



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АДДИТИВНОГО ИСТОЧНИКА ШУМА

В. В. Семенов

В численном и натурном эксперименте исследуется эволюция вероятностного распределения в автогенераторах при увеличении интенсивности аддитивного шумового воздействия. Рассматриваются две различные системы: генератор ван дер Поля и генератор Анищенко–Астахова. Показано разрушение характерной для зашумленных автоколебаний формы вероятностного распределения аддитивным шумом.

Ключевые слова: Стохастическая бифуркация Андронова–Хопфа, влияние шума, генератор ван дер Поля, генератор Анищенко–Астахова.

Введение

Влияние шума на нелинейные колебательные системы является интересным и актуальным направлением исследований в области нелинейной динамики и статистической радиофизики. Это связано как с принципиальной неустранимостью случайных сил в реальных системах любой природы, так и с разнообразностью вызванных шумом эффектов. К таким эффектам можно отнести, например, стохастический резонанс [1–3], когерентный резонанс [4,5], стохастическую синхронизацию [6–9], индуцированный шумом хаос [10–12], подавление шумом хаотической динамики [13,14], синхронизацию ансамбля осцилляторов случайной внешней силой [15] и пр. Далеко не все явления, связанные с шумом, изучены в достаточной степени. Одним из важных вопросов в исследовании зашумленных динамических систем остается изучение стохастических бифуркаций, то есть бифуркаций, происходящих в присутствии шума или в результате воздействия шума. В последнем случае интенсивность шума играет роль бифуркационного параметра. В системах с шумом меняется само определение бифуркации. Стохастические бифуркации часто связывают с качественными изменениями вероятностного распределения при вариации параметров системы или шумового воздействия [16,17].

Одной из важнейших бифуркаций в динамических системах является бифуркация Андронова–Хопфа, с которой связан переход в режим генерации. Стохастическая бифуркация Андронова–Хопфа состоит в возникновении характерного для

зашумленных автоколебаний вероятностного распределения, имеющего форму замкнутого кратера. В точках детерминированного цикла имеет место локальный максимум плотности вероятности, а в неустойчивой точке равновесия – минимум. Стохастическая бифуркация Андронова–Хопфа была исследована в ряде работ для различной статистики шума [11,17–22]. Было показано, что стохастическая бифуркация Андронова–Хопфа происходит не в одной точке, а существует так называемый бифуркационный интервал соответствующий постепенной перестройке вероятностного распределения [11,18,19]. Ширина этого интервала растет с ростом интенсивности шума. Таким образом, при фиксированном значении управляющего параметра, соответствующем режиму генерации, рост интенсивности шума приводит к переходу внутрь бифуркационного интервала. При этом кратерообразная форма вероятностного распределения нарушается, что можно рассматривать как разрушение автоколебаний. Для разрушения развитой генерации необходим шум большой интенсивности. В этом случае приближенные аналитические методы расчета стационарной плотности вероятности могут приводить к заметным ошибкам. Численное интегрирование стохастических уравнений также не является надежным методом исследования, так как точность численных алгоритмов при большой интенсивности шума сильно ухудшается. Чтобы с полной уверенностью сделать вывод о существовании бифуркационного интервала и разрушении режима генерации с ростом шума, необходимо сопоставить аналитические результаты и компьютерные расчеты с результатами натурных экспериментов. Насколько нам известно, существование бифуркационного интервала при стохастической бифуркации Андронова–Хопфа исследовалось экспериментально только в сравнительно давней работе [21] на аналоговой модели бруселятора. Существование бифуркационного интервала было подтверждено и показано разрушение характерного для зашумленных автоколебаний вероятностного распределения с ростом шума. Однако полученные результаты могли быть связаны со спецификой шума, который в [23] являлся параметрическим (мультипликативным), что существенно влияет на поведение системы. Кроме того, исследуемый шум был узкополосным.

