

ВЛИЯНИЕ СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИИ НА СТРУКТУРЫ ТИПА «СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПАУТИНА»

Е. В. Фельк

Исследовано влияние слабой нелинейной диссипации на устройство фазового пространства отображения-генератора стохастической паутины. Выявлен бифуркационный сценарий трансформаций аттракторов при увеличении диссипации.

Ключевые слова: Стохастическая паутина, слабодиссипативные системы, консервативный хаос.

Введение

Хорошо известно, что свойства консервативных и диссипативных динамических систем существенно различаются. В частности, хаос в неинтегрируемых консервативных системах наблюдается при любых значениях параметров, но, как правило, в ограниченной области фазового пространства. В диссипативных системах хаос возникает только в определенном диапазоне параметров, а бассейн притяжения хаотического режима занимает значительную часть фазового пространства [1–3]. Если ввести в консервативную систему малую диссипацию, то система перейдет в пограничное состояние, в котором можно наблюдать характерные черты как консервативной, так и диссипативной динамики. Исследованию систем со слабой диссипацией посвящен ряд работ [4–11], в частности, обнаружено, что для таких систем характерно сосуществование очень большого числа регулярных аттракторов.

Однако почти во всех работах исследовалась динамика систем общего вида или невырожденных в смысле КАМ-теоремы. Хорошо известно, что устройство фазового пространства вырожденных систем, в которых собственные частоты не зависят от переменных действия, существенно отличается от фазового пространства невырожденных систем [1,2]. В частности, в неавтономной системе с одной степенью свободы, частота которой не зависит от переменной действия, резонанс наблюдается во всем фазовом пространстве одновременно. При этом возникший при разрушении сепаратрис стохастический слой покрывает фазовое пространство в виде некоторой сети, в ячейках которой движение финитно. В результате образуется

стохастическая паутина – связанная сеть каналов конечной ширины, по которой может происходить неограниченный перенос частиц в радиальном направлении при любой, сколь угодно малой амплитуде воздействия. Обзор примеров и свойств таких структур можно найти, например, в [2]. Интересным является вопрос об изменении наблюдаемой картины при введении малого возмущения, переводящего систему в класс диссипативных. Ранее были проведены некоторые исследования, касающиеся влияния постоянной (линейной) диссипации [12].

Целью настоящей работы является исследование влияния нелинейной диссипации на структуры стохастической паутины, в частности, изучение закономерностей эволюции сосуществующих аттракторов при изменении уровня диссипации. Возмущение выбирается по типу классической модели теории нелинейных колебаний – осциллятора ван дер Поля, а варьируемым является параметр, отвечающий за уровень нелинейной диссипации.

1. Неавтономный линейный осциллятор с малым диссипативным возмущением «автоколебательного» типа

Классическим примером динамической системы, демонстрирующей стохастическую паутину, является линейный осциллятор с внешним импульсным воздействием, амплитуда которого нелинейным образом зависит от координаты осциллятора [1],

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{\omega_0 K}{T} \cos x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (1)$$

Стохастическая паутина образуется, если наблюдается резонанс внешнего воздействия и собственной частоты осциллятора, то есть параметр $q = 2\pi/(\omega_0 T)$ является целым. Фактически он определяет порядок поворотной симметрии, наблюдаемой на фазовом портрете. Если его значение принадлежит множеству 3, 4, 6, то поворотная симметрия сочетается с трансляционной, в результате образуется единая сепаратриса. Такой тип симметрии Г.М. Заславский называет симметрией кристаллического типа [1,2]. При других целых q точная трансляционная симметрия невозможна, однако сепаратрисы различных точек проходят близко друг от друга, в результате при их разрушении также образуется стохастическая паутина. Такие структуры принято называть квазикристаллическими. Фазовые портреты системы (1) (в стробоскопическом сечении на плоскости (x, y) , где $y = \dot{x}$), а также устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболических (седловых) неподвижных точек для обоих случаев представлены на рис. 1 при различных порядках резонанса q .

