.Ф.* Автоколебательные системы. М.-Л.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1952.
24. *Скибарко А.П., Стрелков С.П.* Качественнное исследование процессов в генераторе по сложной схеме. К теории затягивания по Ван-дер-Полю // ЖТФ. 1934. Т. 4. С. 158.
25. *Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.* Волны – убийцы. Н. Новгород: ННГУ, 2004.

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

*Поступила в редакцию 24.09.2013*

## ONE MORE ON UNIVERSALITY OF OSCILLATORY AND WAVE PROCESSES. FOUNDATIONS FOR CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODELS

*P. S. Landa*

Nonlinear systems with random sources are considered. As a rule, such systems cannot be solved both analytically and numerically. But due to the universality of the oscillation theory we can use simple models and obtain qualitative results.

*Keyword:* Universality of oscillatory and wave processes, stochastic resonance, mathematical models, unsolvable problems.

*Ланда Полина Соломоновна* – окончила физический факультет МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий научный сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор десяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer», «Регулярные и хаотические колебания», вышедшей в издательстве «Springer» в 2001 году, и нескольких обзоров, в том числе в УФН и «Physics Reports». Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».

119899 Москва, Ленинские горы, МГУ
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: planda@mail.ru