В данной работе мы имели целью экспериментально исследовать разрушение автоколебательного режима с помощью аддитивного широкополосного шума в классической модели периодического автогенератора – осцилляторе ван дер Поля и сравнить результаты с выводами теории [11]. Результаты, полученные для генератора ван дер Поля, сопоставляются с данными экспериментов, проведенных для более сложной автоколебательной системы – хаотического генератора Анищенко–Астахова.

1. Эволюция вероятностного распределения в генераторе ван дер Поля с аддитивным источником шума

В качестве базовой модели для исследования возникновения автоколебаний рассмотрим осциллятор ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = \xi(x, \dot{x}, t). \quad (1)$$

Здесь переменная x и время t являются безразмерными величинами, $\xi(x, \dot{x}, t)$ – источник шума. Уравнение (1) описывает многие автоколебательные системы различной природы, в том числе радиотехнический генератор. Параметр ε управляет режимом генератора. В отсутствие шума при $\varepsilon = 0$ имеет место суперкритическая («мягкая») бифуркация Андронова–Хопфа, в результате которой из устойчивого фокуса в начале координат $x = 0, y = \dot{x} = 0$ рождается устойчивый предельный цикл. При аддитивном шуме $\xi(x, \dot{x}, t) = \sqrt{2D}n(t)$ (где $n(t)$ – нормированный источник, D – константа, задающая интенсивность шума), используя метод усреднения, в квазигармоническом приближении можно получить следующее выражение для стационарной плотности вероятности:

$$p(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{1}{16D} ((x^2 + y^2)^2 - 8\varepsilon(x^2 + y^2)) \right\}, \quad (2)$$

где C – нормировочная константа. Исследовав экстремумы выражения (2), легко найти стохастическую бифуркацию при $\varepsilon = 0$, приводящую к возникновению кратерообразного распределения. При этом характер бифуркации и бифуркационное значение параметра ε не зависят от интенсивности шума D . Однако квазигармоническое приближение корректно при $D \ll \varepsilon^2$ и вблизи значения $\varepsilon = 0$ при конечной интенсивности шума может приводить к ошибочным результатам. Выражение для вероятностного распределения в автогенераторе, справедливое при $\varepsilon^2 \gg D$, получено в [11] на основании аналитического решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$p(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{1}{32D} ((x^2 + y^2)^2 - 8\varepsilon(x^2 + y^2)) - \frac{3}{4}xy \right\}. \quad (3)$$

Анализ выражения (3) дает следующую картину стохастической бифуркации: при $\varepsilon < -3D/2$ распределение $p(x, y)$ имеет единственный максимум в начале координат, что соответствует зашумленному состоянию устойчивого равновесия при $x = 0, y = 0$. Область $-3D/2 < \varepsilon < 3D/2$ представляет собой бифуркационный интервал. На левой границе интервала $\varepsilon = -3D/2$ в точках $x_{1,2} = \pm\sqrt{(2\varepsilon + 3D)}$, $y_{1,2} = \mp\sqrt{(2\varepsilon + 3D)}$ возникают два максимума, что приводит к разрушению радиальной симметрии распределения. При $\varepsilon = 3D/2$ возникает замкнутый кратер вокруг минимума распределения в начале координат. Все вышесказанное иллюстрируется бифуркационной диаграммой, приведенной на рис. 1.

В рамках данной работы были проведены предварительные численные исследования системы (1) с использованием численного интегрирования стохастических уравнений и построены вероятностные распределения $p(x, y)$ путем статистической обработки результатов интегрирования на достаточно большом интервале времени. Расчеты показали наличие бифуркационного интервала и разрушение автоколебаний с ростом интенсивности шума. При этом наблюдаемая эволюция плотности вероятности при вариации параметров ε и D , в целом, хорошо согласуется с выводами теории, изложенной в [11]: бифуркационная диаграмма, полученная нами в численных экспериментах, почти полностью повторяет диаграмму, полученную там.