Введем в систему (1) нелинейную диссипацию, аналогично используемую в автоколебательной системе – генераторе ван дер Поля [13],

$$\ddot{x} + (\gamma - \mu x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{\omega_0 K}{T} \cos x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (2)$$

Здесь параметры γ и μ определяют соответственно уровень линейной (то есть не зависящей от значений переменных) и нелинейной диссипации. С физической точки зрения, наиболее интересным представляется исследование системы в области, отвечающей автоколебательному режиму в автономной системе, чему соответствуют

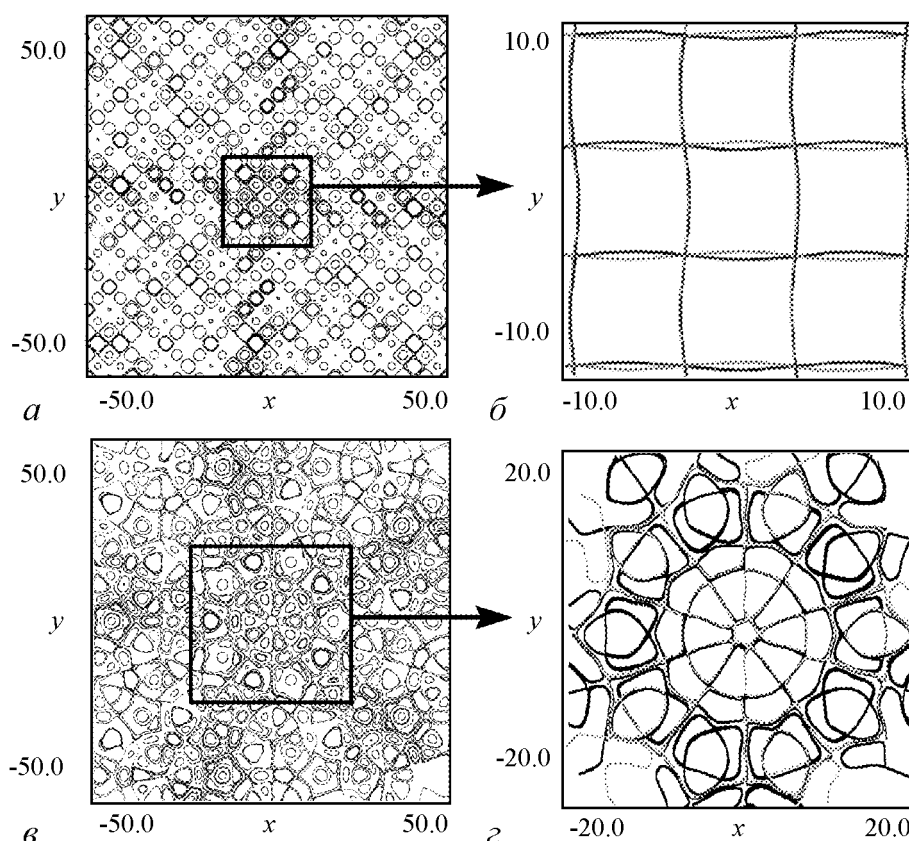


Рис. 1. Фазовые портреты системы (1) и соответствующие им устойчивые (черный цвет) и неустойчивые (серый цвет) многообразия при различных значениях параметра q : 4 (а, б), 5 (в, з). Амплитуда воздействия $K = 0.1$

отрицательные значения этих параметров. В настоящей работе возмущение предполагалось малым, поэтому использовались малые (порядка 10^{-3} – 10^{-5}) значения параметров γ и μ .

Далее будем исследовать устройство фазового пространства стробоскопического отображения, соответствующего системе (2), в котором в качестве переменных выбираются координата и скорость осциллятора перед очередным импульсом. Для исходной системы (1) такое отображение может быть получено аналитически. Для системы (2) точное аналитическое построение стробоскопического отображения невозможно, поэтому в настоящей работе оно вычислялось прямым численным интегрированием системы (2) в промежутке между импульсами.

На рис. 2 приведены фазовые портреты стробоскопического отображения при значении порядка резонанса $q = 5$ и постоянном значении параметра линейной диссипации. Видно, что при малых уровнях нелинейной диссипации (рис. 2, а) наблюдается довольно большое число аттракторов, являющихся неподвижными точками типа «фокус». При увеличении нелинейной диссипации устойчивые фокусы превращаются в узлы, а их количество уменьшается, поскольку они попарно сливаются с седловыми точками (рис. 2, б), а образовавшиеся в результате узлы исчезают через седло-узловую бифуркацию (рис. 2, в). Процесс эволюции аттракторов завершается образованием устойчивой инвариантной кривой вблизи начала координат (рис. 2, з).

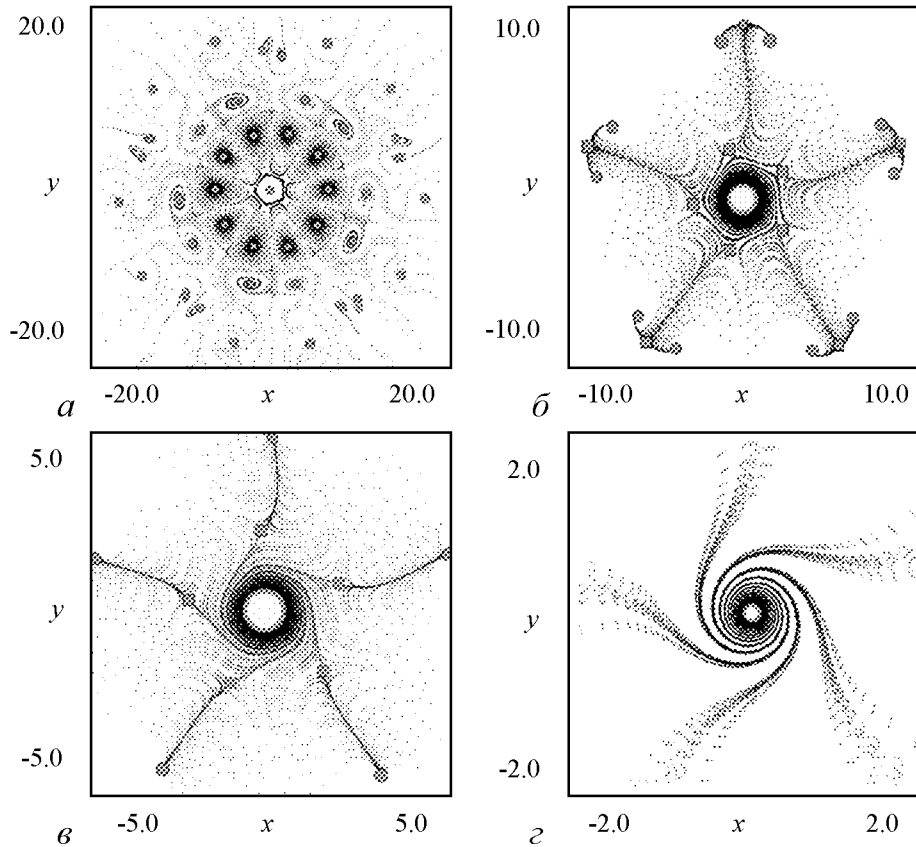


Рис. 2. Фазовые портреты системы (2) при $q = 5$, $K = 0.1$, $\gamma = -1 \cdot 10^{-4}$ и различных значениях параметра μ : $-5 \cdot 10^{-5}$ (а), $-5 \cdot 10^{-4}$ (б), $-2 \cdot 10^{-3}$ (в), $-5 \cdot 10^{-2}$ (г). Серыми кружками обозначены устойчивые неподвижные точки, квадратами – неустойчивые

При существенном значении нелинейной диссипации она остается единственным аттрактором в системе, что соответствует квазипериодической динамике.