В ходе работы был проведен ряд натуральных экспериментов, направленных на исследование влияния аддитивного шума на режим автогенерации. В этих целях была создана установка, представляющая собой аналоговую модель системы (1). Схема

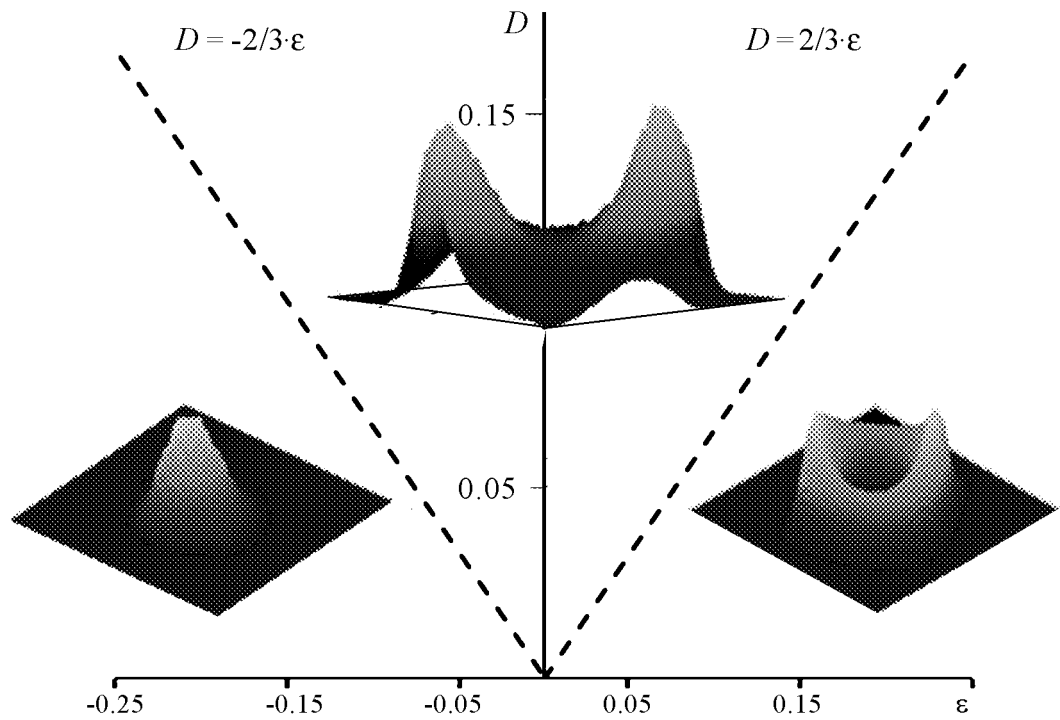


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы (1) согласно работе [11] (штриховые линии обозначают границы бифуркационного интервала)

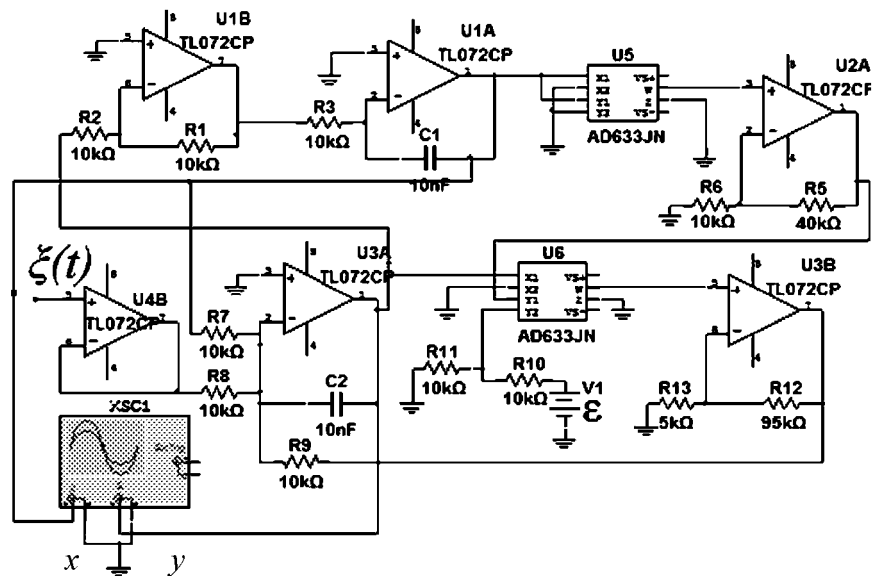


Рис. 2. Принципиальная схема экспериментальной установки (аналоговая модель генератора ван дер Поля)

установки представлена на рис. 2. Уравнения, описывающие эту схему в физических переменных, имеют вид

$$R_0 C \dot{x} = y, \quad R_0 C \dot{y} = (\varepsilon - x^2)y - x + \xi(t), \quad (4)$$

где x, y – напряжения, снимаемые с соответствующих выходов установки. Параметры схемы подбирались таким образом, чтобы имело место количественное совпадение безразмерных переменных x и $y = \dot{x}$ в (1) и соответствующих величин в (4). Таким образом, уравнения (1) и (4) отличаются только масштабом времени, который в (4) задается параметрами $R_0 = 10$ кОм и $C = 10$ нФ. В уравнения (4) также входит случайное слагаемое $\xi(t)$, которое описывает напряжение, создаваемое генератором шума. В экспериментах использовался широкополосный генератор гауссова шума Г2-59, спектральная плотность которого практически постоянна в полосе частот 0–100 кГц. В этом частотном диапазоне можно считать $\xi(t) = \sqrt{2D'}n(t)$, где $n(t)$ – нормированный источник с единичной спектральной плотностью. Измеряя экспериментально спектральную плотность сигнала на выходе генератора шума, можно определить интенсивность D' . Она не совпадает с интенсивностью шума D в уравнении (1), поскольку в модели (4) иной масштаб времени. Учитывая это, получаем $D = D'/R_0 C$. При проведении натурных экспериментов снимались реализации переменных $x(t)$ и $y(t)$, которые оцифровывались с помощью АЦП (NI PCI-6133) и обрабатывались на компьютере, что позволяло получить распределение вероятностей $p(x, y)$ и проследить его эволюцию при изменении параметров ε и D .

Проведенные эксперименты подтвердили наличие бифуркационного интервала и зависимость характера распределения от интенсивности аддитивного шума. В экспериментах при $\varepsilon > 0$ наблюдалось разрушение кратерообразной формы распределения с ростом интенсивности шума D . На рис. 3, *a* представлена диаграмм-