Рождение инвариантной кривой иллюстрирует рис. 3, на котором представлены устойчивые и неустойчивые многообразия ближайших к началу координат седловых точек. Видно, что с увеличением параметра μ происходит нелокальная бифуркация: в некоторый момент устойчивые и неустойчивые многообразия седловых точек замыкаются, образуя гетероклинический цикл, после чего от него отделяется инвариантная кривая, на которую теперь и приходят неустойчивые многообразия седловых точек (рис. 3, б).

Для системы с симметрией кристаллического типа ($q = 3$) сценарий эволюции в целом совпадает с описанным выше (рис. 4), однако завершается процесс образованием не инвариантной кривой, а устойчивого фокуса в начале координат (рис. 4, г).

Предполагая, что наблюдаемое отличие является следствием некоторого вырождения системы, введем дополнительный параметр φ , характеризующий направление действия импульса,

$$\ddot{x} + (\gamma - \mu x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{\omega_0 K}{T} \cos(x + \varphi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (3)$$

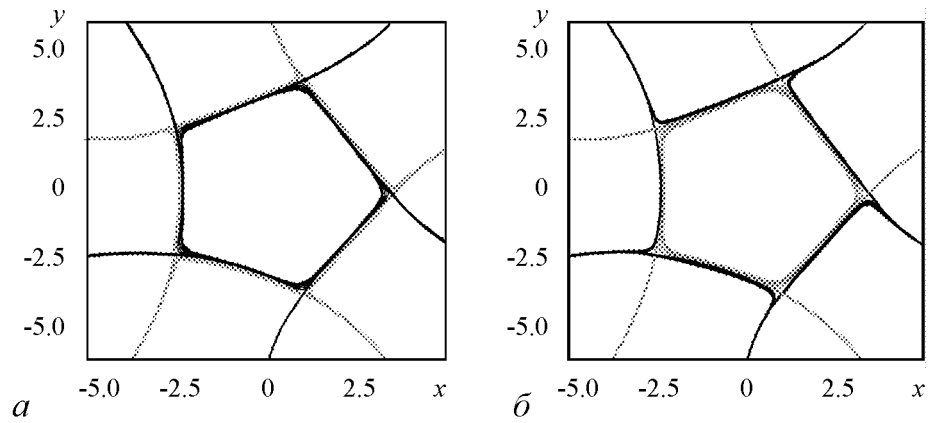


Рис. 3. Устойчивые (черный цвет) и неустойчивые (серый цвет) многообразия при $q = 5$, $K = 0.1$, $\gamma = -1 \cdot 10^{-4}$ и различных значениях параметра μ : $-1 \cdot 10^{-4}$ (а), $-2 \cdot 10^{-4}$ (б)

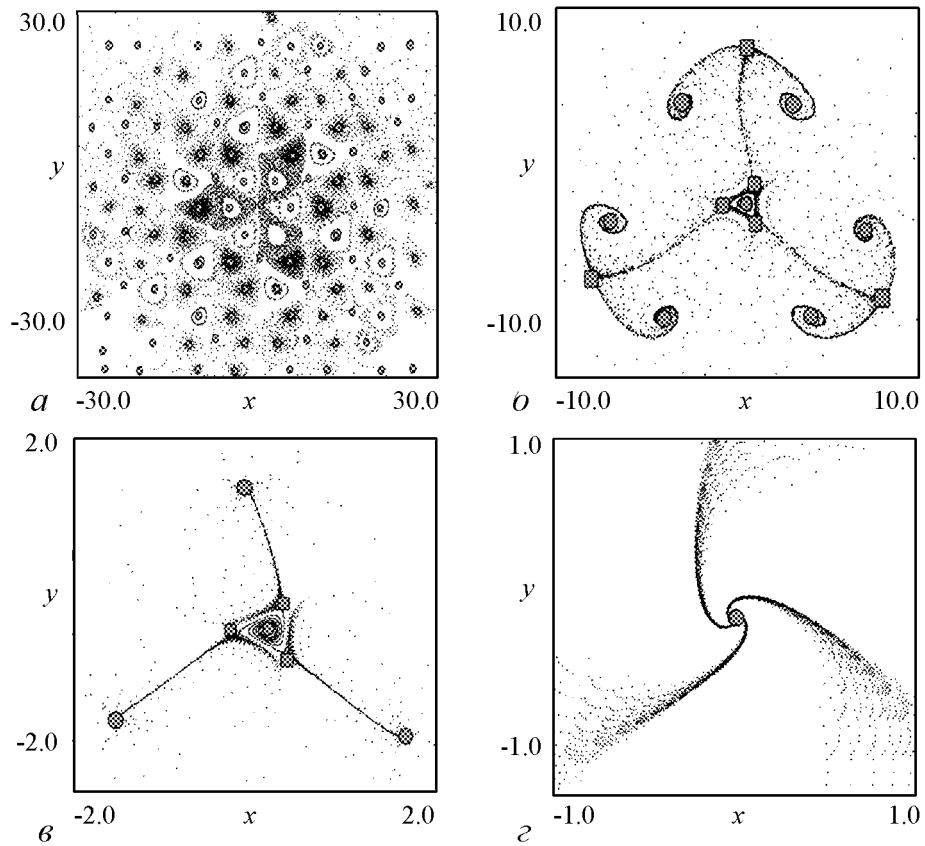


Рис. 4. Фазовые портреты системы (2) при $q = 3$, $K = 0.3$, $\gamma = -1 \cdot 10^{-3}$ и различных значениях параметра μ : $-1 \cdot 10^{-5}$ (а), $-5 \cdot 10^{-4}$ (б), $-5 \cdot 10^{-2}$ (в), $-5 \cdot 10^{-1}$ (г). Серыми кружками обозначены устойчивые неподвижные точки, квадратами – неустойчивые

Эволюцию аттракторов системы (3) в случае кристаллической симметрии ($q = 3$) и при значении параметра $\varphi = \pi/2$ иллюстрирует рис. 5. Видно, что в этом случае процесс эволюции аттракторов, как и на рис. 2, завершается образованием инвариантной кривой (рис. 5, *в*). Сценарий ее рождения (рис. 6) также аналогичен проиллюстрированному на рис. 3. Единственное отличие заключается в том, что в случае квазикристаллической симметрии все седловые точки являлись элементами одного цикла периода 5, здесь же они принадлежат к двум разным циклам периода 3.

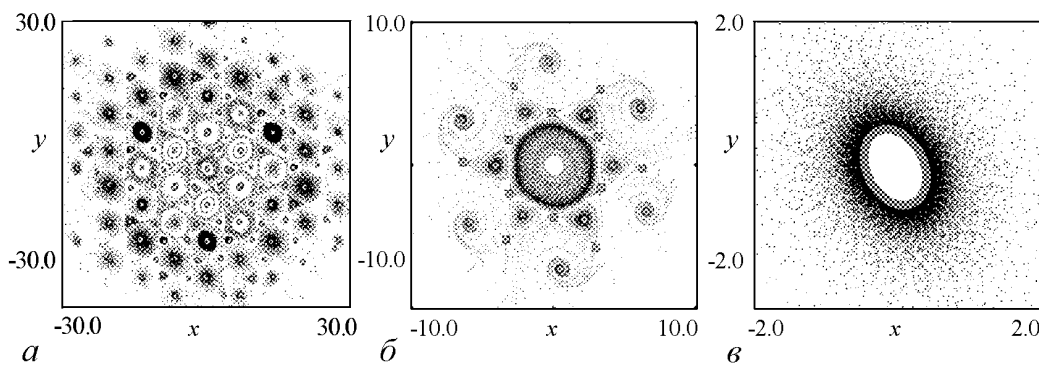


Рис. 5. Фазовые портреты системы (3) при $\varphi = \pi/2$, $q = 3$, $K = 0.3$, $\gamma = -1 \cdot 10^{-3}$ и различных значениях параметра μ : $-1 \cdot 10^{-5}$ (*а*), $-5 \cdot 10^{-2}$ (*б*), $-5 \cdot 10^{-1}$ (*в*). Серыми кружками обозначены устойчивые неподвижные точки, квадратами – неустойчивые