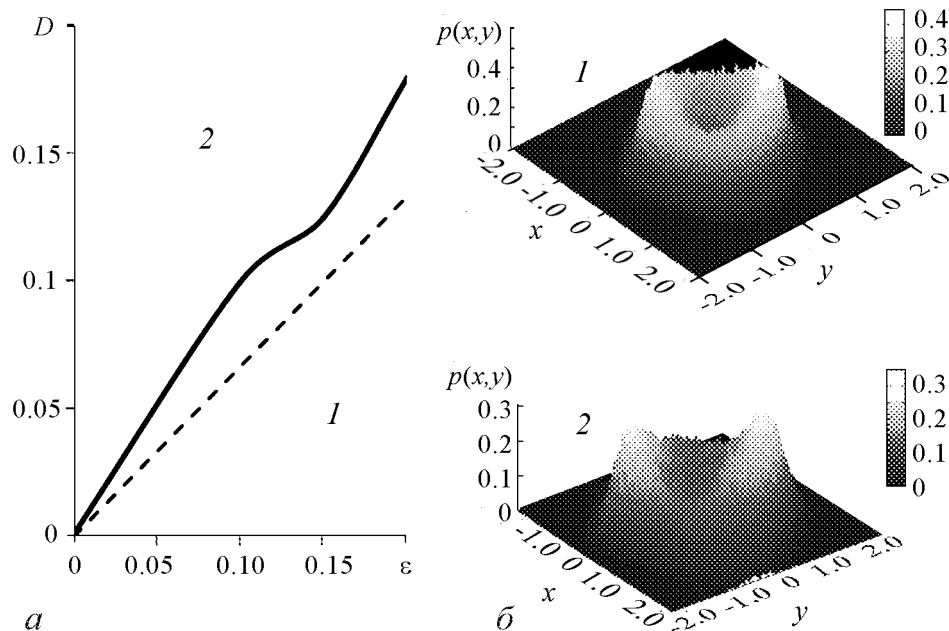


Рис. 3. *a* – диаграмма режимов экспериментальной установки (пунктиром отмечена граница бифуркационного интервала, установленная теоретически в [11]); *b* – распределения плотности вероятности, типичные для каждой из областей

ма режимов автогенератора (4) на плоскости параметров (D, ε) , полученная в результате натурных экспериментов. На диаграмме имеются две области: 1 – область зашумленных автоколебаний; 2 – область, в которой распределение плотности вероятности имеет два пика. Распределения плотности вероятности, характерные для каждой из областей, представлены на рис. 3, б. Штриховой линией отмечена правая граница бифуркационного интервала для осциллятора ван дер Поля $\varepsilon = 3D/2$. Полученные экспериментальные данные находятся в хорошем соответствии с теоретическими результатами работы [11]. С ростом параметра ε наблюдается нелинейный рост значений интенсивности шума D , соответствующих разрушению режима автогенерации. При небольших амплитудах колебаний, демонстрируемых системой (4), отличие схемы от математической модели мало, однако с ростом ε и D оно становится заметным. Таким образом, разрушение кратера распределения в натурном эксперименте несколько отличалось от того, что предсказывает теория и дает численное исследование. Как в численном, так и в натурном эксперименте с увеличением шума происходит одновременное разрушение двух противоположных стенок кратера. В результате образуются два пика в распределении плотности вероятности, а поверхность $p(x, y)$ в окрестности начала координат приобретает форму седла.

2. Эволюция вероятностного распределения в генераторе Анищенко–Астахова с аддитивным источником шума

Можно предположить, что конкретный характер перестройки вероятностного распределения, наблюдаемый в генераторе ван дер Поля, с ростом шума зависит от свойств динамической системы: от ее размерности и формы нелинейности. Однако, при этом, с ростом шума форма кратера, соответствующая зашумленным автоколебаниям, должна разрушаться. В целях проверки данного предположения помимо генератора ван дер Поля с размерностью фазового пространства, равной 2, экспериментально была исследована также аналоговая модель генератора Анищенко–Астахова с инерционной нелинейностью, имеющая размерность 3 [24]. Принципиальная схема экспериментальной установки (рис. 4) описывается системой уравнений (5)

$$F(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 0, \\ 0, x < 0. \end{cases} \quad \begin{cases} R_0 C \dot{x} = mx + y - xz + \xi(t), \\ R_0 C \dot{y} = -x, \\ R_0 C \dot{z} = -g(z - F(x)). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь x, y, z – напряжения, снимаемые с соответствующих выходов схемы; m, g – управляющие параметры; $\xi(t)$ – напряжение, подаваемое с генератора широкополосного гауссова шума. Можно считать, что $\xi(t) = \sqrt{2R_0 C D} n(t)$, где $n(t)$ – нормированный источник шума, D – интенсивность шума при переходе к безразмерному времени, $R_0 = 10$ кОм и $C = 10$ нФ.