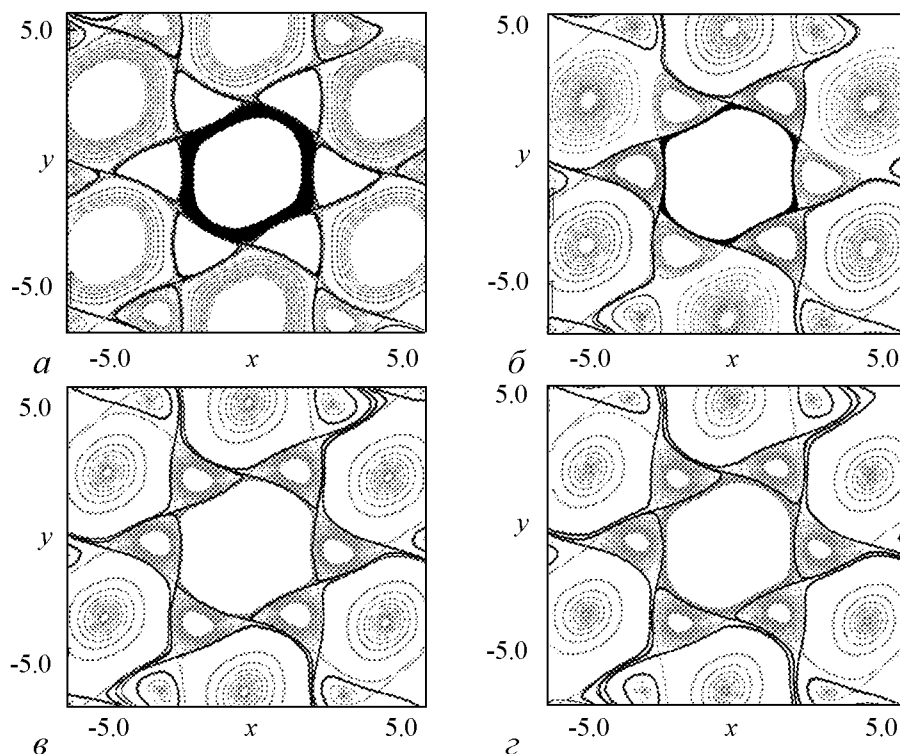


Рис. 6. Устойчивые (черный цвет) и неустойчивые (серый цвет) многообразия при $\varphi = \pi/2$, $q = 3$, $K = 0.3$, $\gamma = -1 \cdot 10^{-3}$ и различных значениях параметра μ : $-1 \cdot 10^{-4}$ (*а*), $-3 \cdot 10^{-4}$ (*б*), $-4 \cdot 10^{-4}$ (*в*), $-5 \cdot 10^{-4}$ (*г*)

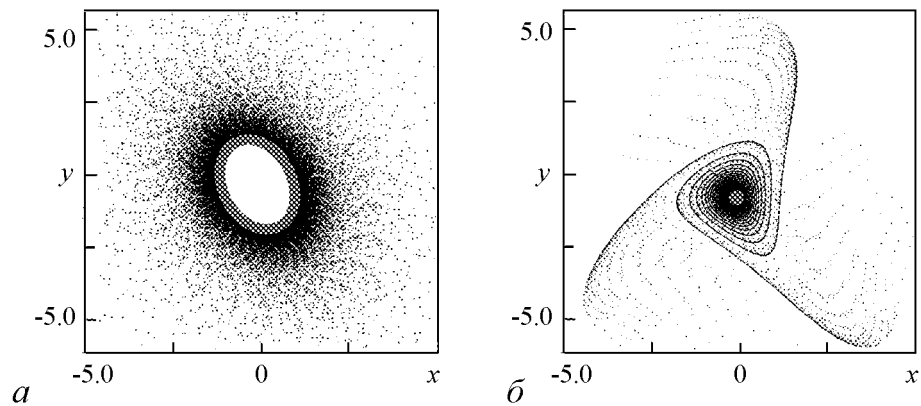


Рис. 7. Фазовые портреты системы (3) при $\mu = -5 \cdot 10^{-2}$, $q = 3$, $K = 0.3$, $\gamma = -1 \cdot 10^{-3}$ и различных значениях параметра φ : $\pi/2$ (а), 0 (б)

Интересно, что при плавном изменении параметра φ инвариантная кривая исчезает в результате бифуркации Неймарка–Сакера (рис. 7). Соответствующее значение параметра можно ориентировочно оценить численно, как $\varphi = \pi/1.35$.

Заключение

В работе рассматривается модель, представляющая собой автоколебательную версию генератора стохастической паутины. Исследовалось влияние диссипативного возмущения на картину стохастической паутины. Был выявлен основной бифуркационный сценарий эволюции аттракторов в стробоскопическом отображении при увеличении нелинейной диссипации. Он заключается в том, что сосуществующие аттракторы попарно сливаются с седловыми точками (бифуркация «вилка»), а образовавшиеся в результате узлы впоследствии исчезают в результате седло-узловой бифуркации. Завершается процесс, как правило, образованием инвариантной кривой через нелокальную бифуркацию. Также обнаружено, что в случае кристаллической симметрии третьего порядка при введении дополнительного параметра, характеризующего фазу нелинейной зависимости амплитуды импульсов от координаты, возможно исчезновение инвариантной кривой в результате бифуркации Неймарка–Сакера.

Выражаю слова благодарности научному руководителю, доценту, к.ф.-м.н. Алексею Владимировичу Савину за полезные консультации и важные комментарии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 12-02-31089.

Библиографический список

1. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Физматлит, 1983. 235 с.
2. Заславский Г.М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с.
3. Табор М. Хаос и неинтегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 320 с.

4. *Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A.* Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors //Physical Review E. 1996. Vol. 54, № 1. P. 71.
5. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* О природе явления буферности в слабо диссипативных системах //Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 146, № 3. С. 447.
6. *Martins L.C., Gallas J.A.C.* Multistability, phase diagrams and statistical properties of the kicked rotor: A map with many coexisting attractors. //Int. J. Bif. & Chaos. 2008. Vol. 18, № 6. P. 1705.
7. *Feudel U.* Complex dynamics in multistable systems //Int. J. Bif. & Chaos. 2008. 18, № 6. P. 1607.
8. *Blazejczyk-Okolewska B., Kapitaniak T.* Coexisting attractors of impact oscillator //Chaos, Solitons & Fractals. 1998. Vol. 9. P. 1439.
9. *Feudel U., Grebogi C.* Multistability and the control of complexity //Chaos. 1997. Vol. 7, № 4. P. 597.
10. *Feudel U., Grebogi C.* Why are chaotic attractors rare in multistable systems? //Phy. Rev. Lett. 2003. Vol. 91, № 13. 134102.
11. *Rech P., Beims M., Gallas J.* Basin size evolution between dissipative and conservative limits //Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71, № 1. 017202.
12. *Савин А.В., Савин Д.В.* Структура бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов слабо-диссипативного «отображения – паутины» // Нелинейный мир. 2010. Т. 8, № 2. С. 70.
13. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.

*Саратовский госуниверситет
им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 28.02.2013
После доработки 12.04.2013*

THE EFFECT OF WEAK NONLINEAR DISSIPATION ON THE STOCHASTIC WEB

E. V. Felk

The effect of a weak nonlinear dissipation on the structure of the system's phase space with stochastic web is investigated. The bifurcation scenario of attractor transformations with the increase of dissipation is revealed.

Keywords: Stochastic web, weakly dissipative systems, a conservative chaos.



Фельк Екатерина Викторовна – родилась в Саратове (1992). Окончила Медико-биологический лицей Саратова (2009) и поступила на факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета. В настоящее время студентка 4 курса. Научные интересы: сложная динамика слабо диссипативных систем. Принимала участие как докладчик в четырех научных конференциях (2011–2012). Имеет две публикации в сборниках тезисов докладов.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: felkekaterina@ya.ru