При исследовании бифуркаций в трехмерной системе (3) мы ограничились рассмотрением совместного распределения только двух переменных: x и y , поскольку в плоскости этих переменных происходит вращение фазовых траекторий вокруг неустойчивой точки равновесия. Эксперименты показали, что в системе (5) также

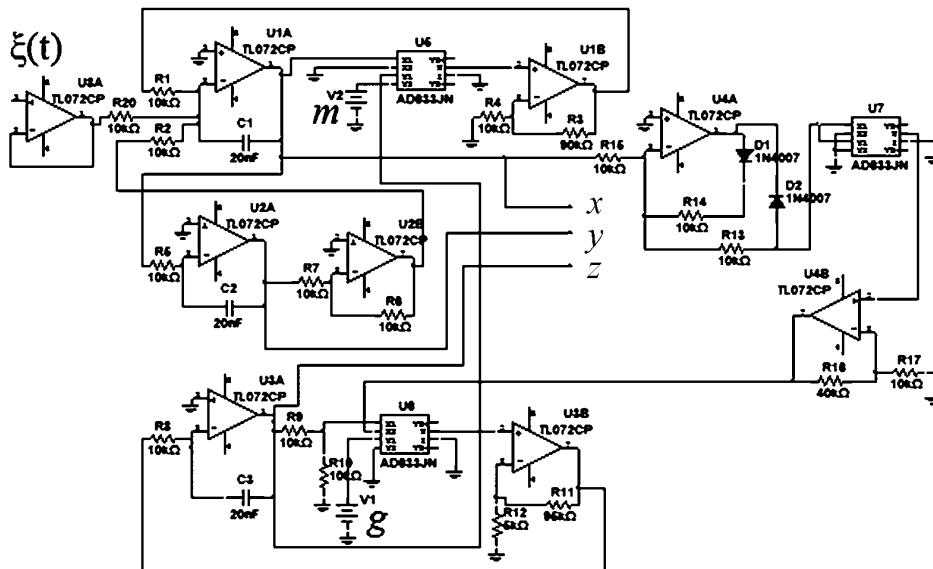


Рис. 4. Принципиальная схема экспериментальной установки (аналоговая модель генератора Анищенко–Астахова)

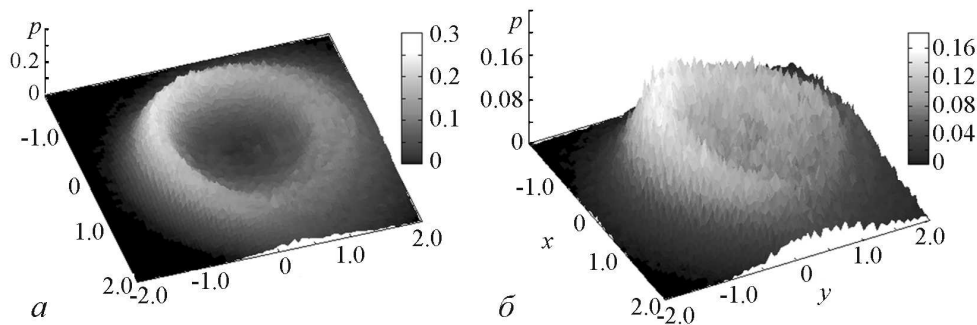


Рис. 5. Распределения плотности вероятности: $a - m = 0.4, g = 0.25, D = 0.11$; $b - m = 0.4, g = 0.25, D = 0.41$

наблюдается разрушение кратерообразной формы распределения при увеличении интенсивности шума D . Причем, происходит разрушение кратера только с одной стороны. На рис. 5 этот эффект хорошо различим.

Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать следующий вывод: экспериментально подтверждено, что не только мультипликативный шум, но также и аддитивный шум при достаточно сильной интенсивности приводит к качественной перестройке формы вероятностного распределения, то есть к стохастической бифуркации. Эта бифуркация соответствует разрушению режима генерации. Данный вывод находится в согласии с теорией, изложенной в [11], и подтверждается численными расчетами. Эффект разрушения автоколебаний шумом носит общий характер и наблюдается в различных автоколебательных системах. При этом конкретный вид эволюции вероятностного распределения зависит от свойств автогенератора.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Т.Е. Вадивасовой, профессору кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ за научное руководство в выполнении данной работы.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (2009–2013 годы)» (контракт № 14.В37.21.0751)

Библиографический список

1. *Benzi R., Sutera A., Vulpiani A.* The mechanism of stochastic resonance// J. Phys. A: Math. Gen. 1981. Vol. 14. P. L453.
2. *Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S.* Stochastic resonance in bistable systems// Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 349.
3. *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гаер Л.* Стохастический резонанс: Индуцированный шумом порядок // УФН. 1999. Т. 42, № 1. С. 7.
4. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherence resonance in a noisy driven excitable system// Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775.
5. *Lindner B., Schimansky-Geier L.* Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagomo system and coherence resonance // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60, № 6. P. 7270.
6. *Neiman A.B.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 3484.
7. *Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable system driven by a periodic force // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75, № 23. P. 4157.
8. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83, № 9. P. 1771.
9. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Садовников С.А., Скороходов В.Н.* Синхронизация автоколебаний в клистронном автогенераторе в присутствии шума // Изв. вузов «ПНД». 2011. Т. 19, № 5. С. 17.
10. *Анищенко В.С., Сафонова М.А.* Индуцированное шумом экспоненциальное разбегание фазовых траекторий в окрестности регулярных аттракторов// Письма в ЖТФ. 1986. Т. 12, вып. 12. С. 740.
11. *Ebeling W., Herzel H., Richert W., Schimansky-Geier L.* Influence of noise on Duffing – van der Pol oscillators// Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1986. Vol. 66. P. 141.
12. *Schimansky-Geier L., Herzel H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator// J. Stat. Phys. 1993. Vol. 70. P. 141.
13. *Короновский А.А. и др.* Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, единый тип поведения связанных хаотических систем// ДАН. 2006. Т. 407, № 6. С. 761.
14. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Короновский А.А., Храмов А.Е., Скороходов В.Н.* Экспериментальное и теоретическое исследование влияния внешнего шума на динамику клистронного автогенератора// Радиотехника и электроника. 2012. № 1. С. 49.
15. *Goldobin D.S., Pikovsky A.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise// Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 045201(4).

16. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
17. Arnold L. Random Dynamical System. Berlin: Springer, 2003.
18. Lefever R., Turner J. Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise// Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1631.
19. Olarrea J., de la Rubia F.J. Stochastic Hopf bifurcation: The effect of colored noise on the bifurcational interval// Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 1. P. 268.
20. Arnold L., Sri Namachshivaya N., Schenk-Yoppé K.R. Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: A base study // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. P. 1947.
21. Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H. Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances// Chaos, Solitons, and Fractals. 2009. Vol. 39. P. 7.
22. Zakharova A., Vadivasova T., Anishchenko V., Koseska A., Kurths J. Stochastic bifurcations and coherence-like resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81, № 1. P. 011106.
23. Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F. Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise// Phys. Rev. F. 1987. Vol. 36. P. 834.
24. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. 2-е изд. М.: УРСС, 2009.

Саратовский госуниверситет
им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 13.03.2013
После доработки 18.04.2013

EXPERIMENTAL RESEARCH OF SELF-OSCILLATION DESTRUCTION UNDER ADDITIVE NOISE ACTION

V. V. Semenov

Evolution of probabilistic distribution in self-sustained oscillators with increase of noise intensity is studied by means of numerical simulation and natural experiments. Two different systems are considered: van der Pol and Anishchenko–Astakhov self-sustained oscillators. Destruction of probabilistic distribution form, which is typical for noisy self-oscillation, by additive noise is showed.

Keyword: Stochastic Andronov–Hopf bifurcation, influence of noise, Van der Pole self-sustained oscillator, Anishchenko–Astakhov self-sustained oscillator.



Семенов Владимир Викторович – родился в Саратове (1990). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2012). На данный момент является аспирантом кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Область научных интересов: бифуркации в стохастических системах, скрытая передача информации методами нелинейной динамики. Основной подход в исследованиях – натурный радиофизический эксперимент. Автор нескольких научных публикаций.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: semenov_v_v@list.ru